

21 世纪高等师范院校教材

大学物理学

下 册

主 编 范中和
编写人员 范中和 李树华 卢永智 鲍善惠
王 元 陈 玲 黄晓峰 隋 峰

陕西师范大学出版社

陕西师范大学教材建设基金资助出版

陕西师范大学教材建设基金资助出版

陕西师范大学教材建设基金资助出版

陕西师范大学教材建设基金资助出版

目 录

第 11 章 静电场	(1)
§ 11 - 1 电荷 库仑定律	(1)
§ 11 - 2 电场强度	(4)
§ 11 - 3 静电场中的高斯定理	(12)
§ 11 - 4 静电场的环路定理	(20)
§ 11 - 5 电势	(22)
§ 11 - 6 电场强度与电势梯度	(26)
思考题	(28)
习题	(31)
第 12 章 静电场中的导体和电介质	(36)
§ 12 - 1 静电场中的导体	(36)
§ 12 - 2 电容器的电容	(41)
§ 12 - 3 静电场中的电介质	(45)
§ 12 - 4 静电场的能量	(50)
思考题	(53)
习题	(54)
第 13 章 稳恒磁场	(58)
§ 13 - 1 恒定电流的基本概念	(58)
§ 13 - 2 磁场 磁感强度	(61)
§ 13 - 3 毕奥 - 萨伐尔定律	(63)
§ 13 - 4 磁场的高斯定理	(68)
§ 13 - 5 磁场的安培环路定理	(70)
§ 13 - 6 磁场对运动电荷的作用	(75)
§ 13 - 7 磁场对截流导线的作用	(81)
§ 13 - 8 磁介质中的磁场	(85)

思考题	(90)
习题	(91)
第 14 章 电磁感应	(96)
§ 14 - 1 电源及其电动势	(96)
§ 14 - 2 电磁感应定律	(99)
§ 14 - 3 动生电动势和感生电动势	(102)
§ 14 - 4 自感和互感	(110)
§ 14 - 5 磁场的能量	(115)
思考题	(117)
习题	(119)
第 15 章 麦克斯韦方程组和电磁波	(122)
§ 15 - 1 位移电流	(123)
§ 15 - 2 麦克斯韦方程组	(127)
§ 15 - 3 电磁振荡	(130)
§ 15 - 4 电磁波	(133)
思考题	(140)
习题	(140)
第 16 章 波动光学	(143)
§ 16 - 1 光的电磁理论	(144)
§ 16 - 2 光波的相干叠加	(146)
§ 16 - 3 分波阵面干涉	(150)
§ 16 - 4 分振幅干涉	(157)
§ 16 - 5 迈克尔孙干涉仪	(167)
§ 16 - 6 光的衍射	(169)
§ 16 - 7 夫琅禾费衍射	(171)
§ 16 - 8 衍射光栅	(178)
§ 16 - 9 X 射线的衍射	(183)
§ 16 - 10 光的偏振	(185)
思考题	(188)
习题	(191)
第 17 章 相对论基础	(196)
§ 17 - 1 狭义相对论产生的科学背景	(196)
§ 17 - 2 狭义相对论基本原理 洛伦兹变换	(201)

§ 17 - 3 狭义相对论的时空观	(208)
§ 17 - 4 狭义相对论质量、动量和能量	(215)
§ 17 - 5 广义相对论简介	(224)
思考题	(227)
习题	(228)
第 18 章 量子物理基础	(231)
§ 18 - 1 量子概念的诞生	(232)
§ 18 - 2 光的波粒二象性	(239)
§ 18 - 3 氢原子的玻尔理论	(249)
§ 18 - 4 实物粒子的波粒二象性	(257)
§ 18 - 5 不确定关系	(264)
§ 18 - 6 波函数	(270)
§ 18 - 7 薛定谔方程及其应用	(273)
§ 18 - 8 氢原子理论简介	(285)
§ 18 - 9 多电子原子中的电子分布	(291)
§ 18 - 10 激光	(295)
§ 18 - 11 超导电性	(301)
思考题	(308)
习题	(311)
问题与探究(二)	(314)
习题答案	(319)

第 11 章 静电场

电磁运动是物质的又一种基本运动形式. 电磁相互作用是自然界已知的四种基本相互作用之一,也是人们认识得比较深入的一种相互作用. 在日常生活和生产活动中,在对物质结构深入认识的过程中,都要涉及电磁运动. 因此,理解和掌握电磁运动的基本规律,在理论和实践上都有极其重要的意义.

一般来说,运动电荷将同时激发电场和磁场,电场和磁场是相互关联的. 但是,在某种情况下,例如,当我们所研究的电荷相对某一参考系静止时,电荷在这个静止参考系中就只激发电场,而无磁场. 这个电场就是本章所要讨论的静电场.

为了便于了解和掌握电磁运动的规律,我们先讨论电磁运动中最简单的情況——真空中相对于观察者静止的电荷在其周围所激发的电场(静电场)的性质. 从静电场的三条基本的实验规律:电荷守恒定律,库仑定律和电场力的叠加原理出发,从电荷在静电场中受力和电场力对电荷做功两个方面,引入电场强度和电势这两个描述电场性质的基本物理量,最后讨论电场强度和电势两者之间的关系.

§ 11 - 1 电荷 库仑定律

电荷是电学中一个最基本的概念. 现今人们认识到电荷的特点是:(1)自然界中只存在两种性质不同的电荷,称为正电荷和负电荷;(2)电荷是量子化的;(3)存在一种“电荷对称性”,即对于每种带正电的粒子必须存在与之对应的、带等量负电荷的另一种粒子;(4)电荷守恒.

一、电荷的量子化

人们经过长期的实验探索已经知道,物质由分子和原子组成,原子又由一个原子核和一定数量绕核运动的电子组成,而原子核一般都是由带正电的质子和不带电的中子组成. 在正常情况下,核内所带正电的总和等于核外电子所带负电的总和,所以物体呈现电中性. 但在一定条件下,比如不同材料的相互摩擦,会破坏物体的电中性状态,使一物体失去电子而带上正电,另一物体获得电子而带上负电. 这时我们说物体带了电荷. 物体所带电荷的总量叫做电量,常用 Q 或 q 表示,其单位为库仑(C).

密立根油滴实验和无数其他的实验表明,在自然界中,任何带电体的电量都只能是某一基本电荷 e 的整数倍: $q = ne$, 即 n 只能取正整数. 显然,如果带电体的电量发生变化,它也只能按电子电量的整数倍变化,而不能任意变化,电荷的这一特点称为电荷的量子化. 这个基本电荷就是一个电子所带的电量,叫做电子电量,记作 $-e$. 质子的电量与电子电量等值异号,所以是 $+e$. 1998 年,国际计量委员会的推荐值为

$$e = 1.602176462 \times 10^{-19} \text{C}$$

计算中,常取近似值 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$.

近代物理从理论上预言有一种电量为 $\pm \frac{1}{3}e$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$ 的基本粒子(称为夸克)存在,并认为质子和中子等许多粒子是由夸克组成. 但迄今为止的研究表明,夸克具有“渐近自由”性质,或称“夸克禁闭”(quark confinement). 即使发现了带分数电荷的粒子,也不破坏电荷的量子性,仅仅是将现在所能测到的最小的一份电量变得更小而已.

二、电荷守恒定律

两种材料的物体互相摩擦后之所以会带电,是因为通过摩擦,每个物体中都有一些电子获得能量脱离了原子束缚而转移到另一个物体上去. 但是,不同材料的物体彼此向对方转移的电子数目往往不相等,所以从总体上讲,一个物体失去了电子而带正电,另一个物体得到了电子而带负电,这就是摩擦起电现象. 当我们把带负电的物体移近导体时,导体中的自由电子在负电荷的排斥力作用下向远离带电体一端移动,结果导体的这一端因电子过少而带正电,另一端则因电子过多而带负电,这就是静电感应现象. 由此可见,摩擦起电和静电感应现象中的起电过程,都是电荷从一个物体转移到另一个物体,或从物体的一部分转移到另一部分的过程.

大量的事实表明:电荷既不能被创造,也不能被消灭,只能从一个物体转移到另一个物体,或从物体的一部分转移到另一部分. 也就是说,在一个与外界没有电荷交换的系统内,正负电荷的代数和在任何物理过程中都保持不变,这称为电荷守恒定律.

近代科学实验证明,电荷守恒定律不仅在一切宏观过程中成立,而且被一切微观过程(例如核反应和基本粒子过程)所普遍遵守. 电荷是在一切相互作用下都守恒的一个守恒量,电荷守恒定律是自然界中普遍的基本定律之一.

三、库仑定律

1875 年,法国科学家库仑通过实验,总结出两个静止点电荷之间的相互作

用的定量规律——库仑定律。这里，点电荷概念是一个理想模型，当带电体的大小和带电体间的距离相比小很多时，我们把这样的带电体看作是点电荷。点电荷与力学中的质点相似，是从实际的带电体中抽象出来的，只具有相对的意义，它本身不一定是很小的带电体。对于不能当作点电荷处理的带电体，我们可以把它当作多个点电荷所组成的体系来处理。

库仑定律的内容是：在真空中，两个静止的点电荷之间的相互作用力的大小与两电荷电量的乘积成正比，与两电荷之间距离的平方成反比；作用力的方向沿着两电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。



图 11 - 1 库仑定律

如图 11 - 1 所示， e_{12} 表示从点电荷 q_1 指向点电荷 q_2 的单位矢量，用 r 表示两电荷之间的距离，于是 q_1 对 q_2 的作用力为

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_{12} \quad (11 - 1)$$

式中 ϵ_0 是真空电容率，1998 年国际科技数据委员会推荐的最新值为

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$

计算中，常取近似值 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

当 q_1 与 q_2 同号时，两者乘积为正， F_{12} 与 e_{12} 方向相同，这是斥力；当 q_1 与 q_2 异号时，两者乘积为负， F_{12} 与 e_{12} 反向，这是引力。静止点电荷之间的作用力又称库仑力。同理 q_2 对 q_1 的作用力为

$$F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_{21} \quad (11 - 2)$$

显然

$$F_{12} = -F_{21}$$

此表明，两个静止点电荷之间的库仑力遵守牛顿第三定律。

四、电场力的叠加

库仑定律只讨论两个点电荷间的作用力，当考虑两个以上的静止点电荷的作用时，还需要另一个实验事实：两个点电荷之间的作用力并不因第三个点电荷的存在而有所改变。因此，两个以上的点电荷对一个点电荷的作用力，等于各个点电荷单独存在时对该点电荷作用力的矢量和。这个结论称为电场力的叠加原理。设有 n 个静止的点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n ，以 F_1, F_2, \dots, F_n 分别表示它们单独存在时对另一个静止的点电荷 q 的作用力，则由电场力的叠加原理可知， q 受到

的总电场力应为

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i \quad (11-3)$$

§ 11-2 电场强度

一、静电场

库仑定律揭示了电荷之间相互作用的规律,提供了定量计算静电力的基本方法.但是,并没有告诉我们电荷之间的相互作用是怎样传递的.力学中我们熟知的摩擦力、弹力都是接触力,但两个电荷间有力的作用,而又没有直接接触,那么,电荷之间存在的静电力是如何传递的呢?

既然电荷 q_1 处在 q_2 周围任一点都要受静电力的作用,说明 q_2 周围整个空间存在着一种特殊的物质,它虽然不像实物那样由电子、质子和中子构成,但确实是一种客观实在.同样,电荷 q_1 在周围空间也存在这种特殊的物质,所以它们的作用才是相互的.我们把电荷周围存在的这种特殊的物质叫做电荷所激发的电场.因此,可以把电荷之间的相互作用过程归结为:电荷在周围空间激发电场,电场对位于其中的电荷施以作用力.若将两个电荷间的相互作用概括为一个图式,即为



可见,两个电荷之间的静电力实际上是每个电荷的电场作用在另一个电荷上的电场力.

近代物理的理论和实验都证明,场的观点是正确的,变化的电磁场是以有限速度(光速)传播的,并且可以脱离场源而独立存在.电磁场与实物一样也具有能量、质量和动量.场是物质存在的一种形式,它既具有实物的一些基本属性,但与分子、原子等实物相比,也有其特殊之处,分子和原子等实物不具有空间叠加性,而场则具有空间叠加性,所以,我们称场为特殊的物质.

相对于观察者静止的电荷所激发的电场叫做静电场.从静电场的对外表现来看,它主要有以下几个方面的特性:

- (1) 电场对处在其中的电荷具有作用力;
- (2) 电场对在其中运动的电荷做功;
- (3) 电场对置于其中的导体和电介质将产生影响.

二、电场强度

对于电场来说,既看不见又摸不着,我们如何描述电场本身的物理性质呢?很显然,必须从电场所表现出的外在特性方面来描述电场.

为了研究电场中各点的性质,引入试验电荷 q_0 ,它应满足两个条件:(1)它的电量必须足够小,以保证由于它的置入不引起原有电荷的重新分布;(2)它的线度必须小到可以被看作点电荷,以便确定电场中每点的性质.

实验表明,将试验电荷引入电场中后,它在不同位置上所受作用力 F 的大小和方向一般是不同的,并且 F 的大小与试验电荷的电量 q_0 成正比, F 的方向与试验电荷 q_0 的符号有关.但是 F 与 q_0 的比值 $\frac{F}{q_0}$,无论其大小和方向都与 q_0 无关,只与 q_0 所在处的电场状况有关.也就是说,在电场中某一确定点,试验电荷 q_0 所受的电场力与其电量的比值 $\frac{F}{q_0}$,反映了电场本身在该点的物理性质,而与所选的试验电荷无关.对于电场中的不同点,这一比值 $\frac{F}{q_0}$ 一般不同,恰恰反映了电场固有属性的空间分布状况.因此,可以用比值 $\frac{F}{q_0}$ 来描述电场的性质,比值 $\frac{F}{q_0}$ 就称为电场强度,简称场强,用 E 表示.

即

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (11-4)$$

电场中某处的电场强度是一个矢量,其大小等于单位电荷在该处所受到的电场力的大小,其方向与正电荷在该处所受到的电场力的方向一致.

在国际单位制中,电场强度的单位是牛顿/库仑(N/C),或伏特每米(V/m),而且 V/m 较 N/C 使用更普遍.

在已知电场强度分布的电场中,电荷 q 在电场中某处所受的电场力 F ,可由式(11-4)给出

$$F = qE$$

三、点电荷电场的电场强度

由库仑定律和电场强度的定义,可求得真空中点电荷周围某处的电场强度.

以 Q 所在位置为原点,在距离为 r 的场点 P ,放置一试验电荷 q_0 ,根据库仑定律 q_0 受到的电场力

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r^2} e_r$$

由电场强度的定义,可得点电荷的场强公式

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r \quad (11-5)$$

式中 e_r 为场点 P 相对于场源 Q 的单位矢量. 由上式可见, 点电荷电场有两个显著特点: (1) r 相同的点, 即在同一球面上的各点, E 的大小相等; (2) 各点场强的方向均沿径向. 对于正电荷 ($Q > 0$), E 与 r 方向相同, E 沿径向外指; 对于负电荷 ($Q < 0$), E 与 r 方向相反, E 沿径向指向球心, 如图 11-2 所示. 可见点电荷电场具有球对称性.

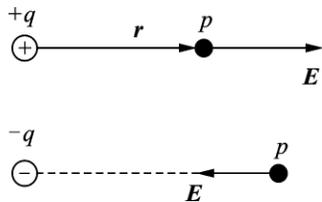


图 11-2 点电荷的电场

四、场强叠加原理

在多个点电荷激发的电场中, 如何求场强呢? 根据力的叠加原理, 在 n 个点电荷的电场中, 试验电荷受到各个点电荷对它的作用力为

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i$$

根据场强的定义, 若 n 个点电荷分别为 q_1, q_2, \dots, q_n , 则

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n E_i$$

式中 $\frac{F_i}{q_0} = E_i$ 是第 i 个点电荷单独存在时, 在该点产生的场强. 上式可写为

$$E = \sum_{i=1}^n E_i \quad (11-6)$$

由此可见, 在多个点电荷所产生的电场中, 某点的总场强等于各个点电荷单独存在时在该点产生的场强的矢量和, 此称为场强叠加原理.

在某些问题中, 可以把电荷看成是连续分布在带电体上. 对于连续带电体, 怎样应用场强叠加原理求其场强分布呢? 如图 11-3 所示, 将带电体分割成无穷多微小的带电元, 任意体积元 dV 所带的电量为 dq , dq 称为电荷元. 将每个电荷元 dq 看作一个点电荷, 则由式(11-5)可得电荷元 dq 在场点 P 所产生电场的场强为

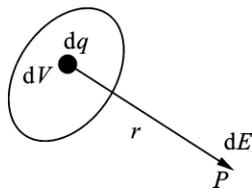


图 11-3 电荷元的场强

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

式中 r 是从电荷元 dq 到场点 P 的距离, e_r 是 r 方向的单位矢量. 根据场强叠加原理(11-6)式可得 P 点的总场强

$$E = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

对于电荷连续分布的带电体 $dq = \rho dV$ ρ 为电荷体密度, dV 为电荷元 dq 的体积元. 对于电荷连续分布的带电面 $dq = \sigma dS$ σ 为电荷面密度, dS 为电荷元 dq 的面积元. 对于电荷连续分布的带电线 $dq = \lambda dl$ λ 为电荷线密度, dl 为电荷元 dq 的线元.

五、场强的计算

根据场强叠加原理, 具体计算多个点电荷体系或电荷连续分布的带电体场强时, 各个点电荷或电荷元在场点产生的场强 E_i 或 dE 的大小和方向一般不同, 不便于进行矢量加法或矢量积分运算. 在处理具体问题时, 先选取适当的坐标系, 将 E_i 或 dE 分解为各个坐标分量, 以便将矢量运算变为简单的标量运算, 求出总场强的各坐标分量, 然后再求总场强 E . 在三维直角坐标系 $Oxyz$ 中, 对多个点电荷体系, 电场强度可表示为

$$E = E_x i + E_y j + E_z k$$

$$E_x = \sum E_{ix}, E_y = \sum E_{iy}, E_z = \sum E_{iz}$$

对于连续分布的带电体, 有

$$E_x = \int dE_x, E_y = \int dE_y, E_z = \int dE_z$$

这实际上是场强叠加原理的分量表示形式. 在有些问题中, 电荷的分布具有某种对称性, 这种对称性将影响场强的分布, 往往使场强在某些方向互相抵消. 于是, 可根据对称性直接判断在这些方向场强分量为零, 从而减少不必要的计算.

例 11-1 求电偶极子的延长线和中垂线上的场强. 一对等量异号, 相距为 l 的点电荷, 当从两点电荷连线的中点到场点的距离 r 远大于 l 时, 这样的二点电荷体系叫做电偶极子.

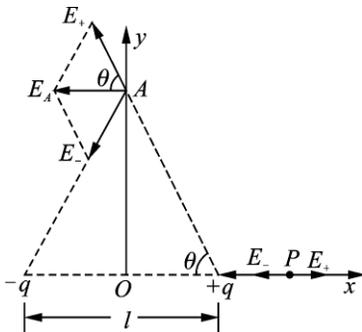


图 11-4 电偶极子的场强

解 如图 11-4 所示,取电偶极子中点为原点 O,沿极轴延长线为 Ox 轴,建立坐标系(Oxy).

(1)电偶极子延长线上的场强 场点 P 在 Ox 轴上.根据点电荷的场强公式,正、负点电荷在 P 点的场强分别用 E_+ 和 E_- 表示,则

$$\begin{aligned} E_+ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(x - \frac{l}{2}\right)^2} \\ E_- &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(x + \frac{l}{2}\right)^2} \\ E_p &= E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2}\right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2xl}{\left(x^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \end{aligned}$$

当 $x \gg l$ 时 $x^2 - \frac{l^2}{4} \approx x^2$. 于是

$$E_p = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0 x^3}$$

引入一个物理量 $p = ql$,叫做电偶极矩, p 的方向由 $-q$ 指向 $+q$,则电偶极子在延长线上的场强可表示为

$$E_p = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 x^3} \quad (11-8)$$

(2)电偶极子中垂线上的场强 如图 11-4 所示,中垂线上任一点 A 到原点的距离为 r ,电荷 $+q$ 和 $-q$ 在 A 点的场强大小相等,即

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}$$

A 点场强的分量大小为

$$\begin{cases} E_x = E_{+x} + E_{-x} = 2E_+ \cos\theta \\ E_y = E_{+y} + E_{-y} = 0 \end{cases}$$

其中

$$\cos\theta = \frac{\frac{l}{2}}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

则 A 点的场强大小为

$$E_A = 2E_+ \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

当 $r \gg l$ 时, $r^2 + \frac{l^2}{4} \approx r^2$, 于是电偶极子中垂线上任一点 A 的场强可表示为

$$E_A = -\frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{i} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (11-9)$$

例 11-2 设均匀带电圆环带电量为 q , 半径为 R , 求圆环轴线上一点 P 的电场强度.

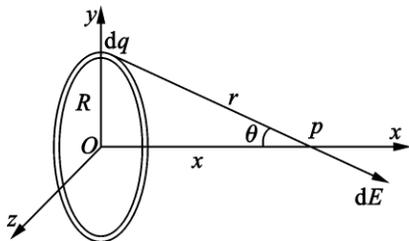


图 11-5 圆环轴线上的场强

解 设圆环在如图 11-5 所示的 yz 平面上, 坐标原点与环心相重合, 点 P 与环心 O 的距离为 x . 由题意知圆环上的电荷是均匀分布的, 故其电荷线密度 λ 为一常量, 且 $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$. 在环上取线段元 dl , 其电荷元 $dq = \lambda dl$. 此电荷元对 P 处激起的电场强度为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \mathbf{e}_r$$

由于电荷分布的对称性, 圆环上各电荷元对点 P 处激起的电场强度 dE 的分布也具有对称性. 由图可见, dE 在垂直于 x 轴方向上的分量 dE_{\perp} 将相互抵消, 即 $\int dE_{\perp} = 0$; 但 dE 沿 x 轴的分量 dE_x 由于都具有相同的方向而互相增强. 由图可知, dE 沿 x 轴的分量 $dE_x = dE \cos\theta$. 对这些分量求积分, 有

$$E = \int_1 dE_x = \int_1 dE \cos\theta$$

因为

$$dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dl$$

于是

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl$$

则

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

上式表明,均匀带电圆环对轴线上任意点处的电场强度,是该点距环心 O 的距离 x 的函数,即 $E = E(x)$. 下面对几个特殊点处的情况作一讨论.

(1) 若 $x \gg R$, 则 $(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \approx x^3$, 这时有

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}$$

即在远离圆环的地方,可以把带电圆环看成为点电荷. 这正与我们在前面对点电荷的论述相一致.

(2) 若 $x \approx 0$, $E \approx 0$, 这表明环心处的电场强度为零.

(3) 由 $\frac{dE}{dx} = 0$ 可求得电场强度极大的位置, 故有

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0$$

得

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

这表明,圆环轴线上具有最大电场强度的位置,位于原点 O 两侧的 $+\frac{\sqrt{2}}{2} R$ 和

$-\frac{\sqrt{2}}{2} R$ 处.

例 11 - 3 求均匀带电薄圆盘轴线上的场强分布.

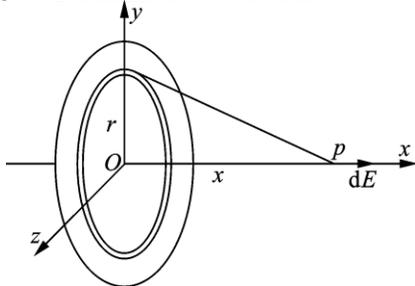


图 11 - 6 均匀带电薄圆盘轴线上的场强分布

解 设均匀带电薄圆盘带电量为 q , 半径为 R . 将圆盘分割为许多同心环形窄带, 当每个窄带宽度很小时, 可视为细圆环. 整个带电圆盘在轴线上一点 P 所产生的总场强, 可以看作无限多个窄圆环在该点产生的场强的叠加. 由于每个窄圆环在 P 点产生的场强方向相同, 均沿轴线方向. 所以总场强沿轴线方向.

如图 11-6 所示, 以圆环中心为原点, 取圆盘所在平面为 yz 平面, Ox 轴沿圆盘轴线. 取半径为 r 、宽度为 dr 的任意环形窄带, 该窄带所带的电量为 $dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r dr$, 在 P 点产生的场强为 dE , 由例 11-2 可知, dE 在 x 方向的分量为

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{xdq}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{xrdr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

积分可得

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{xrdr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]$$

其中 $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ 为电荷面密度. 场强的方向沿轴向, 当 $\sigma > 0$ 时, 沿轴向远离圆心; 当 $\sigma < 0$ 时, 沿轴向且指向圆心.

讨论: (1) 当 $x \gg R$ 时, $\left[1 + \left(\frac{R}{x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{x} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{x} \right)^4 - \dots$

略去 $\left(\frac{R}{x} \right)^4$ 以上的项, 得

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

可见, 上式与点电荷场强公式一致. 只要 $\frac{R}{x}$ 足够小, 就可足够精确地把带电圆盘看作点电荷. 这说明, 带电体能否被看作点电荷, 不在于本身的绝对大小, 而在于其线度与它到场点的距离相比是否足够小.

(2) 当 $R \gg x$ 时, $\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \approx 0$, 带电圆盘相对于 P 点可视为无限大带电平面. 则

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

这时 E_x 与场点 P 到无限大带电平面的距离 x 无关, E 的方向沿无限大带电平面的法线方向, 这表明, 无限大均匀带电平面周围空间的电场是匀强电场.

§ 11 - 3 静电场中的高斯定理

一、电场线

为了形象地描述电场在空间的分布,引入电场线的概念. 电场线是按照下述规定在电场中画出的假想曲线:

(1) 曲线上每一点的切线方向表示该点场强的方向;

(2) 曲线的疏密表示场强的大小. 为了表示电场中某点场强的大小,设想通过该点垂直于电场方向的面积元 dS_{\perp} , 则通过此面积元画出 dN 条电场线, 使得

$$E = \frac{dN}{dS_{\perp}}$$

这就是说, 电场中某点电场强度的大小等于该点处的电场线数密度(该点附近垂直电场方向的单位面积所通过的电场线条数).

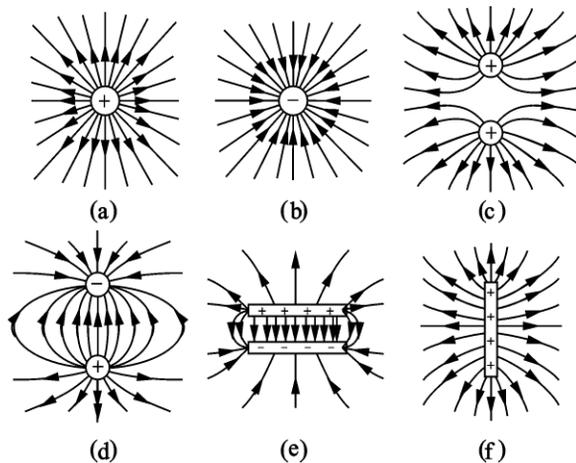


图 11 - 7 常见电场的电场线图

图 11 - 7 画出了几种常见电场的电场线图. 由图所表示的电场线分布情形, 可以看出相应电场的分布情况. 按上述严格规定所画出的静电场的电场线, 必然具有如下性质:

- (1) 电场线起自正电荷, 终止于负电荷或无限远处, 在无电荷处不中断;
- (2) 两条电场线不相交;
- (3) 电场线不形成闭合曲线.

电场线是我们引入电场中的一些假想的曲线, 其目的是为了直观地描述电场的一些性质. 所以, 电场线不是客观实在. 电场线的性质, 是我们规定了电

场线的画法之后才具有的,它是电场本身性质的一种几何化的反映.

二、电通量

通量是描述矢量场性质的一个物理量.现在从电场线的概念出发引入电场强度通量的概念.以 dS 表示电场中某一面积元,通过此面积元的电场线条数,定义为通过该面积元的电场强度通量,通常以 $d\Phi_e$ 表示.

设在匀强电场中取一个平面 S ,并使 S 与电场强度方向垂直,如图 11-8 (a) 则

$$\Phi_e = ES$$

如果平面 S 与匀强电场的方向不垂直,如图 11-8 (b),为了同时表示面积 S 的大小和方向,我们引入面积矢量 S ,规定其大小为 S ,其方向用法向单位矢量 e_n 表示,则

$$S = Se_n$$

因此,通过 S 面的电场强度通量为

$$\Phi_e = ES\cos\theta = E \cdot S \quad (11-10)$$

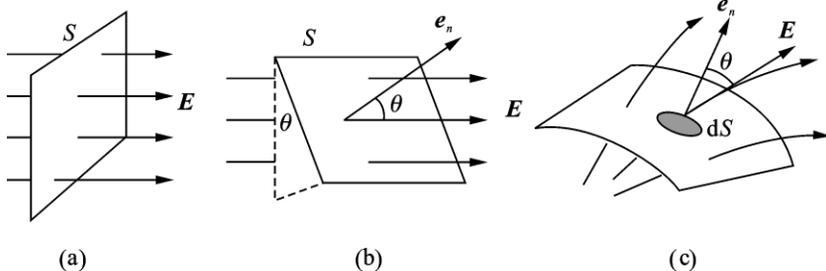


图 11-8 电场强度通量的计算

在非匀强电场中,若 S 是任意曲面,如图 11-8(c)所示,由式(11-10)可得通过面积元 dS 的电场强度通量为

$$d\Phi_e = E \cdot dS$$

由此式所决定的电通量 $d\Phi_e$ 是代数量,其正、负取决于场强 E 与矢量面积元 dS 的夹角 θ .

当 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 时 $d\Phi_e > 0$; 当 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ 时 $d\Phi_e < 0$.

要求出通过任意不闭合曲面 S 的电通量,可将曲面 S 分割成许多小面积元,先计算出通过每一小面积元的电通量,积分可得通过整个 S 面的电场强度通量为

$$\Phi_e = \int_S E \cdot dS \quad (11-11)$$

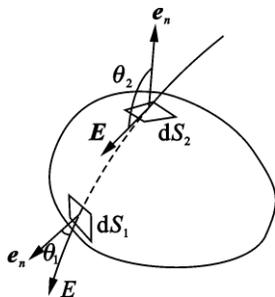
式中“ \int_S ”表示对面积 S 积分. 上式表明, 通过任一有限曲面 S 的电通量, 等于电场强度 E 在整个曲面上的一个面积分.

如果 S 是闭合曲面, 通过闭合曲面 S 的电场强度通量可表示为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (11-12)$$

积分符号“ \oint_S ”表示对整个闭合曲面进行积分.

对于闭合曲面, 由于它把整个空间划分成内、外两部分, 所以我们常规定: 法向单位矢量 e_n 的正方向为垂直于曲面, 指向闭合曲面的外侧. 式(11-12)中, 各面积元的法向单位矢量 e_n 的正方向均为外法线方向. 因此, 若电场线由里向外穿出, 其电场强度通量为正; 若电场线由外向里穿入, 其电场强度通量为负. 如图 11-9 所示, 电场线从 dS_1 处穿出, $d\Phi_e$ 为



正; 电场线从 dS_2 处穿入, $d\Phi_e$ 为负. 由此可知, 通过整个闭合曲面的电场强度通量, 等于各个面积元电场强度通量的代数和, 电场强度通量 $\Phi_e > 0$, 说明净穿出闭合曲面的电场线条数为 Φ_e ; 电场强度通量 $\Phi_e < 0$, 说明净穿入闭合曲面的电场线条数为 $|\Phi_e|$.

三、高斯定理

高斯定理是关于任意闭合曲面的电场强度通量与闭合曲面内净余电荷关系的重要定理, 它深刻地反映了电场和场源的内在联系, 揭示了静电场的性质, 是静电场的基本场方程之一.

静电场的高斯定理可以表述为: 静电场中通过任意闭合曲面 S 的电场强度通量 Φ_e 等于该曲面内所包围电荷的代数和除以 ϵ_0 , 与闭合曲面外的电荷无关, 即

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i \quad (11-13)$$

这里 S 通常是一个假想的闭合曲面, 习惯上叫做高斯面.

静电场的高斯定理是反映静电场性质的普遍原理, 它可以由库仑定律和场强叠加原理导出. 下面我们从特殊到一般, 分几步来证明静电场的高斯定理.

(1) 包围点电荷 q 的同心球面 S 的电通量等于 $\frac{q}{\epsilon_0}$.

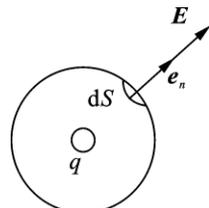


图 11-10 推导高斯定理用图

以点电荷为中心作半径为 r 的球面高斯面,如图 11-10 所示. 根据库仑定律,在球面上各点场强大小相等,方向沿半径向外呈辐射状. 在球面上任意取一面积元 dS ,其外法向单位矢量 e_n 沿半径方向向外,即 e_n 与 E 之间的夹角 $\theta=0$,所以通过 dS 的电场强度通量为

$$d\Phi_e = E \cdot dS = EdS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS$$

通过整个闭合球面的电场强度通量为

$$\Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(2) 包围点电荷 q 的任意闭合曲面 S 的电通量

都等于 $\frac{q}{\epsilon_0}$.

设想有一个任意闭合曲面 S 包围点电荷 q ,如图 11-11 所示. 为了求通过 S 面的电场强度通量,以 q 所在处为球心,作辅助球面 S' ,由(1)的讨论可知,通过 S' 面的电场强度通量为 $\frac{q}{\epsilon_0}$,根据电场线的性质,通过 S' 的电场线必穿过 S 面. 所以

$$\oint_S E \cdot dS = \oint_{S'} E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(3) 多个点电荷体系的电场中,通过任意闭合曲面的电通量. 对于多个点电荷 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_n$ 组成的电荷系来说,根据单个点电荷电场的情况可知

$$\Phi_{e1} = \frac{q_1}{\epsilon_0}, \Phi_{e2} = \frac{q_2}{\epsilon_0}, \dots, \Phi_{ei} = \frac{q_i}{\epsilon_0}, \dots$$

$$\Phi_e = \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \dots + \Phi_{ei} + \dots + \Phi_{en} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

由此可以得出,通过整个闭合面 S 的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

(4) 不包围点电荷的任意闭合面 S 的电通量恒为零.

如图 11-12 所示,当点电荷在闭合面之外时,由于单个点电荷产生的电场线是辐射状的直线,不难证明 $\oint_S E \cdot dS = 0$

从电场线的角度看,穿入 S_1 面的电场线数与穿出 S_2 面电场线数相等,所以穿过整个闭合高斯面的电场强度通量为零.

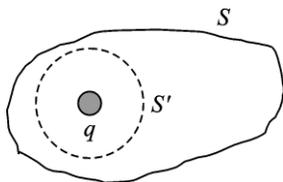


图 11-11 点电荷在任意闭合曲面内电场强度通量

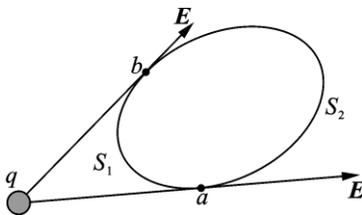


图 11 - 12 闭合面内不包围电荷

关于高斯定理,我们作如下说明:

(1)高斯定理是静电场的基本定理之一.高斯定理和库仑定律可以互相推导,都可以作为静电学的基础.从这一点来看它们是等价的.但是,对于运动电荷产生的电场以及迅速变化的电磁场来说,库仑定律不再成立,高斯定理却仍然有效,所以高斯定理比库仑定律应用更广泛,意义更深刻.

(2)通过闭合曲面的总电场强度通量只与闭合面所包围的净电荷有关,也就是说,总电场强度通量与闭合面内的电荷如何分布无关,与闭合面的形状无关,与闭合面外的电荷无关.

(3)求电通量时所涉及到的电场强度,是闭合面上各点的场强,它是由闭合面内外所有电荷共同产生的,它与闭合面内外所有电荷以及电荷的分布都密切相关.

四、应用高斯定理求场强

静电场高斯定理的重要意义在于,它是静电场的两个基本定理之一,它与静电场的环路定理结合起来,可以完整地描述静电场.

高斯定理和库仑定律用不同的形式表示出电场与场源电荷关系的同一客观规律,但它们在应用上有所不同.当电荷分布具有某种对称性时,适当选取高斯面,也可用高斯定理求出这种电荷系统的电场强度分布,而且,这种方法往往比用库仑定律和场强叠加原理要简便得多.应用高斯定理求场强分布,关键在于根据电荷分布的对称性分析场强分布的对称性,巧妙地选取合适形状的高斯面,以便使积分 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 中的 \mathbf{E} 能以标量形式从积分号内提出来,再利用高斯定理计算出场强的数值.

1. 均匀带电球壳内、外的场强

设球壳的半径为 R ,带的总电量为 Q .由于电荷均匀分布在球壳上,电荷的分布具有球对称性,因此,电场也应具有以球壳的球心为中心的球对称性.也就是说,同一球面上各点的场强 E 的大小应处处相等,场强 E 的方向必沿该点球面的法线方向,据此可以选取与带电球壳同心的球面作为高斯面.

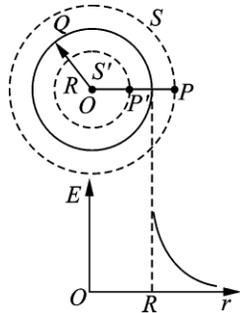
如图 11-13 所示 $r > R$ 时,取球壳外一点 P,到球心的距离为 r ,以 O 点为中心,以 r 为半径作球面高斯面 S, P 点为高斯面上一点.根据电场强度通量的定义,有

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

高斯面 S 内所围的电荷 $\sum_i q_i = Q$

根据高斯定理,有 $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$,考虑到场强的方向,所以

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > R)$$



11-13 球壳的场强分布

$r < R$ 时,在球壳内任取一点 P',过 P'作半径为 r 的球面高斯面 S', P' 点在高斯面 S' 上,由于高斯面 S' 内所围的电荷 $\sum_i q_i = 0$,根据高斯定理,有

$$\mathbf{E} = 0 \quad (r < R)$$

结论:均匀带电球壳在外部空间产生的电场,与电荷全部集中在球心时产生的电场一样,均匀带电球壳内部的场强处处为零.图 11-13 中的曲线,表明了场强大小随距离的变化情况.

2. 均匀带电球体内、外的场强

设球体的半径为 R ,带电量为 Q .与上例一样,电荷分布具有球对称性,电场的分布也具有球对称性.

如图 11-14 所示 $r > R$ 时,过球外 P 点作半径为 r 的球面高斯面 S,由高斯定理可得

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > R)$$

$r < R$ 时,过球内 P' 点取球形高斯面 S',通过高斯面 S' 的电场强度通量为

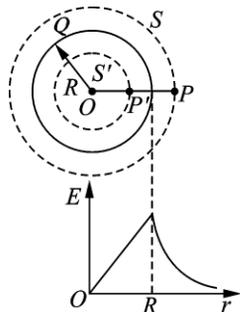
$$\Phi_e = \oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

高斯面 S' 内所围的电荷

$$\sum q_{\text{内}} = \frac{Q}{\left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}$$

由高斯定理可得

$$\mathbf{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{e}_r \quad (r < R)$$



11-14 球体的场强分布

即在球内部 E 与 r 成正比. 图 11 - 14 中的 $E - r$ 曲线给出了在球内、外场强大小随距离的变化情况.

3. 无限长均匀带电圆柱面内、外的电场

设圆柱面的半径为 R , 沿轴向单位长度圆柱面上所带的电量为 λ . 由于电荷分布具有轴对称性, 电场分布也具有轴对称性, 即离开圆柱面轴线等距离各点的场强大小处处相等, 方向都沿圆柱面侧面的法线方向, 所以可以选取同轴的柱形高斯面. 在柱形高斯面的两个底面上, 虽然场强的大小各处不等, 但场强的方向则处处与底面的法向垂直, 所以通过两个底面的电通量均为零.

如图 11 - 15 所示 $r > R$ 时, 在柱面外取一点 P , P 点到柱面轴线的距离为 r , 以 r 为半径, 作长度为 l 的同轴柱形高斯面 S , P 点在高斯面 S 上. 通过高斯面 S 的电场强度通量为

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{侧面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{上底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{下底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{\text{侧面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r l E\end{aligned}$$

柱形高斯面 S 内所包围的电荷 $\sum_i q_i = \lambda l$

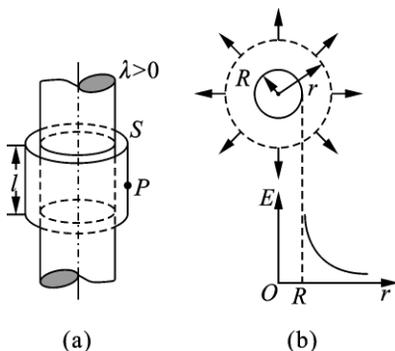


图 11 - 15 圆柱面的场强

根据高斯定理可得带电柱面外的场强

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r \quad (r > R)$$

柱面内 ($r < R$) 的场强分布: 取 $r < R$ 的柱形高斯面, 因为高斯面内没有电荷, 所以

$$\mathbf{E} = 0 \quad (r < R)$$

4. 均匀带电的无限大平面薄板的电场分布

由于电荷均匀分布在无限大的平面上, 因此电场的分布具有对称性. 假设

面电荷密度 $\sigma > 0$ 则平面两侧对称点处的场强不仅大小相等,而且方向处处与平面垂直并指向两侧.如图 11-16 所示,取圆柱形高斯面,其侧面与带电面垂直,两底面与带电面平行并在对称位置上.由于该高斯面是关于带电面对称的,在两底面处,场强的大小处处相等,方向沿两底面的法向,侧面上各点的场强方向处处与侧面法向垂直,通过侧面的电场强度通量为零.

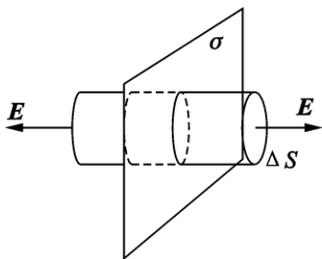
设圆柱形高斯面的底面积为 ΔS ,则通过此高斯面的电场强度通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{侧面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E\Delta S$$

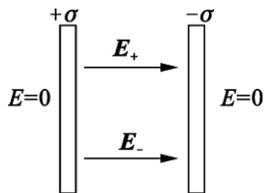
圆柱形高斯面 S 内所包围的电荷 $\sum_i q_i = \sigma\Delta S$

由高斯定理可得

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_n$$



11-16 无限大均匀带电平板的场强



11-17 充电平行板电容器的电场

5. 均匀带电无限大平行板电容器的电场

设两平行板电荷面密度为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$,根据场强叠加原理,两平行板的总场强可以看成各个平面产生的场强的叠加.由于 $+\sigma$ 产生的场强垂直于平面向外, $-\sigma$ 产生的场强垂直于平面向里,大小都是 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$,如图 11-17 所示.因此两板之间场强的大小为

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

E 的方向由 $+\sigma$ 指向 $-\sigma$.即两无限大均匀带异号电荷平板之间的电场为匀强电场.在两板之外,由于两板的场强方向相反,所以

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$$

综上所述可知,应用高斯定理求场强的一般方法与步骤是:

(1) 进行对称性分析,即由电荷分布的对称性、分析场强分布的对称性.常

见的对称性有球对称性、轴对称性等。

(2)过场点选取适当的高斯面,使穿过该面的电场强度通量易于计算.例如使部分高斯面与场强方向平行,或使高斯面上场强大小相等,方向与该部分表面垂直等,从而可使 $E \cos\theta$ 提到积分号外。

(3)计算穿过高斯面的电场强度通量和高斯面内包围的电量的代数和,最后由高斯定理求出场强。

上述各例中,带电体的电荷分布都具有某种对称性,利用高斯定理计算这类带电体的场强分布是很方便的.不具有特定对称性的电荷分布,其电场强度不能直接用高斯定理求出.当然,这绝不是说,高斯定理对这些带电体系的电场不成立.此外,对有些带电体系来说,如果其中每个带电体的电荷分布都具有对称性,那么可以利用高斯定理求出每个带电体的电场,然后再应用场强叠加原理求出整个带电体系的电场分布。

§ 11 - 4 静电场的环路定理

前面从静电场对电荷有作用力的特性,引入电场强度来描述静电场,高斯定理从一个侧面反映了静电场是有源场这一重要性质.本节从静电场力做功的特点出发来描述静电场的性质.静电场力做功与路径无关这一特点可以等价于静电场的环路定理,它从另一个侧面说明静电场是有势场这一重要性质。

一、静电场力的功

根据库仑定律和场强叠加原理,可以证明静电场力做功与路径无关。

1. 点电荷的电场

设静止的点电荷 q 位于 O 点.如图 11 - 18 所示,当试验电荷 q_0 处在 q 产生的电场中时,作用于 q_0 的电场力为

$$F = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

当 q_0 移动一个元位移 $d\mathbf{l}$ 时,电场力所做的元功为

$$dA = F \cdot d\mathbf{l} = F \cos\theta d\mathbf{l} = F dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

把试验电荷 q_0 由 a 点沿任意路径移动到 b 点,电场力所做的总功为

$$A_{ab} = \int_a^b dA = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (11 - 14)$$

由此可以得出结论:在点电荷的电场中,电场力对试验电荷所做的功与路

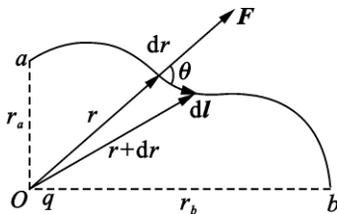


图 11 - 18 静电场力做功

径无关,只与试验电荷起点和终点的位置有关.

2. 任意带电体系的电场

把带电体分为无穷多带电元,每一带电元都可以看作是一个点电荷.于是,可以把带电体系看成点电荷系,总场强 E 等于各点电荷单独产生的场强的矢量和

$E = \sum_{i=1}^n E_i$,把试验电荷 q_0 由 a 点沿任意路径移动到 b 点,电场力所做的总功为

$$A_{ab} = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \sum_i \int_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}_i = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{ia}} - \frac{1}{r_{ib}} \right) \quad (11-15)$$

式(11-14)和式(11-15)表明,在静电场中,电场力对试验电荷所做的功,只与试验电荷的电量和起点、终点的位置有关,与路径无关.由此可知,静电场力是保守力,静电场是保守力场或有势场.

二、静电场的环路定理

静电场中,若将试验电荷 q_0 沿闭合路径移动一周,电场力做的功可表示为

$$A = q_0 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

如图 11-19 所示,设试验电荷 q_0 在静电场中运动,经历的闭合路径为 aL_1bL_2a ,电场力所做的功为

$$A = q_0 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{aL_1b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + q_0 \int_{bL_2a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

由于

$$\int_{bL_2a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{aL_2b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

而且电场力做功与路径无关,即

$$q_0 \int_{aL_2b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_{aL_1b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

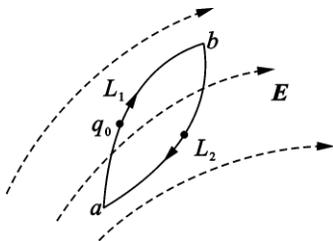
所以

$$q_0 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_{aL_1b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - q_0 \int_{aL_2b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

由于 q_0 不为零,故上式成立的条件,必须有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (11-16)$$

上式表明,在静电场中,电场强度 E 沿任意闭合路径的线积分为零. E 沿任意闭合路径的线积分又叫做 E 的环流,故上式也表明,在静电场中电场强度 E



11-19 沿闭合回路电场力做功为零

的环流为零,这叫做静电场的环路定理.它与高斯定理一样,也是表述静电场性质的一个重要定理.

§ 11 - 5 电势

一、电势能

静电力和重力一样,都是保守力.静电场和重力场都是保守力场(有势场).因此,可仿照重力势能的概念,在静电场中引入电势能的概念.

在静电场中,把试验电荷 q_0 由一点移动到另一点,电场力所做的功与路径无关,所以,在静电场中也存在一个由 q_0 和场源电荷的相对位置所决定的能量,称为电势能,用 W 表示.若电场中 a 点的电势能用 W_a 表示, b 点的电势能用 W_b 表示.把试验电荷 q_0 由电场中 a 点移到另一点 b ,电势能的增量等于电场力对 q_0 做功的负值,即

$$W_b - W_a = - A_{ab} = - q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

或
$$W_a - W_b = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (11 - 17)$$

电势能是一个相对量,要确定 q_0 在电场中某点的电势能值,必须选定一个电势能为零的参考点.若选定 b 点为零电势能的参考点,即令 $W_b = 0$,则 a 点的电势能为

$$W_a = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (W_b = 0) \quad (11 - 18)$$

此式表明,电荷 q_0 在电场中任一点 a 的电势能,在数值上等于将此电荷从 a 点沿任意路径移动到电势能为零的参考点的过程中电场力所做的功.

二、电势与电势差

在电势能为零的参考点选定之后,电荷 q_0 在电场中任一确定位置,其电势能 W 都有确定的值.由式(11 - 18)可以看出,电场中某一点 a 的电势能 W_a 不仅与场强 E 的分布有关,而且还与试验电荷 q_0 所带的电量有关.因此,不能用电势能 W 来描述电场本身的性质.但是,比值 $\frac{W_a}{q_0}$ 却与 q_0 无关,只决定于电场的

分布.我们把这个比值 $\frac{W_a}{q_0}$ 叫做 a 点的电势,用符号 V_a 表示,则

$$V_a = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (V_b = 0) \quad (11 - 19)$$

电场中某点的电势,在数值上等于单位正电荷在该点的电势能,或等于将

单位正电荷从该点移到电势为零的参考点的过程中, 电场力所做的功。

要确定电场中某点的电势, 必须先选择电势为零的参考点。从原则上来说, 零电势参考点的选取是任意的, 但是, 为了计算简便, 同时保证电势的概念不失去其物理意义, 对零电势参考点的选择通常为:

(1) 如果场源电荷分布在有限区域内, 通常选取无穷远处为零电势参考点, 即 $V = 0$ 。这时, 任一点 a 的电势公式可写成

$$V_A = \int_a^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (11-20)$$

(2) 如果电荷分布到无限远处, 如无限长带电直线、无限大带电平面和无限长带电柱面等, 一般不能选无穷远处作零电势参考点, 否则场中电势的值将为无穷大或不确定, 这时电势就失去了描述电场性质的物理意义。在这种情况下, 一般把参考点选在有限区域内。对无限长带电直线、无限长带电柱面和无限大带电平面, 参考点一般选在带电体、带电面或它们的轴线上, 这样计算比较简便。

(3) 在电工学中, 常把大地或仪器机壳选为零电势参考点。

电场中任意两点 a 和 b 的电势差可定义为

$$U_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (11-21)$$

式(11-21)表明, 静电场中, 任意两点 a 、 b 的电势差, 等于把单位正电荷从 a 点沿任意路径移到 b 点的过程中, 电场力所做的功。

电势差是绝对量, 与零电势参考点的选择无关。电势是相对量, 只有选定了零电势参考点之后, 电势才有确定的意义。根据电势差的数值, 可以比较电场中两点间的电势高低, 由 a 点到 b 点, 电场力对单位正电荷做正功, $U_{ab} > 0$, 则 $V_a > V_b$; 电场力对单位正电荷做负功, $U_{ab} < 0$, 则 $V_a < V_b$ 。

在国际单位制中, 电势和电势差的单位是伏特(V)。

三、电势叠加原理 电势的计算

1. 点电荷电场中的电势

利用电势的定义, 可以求出点电荷在电场中任一点 a 的电势。

点电荷是一个有限带电体, 故可选取无穷远为电势零点。因为电势的计算与路径无关, 所以可选取一条最便于计算的路径, 即沿径向的直线作为积分路径, 于是有

$$V_a = \int_a^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{\infty} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

式中 r 是从点电荷 q 到 a 点的距离。即点电荷的电势公式为

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (11-22)$$

当 $q > 0$ 时, $V > 0$, 空间各点的电势都是正的, 且距正电荷越近处, 电势就越高; 当 $q < 0$ 时, $V < 0$, 空间各点的电势都是负的, 且距负电荷越近处, 电势就越低.

2. 点电荷系电场中的电势

若空间中有多点电荷, 根据场强叠加原理, 电场中某点的电势为

$$V_a = \int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a \sum_i \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}_i = \sum_i \int_a \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}_i$$

即

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \sum_{i=1}^n V_i \quad (11-23)$$

式(11-23)表明, 在点电荷系的电场中某一点的电势, 等于各个点电荷单独存在时在该点产生电势的代数和. 这个结论叫做电势叠加原理.

3. 连续分布带电体电场中的电势

如果电荷连续分布, 要求其电场中某一点的电势, 对于有限带电体来说, 取无穷远处为电势零点, 将带电体分割为许多可以视为点电荷的电荷元所组成的体系, 电荷元 dq 在任一点 a 的电势, 可用点电荷的电势公式来计算, 即

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

再利用电势叠加原理, 整个带电体在 a 点的电势等于所有电荷元在该点电势的代数和, 即

$$V_a = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad (11-24)$$

积分遍及整个带电体.

当电场中的电场强度分布已知时, 或者电荷分布具有特定的对称性, 其场强分布易于确定时, 可直接利用电势的定义式(11-20)来计算电势.

当已知有限区域内的电荷分布时, 原则上都可以用点电荷电势公式及电势叠加原理, 即用式(11-24)来计算电势. 此外, 对于多个带电体的电场, 可以分别计算出每个带电体在同一点的电势 V_1, V_2, \dots, V_n , 然后利用 $V = \sum_{i=1}^n V_i$ 求其代数和, 便得多个带电体的总电场在该点的电势.

例 11-4 求均匀带电圆环轴线上任一点的电势.

解 已知圆环的半径为 R , 带电总量为 q 均匀分布在圆环上, 可利用电荷

连续分布时的电势叠加原理来计算轴线上任意一点的电势. 取无穷远处为电势零点, 即 $V = 0$. 如图 11-20 所示, 设 P 点为圆环轴线上任一点, 它到环心 O 的距离为 x . 在圆环上取微元 dl , 它所带的电量 $dq = \lambda dl$, 其中 $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$, 该电荷元 dq 在 p 点的电势为

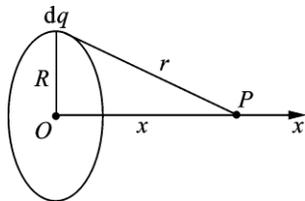


图 11-20 带电圆环轴线上的电势

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

由电势叠加原理可得 P 点的电势为

$$\begin{aligned} V &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} \oint dl \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}} \end{aligned}$$

若 P 点距 O 点很远, 即 $x \gg R$, 则 $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$, 此时圆环可以看成是点电荷. 当

P 点位于环心 O 时, $x = 0$, 则 $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$.

例 11-5 求均匀带电球壳的电场中的电势分布.

解 已知球壳的半径为 R , 电荷 Q 均匀分布在球壳上. 取无穷远处为电势零点, 即 $V = 0$. 根据高斯定理可得场强的分布为

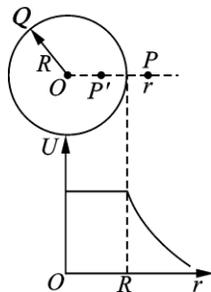
$$E = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r & (r > R) \end{cases}$$

如图 11-21 所示, 球面外 ($r > R$) 一点 P 的电势为

$$V_p = \int_p E \cdot dl = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

球面内 ($r \leq R$) 一点 P' 的电势为

$$V_{p'} = \int_p E \cdot dl = \int_r^R 0 \cdot dr + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$



11-21 球壳电势的分布曲线

由上面的计算可知, 球面内的场强处处为零, 电势处处相等, 所以球面内为等电势区域. 球面外的电势与场点到球心的距离成反比. 图 11-22 给出了电势随距离 r 的分布曲线.

§ 11 - 6 电场强度与电势梯度

一、等势面

前面我们曾用电场线形象地描述电场中电场强度的分布情况,本节我们用等势面来表示电场中电势的分布.

在电场中,电势相等的点所组成的曲面叫等势面.把对应于不同电势值的等势面逐个地画出来,并使相邻两等势面间的电势差为一常量,这样画出来的图形就能直观地反映出静电场中电势的分布情况.图 11 - 22 给出了正点电荷和两个等量异号点电荷的等势面和电场线的分布,其中虚线代表等势面,实线表示电场线.

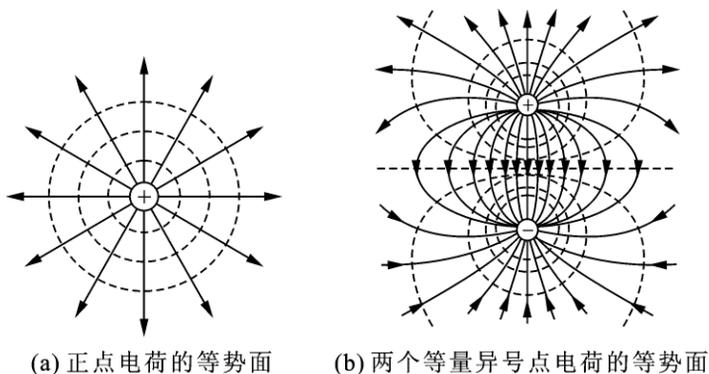


图 11 - 22 等势面

根据等势面的意义可知它和电场的分布有一定关系,如果严格按照上述对等势面画法的规定,等势面就具有下列基本性质:

- (1) 等势面与电场线处处正交;
- (2) 等势面密集处场强大,等势面稀疏处场强小;
- (3) 电场线总是由电势高的等势面指向电势低的等势面

等势面的概念在实际问题中也很有用,主要是因为在实际遇到的很多带电问题中,等势面的分布容易通过实验手段描绘出来,并由此可以分析电场的分布.

二、电场强度与电势梯度的关系

设在静电场中,取两个十分邻近的等势面 1 和 2(图 11 - 23 所示),其电势分别为 V 和 $V + dV$, 并设 $dV > 0$. 设 P_1 为等势面 1 上的一点,过 P_1 点作等势面 1 的法线,它与等势面 2 交于 P_2 点. 规定指向电势升高的方向为此法线的正

方向,并以 e_n 表示法线方向上的单位矢量. 令 $P_1P_2 = dn$, 从图中可知,由等势面 1 上的 P_1 点到达等势面 2 上的任一点,例如,沿图 $d\mathbf{l}$ 中的方向到达 P_3 点,其电势变化量为 dV ,空间位置的改变量为 $d\mathbf{l}$. 相应地,电势的空间变化率为 $\frac{dV}{d\mathbf{l}}$,显然,

$d\mathbf{l}$ 取不同方向 $\frac{dV}{d\mathbf{l}}$ 的值不同. 在 P_1 点处沿不同方向电势的空间变化率 $\frac{dV}{d\mathbf{l}}$ 不相等. 由于 dn 恒小于

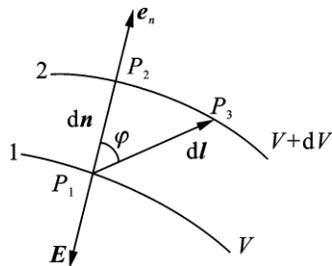


图 11 - 23 电势梯度与场强的关系

(或等于) $d\mathbf{l}$, 故 $\frac{dV}{d\mathbf{l}}$ 的值恒小于(或等于)沿 e_n 方向电势的空间变化率 $\frac{dV}{dn}$ 的值, 即

$$\frac{dV}{d\mathbf{l}} \leq \frac{dV}{dn}$$

设 $d\mathbf{l}$ 与 e_n 之间的夹角为 φ , 可知

$$dn = d\mathbf{l} \cos \varphi$$

因而

$$\frac{dV}{d\mathbf{l}} = \frac{dV}{dn} \cos \varphi = \frac{dV}{dn} e_n \cdot \frac{d\mathbf{l}}{d\mathbf{l}} \quad (11 - 25)$$

式(11 - 25)是任一方向的电势变化率和 $\frac{dV}{dn} e_n$ 之间的关系式, 它表明, 只要知道

$\frac{dV}{dn}$ 和法线方向单位矢量 e_n 与 $d\mathbf{l}$ 之间的夹角, 则沿任一方向的电势变化率便可

由式(11 - 25)求得, 该式也可理解为 $d\mathbf{l}$ 方向上的电势变化率 $\frac{dV}{d\mathbf{l}}$ 是矢量 $\frac{dV}{dn} e_n$ 在

$d\mathbf{l}$ 方向上的分量. 这一矢量 $\frac{dV}{dn} e_n$ 定义为 P_1 点处的电势梯度(gradient)矢量, 通常记作 $\text{grad } V$, 即

$$\text{grad } V = \frac{dV}{dn} e_n \quad (11 - 26)$$

式(11 - 26)表明, 电场中某点的电势梯度矢量, 在方向上与电势在该点处空间变化率为最大的方向相同, 在量值上等于沿该方向上的电势的空间变化率.

现在, 我们来确定电场中某点电势梯度矢量与电场强度之间的关系. 如前所述, 电场线的方向垂直于等势面, 而且指向电势降落的方向. 所以 P_1 点的电场强度 E 应与 e_n 的方向相反, 如图 11 - 23 中所示. 当单位正电荷从电势为 V

的 P_1 点,沿法线方向移动到电势为 $V + dV$ 的 P_2 点时,由于电场力对单位正电荷所做的功等于起点和终点之间的电势差,得

$$E_n dn = V - (V + dV) = -dV$$

式中 E_n 为电场强度 E 在 e_n 方向的分量,所以有

$$E_n = -\frac{dV}{dn}$$

显然,式中的负号正是说明 E 的方向是与 e_n 的方向相反的.将上式写成矢量式为

$$E = -\frac{dV}{dn}e_n = -\text{grad}V \quad (11-27)$$

矢量式(11-27)说明:静电场中各点的场强等于该点电势梯度的负值.也就是说,静电场中各点场强的大小等于该点电势空间变化率的最大值,方向则平行于使空间变化率为最大的方向指向电势降落的一侧.矢量式(11-27)在任一 dl 方向上的分量为

$$E_l = -(\text{grad}V)_l = -\frac{dV}{dl}$$

如果把直角坐标系中的 x 轴、 y 轴和 z 轴的方向,分别取作 dl 的方向,就可得到场强 E 沿这三个方向的分量分别为

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (11-28)$$

写成矢量式

$$E = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}i + \frac{\partial V}{\partial y}j + \frac{\partial V}{\partial z}k\right) \quad (11-29)$$

场强与电势的微分关系在解决实际问题中十分有用.在计算场强时,常常先算出电势,再利用场强与电势的微分关系计算场强,这样做的好处是可以避免直接用场强叠加原理计算场强时遇到的矢量运算的麻烦.

思考题

11-1 在真空中两个点电荷之间的相互作用力是否会因为其他一些电荷被移近而改变?

11-2 有四个点电荷,电量均为 $+q$,分别放在正方形的四个顶点.问在正方形的中心应放一个怎样的点电荷 q' ,才能使每个电荷处于平衡?

11-3 关于电场强度,请回答以下问题:

(1) 电场中某一点电场强度的定义为 $E = \frac{F}{q_0}$,若该点未放试验电荷 q_0 ,则该

点是否有场强,为什么?

(2)电荷在电场中某点受到的电场力很大,该点的场强是否也一定很大?

(3)有一带正电荷的金属球,其附近某点的场强为 E_1 ,今在该点放一个带正电的点电荷 q_1 ,测得 q_1 所受的力为 F_1 ,若考虑到电量 q_1 不是足够小,则 $\frac{F_1}{q_1}$ 是大于、等于还是小于该点的场强 E_1 ?

11-4 根据点电荷的场强公式

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

当所考察的场点与点电荷的距离 $r \rightarrow 0$ 时,场强 $E \rightarrow \infty$,这是没有物理意义的,对这似是而非的问题应如何解释?

11-5 真空中有 A、B 两块平板,两块平板间的距离为(很小),平板面积为 S ,其所带电量为 $+q$ 和 $-q$,对于该两平板间的相互作用力 F ,下面两种结果是否正确?为什么?

$$(1) F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2};$$

$$(2) F = qE = q \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q^2}{\epsilon_0 S}.$$

11-6 若通过一闭合曲面的电场强度通量为零,则在此闭合曲面上的场强是否一定处处为零?若通过一闭合曲面的电场强度通量不为零,则在此闭合曲面上的场强是否一定处处不为零?

11-7 关于高斯定理有下面几种说法,其中正确的是:

(1)如果高斯面上 E 处处为零,则该高斯面内必无电荷;

(2)高斯面上各点的电场强度仅由面内所包围的电荷提供;

(3)如果高斯面内有净电荷,则穿过高斯面的电场强度通量必不为零;

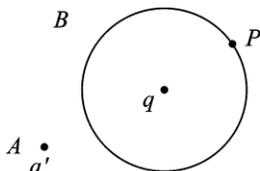
(4)高斯定理仅适用于具有高度对称性的电场.

11-8 如题图所示,闭合曲面 S 内有一点电荷 q , P 为 S 面上一点,在 S 面外 A 点有一点电荷 q' ,若将 q' 移至 B 点,则下列说法中正确的是:

(1)穿过 S 面的电场强度通量改变, P 点的电场强度不变;

(2)穿过 S 面的电场强度通量不变, P 点的电场强度改变;

(3)穿过 S 面的电场强度通量和 P 点的电场强度都不变;



思考题 11-8 图

(4) 穿过 S 面的电场强度通量和 P 点的电场强度都改变.

11 - 9 下列几个带电体能否用高斯定理来计算电场强度? 为什么? 作为近似计算, 应如何考虑呢?

- (1) 电偶极子;
- (2) 长为 l 的均匀带电直线;
- (3) 半径为 R 的均匀带电圆盘.

11 - 10 一点电荷放在球形高斯面的球心处. 试讨论下列情形下电场强度通量的变化情况:

- (1) 若此球形高斯面被一与它相切的正方体表面所代替;
- (2) 点电荷离开球心, 但仍在球面内;
- (3) 有另一个电荷放在球面外;
- (4) 有另一个电荷放在球面内.

11 - 11 有一带电球体, 已知其电荷是球对称分布的, 在下列两种情况中, 此球表面上的 E 是否大于球内各点的 E?

- (1) 电荷体密度是均匀的;
- (2) 电荷体密度与球半径 r 成反比.

11 - 12 比较下列几种情况下电场中两点电势的高低.

- (1) 正电荷由 A 移到 B 时, 外力克服电场力做正功;
- (2) 正电荷由 A 移到 B 时, 电场力做正功;
- (3) 负电荷由 A 移到 B 时, 外力克服电场力做正功;
- (4) 负电荷由 A 移到 B 时, 电场力做正功;
- (5) 电荷顺着电场线方向由 A 移到 B;
- (6) 电荷逆着电场线方向由 A 移到 B.

11 - 13 有人说: “电场线描述空间各点电场的方向, 并不表示质量为 m, 电量为 q 的质点在电场中受力运动的轨迹. 只有当质点初速度为零时, 其运动轨迹才和电场线重合.” 这种说法对吗? 请分析.

11 - 14 已知无限长带电直线的电场强度为 $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} e_r$. 我们能否选择无限远处的电势为零 ($V = 0$), 并利用

$$V_A = \int_A E \cdot dl + V$$

来计算“无限长”带电直线附近点 A 的电势?

11 - 15 回答下列问题:

(1) 电势高的地方电场强度是否大? 电场强度大的地方电势是否高?

(2) 电场强度为零的地方, 电势是否为零? 电势为零的地方, 电场强度是否为零?

(3) 电场强度大小相等的地方, 电势是否相等? 等势面上的电场强度是否相等?

(4) 电势等于零的物体是否不带电? 带正电的物体的电势是否是正的?

11 - 16 一个人站在绝缘地板上, 用手紧握静电起电机的金属电极, 同时使电极带电产生 10^5 V 的电势. 试问此人是否安全? 这时, 如果另一人去接触已带电的电极, 是否安全? 为什么?

11 - 17 电场中两点电势的高低是否与试验电荷有关? 电势差的数值是否与试验电荷的电量有关?

11 - 18 将初速度为零的电子放在电场中时, 在电场力的作用下, 这电子将向电场中高电势处还是向低电势处移动? 为什么?

11 - 19 (1) 已知电场中某点的场强, 能否计算出该点的电势?

(2) 已知电场中某点附近的电势分布, 能否算出该点的场强?

11 - 20 试利用场强与电势梯度的关系式

$$E_l = - \frac{dV}{dl}$$

来分析下列问题:

(1) 在电势不变的空间内, 电场强度是否为零?

(2) 在电势为零处, 场强是否一定为零?

(3) 场强为零处, 电势是否一定为零?

11 - 21 在静电学中, 有下面几种常见的场强公式

$$E = \frac{F}{q}; E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}; E = \frac{V_A - V_B}{l}$$

(1) 各式中 q 的意义是否相同?

(2) 各场强公式适用的范围怎样?

习 题

11 - 1 有两个相距为 $2a$, 电荷均为 $+q$ 的点电荷. 今在它们连线的垂直平分线上悬挂另一个点电荷 q' , q' 与连线相距为 b . 试求:

(1) q' 所受的电场力;

(2) q' 放在哪一位置处, 所受的电场力最大?

11-2 如题图所示,质量为 m 的两小球带等量异号电荷 $+q$ 和 $-q$, 现用长为 l 的细线悬挂于空间同一点.

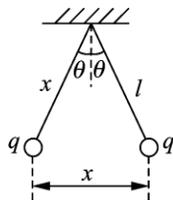
(1) 试证明: 当 θ 很小且两球平衡时, 有

$$x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{\frac{1}{3}}$$

式中 x 为两球间的距离;

(2) 试求: 当 $l=1.2 \text{ m}$, $m=0.15 \text{ kg}$, $x=0.05 \text{ m}$ 时, q 的值;

(3) 如果每个球都以 $1.0 \times 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$ 的变化率失去电荷, 求两球彼此趋近的瞬时相对速率(即 $\frac{dx}{dt}$) 是多少?



习题 11-2 图

11-3 两个点电荷所带电荷之和为 Q , 问它们各带电荷为多少时, 相互间的作用力最大?

11-4 若电荷 Q 均匀地分布在长为 L 的细棒上. 求证:

(1) 在棒的延长线, 且离棒中心为 r 处的电场强度大小为

$$E = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4r^2 - L^2}$$

(2) 在棒的垂直平分线上, 离棒为 r 处的电场强度大小为

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{4r^2 + L^2}}$$

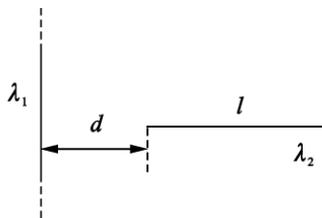
若棒为无限长(即 $L \rightarrow \infty$), 试将结果与无限长均匀带电直线的电场强度相比较.

11-5 一半径为 R 的细半圆环上均匀地分布电荷 Q , 求环心处的电场强度.

11-6 一半径为 R 的半球壳, 均匀地带有电荷, 电荷面密度为 σ , 求球心处电场强度的大小.

11-7 半径为 R 的带电圆盘, 其电荷面密度沿圆盘半径呈线性变化, 即 $\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)$. 试求在圆盘轴线上距圆盘中心 O 为 x 处的场强 E .

11-8 有一无限长带电直线, 电荷线密度为 λ_1 , 另有一长为 l 的均匀带电细棒, 电荷线密度为 λ_2 . 棒与直线在同一平面内, 且棒垂直于直线, 如题图所示. 棒的一端与直线距离为 d , 求它们的相互



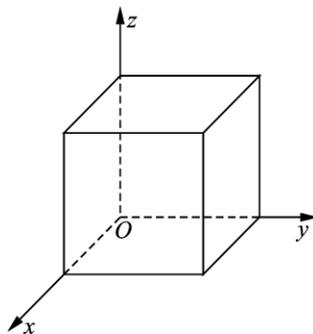
习题 11-8 图

作用力.

11 - 9 两条无限长平行直导线相距为 r_0 , 均匀带有等量异号电荷, 电荷线密度为 λ . 试求: (1) 两导线构成的平面上任一点的电场强度 (设该点到其中一线的垂直距离为 x); (2) 每一根导线上单位长度受到的另一根导线上电荷作用的电场力.

11 - 10 设匀强电场的电场强度 E 与半径为 R 的半球面的对称轴平行, 试计算通过此半球面的电场强度通量.

11 - 11 边长为 a 的立方体如题图所示, 其表面分别平行于 xy , yz 和 zx 平面, 立方体的一个顶点为坐标原点. 现将立方体置于电场强度 $E = (E_1 + kx)\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}$ 的非均匀电场中, 求通过立方体各表面及整个立方体表面的电场强度通量.



习题 11 - 11 图

11 - 12 设在半径为 R 的球体内, 其电荷为对称分布, 电荷体密度为

$$\rho = kr \quad (0 \leq r \leq R)$$

$$\rho = 0 \quad (r > R)$$

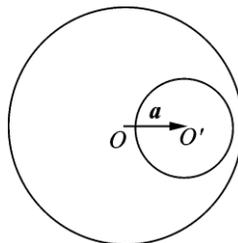
k 为一常量. 试用高斯定理求电场强度 E 与 r 的函数关系.

11 - 13 一球壳的内半径为 R_1 , 外半径为 R_2 , 壳体内均匀地分布着电荷体密度为 ρ 的电荷. 求离球心为 r 处的电场强度, 并画出 $E - r$ 曲线.

11 - 14 一无限大均匀带电薄平板, 电荷面密度为 σ , 在平板中部有一半径为 r 的圆孔. 求圆孔中心轴线上与平板相距为 x 的一点的电场强度.

11 - 15 如题图所示, 在电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体中, 存在一个球形空腔, 若将带电体球心 O 指向球形空腔球心 O' 的矢量用 a 表示. 试证明球形空腔中任一点的电场强度为

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a$$



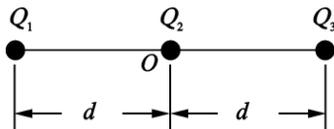
习题 11 - 15 图

11 - 16 半径为 R 的无限长圆柱, 柱内电荷体密度 $\rho = ar - br^2$, r 为某点到圆柱轴线的距离, a, b 为常量. 试求带电圆柱内外电场分布.

11 - 17 一个内外半径分别为 R_1 和 R_2 的均匀带电球壳, 总电荷为 Q_1 , 球壳外同心罩一个半径为 R_3 的均匀带电球面, 球面带电荷为 Q_2 . 求电场分布, 并分析电场强度是否是场点与球心的距离 r 的连续函数?

11-18 两个带有等量异号电荷的无限长同轴圆柱面,半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$),单位长度上的电荷为 λ . 求离轴线为 r 处的电场强度:(1) $r < R_1$;(2) $R_1 < r < R_2$;(3) $r > R_2$.

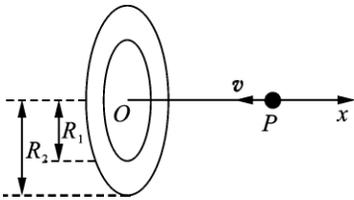
11-19 如题图所示,有三个点电荷 Q_1, Q_2, Q_3 沿一条直线等间距分布,已知其中任一点电荷所受合力均为零,且 $Q_1 = Q_3 = Q$. 求在固定 Q_1, Q_3 的情况下,将 Q_2 从点 O 移到无穷远处外力所做的功.



习题 11-19 图

11-20 半径为 R 的无限长直圆柱体内均匀带电,电荷体密度为 ρ ,分别以柱面及轴线为电势零点,求电势的分布.

11-21 如题图所示,有一薄金属环,其内外半径分别为 R_1 和 R_2 ,圆环均匀带电,电荷面密度 σ ($\sigma > 0$). (1) 计算通过环心垂直于环面的轴线上一点的电势;(2) 若有一质子沿轴线从无限远处射向带正电的圆环,要使质子能穿过圆环,它的初速度至少应为多少?



习题 11-21 图

11-22 两个同心球面的半径分别为 R_1 和 R_2 ,各自带有电荷 Q_1 和 Q_2 . 求:(1) 各区域电势分布,并画出分布曲线;(2) 两球面间的电势差为多少?

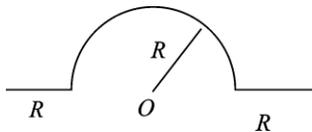
11-23 电荷 q 均匀分布在长为 $2L$ 的细直线上,试求:

- (1) 中垂线离带电直线中心 O 为 x 处的电势和场强;
- (2) 带电直线延长线上离中心 O 为 y 处的电势和场强;
- (3) 离带电直线端点处为 x 的场点的电势和场强的 x 分量.

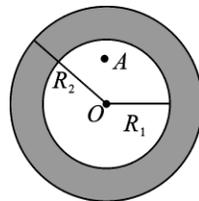
11-24 半径为 R 的均匀带电圆盘,带电量为 Q . 过盘心垂直于盘面的直线上一点 P 到盘心的距离为 L . 试求:

- (1) P 点的电势;
- (2) P 点的场强.

11-25 将一均匀带电细棒弯成如题图所示的形状,其电荷线密度为 λ ,半圆环的半径为 R ,两段直线部分的长度也为 R . 求:(1) 环心点 O 处的电场强度;(2) 环心点 O 处的电势.(设无限远处电势为零)



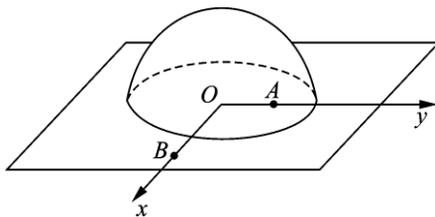
习题 11 - 25 图



习题 11 - 26 图

11 - 26 如题图所示为一均匀带电球层,其电荷体密度为 ρ , 球层内表面半径为 R_1 , 外表面半径为 R_2 . 求图中点 A 的电势. (设无限远处电势为零)

11 - 27 如题图所示, 在 xOy 面上倒扣着半径为 R 的半球面, 半球面上电荷均匀分布, 电荷面密度为 σ . A 点的坐标为 $(0, \frac{R}{2})$, B 点的坐标为 $(\frac{3R}{2}, 0)$, 求电势差 U_{AB} .



习题 11 - 27 图

第 12 章 静电场中的导体和电介质

上一章我们讨论了真空中的静电场,即空间除了给定的电荷外,在电场中不存在由分子、原子构成的其他物质.其实,在物质世界里,真空只不过是一种理想的情况,实际电场中总会有导体或电介质.导体和电介质是实物物质,静电场是另一种形态的物质,当它们处在同一空间时,就会产生相互作用、相互影响.在这一章,我们将研究静电场和导体、电介质相互影响的规律,讨论导体和电介质的有关性质,最后讨论静电场的能量,从一个侧面来反映电场的物质性.

§ 12 - 1 静电场中的导体

一、导体的静电平衡

金属导体由大量带负电的自由电子和带正电的晶体点阵构成.当导体不带电也不受外电场作用时,自由电子的负电荷与构成晶体点阵的正电荷处处相等,因此无论是对整个导体,还是其中的一部分来说,都呈现电中性.此时,自由电子只做无规则热运动,不做宏观定向运动.如图 12 - 1 所示,在电场强度为 E_0 的匀强电场中放入一块金属板,则在电场力的作用下,金属板内的自由电子将逆着外电场的方向运动,使得金属板的两个侧面出现了等量异号电荷.于是,这些电荷在金属板的内部建立起一个电场强度为 E' 的附加电场, E' 和外电场的电场强度 E_0 的方向相反.这样,金属板内部的电场强度 E 就是 E_0 和 E' 的叠加.开始时 $E' < E_0$,金属板内部的电场强度不为零,自由电子会不断地向左移动,从而使 E' 增大.这个过程一直延续到金属板内部的电场强度等于零(即 $E = 0$)为止.这时,导体内没有电荷做定向运动,导体处于静电平衡状态.在静电平衡时,不仅导体内部没有电荷做定向运动,而且导体表面也没有电荷做定向运动.

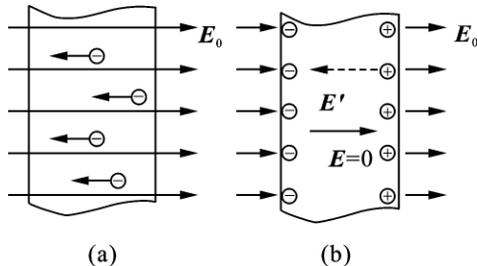


图 12 - 1 导体的静电平衡

当导体处于静电平衡状态时,必须满足以下两个条件:

- (1) 导体内部任一点处的电场强度为零;
- (2) 导体表面处电场强度的方向都与导体表面垂直.

导体的静电平衡条件,也可以用电势来表述. 由于在静电平衡时,导体内部的电场强度为零,因此,若在导体内取任意两点 A 和 B, 这两点间的电势差为 U , 即电场强度沿 A、B 两点间任意路径的线积分应等于零, 即

$$U = \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

这表明,在静电平衡时,导体内任意两点间的电势是相等的. 至于导体的表面, 由于在静电平衡时,导体表面的电场强度与表面垂直,电场强度沿表面的分量, 即 \mathbf{E} 的切向分量 E_t 为零, 因此导体表面上任意两点的电势差亦应等于零, 即

$$U = \int_{AB} E_t \cdot d\mathbf{l} = 0$$

故在静电平衡时,导体表面为一等势面. 导体内部与导体表面的电势是相等的, 否则就仍会发生电荷的定向运动. 总之,当导体处于静电平衡时,导体上的电势处处相等,导体为一等势体.

二、静电平衡时导体上的电荷分布

从静电平衡条件出发,结合静电场的普遍规律,可以得出导体处于静电平衡状态时,其电荷分布的规律:

- (1) 导体所带电荷只能分布在它的表面上,导体内部净电荷处处为零.

如图 12-2 所示,有一带电导体处于平衡状态. 由于静电平衡时,导体内的 \mathbf{E} 为零,所以通过导体内任意高斯面的电场强度通量亦必为零,即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

于是,根据高斯定理,此高斯面内所包围的电荷的代数和必然为零. 因为此高斯面是任意作出的,所以可以得到如下结论:在静电平衡时,导体所带的电荷只能分布在导体的表面上,导体内没有净电荷.

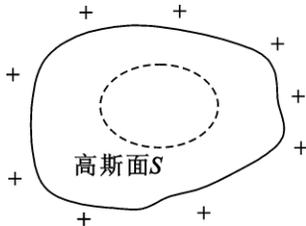


图 12-2 静电平衡时导体内部

- (2) 导体表面上各处的面电荷密度与该处表面外的电场强度大小成正比.

如图 12-3 所示,设在导体表面上取一圆形面积元 ΔS , 当 ΔS 足够小时, ΔS 上的电荷分布可当作是均匀的,其电荷面密度为 σ , 以面积元 ΔS 为底面积作如图 12-3 所示的扁圆柱形高斯面,下底面处于导体内部. 由于导体内部电场强度为零,所以通过下底面的电场强度通量为零;在侧面上,电场强度要么为零,

要么与侧面的法线垂直,所以通过侧面的电场强度通量也为零;只有在上底面上,电场强度 E 与 ΔS 垂直,所以通过上底面的电场强度通量为 $E\Delta S$,这也就是通过扁圆柱形高斯面的电场强度通量.由于此高斯面包围的电荷为 $\sigma\Delta S$,所以根据高斯定理,有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$$

即

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (12-1)$$

(3)孤立导体的面电荷密度与其表面的曲率有关,曲率越大,面电荷密度越大.

一般来说,电荷在导体表面上的分布不但和导体自身的形状有关,还和附近其他带电体及其电荷分布有关.但是,对于孤立的带电导体来说,电荷在其表面上的分布却全由自身的形状所决定.要定量研究这个问题是比较复杂的,但根据实验现象的分析,可以定性得出孤立带电导体上电荷分布的规律如下:对于形状不规则的带电导体来说,电荷在它的外表面上的分布是不均匀的,它与导体表面的曲率有关,在导体表面凸出而尖锐的地方(曲率较大),电荷面密度较大;在表面平坦的地方(曲率较小),电荷面密度较小;在表面凹进去的地方(曲率为负),电荷面密度更小.只有孤立球形导体,因各部分的曲率相同,球面上的电荷分布才是均匀的.

三、空腔导体

如果有一空腔导体带有电荷 $+q$,如图 12-4(a),这些电荷在空腔导体的内外表面上如何分布呢?若在导体内取高斯面 S ,由于在静电平衡时,导体内的电场强度为零,所以有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\Delta S = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = 0$$

这说明在空腔的内表面上没有净电荷.然而,在空腔内表面的不同部位是否有可能出现符号相反的正、负电荷,而使内表面上净电荷为零的情况呢[图 12-4(b)]?我们设想如果在空腔内表面点 A 附近出现 $+q'$,而在空腔内表面点 B 附近出现 $-q'$,则在空腔内就要有始于正电荷而终于负电荷的电场线.也就是说,空腔内的电场强度就不等于零了.这时,电场强度沿由 A 至 B 的线积分 $\int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 也就不等于零.于是,在 A, B 两点之间就存在电势差.显然,这与静电平衡时导体

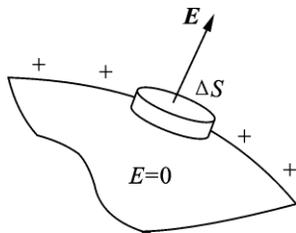


图 12-3 带电导体表面

为一等势体的条件相违背. 因此, 带电的空腔导体在静电平衡时, 空腔内表面不会以任何形式分布电荷, 电荷只能全部分布在空腔导体的外表面上.

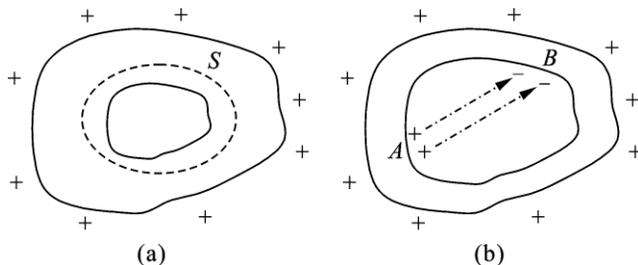


图 12 - 4 空腔导体的电荷只分布在外表面上

可见, 若把一个空腔导体放在静电场中, 静电平衡时, 电场线将终止于导体的外表面, 不能穿过导体的内表面进入内腔, 如图 12 - 5 所示. 因此, 导体内和空腔中的电场强度处处为零. 这表明, 利用空腔导体可以使空腔内的物体不受外电场的影响. 这时, 整个空腔导体和空腔内部的电势也必处处相等.

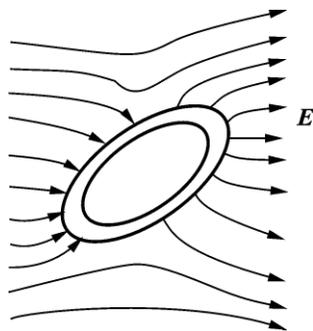


图 12 - 5

利用空腔导体可以使空腔内的物体不受外电场的影响. 但是, 有时也需要防止放在导体空腔中的电荷对导体外其他物体的影响. 例如, 一导体球壳的空腔内有一正电荷, 则球壳的内表面上将产生感应负电荷, 外表面上将产生感应正电荷 [图 12 - 6(a)] 从而使球壳外面的物体受到影响. 这时, 若把球壳接地, 则外表面上正电荷将和从地上来的负电荷中和, 球壳外面的电场就消失了 [图 12 - 6(b)]. 这样, 接地的导体空腔内的电荷对导体外的电场就不会产生任何影响了.

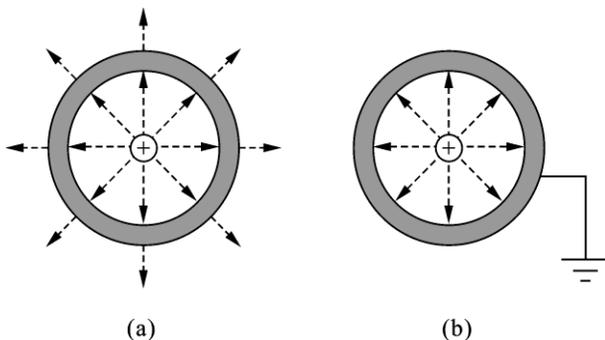


图 12 - 6 接地导体空腔的屏蔽作用

四、静电屏蔽

综上所述,在静电平衡状态下,空腔导体外面的带电体不会影响空腔内部的电场分布;一个接地的空腔导体,空腔内的带电体对腔外的物体不会产生影响.这种使导体内的电场不受外界的影响或利用接地的空腔导体将腔内带电体对外界的影响隔绝的现象,称为静电屏蔽.

静电屏蔽的原理在生产技术上有许多应用.例如,为了避免外界电场对设备中某些精密电磁测量仪器的干扰,或者为了避免一些高压设备的电场对外界的影响,一般都在这些设备外边安装有接地的金属制外壳(网、罩).传送弱讯号的连接导线,为了避免外界的干扰,往往在导线外包一层用金属丝编织的屏蔽线层.

例 12 - 1 如图 12 - 7 所示,在内外半径分别为 R_1 和 R_2 的导体球壳内,有一个半径为 r 的导体小球,小球与球壳同心,让小球带有电荷 q ,球壳带有电荷 Q .试求:

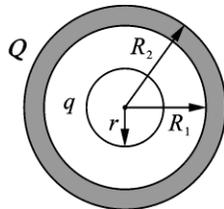


图 12 - 7

(1)小球的电势 V 球壳内、外表面的电势;

(2)小球与球壳的电势差;

(3)若球壳接地,再求小球与球壳的电势差.

解 (1)由对称性可知,小球表面上和球壳内外表面上的电荷分布是均匀的.小球上的电荷 q 将在球壳的内外表面上感应出 $-q$ 和 $+q$ 的电荷,而 Q 只能分布在球壳的外表面上,故球壳外表面上的总电荷量为 $q + Q$.

由 § 11 - 5 例 11 - 5 的结果可以得到,小球和球壳内外表面的电势分别为

$$V_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} + \frac{q+Q}{R_2} \right)$$

$$V_{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_1} + \frac{q+Q}{R_2} \right) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$V_{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_2} - \frac{q}{R_2} + \frac{q+Q}{R_2} \right) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

球壳内外表面的电势相等.

(2)两球的电势差为

$$V_r - V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

(3)若外球壳接地,则球壳外表面上的电荷消失.两球的电势分别为

$$V_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$V_{R1} = V_{R2} = 0$$

两球的电势差仍为 $V - V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$

§ 12 - 2 电容器的电容

一、孤立导体的电容

孤立导体是指离其他导体和带电导体都足够远的导体,因而其他导体或带电导体对它的影响都可以忽略.

对真空中的孤立导体,其所带电量 q 与其电势成正比. 如一个半径为 R 、带电量为 q 的孤立导体球,其电势 $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$. 当 R 一定时,导体带电量增大几倍,其电势也增大几倍,而 $\frac{q}{V}$ 却是一常量. 孤立导体这种性质是普遍的,即导体所带电量与其电势之比 $\frac{q}{V}$ 是一个与导体的带电量和电势无关的物理量,称为孤立导体的电容,用 C 表示,即

$$C = \frac{q}{V}$$

上式表明,孤立导体的电容在量值上等于导体具有单位电势时所带的电量. 因此,导体的电容是表征导体容纳电荷能力的物理量. 对于真空中的孤立导体球,其电容为

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

可见,球的半径 R 越大,则电容 C 越大. 对于给定的导体,电容为一常量,它只与导体的形状和线度有关.

电容的单位为法拉,简称法(F),法拉的单位很大,在实用中常用微法(μF)和皮法(pF),它们之间的关系为

$$1 \text{ F} = 10^6 \mu\text{F}, 1 \mu\text{F} = 10^6 \text{ pF}$$

二、电容器的电容

实际上,孤立导体是不存在的,周围总会有其他导体,由于静电感应会改变电场分布,导体的电势不仅与其本身所带电量有关,而且还与周围其他导体的位置及形状有关,因此,其他导体的存在将会影响该导体的电容.

在实际应用中是设计一种导体组合,一方面使其电容大而几何尺寸小,另

一方面使这种导体组合的电容不受其他物体的影响. 两个靠近而又相互绝缘的导体所组成的系统就是这样的组合, 称为电容器. 电容器带电时, 常使两极板带等量异号电荷. 电容器的电容定义为一个极板所带电量 q ($q > 0$) 与两极板间电势差 $V_1 - V_2$ ($V_1 > V_2$) 之比, 即

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} \quad (12-2)$$

前面提及的孤立导体, 事实上并不存在, 它至少和地球有关. 所以孤立导体的电容实际上就是它和地球组成的电容器的电容. 因为地球的电势一般取为零, 所以孤立导体的电势等于它和地球的电势差.

三、几种常见的电容器及其电容

1. 平行板电容

最简单的电容器是平行板电容器, 它由两块靠得很近的平行极板所组成. 设两极板的面积均为 S , 间距为 d , 两极板所带电量分别为 $+q$ 和 $-q$. 在实际应用中, 两极板间距通常很小, 两极板面积的线度相对很大, 因此两极板之间的电场接近于匀强电场. 略去边缘效应, 由高斯定理可得极板间的场强大小为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

式中 $\sigma = \frac{q}{S}$ 为极板面电荷密度, E 的方向由带正电的极板指向带负电的极板. 两极板间的电势差为

$$V_A - V_B = \int_A^B E \cdot dl = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

由电容的定义, 可得平行板电容器的电容为

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (12-3)$$

由式(12-3)可见, 平行板电容器的电容与极板面积成正比, 与极板间的距离成反比, 而与组成极板的导体材料及其所带电量无关.

2. 圆柱形电容器

圆柱形电容器由两个同轴导体圆柱面组成, 如图 12-8 所示. 设圆柱长度为 l , 内、外圆柱面的半径分别为 R_A 和 R_B , 且 $l \gg R_B - R_A$, 这时柱面两端的边缘效应可略去不计. 假定内、外圆柱所带电量分别为 $+q$ 和 $-q$, 柱面上电荷均匀分布, 因此两圆柱面间的电场可看成是两个无限长均匀带电圆柱面

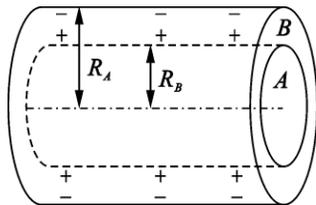


图 12-8 圆柱形电容器

的电场. 根据高斯定理可求得两柱面间离轴为 r 处的场强大小为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (R_A < r < R_B)$$

式中 $\lambda = \frac{q}{l}$ 为圆柱面轴向单位长度的电量, 场强的方向垂直于圆柱面的轴线.

于是两圆柱面间的电势差为

$$V_A - V_B = \int_A^B E \cdot dl = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

根据电容器的定义可得

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_B}{R_A}} \quad (12-4)$$

3. 球形电容器

球形电容器由半径分别为 R_A 和 R_B 的两个金属球壳所组成(图 12-9). 设内球带电 $+q$, 外球带电 $-q$, 则正、负电荷分别均匀地分布在内球的外表面和外球的内表面上. 这时, 在两球壳之间, 具有球心对称性的电场, 距球心为 r ($R_A < r < R_B$) 处的 P 点的场强为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

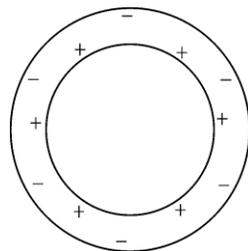


图 12-9 球形电容器

两球壳间的电势差为

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \int_{R_A}^{R_B} E \cdot dr = \int_{R_A}^{R_B} E dr \\ &= \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \end{aligned}$$

根据电容的定义, 可得球形电容器的电容为

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A} \quad (12-5)$$

上式再一次说明了电容器的电容只和它的几何结构有关. 结构形状一定的电容器, 其电容具有固定值, 与它是否带电或所带电荷量的多少无关.

从几个常见电容器电容的计算可知, 计算电容的一般步骤是:

- (1) 设电容器两极板带有等量异号电荷;
- (2) 求出极板间的电场强度分布;
- (3) 计算两极板间的电势差;

(4)根据电容器电容的定义求出电容.

应该指出,除以上讨论的几种典型电容器的电容外,实际上,任何导体间都存在着电容.导线与导线、元件、金属外壳之间,元件与金属外壳之间,都存在着电容.这些电容在电工和电子技术中通常叫做分布电容.分布电容的量值通常比较小,且不容易计算.在一般情况下,它的作用可以忽略不计.但在安装电子设备,尤其是在高频电路中,却必须考虑分布电容的影响.

在生产和科研中实际使用的电容器种类繁多,外形各不相同,但它们的基本结构是一致的.电容器的用途很多,应用极广,各种电子仪器、收音机、电视机中都用到电容器.电容器在电路中具有隔直流、通交流的作用,电容器和其他元件可组合成振荡放大器以及时间延迟电路等等.电容器还是一种储存电能(电势能)的元件,在很多仪器中,使用一个大容量的电容器组,它在充电过程中所聚积和储存的电能,可在放电过程的极短时间内释放出来,从而获得很大的电功率.

四、电介质电容器

上面所讨论的电容器,极板间都是真空的情况.实际上,常用的电容器多数在两极板之间充满某种电介质.实验证明,充有电介质的电容器,其电容可增大许多倍,这说明电容器的电容还和两极板间所充的电介质有关.实验指出,两极板间充满某种各向同性均匀电介质时的电容 C 与两极板间为真空时的电容 C_0 的比值为

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0} \quad (12-6)$$

ε_r 叫做该介质的相对电容率(或相对介电常量),它是表征电介质本身特性的物理量.在量值上等于电容器两极板间充满电介质时的电容和两极板间为真空时的电容之比.式(12-6)指出,当两极板间充满均匀电介质时,电容器的电容要增大 ε_r 倍.例如,平行板电容器极板间充满相对电容率为 ε_r 的均匀电介质后,其电容为

$$C = \varepsilon_r C_0 = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon \frac{S}{d}$$

式中

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (12-7)$$

ε 叫做电介质的电容率.由式(12-7)可知, ε_r 为电容之比,是单位为 1 的量,所以电介质的电容率 ε 的单位和真空电容率 ε_0 的单位相同.按所充电介质的不同,电容器可分为空气电容器、纸介质电容器、云母电容器、陶瓷电容器、涤纶电

容器、钛酸钡电容器和电解电容器等。

§ 12 - 3 静电场中的电介质

电介质是电阻很大、导电能力很差的物质,电介质的主要特征在于它的原子或分子中的电子和原子核的结合力很强,电子处于束缚态。在一般条件下,电子不能挣脱原子核的束缚,因而,在电介质内部能作宏观运动的电子极少,导电能力也就极弱。通常为了突出电场与电介质相互影响的主要方面,在静电问题中总是忽略电介质的微弱的导电性,把它看作理想的绝缘体。

一、有极分子和无极分子电介质

按照近代原子的核式模型,原子是由带正电的原子核和分布在核外的电子系组成,在研究原子的静电特性时,我们可以设想核内的正电荷和核外电子系的负电荷在空间有稳定的分布,这些分布在极小范围内(原子的线度是 10^{-10} m)的电荷系在远处所激发的电场,在一级近似下可以认为是各自等效于集中在某点的一个电荷所激发的电场,这个点叫做该电荷系的“中心”。在正常情况下,核外负电荷相对核内正电荷呈现球对称分布,因此,所有原子的正、负电荷中心重合在一起,每个原子的电偶极矩等于零。

当原子结合成分子时,原子中最外层的价电子将在各原子间重新分配。如果合成分子中正电荷和负电荷的中心不相重合,这一对等值而异号的点电荷系等效于一个电偶极子。凡属于这种类型的分子叫做有极分子,如图 12 - 11(a)。

另有一类电介质,其分子中各原子核外的价电子为几个原子所共有,即价电子是在几个原子核的联合电场中运动,其正、负电荷的中心重合在一起,它的等效电偶极矩等于零。凡属于这种类型的分子叫做无极分子,如图 12 - 10(a)所示。

基于有极分子和无极分子的电结构不同,它们在外电场中的变化过程也不相同,下面将分别讨论。

二、电介质的极化

当无极分子电介质处在外电场中时,在电场力作用下分子中的正、负电荷中心将发生相对位移,形成一个电偶极子,它们的等效电偶极矩 p 的方向都沿着电场的方向,如图 12 - 10(b)。对于一块电介质整体来说,由于电介质中每一个分子都形成了电偶极子,它们在电介质中将作如图 12 - 10(c)所示的排列。在电介质内部,相邻电偶极子的正负电荷相互靠近,如果电介质是均匀的,则在其内部处处仍然保持电中性,但是,在电介质的两个与外电场强度 E_0 相垂直的表面层里,将分别出现正电荷和负电荷,如图 12 - 10(c)。这些电荷不能离开电介

质,也不能在电介质中自由移动,我们称之为极化电荷.这种在外电场作用下,在电介质中出现极化电荷的现象叫做电介质的极化.由于无极分子的极化在于正、负电荷中心的相对位移,所以常将无极分子的极化叫做位移极化.

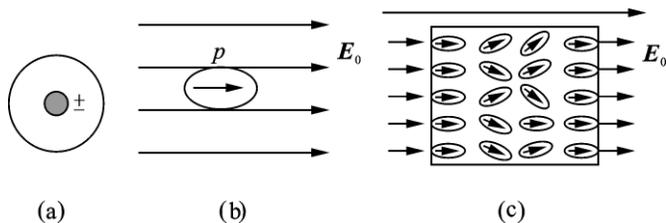


图 12 - 10 无极分子极化示意图

对于有极分子电介质来说,每个分子本来就等效为一个电偶极子,它在外电场的作用下,将受到力矩的作用,使分子的电偶极矩 p 转向电场的方向,如图 12 - 11(b).大量分子电偶极矩的统计平均便在沿外电场方向出现一附加的电偶极矩.在宏观上,则在电介质与外电场垂直的两表面上出现极化电荷,如图 12 - 11(c).有极分子的极化就是等效电偶极子转向外电场的方向,所以把有极分子的极化叫做取向极化.

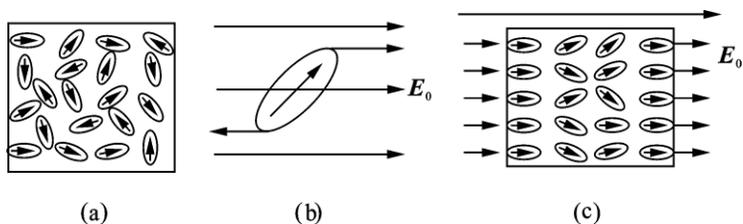


图 12 - 11 有极分子极化示意图

三、电极化强度

电介质极化的微观过程虽然不同,但宏观的效果却是相同的,都是在电介质的两个相对表面上出现了异号的极化电荷,在电介质内部有沿电场方向的电偶极矩.因此,下面从宏观上描述电介质的极化现象时,就不分为两类电介质来讨论了.

在电介质内任取一物理无限小的体积元 ΔV ,当没有外电场时,该体积元中所有分子的电偶极矩的矢量和 $\sum_i p_i$ 等于零.但是,在外电场的影响下,由于电介质的极化, $\sum_i p_i$ 将不等于零.因此,我们取单位体积内分子电偶极矩的矢量和,即

$$P = \frac{\sum p}{\Delta V} \quad (12-8)$$

作为量度电介质极化程度的基本物理量,称为该点(ΔV 所包围的一点)的电极化强度(P 矢量).

在国际单位制中,电极化强度的单位是 C / m^2 .

电介质的极化是电场和介质分子相互作用的过程,外电场引起电介质的极化,而电介质极化后出现的极化电荷也要激发电场并改变原电场的分布,重新分布后的电场反过来再影响电介质的极化,直到静电平衡时,电介质便处于一定的极化状态.所以,电介质中任一点的极化强度与该点的合场强 E 有关.实验证明,对于各向同性的均匀电介质, P 和电介质内该点处的合场强 E 成正比.在国际单位制中,这个关系可写成

$$P = \chi \epsilon_0 E \quad (12-9)$$

式中的比例因数 χ 与电介质的性质有关,叫做介质的电极化率.

电介质极化时,极化的程度越高(即 P 越大),电介质表面上的极化电荷面密度 σ' 也越大.它们之间的关系是怎样的呢?我们仍以平行板电容中充满均匀的各向同性电介质为例来进行讨论.

如图 12-12 所示,在电介质中取一长度为 l ,底面积为 ΔS 的圆柱体,圆柱体两底面的极化电荷面密度分别为 $-\sigma'$ 和 $+\sigma'$.由于是均匀的电介质,这柱体内所有分子电偶极矩的矢量和的大小为

$$\sum p = \sigma' \Delta S l$$

因此,由电极化强度的定义可知,电极化强度的大小为

$$P = \frac{\sum p}{\Delta V} = \frac{\sigma' \Delta S l}{\Delta S l} = \sigma' \quad (12-10)$$

上式表明,平行板电容器中的均匀电介质,其电极化强度的大小等于极化产生的极化电荷面密度.

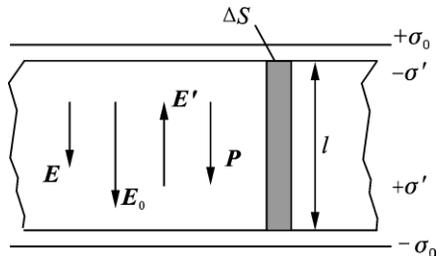


图 12-12

在一般情况下,若介质表面上某点的电极化强度与该点表面的外法线单位

矢量 e_n 的夹角为 θ ,则该点的极化电荷面密度 σ' 为

$$\sigma' = P \cos \theta = P_n = P \cdot e_n \quad (12 - 11)$$

式中 P_n 是 P 沿表面外法线方向的投影.

在电介质内部 ,可以取一任意曲面 S ,这时 e_n 为其外法线方向上的单位矢量. 可以证明 ,闭合曲面 S 内的极化电荷的代数和 $\sum q'_{\text{内}}$ 为

$$\sum q'_{\text{内}} = \oint_S P \cdot dS \quad (12 - 12)$$

这就是极化强度 P 与极化电荷分布之间的普遍关系式 ,它表明任意闭合曲面的极化强度 P 的通量 ,等于该闭合曲面内的极化电荷总量的负值.

四、电介质中的静电场

设想在一电场中放入某种电介质 ,由于电介质与外电场的相互作用和相互影响 ,最后达到静电平衡时 ,在电介质上出现一定分布的极化电荷. 极化电荷也会在空间激发电场 ,为了区别于极化电荷 ,我们把激发外电场的原有电荷系称为自由电荷 ,并用 E_0 表示它们所激发的场强 ,而用 E' 表示极化电荷所激发的场强. 根据场强叠加原理 ,应有

$$E = E_0 + E' \quad (12 - 13)$$

为了定量地了解电介质内部场强被削弱的情况 ,我们讨论如下特例 :图 12 - 11 表示一个“无限大”平行板电容器 ,两极板间充有极化率为 ϵ_r 的均匀电介质. 设极板上的自由电荷面密度为 $\pm \sigma_0$,电介质表面上的极化电荷面密度为 $\pm \sigma'$. 自由电荷的场强大小 $E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$,在图中用实线表示 ;极化电荷的场强大小 $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$,在图中用虚线表示. E' 的方向与 E_0 的方向相反 ,因此极板间电介质中的合场强 E 的大小为

$$E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\epsilon}$$

$$\text{有} \quad E' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} E_0 \quad (12 - 14)$$

$$\text{从而可得} \quad \sigma' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_0 \quad (12 - 15 \text{ a})$$

由于 $q_0 = \sigma_0 S$, $q' = \sigma' S$,故上式亦可写成

$$q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q_0 \quad (12 - 15 \text{ b})$$

式(12 - 15a)给出了在均匀各向同性的电介质中 ,极化电荷面密度 σ' 与自

由电荷面密度 σ_0 和电介质的相对电容率 ε_r 之间的关系. 大家知道, 电介质的 ε_r 总是大于 1 的, 所以 σ' 总比 σ_0 要小.

将 $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$, $E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$ 以及 $\sigma' = P$ 代入式(12 - 15 a), 可得电介质中电极化强度 P 与电场强度 E 之间的关系为

$$P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$$

写成矢量式有

$$P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E \quad (12 - 16)$$

如取 $x = \varepsilon_r - 1$ 则上式为 $P = x\varepsilon_0 E$

五、有电介质时的高斯定理

求解电介质中的场强问题, 一般只给出自由电荷和电介质的分布情况, 束缚电荷的分布情况是未知的. 由于束缚电荷决定于电介质内部的电场 E , 而 E 又是待求的, 这就使问题变得相当复杂. 如果引入一个适当的辅助量, 就可以避开束缚电荷而使计算简化.

高斯定理是建立在库仑定律基础上的, 在有电介质存在时它才成立, 只不过在计算总电场的电通量时, 应计及高斯面内所包含的自由电荷 q_0 和极化电荷 q' , 即

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_0 + q'$$

利用式(12 - 12), 可以消去极化电荷 $\sum q'$, 得到

$$\oint_S (\varepsilon_0 E + P) \cdot dS = \sum q_0$$

定义一个辅助量

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad (12 - 17)$$

D 称为电位移矢量. 则

$$\oint_S D \cdot dS = \sum q_0 \quad (12 - 18)$$

即通过任意闭合曲面的电位移通量, 等于该闭合曲面包围的自由电荷的代数和, 这就是有电介质时的高斯定理.

由式(12 - 17)定义的电位移 D 矢量, 说明电位移 D 与场强 E 和极化强度 P 有关, 是电位移矢量的定义式, 无论对各向同性电介质或各向异性电介质都是适用的.

对于各向同性电介质, 介质内任一点的电极化强度 P 与该点的合电场强度 E 成正比, 而且方向相同, 即

$$P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$$

代入式(12-17)后,得

$$D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

或

$$D = \varepsilon E \quad (12-19)$$

式(12-19)说明在各向同性的电介质中,电位移等于场强的 ε 倍.

例 12-2 半径为 R 的均匀带电球面,带电量为 q_0 ,电荷面密度为 σ_0 . 将其放在无限大均匀电介质中,介质的相对介电率为 ε_r . 试求介质中场强的分布及介质表面的极化电荷面密度 σ' .

解 球面上的电荷是均匀分布的,介质是均匀无限大的,因此 σ_0 和 σ' 的分布都具有球对称性,所以介质中的 D 、 E 、 P 也具有球对称性. 如图 12-13 所示,在介质中任取一点 a ,以 Oa 为半径作一球面 S ,由介质存在时的高斯定理得

$$\oint_S D \cdot dS = q_0$$

所以

$$D = \frac{q_0}{4\pi r^2} e_r$$

e_r 是沿球面半径向外的单位矢量,介质中的场强 E 为

$$E = \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r^2} e_r$$

因为 $D = \varepsilon_0 E + P$,所以介质中的极化强度 P 为

$$P = \frac{(\varepsilon_r - 1)q_0}{4\pi \varepsilon_r r^2} e_r$$

在介质的内表面上 P 的方向与内表面外法线的方向相反,所以介质内表面上的极化电荷面密度 σ' 为

$$\sigma' = P_n = \frac{(\varepsilon_r - 1)q_0}{4\pi \varepsilon_r R^2} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{q_0}{4\pi R^2} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0$$

上述结果表明,介质内表面的极化电荷与导体球面上的自由电荷异号,且 $|\sigma'| < |\sigma_0|$.

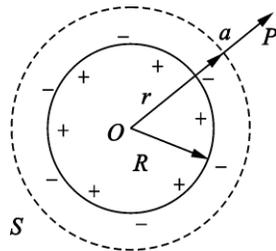


图 12-13

§ 12-4 静电场的能量

一、带电体系的静电能

带电体的带电过程,可以看成是电荷之间相对移动的过程.因此,可以认为带电体上的电荷是一点点地积累起来的.在积累的过程中,后加上去的电荷要

相对于先积累的电荷而移动,由于在电荷之间存在着相互作用的电场力,故在移动这些电荷时,外力必克服电场力而做功.根据能量守恒定律,外力对带电体系做功,应当等于带电体系静电势能(简称静电能)的增加.静电能本身的数值是相对的.至于说到一个带电体系所包含的全部静电能,就必须说明是相对于何种状态而言的.设想带电体系中的电荷可以分割为无限多个小部分,且这些部分最初都分散在彼此相距无穷远的地方,通常规定处于这种状态下的静电能为零.于是,任何状态下的带电体系的静电能 W_e 等于把各部分电荷从无限分散的状态聚集成现有带电体系时,抵抗静电力所做的功 A .

如果带电体系是由若干个带电体组成的,则通常把每一个带电体上的各部分电荷从无限分散的状态聚集起来时所做的功,看成是等于这个带电体的自能.然后,把每个带电体看成是一个不可分割的整体,而把各个带电体从无穷远处移到当前位置所做的功,看成是等于它们之间的相互作用能.于是,带电体系的总静电能 W_e ,可以看成是由每个带电体的自能和各个带电体之间的相互作用能组成的.

下面以平行板电容器充电过程为例,讨论电容器的静电能.

假设电容为 C 的电容器,在充电过程中某一瞬时,其极板上电量为 q ,则该瞬时电容器两极板之间的电势差为

$$U = \frac{q}{C}$$

如果将 dq 电量从负极板转移到正极板,则外力做功为

$$dA = Udq = \frac{q}{C}dq$$

于是,当电容器两极板分别带有 $+Q$ 和 $-Q$ 电量时,外力所做总功

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

根据功能原理,电容器在充电过程中,外力做功使电容器的能量增加,这就是电容器储存的静电能

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

根据 $Q = CU$,上式又可改写为

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU \quad (12-20)$$

二、静电场的能量

从上面的讨论可以看到,带电体系具有一定的电能,那么这些电能究竟集

中在电荷上还是定域于电场中呢?这个问题在静电学中无法回答,因为在静电场中电场总是伴随着电荷而存在的.但在第14章中将会知道,变化的电场和磁场以一定速度在空间传播形成电磁波,在电磁波中,电磁场可以脱离激发电磁场的场源而传播到很远的地方,且电磁波携带着能量.大量实验事实表明,电能定域于电场之中.所以,带电体系具有的能量实质上就是该体系所建立的电场能量.

下面仍以平行板电容器为例,推导静电场的能量公式.由式(12-20)知,电容器的电能 $W_e = \frac{1}{2}CU^2$,此能量应储存于电容器两极板间的电场中.由于 $U = Ed$, $C = \frac{\epsilon S}{d}$,所以

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} \cdot (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (Sd)$$

式中 S 为平行板电容器极板的面积, d 为极板之间的距离,因此 Sd 为电容器两极板间的体积,也就是全部电场所占空间的体积.由于极板间的电场是均匀的,因而能量的分布也应是均匀的.其单位体积内的能量,即电场的电能密度为

$$\omega_e = \frac{W_e}{Sd}$$

所以

$$\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E \quad (12-21)$$

电场电能密度式(12-21)虽然是通过平行板电容器中的均匀电场的特例推导出来的,但却是普遍成立的.当电场不均匀时,电场的总能量 W_e 应等于电能密度的体积分,即

$$W_e = \int_V \omega_e dV \quad (12-22)$$

积分区域遍及整个电场存在的空间.

在真空中, $D = \epsilon_0 E$,式(12-21)简化为 $\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$,它纯粹是指电场的能量.

在各向同性的线性电介质中, $D = \epsilon_r \epsilon_0 E$,有

$$\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$$

它还包含了电介质的极化能.

在各向异性电介质中,一般而言 D 与 E 方向不同,这时必须采用普遍的表

达式(12-21). 对非线性有损耗的电介质, 没有上述简单的结果. 这时, 在对电介质所做的极化功中, 只有一部分转化为极化能, 另一部分则转化为热能.

例 12-3 真空中半径为 R 、带电量为 Q 的均匀球壳上, 电荷均匀分布. 试求电场的总能量.

解 先求出球壳在空间上的场强. 由于电荷分布具有球对称性, 所以在距离球心为 r 处各点场强大小相等, 方向沿径向. 由高斯定理可得均匀带电球壳的场强分布为

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r, & (r > R) \\ 0, & (r < R) \end{cases}$$

取体积元 $dV = 4\pi r^2 dr$, 则均匀带电球壳电场的总能量为

$$\begin{aligned} W_e &= \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV \\ &= \int_R \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

思考题

12-1 下列各叙述是否正确? 在什么情况下正确? 在什么情况下不正确? 请举例说明之.

- (1) 接地的导体都不带电;
- (2) 一导体的电势为零, 则该导体不带电;
- (3) 任何导体只要它所带的电量不变, 则其电势也是不变的.

12-2 有人说, 因为达到静电平衡时, 导体内部不带电, 所以利用高斯定理可以证明导体内部场强必为零. 这种说法是否正确?

12-3 为什么高压电器设备上金属部件的表面要尽可能不带棱角?

12-4 在一个孤立导体球壳的中心放一个点电荷, 球壳内外表面上的电荷分布是否均匀? 如果点电荷偏离球心, 情况又如何?

12-5 一个孤立导体球带电量 Q , 其表面附近的场强沿什么方向? 当我们将另一带电体移近这个导体球时, 求表面附近的场强将沿什么方向? 其上电荷分布是否均匀? 其表面是否等电势? 导体内任一点的电场强度有无变化? 导体球的电势有无变化?

12-6 一带电导体放在封闭的金属壳内部. (1) 若将另一带电导体从外面移近金属壳, 壳内的电场是否改变? (2) 若将金属壳内部的带电导体在壳内移

动或与壳接触时,壳外部的电场是否改变?(3)如果壳内有两个等值异号的带电体,则壳外的电场如何?

12-7 一导体球上不带电,其电容是否为零?当平行板电容器的两极板上分别带上等值同号的电荷时,其电容值是否与不带电时相同?

12-8 有人说:“由于 $C = \frac{Q}{U}$,所以电容器的电容与其所带电荷成正比”。

这话对吗?如果电容器两极板的电势差增加一倍, $\frac{Q}{U}$ 将如何变化?

12-9 在下列情况下平行板电容器的电势差、电荷、电场强度和所贮存的能量将如何变化?

- (1)断开电源,并使极板间距加倍,此时极板间为真空;
- (2)断开电源,并使极板间充满相对电容率 $\epsilon_r = 2.5$ 的油;
- (3)保持电源与电容器两极相连,使极板间距加倍,此时极板间为真空;
- (4)保持电源与电容器两极相连,使极板间充满相对电容率 $\epsilon_r = 2.5$ 的油。

12-10 一平行平板电容器被一电源充电后,将电源断开,然后将一厚度为两极板间距一半的金属板放在两极板之间。试问下述各量如何变化?

(1)电容;(2)极板上电荷;(3)极板间的电势差;(4)极板间的电场强度;(5)电场的能量。

12-11 如果圆柱形电容器的内半径增大,使两柱面之间的距离减为原来的一半,此电容器的电容是否增大为原来的两倍?

12-12 比较电介质极化现象与导体的静电平衡有什么不同?

12-13 怎样从物理概念上来说明自由电荷与极化电荷的差别?

12-14 电势的定义是单位电荷具有的电势能,为什么带电电容器的能量是 $\frac{1}{2}QV$,而不是 QV 呢?

12-15 (1)一个带电的金属球壳里充满了均匀电介质,外面是真空,此球壳的电势是否等于 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R}$?为什么?(2)若球壳内为真空,球壳外是无限大均匀电介质,这时球壳的电势为多少? Q 为球壳上的自由电荷, R 为球壳半径, ϵ_r 为介质的相对电容率。

习 题

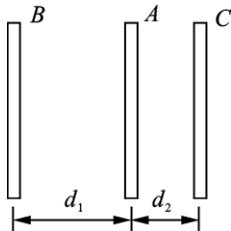
12-1 半径为 R_1 的金属球 A 位于同心的金属球壳内,球壳的内、外半径分别为 R_2 、 R_3 ($R_2 < R_3$)。现在使金属球 A 带电量为 $+Q$,则此球壳的电势为

多少？

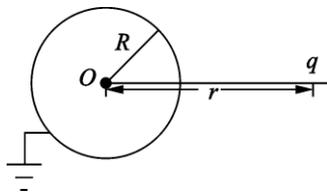
12-2 一导体球半径为 R_1 ，外罩一半径为 R_2 的同心薄导体球壳，外球壳所带总电荷为 Q ，而内球的电势为 V_0 。求此系统的电势和电场分布。

12-3 有两个同心球面，半径分别为 $R_1 = 10.0 \text{ cm}$ ， $R_2 = 12.0 \text{ cm}$ ，两球面都均匀带电。已知两球面之间的电势差 $U = V_{R_1} - V_{R_2} = 900 \text{ V}$ ，外球面的电势是 $V_{R_2} = 750 \text{ V}$ 。求各球面的带电量。

12-4 如题图所示，三块平行导体平板 A、B、C 的面积均为 S ，其中 A 板带电 Q ，B、C 板不带电。A 和 B 间相距为 d_1 ，A 和 C 之间相距为 d_2 。求：(1) 各导体板上的电荷分布和导体板间的电势差；(2) 将 B、C 导体板分别接地，再求导体板上的电荷分布和导体板间的电势差。



习题 12-4 图



习题 12-5 图

12-5 如题图所示，在真空中将半径为 R 的金属球接地，在与球心 O 相距为 r ($r > R$) 处放置一点电荷 q ，不计接地导线上电荷的影响，求金属球表面上的感应电荷总量。

12-6 地球和电离层可当作一个球形电容器，它们之间相距约为 100 km ，试估算地球电离层系统的电容，设地球与电离层之间为真空。

12-7 半径分别为 a 和 b 的两个金属球，球心间距为 r ($r \gg a$ ， $r \gg b$)，今用一根电容可忽略的细导线将两球相连。试求：

(1) 该系统的电容；

(2) 当两球所带的总电荷是 Q 时，每一球上的电荷是多少？

12-8 两线输电线的线径为 3.26 mm ，两线中心相距 0.50 m ，输电线位于地面上空很高处，因而大地影响可以忽略，求输电线单位长度的电容。

12-9 半径为 R_1 的导体球被围在内半径为 R_2 、外半径为 R_3 、相对电容率为 ϵ_r 的介质球壳内，它们是同球心的。若导体带电为 Q ，则导体内球表面上的电势为多少？

12-10 盖革-米勒管可用来测量电离辐射，该管的基本结构是由半径为 R_1 的直导体和同轴的半径为 R_2 的导体圆筒组成。半径为 R_1 的长直导体作为一

个电极,半径为 R_2 的同轴圆筒为另一个电极,它们之间充以相对电容率 $\epsilon_r \approx 1$ 的气体.当电离粒子通过气体时,能使其电离,若两极间有电势差时,极间有电流,从而可测出电离粒子的数量.以 E_1 表示半径为 R_1 的长直导体附近的电场强度.(1)求两极间电势差的关系式;(2)若 $E_1 = 2.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $R_1 = 0.30 \text{ mm}$, $R_2 = 20.00 \text{ mm}$,两极间的电势差为多少?

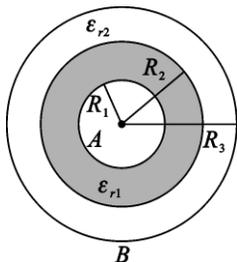
12-11 一片二氧化钛晶片,其面积为 1.0 cm^2 ,厚度为 0.10 mm ,把平行平板电容器的两极板紧贴在晶片两侧.求:(1)电容器的电容;(2)电容器两极加上 12 V 电压时,极板上的电荷为多少?此时自由电荷和极化电荷的面密度各为多少?(3)求电容器内的电场强度.

12-12 有一个平板电容器,充电后极板上电荷面密度为 $\sigma_0 = 4.5 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$.现将两极板与电源断开,然后再把相对电容率为 $\epsilon_r = 2.0$ 的电介质插入两极板之间,此时电介质中的 D 、 E 和 P 各为多少?

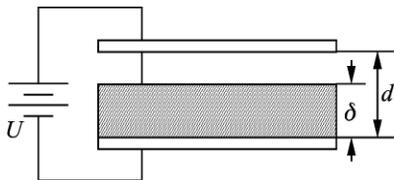
12-13 在一半径为 R_1 的长直导线外套有氯丁橡胶绝缘护套,护套外半径为 R_2 ,相对电容率为 ϵ_r ,设沿轴线单位长度上导线的电荷密度为 λ ,试求介质层内的 D 、 E 和 P .

12-14 如题图所示,设有两个薄导体同心球壳 A 与 B ,它们的半径分别为 $R_1 = 10 \text{ cm}$ 与 $R_3 = 20 \text{ cm}$,并分别带有电荷 $-4.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ 与 $1.0 \times 10^{-7} \text{ C}$,球壳间有两层介质,内层介质的相对电容率 $\epsilon_{r1} = 4.0$,外层介质的相对电容率 $\epsilon_{r2} = 2.0$,其分界面的半径为 $R_2 = 15 \text{ cm}$,球壳 B 外的介质为空气.求:

- (1) 两球间的电势差 U_{AB} ;
- (2) 离球心 30 cm 处的电场强度;
- (3) 球 A 的电势.



习题 12-14 图



习题 12-15 图

12-15 如题图,有一空气平板电容器极板面积为 S ,间距为 d ,现将该电容器接在端电压为 U 的电源上充电.分别求下列情况下极板上的电荷 Q ,极板间的电场强度 E 和电容器的电容 C .当(1)充足电;(2)充足电后平行插入一块面

积相同,厚为 δ ,相对电容率为 ε_r 的电介质板;(3)将上述电介质换为相同大小的导体板.

12 - 16 有一平行平板电容器,两极板被厚度为 0.01 mm 的聚四氟乙烯薄膜所隔开.求该电容器的额定电压.

12 - 17 空气中半径为 1.0 cm 和 0.10 cm 的长直导线上,表面电荷的最大电荷面密度分别为多少?

12 - 18 半径为 R_1 的导体球上带有电量 $+Q$,其外有一同心的导体球壳,半径为 R_3 ,中间充满两种均匀电介质,分界面的半径为 R_2 .已知 $R_1 < R_2 < R_3$, R_1 与 R_2 之间电介质的相对电容率为 ε_{r_1} , R_2 与 R_3 之间电介质的相对电容率为 ε_{r_2} .试求:(1)两介质内的电场强度 E_1 、 E_2 ;(2)导体球与球壳间的电压 $V_1 - V_2$;(3) R_1 与 R_3 之间电场的能量.

12 - 19 一平行板空气电容器,极板面积为 S ,板间距为 d ,充电至带电 Q 后与电源断开,然后用外力缓缓地把两极间距拉开到 $2d$.求:(1)电容器能量的改变;(2)在此过程中外力所做的功,并讨论此过程中的功能转换关系.

12 - 20 有三个同心的薄金属球壳,它们的半径分别为 a 、 b 、 c ($a < b < c$),带电量分别为 q_1 、 q_2 、 q_3 .求这一带电体系的静电能.

第 13 章 稳恒磁场

静止电荷的周围存在着电场. 当电荷运动时, 在它的周围不仅有电场, 而且还有磁场. 本章主要研究两个方面的问题: (1) 对稳恒电流磁场的描述, 阐明其规律和性质. 主要介绍毕奥 - 萨伐尔定律、磁场的高斯定理和安培环路定理. (2) 磁场对处于其中的载流导体及运动电荷所施加的作用力. (3) 介绍影响磁场的物质——磁介质.

虽然稳恒磁场与静电场是不同性质的场, 有着不同的规律, 但它们都是矢量场, 在不少方面有相似之处. 因此, 学习本章内容时, 应采取对比的方法, 注意磁场与电场之间的区别和联系. 这两种场的区别构成了世界的多样性, 而它们的联系和相似又构成了世界的和谐与对称美.

§ 13 - 1 恒定电流的基本概念

一、电流

电流是由大量电荷的定向运动形成的. 当导体内部的场强不为零时, 导体中的自由电荷将受到电场力的作用而作定向运动, 电荷的定向运动形成电流. 形成电流的带电粒子统称为载流子. 载流子可以是电子、质子和离子等.

电流的强弱用电流强度来描述. 电流强度是单位时间内通过导体某一横截面的电荷, 简称电流, 用 I 表示. 若在时间间隔 dt 内, 通过导体截面的电荷为 dq , 则

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (13 - 1)$$

如果电流不随时间变化, 则叫做恒定电流.

电流是标量, 习惯上将正电荷的定向运动方向规定为电流的方向. 在导体中电流的方向从高电势处指向低电势处. 在国际单位中, 电流的单位是安培 (A).

二、电流密度

在实际问题中, 电流在导体中各处的分布常常是不均匀的, 即导体中各点电流的大小和方向不相同. 为了能细致地描述导体中的电流分布情况, 需要引入一个新的物理量——电流密度 j .

电流密度是矢量, 其大小和方向定义如下: 导体中任意一点电流密度 j 的大

小, 等于在单位时间内通过该点附近垂直于电流方向的单位面积的电荷. j 的方向为正电荷在该点的运动方向.

如图 13-1(a) 所示, 设想在导体中某处取一面积元 dS , 并使 dS 的法向单位矢量与正电荷运动方向(电流密度 j 的方向)相同, 在时间 dt 内通过面积元 dS 的电荷为 dQ , 则该处的电流密度 j 为

$$j = \frac{dQ}{dSdt} e_n = \frac{dI}{dS} e_n \quad (13-2)$$

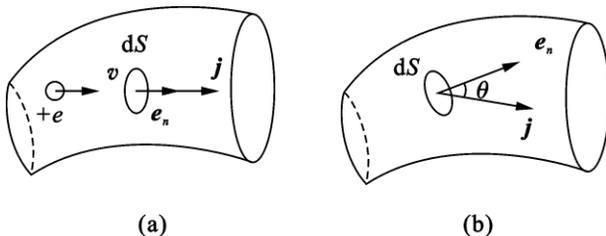


图 13-1 电流密度的定义

如果面积元 dS 的法向单位矢量 e_n 与正电荷运动方向(电流密度 j 的方向)成 θ 角, 如图 13-1(b) 所示, 则通过面积元 dS 的电流 dI 为

$$dI = j dS \cos \theta = j \cdot dS$$

式中 $dS = dS e_n$

通过导体中任意有限截面的电流为

$$I = \int_S j \cdot dS \quad (13-3)$$

电流 I 和电流密度 j 都是描述电荷流动的物理量, 电流 I 虽能描写电流的强弱, 但它只能反映导体截面的整体电流特征. 电流密度则能够精确地描述导体内各点的电流分布情况, 它是空间位置的矢量函数.

三、恒定电流条件

在大块导体内电流密度可以处处不同, 还可能随时间变化, 在本书中我们只讨论恒定电流. 当导体中通过恒定电流时, 导体内各点的电流密度大小和方向均不随时间变化. 恒定电流有一个很重要的性质: 通过任一封闭曲面的恒定电流为零, 即

$$I = \oint_S j \cdot dS = 0 \quad (13-4)$$

上式为恒定电流条件的数学表示. 它表明, 当电流分布恒定时, 从闭合曲面 S 某一部分流入的电流, 等于从 S 面其他部分流出的电流. 这就决定了恒定电流的电路必然是闭合电路, 在无分支的恒定电流电路中, 通过导线各个截面的电流

都相等.

当通过任一封闭曲面的电流为零时,封闭曲面内的总电荷不随时间变化. 考虑到封闭曲面的任意性,可得到如下结论:在恒定电流情况下,导体内电荷的分布不随时间变化. 不随时间变化的电荷分布会产生一个不随时间变化的电场,这种电场称为恒定电场. 导体中恒定的不随时间变化的电荷分布就像固定的静止电荷分布一样,因此,恒定电场与静电场有许多相似之处,比如都服从高斯定理和环路定理,电势差的概念也同样适用等.

但是必须注意,在恒定电场中,电荷分布不变并不意味着电荷不移动,否则就没有电流的存在了. 另外,静电场中导体内部的场强为零,而恒定电场中导体内部的场强不为零.

四、欧姆定律的微分形式

一般来说,电荷的运动是电场力对电荷做功的结果,电流的分布与电场的分布有一定关系. 根据一段电路的欧姆定律可以得出任一点的电流密度 j 与该点场强 E 的关系.

在导体中取一微元圆柱体,其长度为 dl ,截面积为 dS ,轴线与电流方向平行,两端电势分别为 V 和 $V+dV$,如图 13-2 所示. 由欧姆定律有

$$dI = \frac{V - (V + dV)}{R} = -\frac{dV}{R}$$

$$R = \rho \frac{dl}{dS} = \frac{1}{\gamma} \frac{dl}{dS}$$

其中 ρ 是导体的电阻率, γ 是导体的电导率,因此有

$$\frac{dI}{dS} = -\gamma \frac{dV}{dl}$$

而 $\frac{dI}{dS} = j$, $-\frac{dV}{dl} = E$, 故

$$j = \gamma E$$

因为导体中任一点的 j 与该点 E 的方向相同,所以上式可写成矢量形式

$$j = \gamma E \quad (13-5)$$

此式称为欧姆定律的微分形式. 式(13-5)不仅适用于恒定电场,也适用于变化电场. 欧姆定律的微分形式从场的观点表述了导体中电场与电流分布之间的细节对应关系,它是反映介质的电磁性质的基本方程之一.

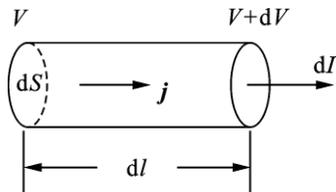


图 13-2 导体微元

§ 13 - 2 磁场 磁感强度

一、磁现象

人们最早发现并认识磁现象,是从天然磁石(磁铁矿)能吸引铁屑的现象开始的.早期认识的磁现象包括以下几个方面:

(1)天然磁铁能够吸引铁一类物质,这种性质称为磁性.磁性最强的地方称为磁极.一只能够在水平面内自由转动的条形磁铁,在平衡时总是顺着南北指向.指北的一端称为指北极(N极),指南的一端称为指南极(S极).同性磁极相互排斥,异性磁极相互吸引.

(2)把磁铁作任意的分割,每一小块都有N极和S极,任一磁铁的N极和S极总是同时存在的.

(3)某些本来不显磁性的物质,在接近或接触磁铁后就有了磁性,这种现象称为磁化.

首先发现电流磁效应的是丹麦科学家奥斯特.1819年奥斯特发现,位于载流导线附近的磁针会受到力的作用而发生偏转.之后法国科学家安培又相继发现磁铁附近的载流导线会受到力的作用,两载流导线之间有相互作用力,运动的带电粒子会在磁铁附近发生偏转.

在以上实验事实基础上,1822年安培提出了物质磁性本质的假说.他认为磁性物质的分子中存在着小的回路电流,称为分子电流.这种分子电流相当于最小的基元磁体,物质的磁性就决定于物质中这些分子电流对外磁效应的总和.如果这些分子电流毫无规则地取各种方向,它们对外界引起的磁效应就会相互抵消,整个物体就不显磁性.当这些分子电流的取向出现某种有规则的排列时,就会对外界产生一定的磁效应.

随着科学技术的发展,安培假说逐渐得到了证实.用近代的观点来看,安培假说中的分子电流,可以看成是由分子中电子绕原子核的运动和电子与核本身的自旋运动产生的.

综上所述,一切磁现象都来源于电荷的运动,磁力就是运动电荷之间的一种相互作用力.

二、磁场

运动电荷之间的相互作用是怎样进行的呢?人们经过长期的研究认识到,在运动电荷周围的空间除了产生电场外,还产生磁场.运动电荷之间的作用是通过磁场进行的.因此,磁力作用的方式可表示为



磁场和电场一样,也是物质存在的一种形态. 磁场物质性的重要表现之一是磁场对磁体、运动电荷或载流导体有磁力的作用;表现之二是载流导体等在磁场中运动时,磁力要做功,从而显示出磁场具有能量.

三、磁感强度

磁场对磁针的作用,本质上是磁场对运动电荷的作用. 因此,我们可以根据试验运动电荷在磁场中的受力情况来研究磁场. 将一电量为 q , 速度为 v 的试验运动电荷引入磁场中, 实验发现:

(1) 运动电荷所受的磁力 F_m , 不仅与它的电量 q 和速率 v 有关, 还与它运动的方向有关, 并且 F_m 总是垂直于 v .

(2) 在磁场中的任一点存在着一个特征方向, 当电荷沿此方向或其反方向运动时所受磁力为零. 这个方向与电荷本身性质无关, 而且这个方向就是自由小磁针在该点平衡时 N 极的指向.

(3) 在磁场中的任一点, 电荷沿与上述特征方向垂直的方向运动时所受磁力最大(记为 F_{\max}), 并且 F_{\max} 与 qv 的比值是与 q 、 v 无关的确定值. 比值 $\frac{F_{\max}}{qv}$ 可因场点的位置而异, 是场中位置的函数.

上述的特征方向和比值 $\frac{F_{\max}}{qv}$ 分别反映了磁场在该点的方向特征和强弱特征, 为了描述磁场的性质, 我们据此定义一个矢量函数 B , 规定它的大小为

$$B = \frac{F_{\max}}{qv} \quad (13-6)$$

其方向为放在该点的小磁针平衡时 N 极的指向, B 矢量称为磁感强度.

实验同时发现, 磁力 F_m 总是垂直于 B 和 v 所组成的平面, 这样就可以根据最大磁力 F_{\max} 和 v 的方向确定 B 的方向如下: 由正电荷所受力 F_{\max} 的方向, 按右手螺旋前进法则, 沿小于 180° 的角度转向正电荷运动速度 v 的方向, 这时螺旋前进的方向便是该点 B 的方向, 如图 13-3 所示.

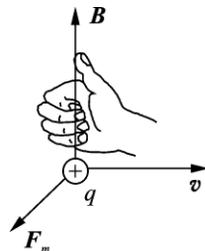


图 13-3 B 方向的确定

在国际单位制中, B 的单位是特斯拉 (tesla), 简称特 (T).

§ 13 - 3 毕奥 - 萨伐尔定律

一、毕奥 - 萨伐尔定律

在第 11 章中,计算任意带电体在某点的电场强度时,我们先求出电荷元 dq 在该点产生的电场强度 dE ,再按场强叠加原理计算此带电体在该点的电场强度 E .与此类似,我们可以把电流看作是许多微小电流段连接而成,只要求出微小电流段在某点产生的磁感强度,从它出发,应用场的叠加原理就可以计算出此电流在该点所产生的磁感强度.

在 19 世纪 20 年代,毕奥和萨伐尔两人对电流产生的磁场分布作了许多实验研究,最后由拉普拉斯总结出一条电流产生磁场的基本定律,称为毕奥 - 萨伐尔定律.现介绍如下:

设载流导线中的电流为 I ,导线横截面的线度与到考察点 P 的距离比较略去不计,这样的电流称为线电流.在线电流上取长为 dl 的定向线元 dl ,规定 dl 的方向与线元内电流的方向相同,并将乘积 $I dl$ 称为电流元.电流元 $I dl$ 在给定点 P 所产生的磁感强度 dB 的大小与电流元的大小 $I dl$ 成正比,与 $I dl$ 到 P 点的径矢 r 与 $I dl$ 之间夹角 θ 的正弦成正比,而与电流元到 P 点的距离 r 的平方成反比

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I dl \sin\theta}{r^2}$$

式中 μ_0 称为真空的磁导率,其值为

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$$

dB 的方向沿矢积 $dl \times r$ 的方向,如图 13 - 4 所示.

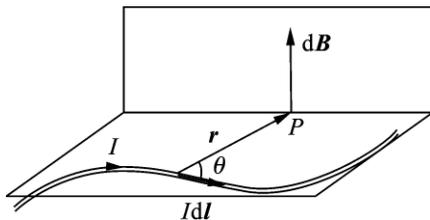


图 13 - 4 电流元产生的磁感强度

故 dB 可用矢量式表示为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I dl \times e_r}{r^2} \quad (13 - 7)$$

式中 e_r 为 r 的单位矢量.上式就是毕奥 - 萨伐尔定律的数学表示式.

任意载流导线在 P 点的磁感强度 B 可由积分求得,即

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idl \times e_r}{r^2} \quad (13-8)$$

二、毕奥 - 萨伐尔定律应用举例

实验证明,磁场也服从叠加原理.如果把有限长的载流导线看成是由无限多个电流元组成,那么就可以先用毕奥 - 萨伐尔定律求出任意一个电流元产生的磁感强度,再根据场的叠加原理进行积分,即可得到整个导线产生的磁场.

应用毕奥 - 萨伐尔定律计算磁场中各点磁感强度的具体步骤为:

1. 在载流导线上任选一电流元 Idl , 标出 Idl 到场点 P 的位矢 r , 确定两者的夹角 θ ;

2. 根据毕奥 - 萨伐尔定律,写出 Idl 在点 P 所产生的磁感强度 dB 的表达式;

3. 对 dB 的方向进行分析,一般情况下,应当在合适的坐标系中取 dB 的分量,当导线具有对称性时,可以进行对称性分析以简化计算步骤;

4. 最后,分别对 dB 的各个分量积分,积分范围为整个导线.再将各分量积分的结果合成为矢量,即得到磁感强度 B.

利用毕奥 - 萨伐尔定律,理论上可以计算任意电流系统所产生的磁场,困难仅来自数学计算.下面是几个便于计算的典型例子.

1. 载流长直导线的磁场

如图 13-5 所示,在长直导线中流过电流 I ,求距此导线为 r_0 的 P 点处的 B.

在导线上任取一电流元 Idl ,它到场点 p 的径矢为 r ,根据毕奥 - 萨伐尔定律, Idl 在 p 点产生的磁感强度为

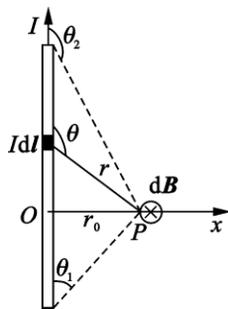
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times e_r}{r^2}$$

其方向垂直于 Idl 与 r 组成的平面,大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2}$$

式中 θ 为 Idl 与 P 点径矢 r 的夹角.

本问题中,长直导线上所有电流元在 P 点产生的磁感强度的方向均相同,即都是垂直于纸面朝里.因此,在叠加时只需简单地对 dB 积分即可.由图可以看出



13-5 载流长直导线的磁场

$$r = \frac{r_0}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{r_0}{\sin\theta}$$

$$l = r_0 \cot(\pi - \theta) = -r_0 \cot\theta \quad dl = \frac{r_0 d\theta}{\sin^2\theta}$$

于是

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\theta d\theta}{4\pi r_0^2}$$

积分

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I \sin\theta d\theta}{r_0^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (13-9)$$

其他位置的 B 的方向,都可用右手螺旋法则求出:用右手握住导线,拇指指向电流的方向,其余四指的指向就是 B 的方向.

如果载流导线可以看作是“无限长”导线,则 $\theta_1 = 0$ $\theta_2 = \pi$,由上式可得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \quad (13-10)$$

若 P 点位于导线延长线上,则有 $B = 0$.

2. 圆电流轴线上的磁场

如图 13-6 所示,半径为 R 的圆形导线上流过电流 I (通常称此电流为圆电流),求其轴线上距圆心为 x 的 P 点的磁感应强度.

选取如图 13-6 所示坐标系.圆电路上任一电流元 Idl 在 P 点产生的磁感强度的大小为

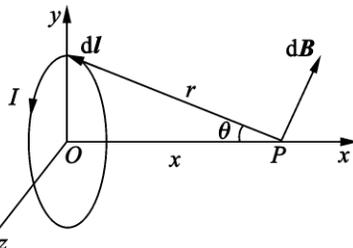


图 13-6 圆电流轴线上的磁场

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin 90^\circ = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

由图可见,圆电路上各电流元在 P 点产生的 dB 有不同的方向.为了便于求矢量和,可将 dB 分解为平行于 x 轴的分量 $dB_{//}$ 和垂直于 x 轴的分量 dB_{\perp} .由于圆电流关于 x 轴对称,其电流元的 dB_{\perp} 分量逐对抵消,而使总的垂直分量为零,所以 P 点 B 的大小为 $dB_{//}$ 之和,即

$$B = \int dB_{//} = \int dB \sin\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

对于给定点来说, r 和 $\sin\theta$ 都是常量,且 $\sin\theta = \frac{R}{r}$,因此

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dl \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin\theta}{r^2} \int_0^{2\pi R} dl \\
 &= \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned} \quad (13-11)$$

通过分析可知 B 的方向与电流方向也构成右手螺旋, 但与长直导线情况不同的是, 这里需用右手四指握成电流方向, 拇指所指就是 B 的方向。

当 $x=0$ 时, 得到圆心处的磁感强度

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} \quad (13-12)$$

如果 $x \gg R$, 则可得

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{x^3} \quad (13-13)$$

式中 $S = \pi R^2$ 为圆电流的面积。

将圆电流看作是一个磁偶极子, 并定义其磁矩为

$$m = ISe_n \quad (13-14)$$

上式中的 I 和 S 分别为圆电流的电流和面积, e_n 为圆电流的法向单位矢量, 与电流方向成右手螺旋(图 13-7)。

若利用式(13-14), 则圆电流轴线上的磁感强度可写成

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^3} \quad (13-15)$$

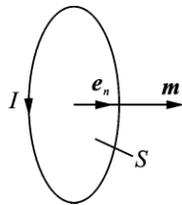


图 13-7 磁偶极子的磁矩

通常将磁偶极子的磁矩称作磁偶极矩。在解释磁介质的磁化机理时, 将会用到磁偶极矩的概念。

3. 螺线管电流轴线上的磁场

密绕在圆柱面上的螺旋线圈称为螺线管, 如图 13-8 所示。设螺线管的半径为 R , 线圈中通有电流 I , 沿管长方向每单位长度上均匀密绕 n 匝, 求轴线上任一场点 P 的磁感应强度。

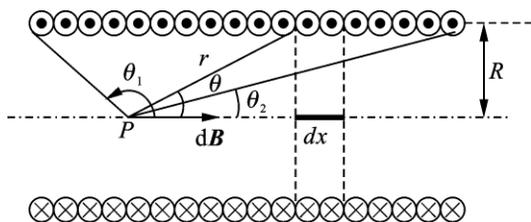


图 13-8 无限长载流直螺线管的磁场

取场点 P 为坐标原点, x 轴与螺线管轴线重合. 在 x 到 x + dx 的间隔中共有 $n dx$ 匝线圈(见图 13 - 8) 这些线圈可看作是电流为 $dI = nI dx$ 的“圆电流”. 此“圆电流”在 P 点产生的磁感应强度的大小可由式(13 - 11)得到

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{nIR^2 dx}{r^3}$$

由于 $R = r \sin\theta$, $l = R \cot\theta$ 和 $dl = -\frac{R}{\sin^2\theta} d\theta$ 故

$$dB = -\frac{\mu_0 nI}{2} \sin\theta d\theta$$

dB 的方向与“圆电流”环绕方向成右手螺旋, 即沿 x 轴方向. 整个螺线管电流可以当成由许多这样的“圆电流”组成, 而各“圆电流”产生的 dB 都有相同的方向. 积分便可得到螺线管电流在 P 点产生的磁感强度大小为

$$B = -\frac{\mu_0 nI}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 nI}{2} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \quad (13 - 16)$$

螺线管磁场的两种特殊情形是：

(1) 螺线管为无限长, 这时有 $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$, 于是得到

$$B = \mu_0 nI \quad (13 - 17)$$

(2) 半无限长螺线管的一端(比如左端), 这时有 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \pi$; 于是得到端面处的磁感强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2} \quad (13 - 18)$$

一个有限长载流螺线管轴线上各点的磁感强度值随 x 的变化, 如图 13 - 9 所示. 当螺线管长度 $L \gg R$ 时, 在螺线管中部很大范围内磁场近于均匀, 只在端面附近才显著下降.

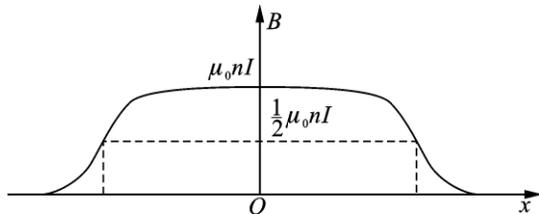


图 13 - 9 载流直螺线管轴线上的磁场分布

三、运动电荷的磁场

由于电流是运动电荷形成的, 所以可以从毕奥 - 萨伐尔定律导出运动电荷

产生的磁场. 如图 13 - 10 所示的电流元 Idl , 设导线的截面积为 S , 载流子的电荷、数密度和定向运动速度分别为 q 、 n 和 \boldsymbol{v} , \boldsymbol{v} 的方向与 I 的方向相同. 这样, 可以将电流元 Idl 用运动电荷的数据表示为

$$Idl = nSdlq\boldsymbol{v}$$

则

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \boldsymbol{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nSdlq\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}_r}{r^2}$$

上式中的 \boldsymbol{e}_r 是从该电流元到场点 P 方向的单位矢量. 因为 $nSdl = dN$ 为电流元中载流子的数目, 故一个运动电荷在 P 点产生的磁感强度

$$B = \frac{dB}{dN}$$

将 dB 表达式代入上式可得

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}_r}{r^2} \quad (13 - 19)$$

例 13 - 1 电子在氢原子的玻尔第一轨道上做圆周运动, 求运动的电子在原子核处产生的磁感强度的大小. 已知玻尔第一轨道半径为 $0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$.

解 电子做圆周运动的向心力是电子与核之间的库仑力, 即

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

式中 r 为轨道半径, v 为电子绕核做圆周运动的速率, 由上式可解出

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}} = 2.2 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

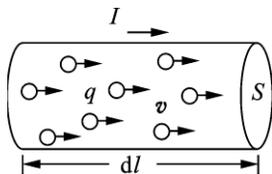
代入式(13 - 19)可得所求磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{r^2} = 12.5 \text{ T}$$

§ 13 - 4 磁场的高斯定理

一、磁感线

在静电场中可以用电场线来直观地表示电场的分布. 同样, 也可以用曲线来描述磁场中各处磁感强度的方向和大小, 这样的曲线称为磁感线. 磁感线上任一点的切线方向都和该点的磁感强度方向一致. 图 13 - 11 分别为直电流、圆电流和载流螺线管的磁感线的分布.



13 - 10 电流元中的运动电荷

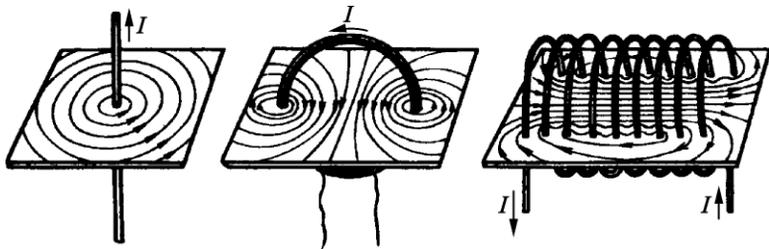


图 13 - 11 磁感线示意图

为了使磁感线能够定量地描述磁感强度的大小,规定通过空间某点垂直于 B 的单位面积的磁感线数目,等于该点磁感强度 B 的数值,即

$$\frac{dN}{dS_{\perp}} = B \quad (13 - 20)$$

因此,磁感强度 B 的数值就等于磁感线的数密度。 B 大的地方磁感线密集, B 小的地方磁感线稀疏。

磁感线有以下特性:

1. 任何磁感线都不会相交. 这一点和电场线是相同的.
2. 磁感线是闭合的曲线,既没有起点,也没有终点. 这一点和电场线不同,电场线总是从正电荷发出,到负电荷终止的. 磁感线的这个特性说明:磁场是与电场性质不同的一种场.

二、磁通量

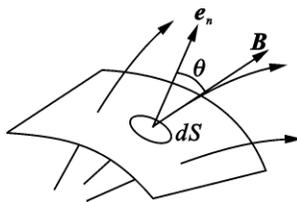
为描述磁场性质,类似静电场中引入电场强度通量那样,在稳恒磁场中引入磁通量的概念. 通过磁场中任一给定的面(平面或曲面)的磁感线的数目称为通过此面的磁通量,用 Φ_m 表示.

图 13 - 12 所示为非均匀磁场中一给定的曲面,在曲面上取一面积元矢量 dS . 设 dS 的方向与其所在处的 B 夹角为 θ , 则穿过 dS 的磁通量为

$$d\Phi_m = B \cos\theta dS = B \cdot dS$$

通过整个曲面 S 的磁通量为

$$d\Phi_m = \int_S B \cdot dS \quad (13 - 21) \quad \text{图 13 - 12 磁通量的计算}$$



由于 $d\Phi_m$ 的正负与 θ 的取值有关,而积分得到 Φ_m 的是所有 $d\Phi_m$ 的叠加,故 Φ_m 的值有可能为正,也有可能为负.

式(13 - 21)是计算磁通量的一般公式,由此公式可以看出,磁通量的计算,最终化为磁感强度 B 对面积的积分.

Φ_m 的单位是韦伯(Wb). $1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$.

三、磁场的高斯定理

对于闭合的曲面,规定各面元的方向指向曲面外部.按照这样的规定,从闭合曲面内部穿出的磁通量为正,从曲面外部穿入的磁通量为负.由于磁感线是闭合的,任一穿入封闭曲面的磁感线一定会穿出.因此,穿入闭合曲面的磁感线的总数和穿出闭合曲面的磁感线的总数相等.即

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (13-22)$$

上式可用文字表述为:通过任一闭合曲面的磁通量都等于零.这个结论称为磁场的高斯定理.磁场的高斯定理反映了磁场的的一个重要性质,即磁场是无源场.

§ 13 - 5 安培环路定理

在研究静电场时,我们曾从场强 \mathbf{E} 的环流 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 知道静电场是一个保守场,并由此引入电势这个物理量来描述静电场.

对于恒定电流所激发的磁场,也可用磁感强度 \mathbf{B} 沿任一闭合曲线的积分 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 来反映它的性质.

一、安培环路定理

真空中的安培环路定理可表述为:磁感强度 \mathbf{B} 沿任一闭合路径 L 的线积分(称为 \mathbf{B} 的环流)等于穿过此路径所包围面积的所有电流的代数和的 μ_0 倍.安培环路定理的数学表达式是

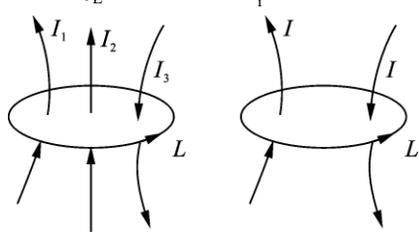
$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i \quad (13-23)$$


图 13 - 13 环路包围的电流

环路所包围电流的正负这样确定:先规定环路 L 的绕行方向,与此方向成右手螺旋的电流为正,反之为负.例如图 13 - 13(a)中的 I_1 、 I_2 为正, I_3 为负.因此 \mathbf{B} 的环流为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3)$$

如果闭合路径 L 如图 13 - 13(b) 所示, 包围的电流等值反向, 或者环路中并没有包围电流, 则

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

下面我们以长直载流导线产生的磁场为例, 来验证安培环路定理.

1. 取对称环路包围电流

在垂直于长直载流导线的平面内, 以载流导线为圆心作一条半径为 r 的圆形环路 l , 如图 13 - 14 所示. 在这圆周上任一点的磁感强度 B 的大小为 $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$, 方向与圆周相切. 环路的绕行方向取为逆时针方向. 在环路上取一线元矢量 $d\mathbf{l}$, 其方向与 B 的方向一致, 即两者的夹角 $\theta = 0$. 因此, B 沿环路 l 的环流为

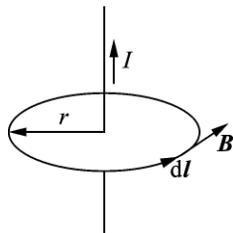


图 13 - 14 对称环路包围电流

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_l d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

2. 取任意环路包围电流

在垂直于长直载流导线的平面内, 围绕导线作一条如图 13 - 15 所示的任意环路 l , 环路的绕行方向取为逆时针方向. 在环路上任取一段线元 $d\mathbf{l}$. 载流直导线在线元 $d\mathbf{l}$ 处产生的磁感强度 B 大小为 $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$. 若 B 与 $d\mathbf{l}$ 的夹角为 θ , 则 $B \cdot d\mathbf{l} = B \cos\theta dl$. 由图可看出, 导线对线元 $d\mathbf{l}$ 的张角为 $d\varphi$, 并且有关系 $dl \cos\theta = r d\varphi$.

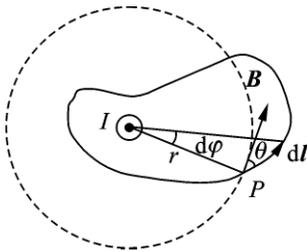


图 13 - 15 任意环路包围电流

对整个环路积分

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_l \cos\theta dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

3. 取任意环路不包围电流

在垂直于长直载流导线的平面内, 在载流直导线的外侧作一条如图 13 - 16 所示的任意环路 l , 取环路的绕行方向为逆时针方向.

以载流直导线为圆心向环路作两条夹角为 $d\varphi$ 的射线, 在环路上截取两个线元 $d\mathbf{l}_1$ 和 $d\mathbf{l}_2$, 它们到导线的距离分别为 r_1 和 r_2 . 设导线在 $d\mathbf{l}_1$ 处的磁感强度为

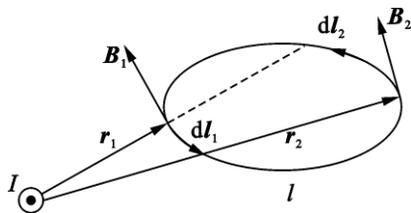


图 13 - 16 任意环路不包围电流

$B_1 \cdot dl_1$ 和 B_1 的夹角为 θ_1 , 在 dl_2 处的磁感强度为 B_2 , dl_2 和 B_2 的夹角为 θ_2 . 从图 13 - 16 可以看出 $\theta_1 > \frac{\pi}{2}$ 而 $\theta_2 < \frac{\pi}{2}$. 利用前面的关系 $dl \cos \theta = r d\varphi$, 可得

$$B_1 \cdot dl_1 = -B_1 r_1 d\varphi = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$B_2 \cdot dl_2 = B_2 r_2 d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

所以有

$$B_1 \cdot dl_1 + B_2 \cdot dl_2 = 0$$

从载流直导线中心 O 出发, 可以作许多条射线, 将环路分割成许多成对的线元. 磁感强度与每对线元的标积之和都等于 0, 故得

$$\oint_l B \cdot dl = 0$$

即环路不包围电流时, B 的环流为零.

安培环路定理反映了稳恒磁场的另一个重要性质——稳恒磁场是非保守场.

二、安培环路定理应用举例

如同高斯定理可以用来求电场强度一样, 安培环路定理也可以用来求磁感强度. 而且, 与高斯定理求电场强度是有条件的一样, 利用安培环路定理求磁感强度也是有条件的. 它要求磁场分布具有对称性, 而磁场分布的对称性又来源于电流分布的对称性. 事实上, 只有在电流的分布具有无限长轴对称性或无限大面对称性以及各种圆环形均匀密绕的螺绕环的情况下, 才能够利用安培环路定理求 B.

利用安培环路定理求磁场的基本步骤是:

(1) 分析磁场的对称性;

(2) 根据磁场的对称性, 选择适当形状的环路, 求出 $\oint_l B \cdot dl$;

(3) 计算出此环路包围电流的代数和 $\sum I_i$;

(4) 由安培环路定理 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ 求出 B .

例 13 - 2 载流长直螺线管内的磁场

载流长直螺线管通过的电流为 I , 单位长度的线圈匝数为 n , 求螺线管内部任一点的磁感强度 B .

解 用磁场叠加原理作对称性分析 : 可将载流长直密绕螺线管看作由无穷多个共轴的圆电流构成 , 螺线管的磁场是各个圆电流所激发磁场的叠加结果 . 在螺线管的内部任选一点 P (不一定在轴线上) , 在 P 点两侧对称地取两个圆电流 . 由对称性分析可知 , 这一对圆电流在 P 点产生的合磁感强度的方向是与螺线管的轴线平行的 . 由于长直螺线管可以看成无限长 , 只要 P 点不是靠近螺线管的两端 , 就可以在其两侧找到无穷多对如上述那样对称的圆电流 , 每对圆电流在 P 点的合成磁场都是与轴线平行的 . 又由于 P 点是任选的 , 因此可以推知长直载流螺线管内部各点磁场的方向均沿轴线方向 . 在螺线管的外部 , 则由于上、下电流方向相反 , 产生的磁场互相抵消 , 故磁感强度为 0 .

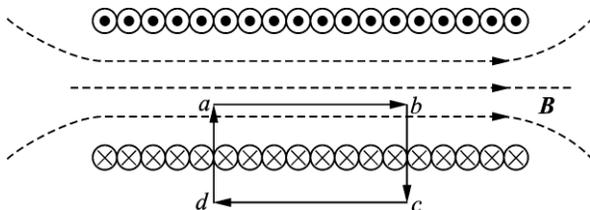


图 13 - 17 无限长载流直螺线管的磁场

根据载流长直螺线管中段的磁场分布特征 , 选择如图 13 - 17 所示的矩形环路 $abcd$ 及绕行方向 . 矩形环路的长和宽分别为 l_1 和 l_2 . 环路 ab 段的 $d\mathbf{l}$ 方向与磁场 B 的方向一致 , 即 $B \cdot d\mathbf{l} = Bdl$; 环路 bc 段和 da 段的 $d\mathbf{l}$ 方向与磁场 B 的方向垂直 , 即 $B \cdot d\mathbf{l} = 0$; 而环路 cd 段上的 $B = 0$. 于是 , B 沿此闭合路径 l 的环流为

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b B dl$$

又由对称性可知 ab 段的磁场是均匀的 , 故上式成为

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \int_a^b dl = Bl_1$$

环路所包围的电流为 nl_1I , 根据右手螺旋法则 , 其值为正 . 由安培环路定理有

$$Bl_1 = \mu_0 n l_1 I$$

于是得

$$B = \mu_0 n I$$

如果螺线管不是密绕的,则管内、外的磁场是不均匀的,只有在螺线管的轴线附近,磁感强度 B 才近乎与轴线平行.

例 13-3 均匀密绕螺绕环的磁场

设均匀密绕螺绕环的总匝数为 N , 流过电流为 I . 内侧和外侧的半径分别为 r_1 和 r_2 . 试求其内部任一点的磁场.

解 由于电流的分布具有中心轴对称性,因而磁场的分布也应具有轴对称性.

将通有电流 I 的螺绕环沿直径切开,其剖面如图 13-18 所示. 在环内作一个半径为 r 的环路,绕行方向如图所示. 环路上各点的磁感强度大小相等,方向与环路绕行方向一致. 磁感强度 B 沿此环路的环流为

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_l dl = 2\pi r \cdot B$$

环路内包围电流的代数和为 $\sum I_i = NI$. 根据安培环路定理,有

$$2\pi r B = \mu_0 NI$$

所以

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{r} \quad (r_1 < r < r_2)$$

如果螺绕环中心线的直径远大于线圈的直径,则有 $r_1 \approx r_2 \approx r$, 环内的磁场可看作处处相等. 上式可以写成

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{r} = \mu_0 I \frac{N}{2\pi r} = \mu_0 n I$$

式中 n 为单位长度的线圈匝数. 如果将螺绕环看成是将长直螺线管两端对接而来,也可以得到同样的结果.

例 13-4 无限大均匀载流平面的磁场

设电流在无限大平面里均匀分布,单位宽度里的电流为 j . 试求平面两侧任一点的磁感强度 B .

解 对无限大的载流平面产生的磁场,同样可以进行对称性分析,如图 13-19(b)所示,可以将无限大载流平面的磁场看成是由无穷多个平行的长直

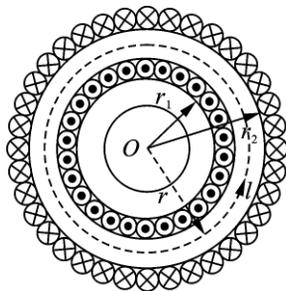


图 13-18 螺绕环

载流导线的磁场叠加而成. 每一对关于场点对称的长直导线在场点产生的磁场叠加 结果都是垂直于平面的分量互相抵消,只剩下平行于平面的分量. 故载流平面产生的磁场的方向与平面平行,与平面电流成右手螺旋. 由对称性还可知,在距平面相等的各点上,磁感强度是相等的.

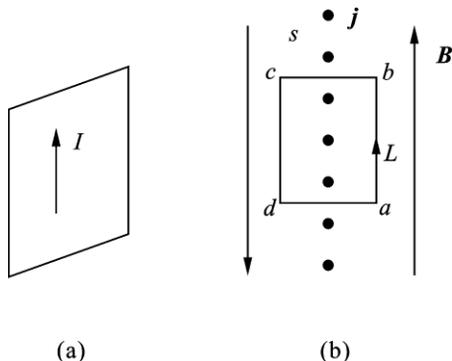


图 13 - 19 无限大载流平面的磁场

根据无限大载流平面磁场的分布,可以选择如图 13 - 19(b)所示的矩形环路及绕行方向. 环路的 ab 段和 cd 段与平面平行,长为 l_1 ,方向与磁场 B 的方向一致,即 $B \cdot dl = Bdl$;环路 bc 段和 da 段的 dl 方向与磁场 B 的方向垂直,即 $B \cdot dl = 0$. 于是, B 沿此闭合路径 l 的环流为

$$\begin{aligned}\oint_l B \cdot dl &= \int_a^b B \cdot dl + \int_b^c B \cdot dl + \int_c^d B \cdot dl + \int_d^a B \cdot dl \\ &= 2 \int_a^b B dl = 2Bl_1\end{aligned}$$

环路所包围的电流为 $j_1 l_1$,于是根据安培环路定理有

$$2Bl_1 = \mu_0 j_1 l_1$$

所以

$$B = \frac{\mu_0 j}{2}$$

§ 13 - 6 磁场对运动电荷的作用

一、洛伦兹力

在 § 13 - 2 中曾讨论过运动的带电粒子在磁场中所受到的力. 如图 13 - 20 所示,设带电粒子的电荷为 q ,运动速度为 v ,磁场的磁感强度为 B, v 与 B 的夹角为 θ ,则带电粒子所受的磁场力可表示为

$$F_m = q v \times B \quad (13 - 24)$$

F_m 称为洛伦兹力. F_m 的方向由 \boldsymbol{v} 和 \boldsymbol{B} 的叉积的方向决定, 大小为

$$F_m = |q| v B \sin\theta$$

从式(13-24)可知, 洛伦兹力 F_m 的大小不仅和 q 、 \boldsymbol{v} 和 \boldsymbol{B} 的大小有关, 而且取决于 \boldsymbol{v} 和 \boldsymbol{B} 之间的夹角的正弦 $\sin\theta$. 当 $\boldsymbol{v} // \boldsymbol{B}$ 时 $F_m = 0$, 运动电荷不受磁场力的作用. 而当 $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}$ 时 $F_m = |q| v B$, 运动电荷受到磁场力最大. 洛伦兹力的这种特性使它有了许多重要而有趣的应用. 需要注意的是, 洛伦兹力始终与带电粒子的运动方向垂直, 所以洛伦兹力不会对运动电荷做功. 这一点是与电场力不相同的.

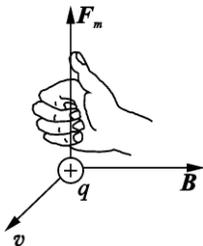


图 13-20 洛伦兹力

若在某一区域内同时有电场和磁场存在, 则运动的带电粒子在此区域内所受到的作用力是上述电场力和磁场力之和, 即

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \quad (13-25)$$

因此, 可以利用外加的电场和磁场来控制带电粒子的运动, 这在现代科学技术中具有重要的应用.

二、带电粒子在均匀磁场中的运动

带电粒子在均匀磁场中运动时, 运动轨迹取决于其速度 \boldsymbol{v} 与磁感强度 \boldsymbol{B} 的夹角. 采用不同的夹角, 可以得到不同的轨迹, 从而获得不同的实际应用.

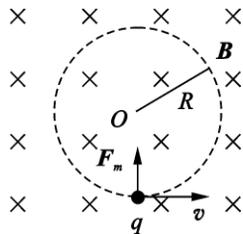
1. 回旋半径和回旋周期

当 $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}$ 时, 粒子将在磁场中做匀速圆周运动(回旋), 如图 13-21 所示. 粒子做圆周运动的向心力是洛伦兹力

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

粒子做圆周运动的回旋半径为

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (13-26)$$



13-21 带电粒子的回旋半径

回旋周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (13-27)$$

从上面两式可以看出一个有趣的事实: 尽管不同速率的粒子有着不同的回旋半径, 但却会有相同的回旋周期.

2. 回旋加速器

回旋加速器是原子核物理中获得高速粒子的一种装置, 其基本结构是两个

D 形盒. D 形盒内部是均匀磁场,而在两个 D 形盒之间加有交变的电场,如图 13-22(a)所示.

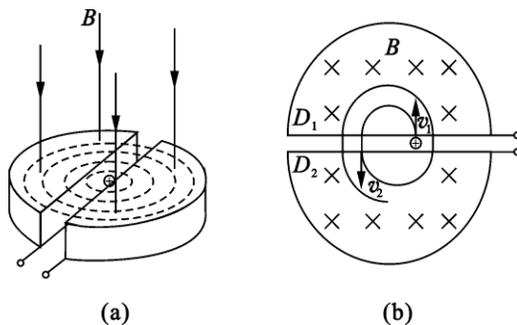


图 13-22 回旋加速器的工作原理

回旋加速器的工作原理如图 13-22(b)所示,带电粒子在磁场中回旋,而在电场中被加速. 设带电粒子从两 D 形盒中心的粒子源发出,被电场加速到 v_1 后进入 D_1 盒,在磁场力作用下以回旋半径 $R_1 = \frac{mv_1}{qB}$ 运动半个圆周再次进入电场区. 此时电场正好反向,粒子再次被加速至 v_2 后进入 D_2 盒,在 D_2 盒内以回旋半径 $R_2 = \frac{mv_2}{qB}$ 运动半个圆周第三次进入电场区,又被反向的电场加速,……由于带电粒子在磁场中的回旋周期与速度无关,只要保持电场每半个周期改变一次方向,就可以将粒子加速到很大的值. 当速率达到预期值时,可用特殊装置将粒子引出.

3. 磁聚焦

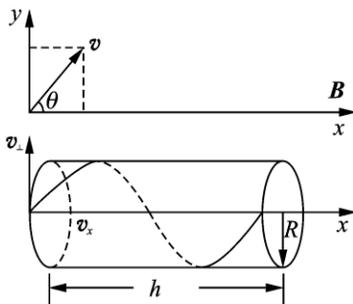


图 13-23 带电粒子在磁场中的螺旋线运动

当带电粒子速度 v 与 B 之间夹角 θ 为任意值时,可以将 v 分解为垂直于磁场方向的分量 v_y 和平行于磁场方向的分量 v_x (假设 B 沿 x 方向). v_{\perp} 受到的磁场

力使粒子做匀速圆周运动, v_x 则不受磁场力的作用, 粒子在 x 方向上保持匀速直线运动. 这两种运动合成的结果, 是使带电粒子在磁场中做螺旋线运动, 如图 13-23 所示.

螺旋线的半径

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

带电粒子在螺旋线上每旋转一周, 就沿磁场 B 的方向前进一个螺距, 螺距为

$$h = v_x T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB} \quad (13-28)$$

由(13-28)可知带电粒子作螺旋线运动的螺距与 v_x 成正比, 而与 v_{\perp} 无关. 这个结果可用来实现磁聚焦.

如图 13-24 所示, 从点 O 射出一些速率大致相同, 方向稍有不同的运动电荷. 若它们的速度方向与磁场 B 的方向的夹角 θ 很小, 则有

$$v_x = v \cos \theta \approx v$$

即这些粒子具有大致相同的速度分量 v_x , 因此经过一个周期运动后它们将会聚于点 F . 这种现象与透镜能将光束聚焦现象十分相似, 故称之为磁聚焦. 在实际应用中, 大多用载流的短线圈所激发的非均匀磁场来实现磁聚焦. 由于这种线圈的作用与光学中的透镜作用相似, 故称磁透镜. 在显像管、电子显微镜和真空器件中, 常用磁透镜来聚焦电子束.

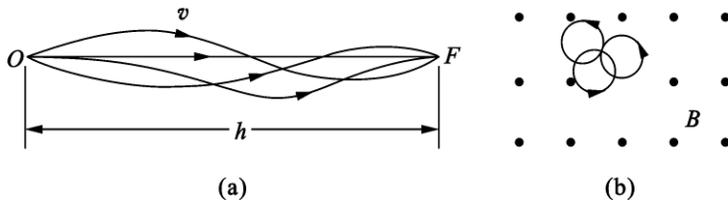


图 13-24 磁聚焦原理

三、带电粒子的磁约束

运动的带电粒子在非均匀磁场中受到的洛伦兹力有两个分力, 一个分力 F_{\perp} 是使电子做圆周运动的向心力; 另一个分力 F_{\parallel} 与电子运动的分速度 v_{\parallel} 平行且反向, 它使得电子向着强磁场方向的运动速度减慢, 有可能直至停止, 并继而沿反方向(磁场较弱的一方)加速前进. 利用这一现象可以实现磁约束. 用两个亥姆赫兹线圈就可以实现两边强中间弱的磁场分布, 从而将带电粒子束缚于其中(图 13-25). 地磁场也是一个天然的磁约束装置.

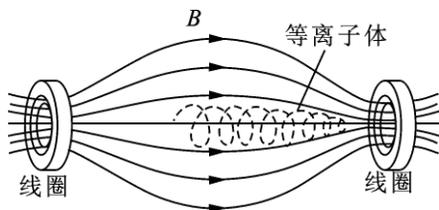


图 13 - 25 磁约束

四、受控核聚变的磁约束

两个轻核结合为较重的核的反应称为聚变反应. 为了使两个核发生聚变反应, 必须使它们有足够的能量, 以克服它们之间的静电斥力. 因此, 受控核聚变的第一步是使燃料处于等离子体态. 等离子体是一种充分电离的、整体呈电中性的气体, 由自由电子、失去电子的离子以及原子核所组成. 当等离子体的温度达到几千万至几亿摄氏度时, 原子核就可以克服斥力聚合在一起.

由于在上亿度的高温下, 任何材料做成的容器都将熔化, 所以必须把高温等离子体同容器壁分开, 方法之一是用托卡马克装置对等离子体进行磁约束.

如图 13 - 26 所示是托卡马克装置的结构. 由图可见, 在托卡马克装置中有两组分别产生垂直磁场和环向磁场的线圈. 它们产生的磁场合成后得到螺旋形的磁感线. 参加聚变反应的粒子不断地沿磁感线旋进, 可以在磁场中摇摆但不会与器壁接触, 这样就对高温等离子体实现了磁约束.

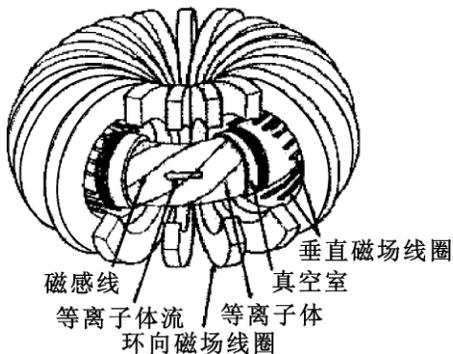


图 13 - 26 托卡马克装置

五、霍耳效应

将高度为 l 、厚度为 d 的金属板 (或半导体板) 置于磁感强度为 B 的均匀磁场中, 如果在板中通过方向与磁场方向垂直的电流 I (如图 13 - 27 所示), 在金属板的上下表面间就会出现电势差 U_H , 这种现象称为霍耳效应, U_H 则称为霍耳电势差.

实验测定, 霍耳电势差的大小和电流 I 及磁感强度的大小 B 成正比, 与板的厚度 d 成反比. 进一步的理论分析表明, 霍耳电势差可定量地表示为

$$U_H = R_H \frac{IB}{d} \quad (13 - 29)$$

式中的 R_H 称为霍耳系数.

霍耳效应是由于运动的带电粒子受磁场力的作用而产生的. 在金属导体中

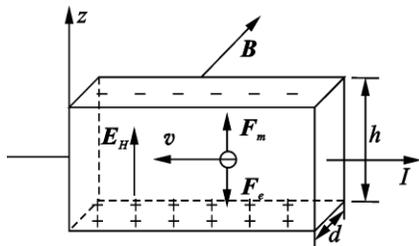


图 13 - 27 霍尔效应示意图

通有电流时,电子在均匀磁场 B 中受洛伦兹力的作用而发生偏转,在上下两表面分别聚集起正、负电荷.积累的电荷在上下表面间产生霍尔电场 E_H .当电子受到的电场力 F_e 与洛伦兹力 F_m 达到平衡时,由 $eE_H = evB$ 可得

$$E_H = vB$$

式中的 v 是电子的定向运动速度(又称漂移速度).因为霍尔电场 E_H 是均匀的,故上下表面间的霍尔电势差为

$$U_H = E_H l = vBl$$

若导体中载流子的电荷为 q ,数密度(即单位体积中的载流子数目)为 n ,导体横截面积为 S ,则可由电流的公式

$$I = qnvS = qnvld$$

得到载流子的平均漂移速度为

$$v = \frac{I}{qnld}$$

则霍尔电势差为

$$U_H = \frac{1}{nq} \frac{IB}{d} \quad (13 - 30)$$

比较式(13 - 29)和式(13 - 30),可得霍尔系数

$$R_H = \frac{1}{nq} \quad (13 - 31)$$

金属导体中自由电子的数密度很大,故金属导体的霍尔系数很小,霍尔效应不明显.而半导体中的载流子数密度远小于金属中自由电子的数密度,故半导体的霍尔系数比金属导体大得多,能产生很强的霍尔效应.

利用霍尔效应可以测量电流、磁感强度、载流子数密度等.还可以用霍尔效应判断半导体中载流子的类型(p型或n型).

六、磁流体发电

磁流体发电是将热能直接转换成电能的新型发电方式.它的基本工作原理

仍然是法拉第电磁感应定律,与一般发电机不同的是用导电流体代替固体导体,并使导电流体以一定速度通过与其垂直的磁场,切割磁感线,从而产生电能。

磁流体发电装置由燃烧室、发电通道和超导磁体三部分组成,如图 13-28 所示。燃料在燃烧室里充分燃烧,在摄氏几千度的温度下转变为等离子体。发电通道的外形好像一个长方形盒子,位于超导磁体提供的强磁场中,磁感线自右向左穿透发电通道。等离子体被以超音速喷射进发电通道后受到磁场力的作用,自由电子和正离子会向相反的两个方向发生偏转,聚集在相对的两个电极上。只要用导线将电极和负载相连,就会有电流流过。

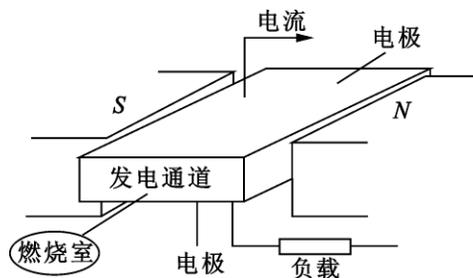


图 13-28 磁流体发电原理

磁流体发电的主要优点是效率高(两次发电的总效率可达 52%),环境污染小,节约用水和机组起动快、单机容量大。

§ 13-7 磁场对载流导线的作用

载流导体在磁场中也会受到磁场力的作用,这种力称为安培力。从微观上看,安培力是导体中做定向运动的电子受洛伦兹力作用的结果。

一、安培定律

从处在均匀磁场中的导体上截取一段电流元 Idl ,如图 13-29 所示。设 Idl 的截面积为 S ,与磁感强度 B 的夹角为 θ , Idl 中自由电子的漂移速度为 v ;再设自由电子的数密度为 n ,则 Idl 中自由电子的总数为 $dN = nSdl$ 。每个自由电子所受的洛伦兹力为

$$F_m = e v \times B$$

dN 个电荷受力的总和(dl 很小,各电荷受力方向一致)

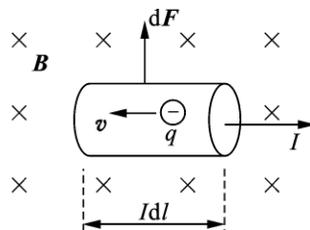


图 13-29 电流元受力情况

$$dF = F_m dN = neSdl \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}$$

由于电流密度 $\mathbf{j} = ne \boldsymbol{\nu}$ 故导线中的电流为 $I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} = nevS$ 因而 $I dl = nevSdl$, 考虑到对电流元方向的规定 , 可以得到

$$enSdl \boldsymbol{\nu} = Idl$$

所以

$$dF = Idl \times \mathbf{B} \quad (13-32)$$

此式即安培总结出的电流元在磁场中受力的规律 , 称为安培定律.

对于有限长载流导线

$$\mathbf{F} = \int_l Idl \times \mathbf{B} \quad (13-33)$$

例 13-5 在平面内有一段形状不规则的载流导线 , 处在磁感强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中 , 磁场的方向垂直于该平面 (图 13-30) . 试求作用在此载流导线上的磁场力.

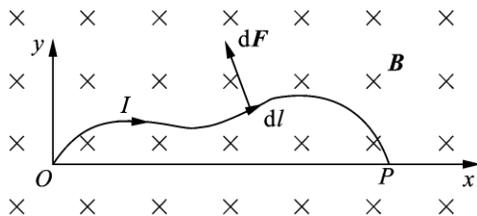


图 13-30

解 取如图 13-30 所示的坐标系 , 导线一端在原点 O , 另一端在 x 轴的点 P 上 , $OP = L$. 取电流元 $I dl$, 它所受的力为 $dF = Idl \times \mathbf{B}$, 此力沿 Ox 轴和 Oy 轴的分量分别为

$$dF_x = dF \sin \theta = B dl \sin \theta$$

和

$$dF_y = dF \cos \theta = B dl \cos \theta$$

式中 θ 为 dl 与水平方向的夹角 . 由于 $dl \sin \theta = dy$, $dl \cos \theta = dx$, 故上两式分别为

$$dF_x = B dy$$

和

$$dF_y = B dx$$

由于载流导线是放在均匀磁场中的 , 因此 , 整个载流导线所受的磁场力 \mathbf{F} 沿 Ox 轴和 Oy 轴的分量分别为

$$F_x = \int dF_x = B \int_0^0 dy = 0$$

$$F_y = \int dF_y = B \int_0^L dx = BIL$$

于是,载流导线所受的磁场力为

$$F = F_y j = BIL j$$

由上述结果可以看出,在均匀磁场中,任意形状的平面载流导线所受的磁场力,和与其始点和终点相同的载流直导线所受的磁场力是相等的。

例 13-9 如图 13-31 所示,一竖直放置的长直导线,通有电流 I_1 ;另一水平直导线,长度为 l_2 ,通有电流 I_2 ,其始端与竖直载流导线相距 l_1 。求水平直导线所受的力。

解 长直载流导线在水平直导线处产生的磁场方向垂直纸面向里。在水平载流导线上取一段电流元 $I_2 dl$,它与竖直长直载流导线的距离为 l 。在 $I_2 dl$ 的微小范围内,磁场可视作均匀,大小为

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{l}$$

这样,电流元 $I_2 dl$ 所受磁场力的大小为

$$dF = BI_2 dl \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{l} dl$$

根据右手螺旋法则,其方向在平面内铅直向上。由于水平直导线上任一电流元所受磁场力的方向都是相同的,因此整个水平载流导线上所受的磁场力 F 是许多同方向力之和,积分可得

$$F = \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{l} dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{l_1 + l_2}{l_1}$$

二、磁场对载流线圈的作用

载流线圈在磁场中除了受到力的作用外,还会受到力矩的作用。现以平面载流线圈为例,分析它在均匀磁场中受到的作用。

如图 13-32(a)所示,边长分别为 l_1 和 l_2 的矩形平面载流线圈 $abcd$,流过电流为 I ,置于磁感强度为 B 的均匀磁场中,线圈的法线方向 e_n 与 B 的方向成任意角 θ 。 ad 、 bc 两段导线与 B 的方向的夹角为 $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ 。根据式(13-33),作用于它们的安培力分别为

$$F_{ab} = BI_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

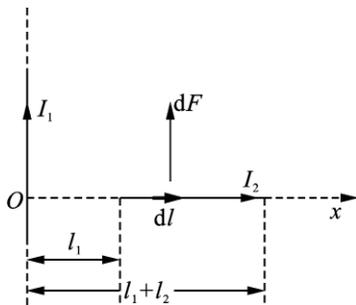


图 13-31

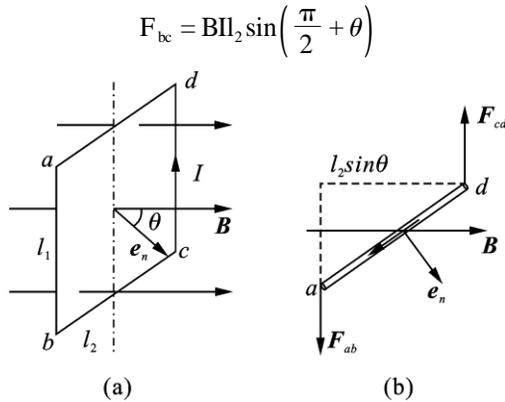


图 13 - 32

这两个力大小相等,方向相反,因而合力为 0. 又因为它们都处在线圈的平面内,所以不对线圈产生力矩. ab 、 dc 两段导线与 B 的方向垂直,作用于它们的安培力大小相等,即

$$F_{ab} = F_{cd} = BIl_1$$

F_{ab} 和 F_{cd} 的方向相反,故合力为 0. 但它们不在同一条直线上,如图 13 - 32(b) 所示,所以产生力矩. 这就是线圈受到的磁力矩. M 的大小为

$$M = F_{ab} \frac{l_2}{2} \sin\theta + F_{cd} \frac{l_2}{2} \sin\theta = BIl_1 l_2 \sin\theta = BIS \sin\theta \quad (13 - 34)$$

式中 $S = l_1 l_2$ 为线圈的面积.

由上式可知,当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, M 的值为最大,此时线圈处于最不稳定状态. 当 $\theta = 0$ 或 π 时, $M = 0$, 线圈处于平衡状态,但 $\theta = 0$ 时为稳定平衡, $\theta = \pi$ 时为不稳定平衡.

式(13 - 14)定义了圆电流的磁矩为 $m = ISe_n$. 对匝数为 N 的多匝平面载流线圈,可定义其磁矩

$$m = NISe_n \quad (13 - 35)$$

这样,平面载流线圈在均匀磁场中受到的磁力矩,可以表示为

$$M = m \times B \quad (13 - 36)$$

三、磁电式电流计原理

磁电电流计的结构如图 13 - 33 所示,在永磁体的两极间有一圆柱形的铁心. 这种结构是为了在磁极和铁心间的缝隙中产生一个均匀而且处处与铁心表面垂直的磁场. 铁心外套有一个可以绕铁心转动的线圈,这个线圈又通过游丝

与指针相连.

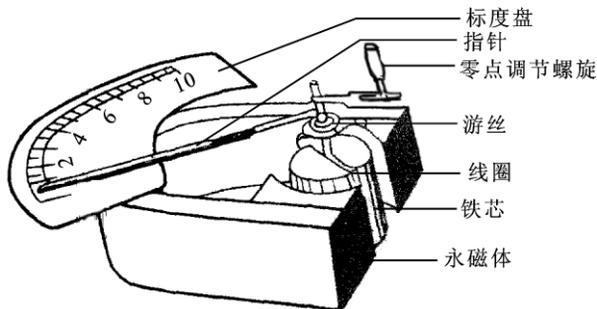


图 13 - 33 磁电式电流计的结构

设线圈的面积为 S 线圈共有 N 匝, 缝隙中的磁场大小为 B . 由于不管线圈转动到哪个位置, 线圈的法线方向都与所在处的磁场方向垂直, 所以当线圈通有电流 I 时, 线圈受到的磁力矩为

$$M = NBIS$$

线圈在此力矩的作用下发生偏转, 直到 M 和游丝的扭力矩 M' 达到平衡为止. 此时, 指针停在某一位置上, 指示出线圈中电流的大小. 如果游丝的扭转常数和线圈转过的角度分别为 α 和 θ , 则 $M' = \alpha\theta$. 因此当 M 和 M' 平衡时, 有下列关系成立

$$NBIS = \alpha\theta$$

可得

$$I = \frac{\alpha\theta}{NSB} = K\theta, \quad \left(K = \frac{\alpha}{MSB} \right) \quad (13 - 37)$$

即通过线圈的电流 I 与线圈的偏转角 θ 成正比, 由线圈的平衡偏转角 θ 即可指示通过线圈的电流 I .

§ 13 - 8 磁介质中的磁场

一、磁介质

受到磁场的作用会使自身状态发生改变的物质称为磁介质. 实际上, 所有的物质放入磁场后状态都会发生改变, 因此, 所有的物质都是磁介质.

磁介质在外磁场中状态发生改变的现象称为磁化. 磁化了的磁介质会产生一个附加磁场 B' . 因此, 空间的总磁场 B 是由 B' 和原有磁场 B_0 叠加而成. 即

$$B = B_0 + B' \quad (13 - 38)$$

试验表明, 附加磁场 B' 的方向因磁介质的性质而异. B' 的方向与 B_0 方向相

同的磁介质叫顺磁质,顺磁质磁化后使原有磁场增强; B' 的方向与 B_0 方向相反的磁介质叫抗磁质,抗磁质磁化后使原有磁场减弱.这两类磁介质 B' 的值都远小于 B_0 的值.另有一类磁介质的 B' 也与 B_0 同方向,但 B' 的值却比 B_0 的值大几个数量级,这类磁介质叫做铁磁质.

顺磁质和抗磁质的磁化机理可以用安培的分子电流学说加以说明.由原子结构知道,电子绕核运动产生圆电流,形成电子轨道磁矩,电子的自旋也产生微弱圆电流,形成自旋磁矩.一个分子中所有电子的轨道磁矩、自旋磁矩的矢量和称为分子固有磁矩或简称为分子磁矩,用符号 m 表示.分子磁矩可以用一个圆电流 I 来等效,这个电流即安培当年为解释磁性起源而设想的分子电流.在正常情况下,抗磁质的分子磁矩等于零,顺磁质的分子磁矩则不等于零.

1. 顺磁质的磁化

属于顺磁质的有铝、锰、氧等.顺磁质的分子磁矩虽不等于零,但由于分子的热运动使得各个分子的磁矩无规取向,所有分子磁矩的矢量和为0,所以顺磁质在平时并不显示出磁性.当顺磁质放在外磁场 B_0 中时,每个分子磁矩 m 都将受到外磁场的磁力矩 $M = m \times B_0$.在这个磁力矩的作用下,分子会程度不同地转向外磁场的方向,各分子磁矩的矢量和形成沿外磁场 B_0 方向的附加磁场 B' .因此,在顺磁质内部 $B > B_0$,磁场被增强.这就是顺磁质的磁化机理.

2. 抗磁质的磁化

属于抗磁质的有铜、铋、氢等.尽管抗磁质的分子磁矩等于零,但分子中的电子轨道磁矩和自旋磁矩并不为零.当把抗磁质放入外磁场 B_0 中时,每个电子的轨道运动会受到磁场的影响,从而产生一个与 B_0 方向相反的附加轨道磁矩 Δm ,所有分子的附加轨道磁矩叠加起来,便形成一个与外磁场 B_0 方向相反的分磁附加磁场 B' .故抗磁质内部 $B < B_0$,磁场被削弱.这就是抗磁质的磁化机理.

实际上,顺磁质内也存在上述的抗磁效应,但比起顺磁效应来,抗磁效应要小得多,故可忽略不计.

二、磁化强度

为了从宏观上描述磁介质的磁化方向和磁化强弱的程度,引入一个新的物理量——磁化强度 M .它的定义是单位体积的介质内所有分子磁矩的矢量和,即

$$M = \frac{\sum m_i}{\Delta V} \quad (13 - 39)$$

顺磁质和抗磁质中的磁化强度方向是不同的.顺磁质磁化时,分子磁矩的矢量和沿外磁场 B_0 方向,故由磁化强度 M 的定义可知, M 也沿外磁场 B_0 方

向. 外磁场越强, 分子磁矩在沿外磁场方向排列越整齐, 故 M 越强. 抗磁质磁化时, 分子磁矩的矢量和等于分子附加磁矩的矢量和, 而分子附加磁矩的矢量和与外磁场 B_0 的方向相反, 故由磁化强度 M 的定义可知, M 也沿外磁场 B_0 的反方向. 同样, 外磁场越强, M 越强.

实验证明: 不论是顺磁质还是抗磁质的磁化强度 M 都随外磁场的增强而增大, 各向同性磁介质的磁化强度 M 和外磁场 B_0 成正比:

$$M = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} B \quad (13 - 40)$$

式中 μ_r 为磁介质的相对磁导率.

不论是顺磁质还是抗磁质, 磁化后都会在磁介质的表面产生一层等效的电流 I' , 称为磁化电流. 从宏观上看, 磁介质中的附加磁场 B' 就是由这一层磁化电流 I' 产生的.

以顺磁质为例, 当介质磁化后, 各分子磁矩沿外磁场方向排列, 分子电流与分子磁矩的方向成右手螺旋. 在介质内部, 相邻的分子电流方向彼此相反, 相互抵消, 而在介质表面下一薄层内, 各分子电流只有靠着介质内部的部分被抵消, 靠着表面的部分未被抵消, 在宏观上形成了绕表面流动的等效大圆形电流. 这一等效电流称为磁化电流或束缚电流. 抗磁质磁化电流的形成机理与此相仿, 但磁化电流的方向与顺磁质磁化电流方向相反(图 13 - 34).

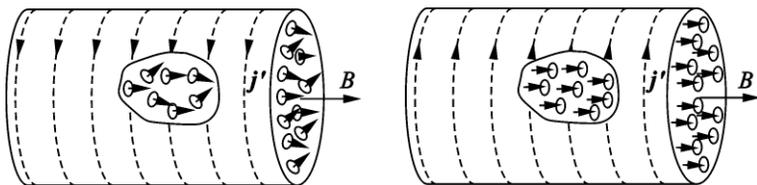


图 13 - 34 顺磁质(左)和抗磁质(右)中的磁化电流

将磁化电流 I' 和束缚电荷 q' 类比, 可得到磁化电流 I' 的公式, 即任意闭合路径 l 包含的总磁化电流 I' 等于磁化强度沿该闭合路径的环流

$$I' = \oint_l M \cdot dl \quad (13 - 41)$$

三、磁介质中的安培环路定理

在 § 13 - 5 中已介绍了安培环路定理: 磁感强度 B 沿任意路径的环流, 等于此路径所包围的所有电流的代数和的 μ_0 倍. 安培环路定理的数学表达式是

$$\oint_l B \cdot dl = \mu_0 \sum I_i$$

在存在磁介质的情况下, 上式右端对电流的求和应当包含导体中的电流

(传导电流) I_c 和磁介质中的磁化电流 I' 将磁化电流.因此,安培环路定理成为如下形式:

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_c + I'$$

将式(13-41) $I' = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$ 带入上式有

$$\oint_l \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum I_c$$

类似电介质中的高斯定理引入辅助量 \mathbf{D} ,在此也引入辅助量——磁场强度 \mathbf{H} ,令

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (13-42)$$

则上式可简化为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_c \quad (13-43)$$

上式就是磁介质中的安培环路定理:磁场强度 \mathbf{H} 沿任意闭合路径 l 的环流,等于该回路所包含传导电流的代数和.

由式(13-40)和式(13-42)可得

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

令

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (13-44)$$

μ 称为介质的磁导率,上式可写成

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (13-45)$$

在具体运用时,先用安培环路定理求出磁场强度 \mathbf{H} 的分布,再利用上式求磁感应强度 \mathbf{B} 的分布.

四、铁磁质

1. 铁磁质的特性

(1)铁磁质的最主要特性是相对磁导率 μ_r 非常高(一般可达 $10^2 \sim 10^4$,最高可达 10^6).在同样的磁场强度 \mathbf{H} 下,与真空或弱磁材料相比,铁磁质中磁感强度 \mathbf{B} 的值要大得多(大几百至上万倍).

(2)铁磁质的磁感强度 \mathbf{B} 与磁场强度 \mathbf{H} 的关系是非线性关系,一般用 $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ 曲线(称为磁化曲线)来描述这种关系(图13-35).由图可见,当铁磁质开始磁化时, \mathbf{B} 随 \mathbf{H} 的增加而很快增长,但当 \mathbf{H} 增大到一定程度后, \mathbf{B} 的增长变得极为缓慢,达到某个值后便不再增加,这种现象叫做磁饱和.

(3) 铁磁质的磁化过程是不可逆的, 具有磁滞现象. 所谓磁滞现象是指铁磁质磁化状态的变化总是落后于外加磁场的变化, 在外磁场撤消后, 铁磁质仍能保持原有的部分磁性. 整个磁化过程如图 13 - 35 所示. 由图可以看到, 当外加磁场由强逐步减弱至 0 时, 铁磁质中的 B 并不降为零, 而是等于一个值 B_r , B_r 称为剩余磁感强度, 简称剩磁. 只有提供一个反向磁场 H_c 才能使 B 恢复为零, H_c 称为矫顽力. 当磁场强度变化一个周期时, 铁磁质的磁化曲线是一条闭合曲线, 称为磁滞回线.

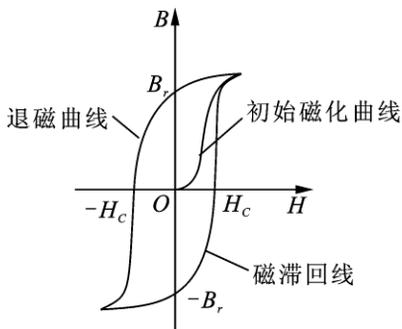


图 13 - 35 铁磁质的磁滞回线

(4) 铁磁质只有在某个叫做“居里点”的温度之下, 才具有铁磁性质. 温度一旦超过居里点, 铁磁质就转变为顺磁质.

2. 铁磁质的磁化机理

铁磁质的上述特性需要用磁畴理论来说明.

在铁磁质中存在着许多小的自发磁化区, 称为磁畴(图 13 - 36). 磁畴中含有大量的分子(可达 10^{15} 个), 因而磁畴的磁矩非常大. 但在无外磁场时, 各磁畴的排列是不规则的, 各磁畴的磁化方向不同, 产生的磁效应相互抵消, 整个铁磁质不呈现磁性.

把铁磁质放入外磁场 H 中, 其内部会出现畴壁移动和磁畴转向两种磁化过程. 畴壁运动是指外磁场较弱时, 自发磁化方向与外磁场方向相同或相近的磁畴的体积逐渐增大, 方向相反的则逐渐缩小. 磁畴转向发生在磁场较强时, 此时缩小着的磁畴消失, 其他磁畴的磁化方向转向外场方向. 外场越强, 转向越充分. 由于铁磁质不是以单个分子为单位, 而是以磁畴为单位整体磁化的, 因而使磁场极大地增强. 当外磁场增加到一定程度时, 所有磁畴的磁矩都转到与外磁场同方向, 铁磁质就达到磁饱和状态.

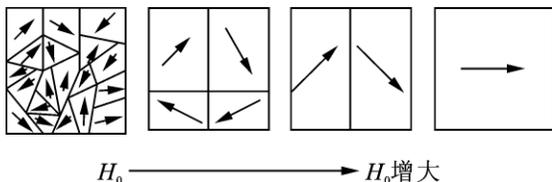


图 13 - 36 铁磁质磁化时磁畴的运动

由于磁畴壁移动的过程是不可逆的, 即外磁场减弱后, 磁畴不能恢复原状,

故退磁时磁化曲线不沿原路退回,从而形成磁滞回线.

3. 铁磁质分类

不同铁磁材料性能的不同(磁滞回线不同),主要区别是矫顽力不同. 软磁材料矫顽力 H_c 很小,在交变磁场中剩磁易于被清除,常用于制造电机、变压器、电磁铁等的铁心. 硬磁材料矫顽力 H_c 很大,剩磁 B_r 也很大,撤去磁场后仍可长久保持很强的磁性,适于制成永久磁铁,或用作“磁记录”材料,制作成磁带、磁盘等.

4. 磁屏蔽

由于磁场是无源场,磁感线是闭合曲线,因此磁场不像静电场那样很容易实现静电屏蔽. 但是,高磁导率的铁磁质会对磁感线表现出强烈的“吸收性”,即将绝大部分磁感线(即磁场)导入体内. 利用这一特点,将铁磁材料制作成厚壳状,可以部分地实现“磁屏蔽”.

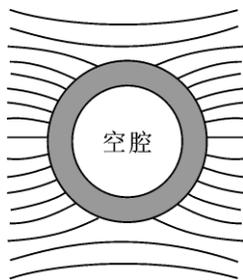


图 13 - 37 磁屏蔽

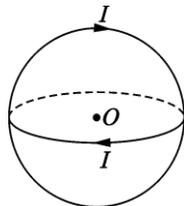
思考题

13 - 1 一电子以速度 v 射入磁感强度为 B 的均匀磁场中. 电子沿什么方向射入受到的磁场力最大? 沿什么方向射入不受磁场力作用?

13 - 2 为什么不把作用于运动电荷的磁力方向定义为磁感强度的方向?

13 - 3 试列举电流元 Idl 激发磁场 dB 与电流元 dq 激发电场 dE 的异同.

13 - 4 在球面上铅直和水平的两个圆中通以相等的电流,电流流向如题图所示. 问球心 O 处磁感强度的方向是怎样的?



思考题 13 - 4 图

13 - 5 平面内有一个流过电流 I 的圆形回路,问平面内各点磁感强度的方向是否相同? 回路所包围面积的磁场是否均匀?

13 - 6 若闭合曲线内不包围电流,曲线上各点的磁感强度为零吗? 为什么?

13 - 7 以一运动电荷为圆心作一个半径为 R 的假想球面,问:

(1) 在球面上哪些点的磁场最强?

(2) 在球面上哪些点的磁场为零?

(3) 穿过球面的磁通量是多少?

13 - 8 为什么当磁铁靠近电视机的屏幕时会使图像变形?

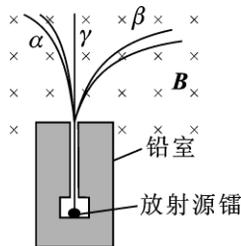
13 - 9 如果一束质子在通过空间某一区域时做匀速直线运动,能否肯定

这个区域没有磁场？如果它发生了偏转，如何判断是磁场还是电场的作用？

13-10 公式 $F = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 里的三个矢量中，是否知道任意两个矢量的方向，总可以求出另一个矢量的方向？

13-11 均匀磁场的磁感强度 B 的方向垂直向上，如果有两个电子以大小相等、方向相反的速度沿水平方向射出，它们做何运动？如果一个是电子，一个是正电子，它们的运动又如何？

13-12 如题图所示，放射性元素镭所发出的射线进入强磁场 B 后，分成三束：向右偏转的叫 β 射线，向左偏转的叫 α 射线，不偏转的叫 γ 射线。试分析这三种射线中的粒子的带电情况。



思考题 13-12 图

13-13 在均匀磁场中有一电子枪，可发射出速率分别为 v 和 $2v$ 的两种电子。这两种电子的速度方向相同，且均与 B 垂直。试问它们绕行一周所需的时间是否相同？

13-14 安培定律 $d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ 中的三个矢量，哪两个矢量始终是正交的？哪两个矢量之间可以有任意角度？

13-15 一根弯曲的载流导线在均匀的磁场中如何放置才不受磁力的作用？

13-16 有限长的载流直导线在均匀磁场中沿着磁感线移动，磁力对它是否总是做功？什么情况下磁力做功？什么情况下磁力不做功？

13-17 在均匀磁场中，有两个面积相等、通过电流相同的线圈，一个是三角形，另一个是矩形。这两个线圈所受的最大磁力矩是否相等？磁力的合力是否相等？

13-18 在均匀磁场中，载流线圈的取向与其所受磁力矩有何关系？在什么情况下磁力矩最大？什么情况下磁力矩最小？载流线圈处于稳定平衡时，其取向又如何？

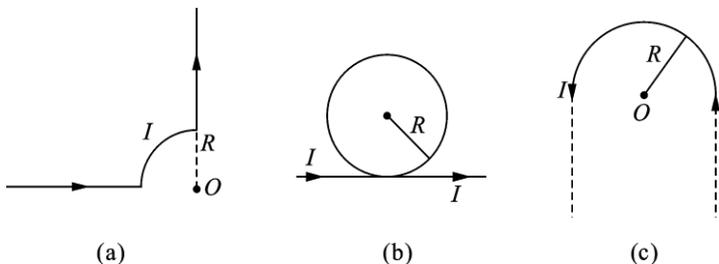
13-19 均匀磁场的方向竖直向下，一矩形导线回路的平面与水平面一致。试问这个回路中的电流沿什么方向流动时，它才处于稳定平衡状态？

13-20 有两根铁棒，不论把它们的哪两端靠近，发现它们总是互相吸引。能否由此判断两根铁棒被磁化的情况？

13-21 在工厂里搬运烧到赤红的钢锭，为什么不能用电磁铁起重机？

习 题

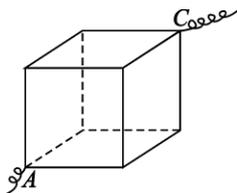
13-1 如题图所示的几种载流导线，在 O 点的磁感强度各为多少？



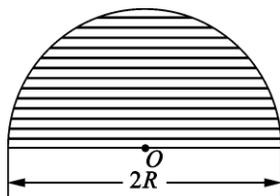
习题 13 - 1 图

13 - 2 有一边长为 a 的正方形回路, 回路电流为 I , 求回路中心处的磁感应强度.

13 - 3 以同样的导线联接成如题图所示的正立方体, 在相对的两顶点 A 及 C 上接一电源. 试求该正立方体中心的磁感强度 B 等于多少?



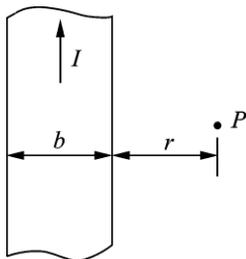
习题 13 - 3 图



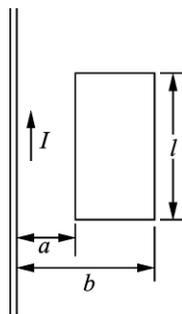
习题 13 - 4 图

13 - 4 如题图所示, 半径为 R 的半球上密绕有单层线圈, 线圈平面彼此平行. 设线圈的总匝数为 N , 通过线圈的电流为 I , 求球心处 O 的磁感强度.

13 - 5 如题图所示, 电流 I 沿着长度方向均匀地流过宽度为 b 的无限长导体薄板. 试求在薄板的平面内, 距板的一边为 r 的点 P 的磁感强度.



习题 13 - 5 图



习题 13 - 7 图

13 - 6 半径为 R 的圆盘均匀带有电荷 q , 圆盘绕过其中心且与盘面垂直的转轴以角速度 ω 旋转, 求圆心 O 处的磁感应强度.

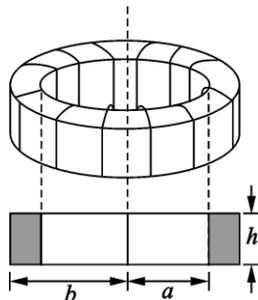
13 - 7 如题图所示, 载流长直导线的电流为 I , 试求通过矩形面积的磁

通量.

13 - 8 已知横截面为 $1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ 裸铜线允许通过 50 A 电流而不致过热, 电流在导线横截面上均匀分布. 求: (1) 导线内、外磁感强度的分布; (2) 导线表面的磁感强度.

13 - 9 一根很长的同轴电缆, 由一半径为 R_1 的圆柱形直导体和同轴导体圆筒组成, 导体圆筒的内半径为 R_2 , 外半径为 R_3 , 圆柱形直导体和同轴导体圆筒中的电流大小均为 I , 方向相反, 导体的磁性可不考虑. 试计算以下各处的磁感强度: (1) $r < R_1$; (2) $R_1 < r < R_2$; (3) $R_2 < r < R_3$; (4) $r > R_3$.

13 - 10 如图所示, N 匝线圈均匀密绕在截面为长方形的中空骨架上, 求通入电流 I 后环内外磁场的分布.



习题 13 - 10 图

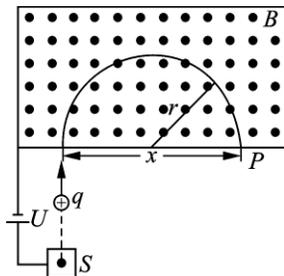
13 - 11 有两无限大平行载流平面, 它们的电流方向相同, 在平面内与电流垂直的方向上, 单位宽度里的电流为 j . 求: (1) 两载流平面之间的磁感强度; (2) 两平面之外空间的磁感强度.

13 - 12 一个电子射入 $B = (0.2i + 0.5j) \text{ T}$ 的非均匀磁场中, 当电子速度为 $v = 5 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 求电子所受的力.

13 - 13 速率为 $1.0 \times 10^6 \text{ m/s}$ 的电子进入一均匀磁场, 其速度方向与磁场方向垂直. 已知电子在磁场中做半径为 0.1 m 的圆周运动, 求磁感强度的大小和电子旋转的角速度.

13 - 14 测定离子质量的质谱仪如题图所示, 离子源 S 产生质量为 m , 电荷为 q 的离子. 离子的初速很小, 可看作静止, 经电势差 U 加速后进入磁感强度为 B 的均匀磁场, 并沿一半圆形轨道到达离入口 x 处的感光底板上. 试证明离子的质量为

$$m = \frac{B^2 q}{8U} x^2$$



习题 13 - 14 图

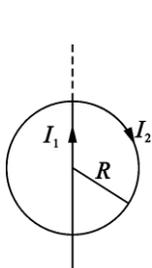
13 - 15 已知地面上空某处地磁场的磁感强度 $B = 0.4 \times 10^{-4} \text{ T}$, 方向向北. 若宇宙射线中有一速率 $v = 5.0 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的质子垂直地通过该处, 求: (1) 洛伦兹力的方向; (2) 洛伦兹力的大小, 并与质子受到的地球引力相比较.

13 - 16 显像管中的电子水平地由南向北运动, 能量为 $1.2 \times 10^4 \text{ eV}$, 地球

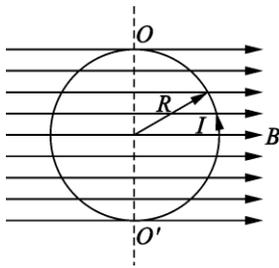
磁场的垂直分量 $B_{\perp} = 5.5 \times 10^{-5} \text{ T}$, 方向向下. 试求: (1) 电子束偏转方向; (2) 电子束在显像管内通过 0.2 m 到达屏面时光点的偏转距离.

13-17 利用霍尔元件可以测量磁感强度. 设一霍尔元件用金属材料制成, 其厚度为 0.15 mm , 载流子数密度为 10^{24} m^{-3} . 将霍尔元件放入待测磁场中, 测得霍尔电压为 $42 \mu\text{V}$, 通过电流为 10 mA . 求待测磁场的磁感强度.

13-18 如题图所示, 无限长直导线通入电流 I_1 , 半径为 R 的圆环通入电流 I_2 , 直导线和圆环共面如图放置, 求圆环受到的作用力.



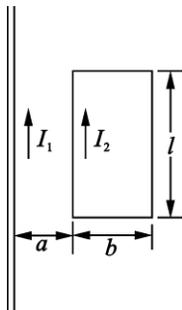
题 13-18 图



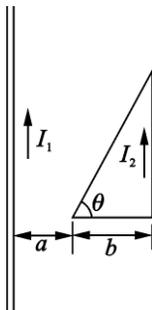
习题 13-19 图

13-19 如题图所示, 一个半径为 R 的圆形线圈, 通有电流 I , 放在磁感强度为 B 的均匀磁场中, 磁场方向与线圈平面平行, 试求线圈受到的对于轴 OO' 的力矩.

13-20 如题图所示, 长直导线载有电流 $I_1 = 30 \text{ A}$, 矩形回路载有电流 $I_2 = 20 \text{ A}$. 试计算作用在矩形回路上的合力. 已知 $d = 0.01 \text{ m}$, $b = 0.08 \text{ m}$, $l = 0.12 \text{ m}$.



习题 13-20 图

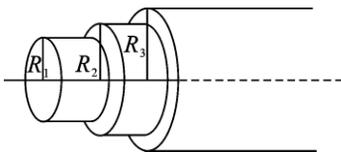


题 13-21 图

13-21 如图所示, 一通有电流为 I_1 的无限长直导线和一通有电流为 I_2 的直角三角形回路共面 $\theta = 60^\circ$, 求回路各边所受的力及穿过回路的磁通量.

13-22 设氢原子的电子以轨道角动量 $L = \frac{h}{2\pi}$ 绕质子做圆周运动, 圆周半径为 $a_0 = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$, 求质子所在处的磁感强度. $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 为普朗克常量.

13-23 如题图所示, 一根长直同轴电缆, 内、外导体之间充满磁介质, 磁介质的相对磁导率为 μ_r ($\mu_r < 1$), 导体的磁化可以略去不计. 电缆沿轴向有稳恒电流 I 通过, 内外导体上电流的方向相反. 求空间各区域内的磁感强度和磁化强度;



习题 13-23 图

13-24 设长 $L = 0.05 \text{ m}$, 截面积 $S = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 的铁棒中所有铁原子的磁偶极矩都沿轴向整齐排列, 且每个铁原子的磁偶极矩 $m_0 = 18 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$, 如果要使铁棒与磁感强度 $B_0 = 15 \text{ T}$ 的外磁场正交, 需用多大的力矩? 设铁的密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 铁的摩尔质量 $M_0 = 5.585 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

13-25 将磁导率 $\mu = 50 \times 10^{-4} \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ 的铁磁质做成一个细圆环, 环上密绕线圈, 单位长度匝数 $n = 500$, 形成有铁芯的螺绕环. 当线圈中电流 $I = 8 \text{ A}$ 时, 计算环内 B 和 H 的大小.

第 14 章 电磁感应

前几章我们讨论了静电场和稳恒磁场的基本规律,在表达这些规律的公式中,电场和磁场是各自独立、相互无关的。然而,激发电场和磁场的源——电荷和电流却是相互关联的,这就提醒我们:电场和磁场之间必然存在着相互联系、相互制约的关系。

电磁感应现象的发现阐明了变化的磁场可以激发电场这一关系,为麦克斯韦电磁场理论的建立奠定了坚实的基础。

电磁感应现象的发现在科学和技术上都具有划时代的意义,它不仅深刻地揭示了电场与磁场之间相互联系和相互转化的重要内容,促进了电磁理论的发展,而且为现代电工技术和无线电通信技术奠定了基础,为人类广泛利用电能开辟了道路。

本章的主要内容是:介绍电源及其电动势,介绍法拉第电磁感应定律,根据产生感应电动势的原因不同,分别研究动生电动势和感生电动势,讨论自感和互感及其应用,最后推导磁场能量的表达式。

§ 14 - 1 电源及其电动势

一般来说,如果要在导体内形成恒定的电流,必须要在其中维持不随时间变化的电场,也就是在导体两端维持恒定的电势差。产生和维持这个电势差的装置称为电源。如图 14 - 1 所示,当回路接通后,正电荷在电场力的作用下从电势高的 A 处(电源正极)经外电路移至电势低的 B 处(电源负极),并与负电荷中和。因此,两极的电荷不断减少,两极间的电势差也逐渐减小直至消失。电源的作用就在于把正电荷从低电势的 B 处通过电源内部移送到高电势的 A 处,以维持两极间恒定的电势差。如果电源内仅有静电力 F_e 是不能实现这一过程的,必须有非静电力 F_k 作用才行。电源恰能提供所需的非静电力。

电源的种类很多,常见的有干电池、蓄电池、光电池、发电机等。不同种类的电源,其非静电力的性质不同。例如,化学电池中的非静电力是化学能;发电机中的非静电力是电磁作用力。

从能量观点看,电源内部非静电力在移动电荷的过程中克服静电力做功,使电荷的电势能增加,从而将非电能量(化学能、热能、机械能等)转换成电能。

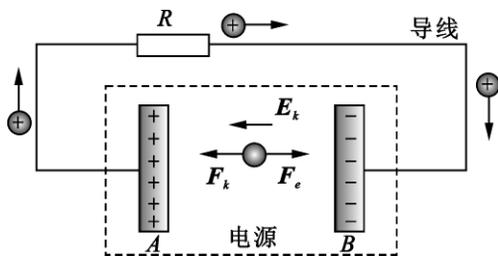


图 14 - 1 电源内非静电力的作用

一、电源的电动势

在不同的电源内,把一定量的电荷从负极移到正极,非静电力所做的功是不同的.为了定量地描述电源转化能量的本领,引入电动势的概念.在电源内,把单位正电荷从电源负极移到正极的过程中,非静电力所做的功定义为电源的电动势,以 \mathcal{E} 表示.

设电源把电量为 q 的正电荷从电源负极经电源内部移到正极,非静电力所做的功为 A_k ,则有

$$\mathcal{E} = \frac{A_k}{q}$$

借用场的概念,可以把非静电力的作用看作是非静电场的作用.用 E_k 表示非静电场的强度,则它对电荷 q 的作用力为 $F_k = qE_k$.在电源内,非静电力将正电荷 q 由负极经电源内部移到正极所做的功为

$$A_k = \int_{(-)}^{(+)} F_k \cdot dl = \int_{(-)}^{(+)} qE_k \cdot dl$$

则

$$\mathcal{E} = \int_{(-)}^{(+)} E_k \cdot dl \quad (14 - 1)$$

上式是用场的观点表示的电动势.

电动势是标量,但为了便于判断在电流流通时非静电力做功的正负,通常把电源内部电势升高的方向(即电源内负极到正极的指向)规定为电动势的方向.

电源电动势的大小仅取决于电源本身的性质,而与所连接的外电路无关.在如图 14 - 1 所示的回路中,非静电场强 E_k 只存在于电源内部,在外电路中 $E_k = 0$.而且,今后还会遇到在整个闭合电路中处处存在非静电力的情况,这时就无法区分“电源内部”和“电源外部”,于是,电动势也可表示为“非静电场强 E_k ”沿闭合电路的积分,即

$$\varepsilon = \oint_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} \quad (14-2)$$

这是电动势的又一种表示法,它比式(14-1)更具有普遍性.

二、电动势与两点间的电势差

在实际电路中,我们所遇到的大多数电路都是由电阻元件和电源连接而成的闭合电路,分析电路时,往往要从闭合电路中抽出其中一段电路来加以研究.如果抽出的一段电路中还包含有电源,则在这段电路中,除了电场力引起电荷的运动外,电源中的非静电性场强也要驱使电荷运动,这时欧姆定律的微分形式应推广为

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_k) \quad (14-3a)$$

或
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\gamma} - \mathbf{E}_k \quad (14-3b)$$

将上式应用于图 14-2 所示的一段电路,从 a 端经电源到 b 端取式(14-3b)的线积分得

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^c \frac{\mathbf{j}}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^b \frac{\mathbf{j}}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} - \int_a^b \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

积分时注意到,在 14-2 的电路中 \mathbf{j} 和 $d\mathbf{l}$ 方向相反; \mathbf{E}_k 和 $d\mathbf{l}$ 方向相反.因为

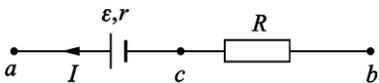


图 14-2

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= V_a - V_b \\ \int_a^b \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} &= \int_a^c \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = -\varepsilon \\ \mathbf{j} &= \frac{\mathbf{I}}{S} \end{aligned}$$

故

$$V_a - V_b = -(\mathbf{I}R + \mathbf{I}r) + \varepsilon \quad (14-4)$$

如果从整个电路中抽出的某一段电路中含有几个电源(亦称为非均匀电路)将式(14-4)推广,可得到任一段非均匀电路 a、b 两点间的电势差的普遍计算公式

$$V_a - V_b = \sum_i \pm \varepsilon_i + \sum_i \pm I_i R_i \quad (14-5)$$

式(14-5)表明,电路中 a、b 两点间的电势降落等于这两点间电路上各电源和各电阻上电势降落的代数和.因为我们讨论的是电势降落,所以上式各项的符

号按选定的循行方向,凡是电势降低的就取正号,凡是电势升高的就取负号.当 $V_a - V_b$ 为正值时,表示 a 点电势比 b 点电势高.式(14 - 5)又称为一段非均匀电路的欧姆定律.

§ 14 - 2 电磁感应定律

自从 1820 年丹麦物理学家奥斯特发现了电流的磁效应以后,人们自然联想到:既然电流能够激发磁场,磁场是否也能产生电流呢?许多科学家为此做了大量艰苦的工作,最后获得成功的是英国物理学家法拉第(M. Faraday).法拉第经过近十年持之以恒的精心实验研究,于 1831 年首次发现随时间变化的磁场会在邻近导体中产生电流的现象,人们把这个现象称为电磁感应现象.

法拉第通过一系列的实验发现:不管什么原因使穿过闭合导体回路所包围面积内的磁通量发生变化(增加或减少),回路中都会出现电流,这种电流称为感应电流.在磁通量增加和减少的两种情况下,回路中感应电流的流向相反.感应电流的大小则取决于穿过回路中的磁通量变化快慢.变化越快,感应电流越大;反之,就越小.感应电流的流向可以用楞次定律来方便地判断.

一、楞次定律

1833 年,俄国物理学家楞次在进一步概括大量实验结果的基础上,总结出了确定感应电流方向的法则,称为楞次定律.这就是:闭合回路中感应电流具有确定的方向,它总是使得感应电流所产生的、通过回路面积的磁通量去补偿或反抗引起感应电流的磁通量的变化.

这里,所谓补偿回路面积磁通量的变化:是指当磁通量增加时,感应电流所产生的磁通量方向与原来磁通量的方向相反(反抗它的增加);当磁通量减小时,感应电流所产生的磁通量与原来磁通量的方向相同(补偿它的减小).

实质上,楞次定律是能量守恒定律在电磁感应现象中的具体体现.为理解这一点,我们从功和能的角度分析图 14 - 3 所示的实验.当磁棒插入时,按照楞次定律,出现感应电流的线圈可看作另一磁棒(电磁铁),其右端相当于 N 极,正好与向左插入的磁棒 N 极相斥.为使磁棒匀速向左插入,就必须借用外力克服这一斥力做功.另一方面,感应电流流过线圈及电流计时必然要发热,这个热量正是外力的功转化而成的.可见,楞次定律符合能量守恒和转化这一普遍规律.假设如果感应电流的方向与楞次定律的结论相反,图 14 - 3(a)线圈右端相当于 S 极,它与向左插入的磁棒左端的 N 极相吸引,磁棒在这个吸引力的作用下将加速向左运动(无需其他向左的外力),线圈的感应电流越来越大,线圈与磁棒的吸引力也越来越强.如此循环,在没有任何外力做功的情况下,磁棒的动能

不断增加,而感应电流放出越来越多的热能,这显然违反了能量守恒定律.可见,能量守恒定律要求感应电流的方向服从楞次定律.

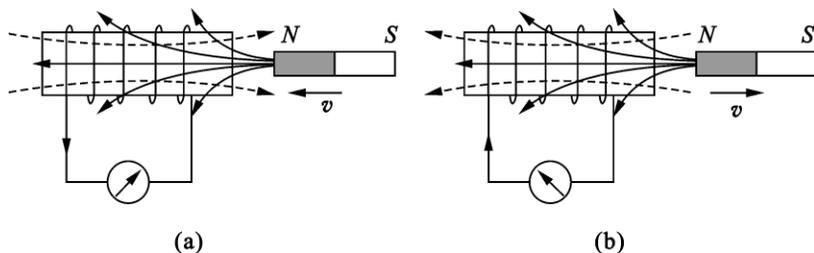


图 14 - 3 利用楞次定律判断感应电流的方向

二、法拉第电磁感应定律

通过各种实验,法拉第不仅发现了电磁感应现象,而且从两个方面揭示了电磁感应现象的本质.一方面,只有通过导体回路的磁通量发生变化,才会有电磁感应现象发生.这种磁通量的变化可以来源于磁场的变化,也可以来源于导体回路的运动以及导体回路中的一部分做切割磁感线的运动.另一方面,感应电动势的大小与磁通量变化的速率成正比,与回路电阻的大小无关.它反映了电磁感应现象的实质是磁通量的变化产生感应电动势.当闭合导体回路所包围面积的磁通量变化时,此回路中就会出现感应电流,这意味着该回路中必定存在某种电动势.这种直接由磁通量变化所引起的电动势叫做感应电动势.也就是说,在任何电磁感应现象中,只要穿过回路的磁通量变化,回路中就一定有感应电动势产生.若导体回路是闭合的,感应电动势就会在回路中产生感应电流;若导线回路不是闭合的,回路中仍然有感应电动势,但是不会形成电流.

将法拉第的实验研究结果归纳起来,就得到了法拉第电磁感应定律,可表述为:

不论任何原因,当穿过闭合回路所包围面积的磁通量 Φ 发生变化时,在回路中都会产生感应电动势,而且感应电动势的大小 ε_i 总是与磁通量随时间的变化率成正比.

如果采用国际单位制,磁通量的单位是韦伯(Wb),时间的单位是秒(s),则此定律可表示为

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (14 - 6)$$

ε_i 的单位是伏特(V).在约定的正负符号规则下,式(14 - 6)中的“-”号反映了感应电动势的方向,它是楞次定律的数学表现.

下面讨论式(14-6)中“-”号的物理意义. 由于 ε_i 和 Φ 都是标量, 要赋予一个代数量的正负, 必须先约定一个正方向, 当实际方向与约定方向一致时取正值, 反之取负值. 习惯上约定: 回路 L 的绕行方向和回路包围面积的正法线方向 e_n 的关系服从右手螺旋法则, 如图 14-4 所示. 约定回路绕行方向是为了确定感应电动势 ε_i 的正负, 约定回路面积法线方向 e_n 是为

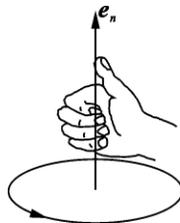


图 14-4 回路正方向的约定

了确定磁通量 Φ 的正负, 当穿过回路的磁感强度方向与面法线 e_n 的方向所成夹角 θ 小于 90° 时, 磁通量 Φ 为正; θ 大于 90° 时, 磁通量 Φ 为负. 有了 Φ 的正负, $\frac{d\Phi}{dt}$ 的正负就有了确定的意义. 有了这一约定后, 感应电动势 ε_i 的正负就可以由式(14-6)中的“-”号来确定了. 考虑到在一个回路中的感应电动势可能只有两种取向, 当 $\varepsilon > 0$ 时, 表示感应电动势的方向和回路约定的绕行方向相同; 当 $\varepsilon < 0$ 时, 表示感应电动势的方向和回路约定的绕行方向相反.

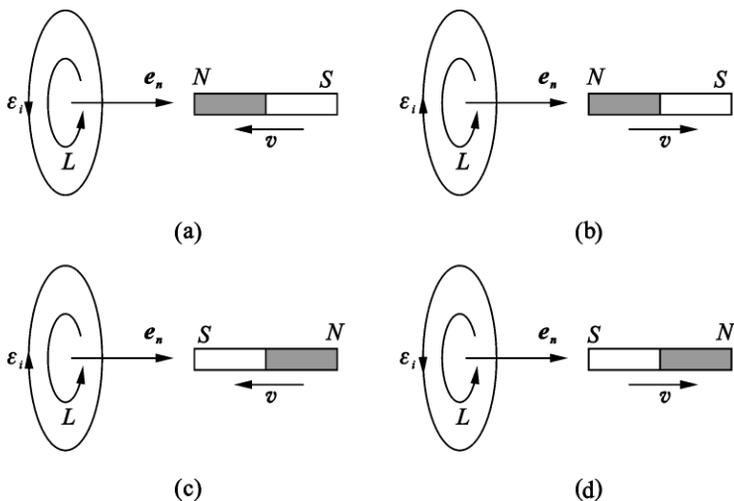


图 14-5 感应电动势的方向与磁通量变化率的关系

现在, 以图 14-5 所示的几种情况, 讨论由式(14-6)中的“-”号来确定感应电动势 ε_i 方向的方法. 当磁铁如图 14-5(a) 放置时, 穿过线圈回路面积的磁通量 $\Phi < 0$. 磁棒以速度 v 插入线圈时, $\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| > 0$, 则 $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, 由式(14-6)可知 $\varepsilon_i > 0$, 表明感应电动势的方向和回路约定的绕行方向相同. 当磁铁如图 14-5

(b)放置时, $\Phi < 0$, 若以速度 v 将磁棒从线圈中拔出时, $\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| < 0$, 则 $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, 由式(14-6)可知 $\varepsilon_i < 0$, 表明感应电动势的方向和回路约定的绕行方向相反. 当磁铁如图 14-5(c)放置时, $\Phi > 0$, 此时磁棒以速度 v 插入线圈, $\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| > 0$, 则 $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, 由式(14-6)可知 $\varepsilon_i < 0$, 表明感应电动势的方向和回路约定的绕行方向相反. 当磁铁如图 14-5(d)放置时, $\Phi > 0$, 若以速度 v 将磁棒从线圈中拔出时, $\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| < 0$, 则 $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, 由式(14-6)可知 $\varepsilon_i > 0$, 表明感应电动势的方向和回路约定的绕行方向相同. 这与应用楞次定律判断感应电动势方向时所得结果是完全一致的.

应当指出, 式(14-6)是针对单匝线圈回路而言的, 如果导体回路是由 N 匝线圈绕制而成, 则当磁通量发生变化时, 每匝线圈中都将产生感应电动势, 若每匝线圈穿过的磁通量分别是 Φ_1 、 Φ_2 、 \dots 、 Φ_N , 由于匝与匝之间是串联的, 所以, 整个线圈回路的总电动势就等于各匝线圈电动势之和, 即

$$\varepsilon_i = - \frac{d}{dt} (\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N) = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (14-7a)$$

式中 $\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N$ 称为磁通匝链数, 简称磁链. 若穿过各匝线圈的磁通相同, 均为 Φ , 即 $\Psi = N\Phi$, 则有

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Psi}{dt} = - N \frac{d\Phi}{dt} \quad (14-7b)$$

若回路的电阻为 R , 则回路中感应电流的大小为

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Psi}{dt} \quad (14-8)$$

此式表明, 感应电流与回路中磁通量随时间的变化率有关, 变化率越大, 感应电流越强. 在 $t_1 - t_2$ 这段时间内, 通过回路任一截面的感应电量为

$$q = \int_{t_1}^{t_2} Idt = - \frac{1}{R} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = \frac{1}{R} (\Psi_1 - \Psi_2) \quad (14-9)$$

式(14-9)表明, 穿过回路中任一截面的感应电量却只与磁通量的变化量有关. 因此, 若测得感应电量, 就可计算出磁通量的变化量. 常用的测量磁感强度的磁通计(又称为高斯计)就是根据这一原理制成.

§ 14-3 动生电动势和感生电动势

法拉第电磁感应定律指出: 只要穿过回路所围面积的磁通量发生变化, 在

回路中就会有感应电动势产生. 根据磁通量的定义式 $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 不难看出, 引起磁通量变化的原因不外乎两种情况:

(1) 磁场不随时间变化, 而导体回路相对于磁场运动, 即构成磁通量的回路面积取向和面积大小在变化, 而磁感强度保持不变. 这种由于导体运动而产生的感应电动势, 称为动生电动势.

(2) 导体回路在磁场中无相对运动, 回路的位置、形状和大小也不变, 而磁场在空间的分布随时间变化. 这种由于磁感强度随时间变化而产生的感应电动势称为感生电动势.

一、动生电动势

我们先分析一段直导体在均匀磁场中运动的情况.

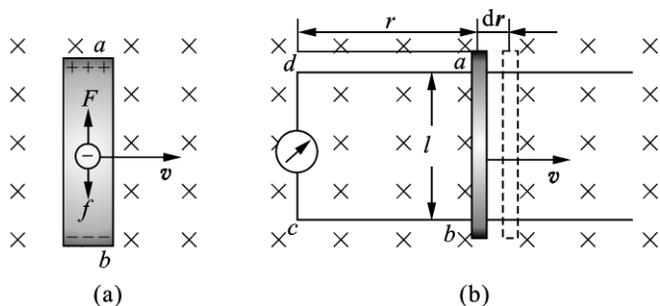


图 14 - 6 动生电动势

如图 14 - 6(a)所示, 磁场 B 垂直于纸面向里, 长度为 l 的导体以速度 v 向右移动, v 与 B 及 l 三者方向相互垂直. 当导体运动时, 导体内的自由电子随导体一起向右运动. 导体中的每一个自由电子所受到的磁场作用力 (即洛伦兹力) 为

$$\mathbf{f} = (-e)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

式中 $(-e)$ 为电子的电量, 洛伦兹力 f 的方向沿导线由 a 指向 b . 在此力作用下, 自由电子将沿导线向 b 端运动, 从而在 b 端出现负电荷的堆积, 而在 a 端出现正电荷的堆积. 于是在导体 ab 内产生一静电场 E , 其方向由 a 指向 b . 此电场使自由电子受到一个由 b 指向 a 的静电力 $F = -eE$. 此静电场 E 随着两端电荷的堆积而增大, 当电荷积累到一定程度时, 自由电子受到的静电力与洛伦兹力达到平衡. 这时自由电子不再沿导线方向做宏观移动, a 、 b 两端堆积的正电荷和负电荷分别保持稳定, 导体内的静电场 E 也不再变化, 因此导体两端具有一定的电势差, a 端为正, b 端为负. 或者说 a 端电势高, b 端电势低, 导体 ab 就相当于一个电池. 因为静电力与洛伦兹力平衡, 即

$$eE = evB$$

所以

$$E = vB$$

这时导体 ab 两端的电势差

$$V_a - V_b = El = vBl$$

就是动生电动势 ε_i 的量度. 由此可见, 动生电动势的产生是由洛伦兹力作用的结果.

如果将导体 ab 放在金属导轨上, 构成一个闭合回路 abcd, 如图 14 - 6(b) 所示. 此回路中仅 ab 边在磁场中运动, 而其余各边都静止不动. 由于 a 端电势高于 b 端, 自由电子在静电场力的作用下将沿 adcba 方向流动, 相当于有电流沿 adcba 方向流动. 因 a、b 两端堆积的电荷将减少, 故原来的平衡被破坏. 但在洛伦兹力作用下自由电子不断地从 a 端移向 b 端, 结果维持着 a、b 两端恒定的电势差, 回路中就不断地有电流通过.

由此可见, 运动导体 ab 相当于一个电源, a 端为正极, b 端为负极. 此电源中的非静电力就是洛伦兹力 $f = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, 作用于单位正电荷的非静电力(即非静电场强)则为

$$E_k = \frac{f}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

根据电动势的定义可得, 在磁场中运动的导体 ab 所产生的动生电动势为

$$\varepsilon_i = \int_b^a E_k \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (14 - 10)$$

式中 $d\mathbf{l}$ 是正电荷由 b 向 a 移动的位移元.

在图 14 - 6(b) 中, 由于 \mathbf{v} 与 \mathbf{B} 都为恒矢量, 且相互垂直, 而 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向与 $d\mathbf{l}$ 的方向相同, 所以, 上式积分

$$\varepsilon_{ba} = \int_b^a (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l vBdl = vBl$$

ε_{ba} 为正值, 表明电动势的方向与积分路径方向一致, 即由 b 指向 a. 这与应用法拉第电磁感应定律所得结果完全一致.

由式(14 - 10)可知, 动生电动势的大小与 \mathbf{v} 和 \mathbf{B} 之间的夹角有关, 当 $\mathbf{v} // \mathbf{B}$ 时, $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$, $\varepsilon_i = 0$. 这就是说, 只有当导线“切割”磁感线时, 才有动生电动势产生.

在一般情况下, 当任意形状的导线 L(可以是一般弯曲导线, 也可以是闭合线圈)在非均匀的恒定磁场中运动或变形时, 也产生动生电动势. 这时可将 L 分成许多无限小的线元, 任一线元 $d\mathbf{l}$ 上产生的动生电动势为

$$d\varepsilon_i = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l} \quad (14-11)$$

式中 \boldsymbol{v} 表示线元 $d\boldsymbol{l}$ 的运动速度, \boldsymbol{B} 为 $d\boldsymbol{l}$ 所在处的磁感强度. 所以, 整个 L 中的动生电动势为

$$\varepsilon_i = \int_L d\varepsilon_i = \int_L (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l} \quad (14-12)$$

这就是计算动生电动势的一般公式. 根据矢量运算的混合积公式

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

可将式(14-11)写成

$$d\varepsilon_i = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{B} \cdot (d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v})$$

式中 $d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v} = d\boldsymbol{l} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 是线元 $d\boldsymbol{l}$ 在单位时间内所扫过的面积, $\boldsymbol{B} \cdot (d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v})$ 就是在单位时间内切割的磁感线的数目. 因此, 式(14-12)表示整个导线 L 中的感应电动势 ε_i 等于整个导线 L 在单位时间内所切割的磁感线数目. 对闭合回路而言, 也就等于单位时间内穿过回路的磁通量对时间的变化率. 所以, 式(14-12)与式(14-2)是等效的.

以上分析表明, 动生电动势实质上是由运动电荷受到洛伦兹力作用而产生的, 只有在运动导体中才可能产生. 对于导体回路不动而穿过回路所围面积内的磁通量发生变化(即磁场随时间变化)时, 在回路中所产生的感应电动势, 不能用洛伦兹力解释. 这就是下面要讨论的感生电动势.

例 14-1 如图 14-7 所示, 长为 L 的金属棒在匀强磁场中, 以角速度 ω 与磁场方向垂直的平面内绕棒的一端 O 匀速转动. 求棒中的动生电动势.

解 在金属棒上距 O 点为 l 处取一线元 $d\boldsymbol{l}$, 其运动速度的大小为 $v = \omega l$. 因 \boldsymbol{v} 、 \boldsymbol{B} 、 $d\boldsymbol{l}$ 相互垂直, 所以 $d\boldsymbol{l}$ 两端的动生电动势为

$$d\varepsilon_i = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l} = Bvdl = B\omega ldl$$

因为棒上所有线元的电动势方向相同, 则金属棒 L 上动生电动势的大小为

$$\varepsilon_i = \int_L^0 B\omega ldl = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

动生电动势的方向为 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ 的指向, 即由 A 指向 O , A 端为低电势, O 端为高电势.

例 14-2 在均匀磁场中做匀速转动的矩形线圈 $abcd$. 矩形线圈的面积为

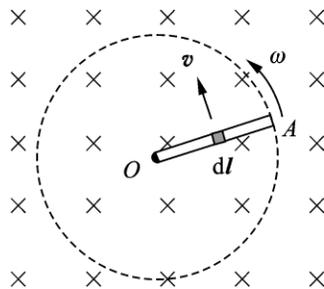


图 14-7

S 匝数为 N , 使这线圈以角速度 ω 绕固定的轴线 OO' 转动. 磁感强度 B 与 OO' 轴垂直, 如图 14-8 所示. 试求线圈中的感应电动势.

解 设 t 时刻 线圈平面法向单位矢量 e_n 与 B 之间的夹角为 $\theta = \omega t$. ab 段上各点都以速度 v 运动. ab 段中的等效非静电场强为 $E_k = v \times B$, 方向由 a 指向 b , 其大小为 $E_k = vB \sin \theta$; 同样, 在 cd 段中 E_k 的方向由 c 指向 d , 其大小与 ab 段中的相等. 在 bc 和 da 段中, E_k 的方向都垂直于导线. 若 $ab = cd = l_1$, $bc = da = l_2$. 则 E_k 沿 $abcd$ 的线积分, 即得线圈中的动生电动势为

$$\varepsilon_i = N \oint E_k \cdot dl = 2Nl_1 E_k = 2Nl_1 vB \sin \theta$$

从图 14-7 中可知 $v = \frac{1}{2} l_2 \omega$, 则有

$$\varepsilon_i = Nl_1 l_2 \omega B \sin \omega t = N S B \omega \sin \omega t$$

令 $N S B \omega = \varepsilon_0$, 也就是线圈中最大动生电动势的量值. 这样

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

此问题也可以由法拉第电磁感应定律求出. t 时刻, 通过每匝线圈平面的磁通量为

$$\Phi = B S \cos \theta$$

N 匝线圈中所产生的动生电动势为

$$\varepsilon_i = - N \frac{d\Phi}{dt} = N B S \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

式中 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ 是线圈转动时的角速度.

所以

$$\varepsilon_i = N B S \omega \sin \omega t$$

可见, 在匀强磁场内转动的线圈中所产生的电动势是随时间作周期性变化的, 周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$. 在两个相邻的半周期中, 电动势的方向相反, 这种电动势叫做交变电动势. 在交变电动势的作用下, 闭合线圈中的电流也是交变的, 叫做交变电流. 这就是发电机的基本原理.

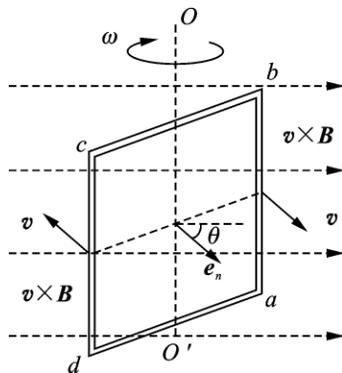


图 14-8

二、感生电动势

当闭合导体回路与磁场相对静止,而磁场随时间变化时,在导体回路中也会有感应电流.这表明在回路中必有感应电动势,称为感生电动势.

产生感生电动势的非静电力又是什么呢?这个问题无法从静场规律中得到解释.毫无疑问,这种非静电力与磁场随时间的变化有关.考虑到感生电动势与回路的物理性质无关,则作用在单位电荷上的非静电力(即非静电力场)完全由随时间变化的磁场决定.那么,这种非静电力场的本质又是什么呢?麦克斯韦以他敏锐的洞察力预言这种非静电力场是一种电场,它由随时间变化的磁场所激发,称之为感生电场(induced electric field)或有旋电场(curl electric field).感生电动势正是来源于感生电场所产生的非静电力.

麦克斯韦对感生电动势成因的解释揭示了电磁感应定律更深层次的物理本质.随时间变化的磁场在其周围产生电场.法拉第引入的导体回路只不过是提供了感生电场存在的一种检测手段;一段导体,甚至于一个试验电荷都可以作为这类检测手段.

感生电场与静电场的共同点是,二者都对电荷有力的作用.但二者又是根本不同的.感生电场是由随时间变化的磁场所激发的.感生电场的电场线是闭合的.所以,感生电场不同于静电场.如果用 E_c 表示静电场(库仑场 Coulomb field)的场强,则静电场场强的环流

$$\oint_L E_c \cdot dl = 0$$

如果用 E_i 表示感生电场的场强,则此场强的环流

$$\oint_L E_i \cdot dl \neq 0$$

这表明感生电场不是保守力场,因而在感生电场中,电势和电势差的概念毫无意义.显然,感生电场对电荷的作用力不是静电力.

将单位正电荷沿闭合回路 L 移动一周时,感生电场所做的功就等于回路中产生的感生电动势,即

$$\varepsilon_i = \oint_L E_i \cdot dl \quad (14-13)$$

按照法拉第电磁感应定律 $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$

因此,有

$$\oint_L E_i \cdot dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad (14-14)$$

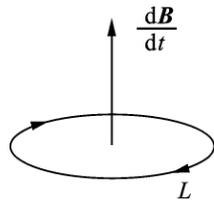


图 14-9

式中 dS 表示回路 L 所围面积 S 上的任一面积元, 等号右侧的 \int_S 表示对闭合曲线 L 所围面积 S 求积分。“-”号表明 E_i 与 $\frac{dB}{dt}$ 形成左旋系统, 如图 14-9 所示。

例 14-3 半径为 R 的截流密绕无限长直螺线管, 通有电流时, 管内产生一沿轴线的均匀磁场, 管外磁场可近似看作零。若通过的电流随时间均匀变化, 使得磁感强度 B 随时间的变化率为常量, 且为大于零的正值, 试求由于磁场变化在管内外激发的感生电场分布。

解 (1) 如图 14-10 所示, 在 $r < R$ 的区域内任取一条电场线为闭合回路(半径为 r 的圆), 并设顺时针方向为回路正向, 则

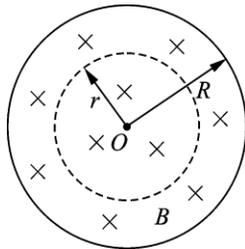


图 14-10

$$\oint_L E_i \cdot dl = E_i \cdot 2\pi r$$

$$\oint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS = \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$

由式(14-14)可得

$$E_k = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

(2) $r > R$ 时, 类似地, 在 $r > R$ 处任取一条电场线为环路(半径为 r 的圆), 并设顺时针方向为回路正向, 则

$$\oint_L E_i \cdot dl = E_i \cdot 2\pi r$$

$$\oint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS = \pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$E_k = -\frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t}$$

式中负号表示 E_k 的方向沿电场线的切线方向, 是逆时针的。

例 14-4 在半径为 R 的圆柱形空间中存在着均匀磁场 B 的方向与圆柱的轴线平行。如图 14-11 所示, 有一长度为 l 的金属棒 PQ 放在磁场中, 金属棒 PQ 与圆柱的轴线垂直, 设 B 随时间的变化率 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 为常量。试求金属棒 PQ 上感生电动势的大小。

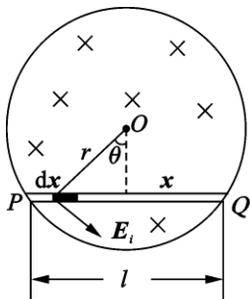


图 14-11

解 由例 14 - 3 可知 在 $r < R$ 区域 感生电场强度的大小 .

设 PQ 上线元 dx 处 E_k 的方向如图 14 - 11 所示 ,则金属杆 PQ 上的电动势为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{PQ} &= \int_P^Q E_k \cdot dx = \int_0^l E_k \cos\theta dx \\ &= \int_0^l \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{r} dx\end{aligned}$$

所以

$$\varepsilon_{PQ} = \frac{\partial B}{\partial t} \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

三、涡电流

感生电场力可以在整块金属内部引起闭合涡旋状的感应电流 ,这种电流成为涡电流 .由于多数金属的电阻率很小 ,因此不大的感应电动势往往会在整块金属内部激起强大的涡电流 .

图 14 - 12 表示一个铁芯线圈通过交变电流时在铁心内部激起的涡电流 ,它是由变化磁场激发的感生电场引起的 .

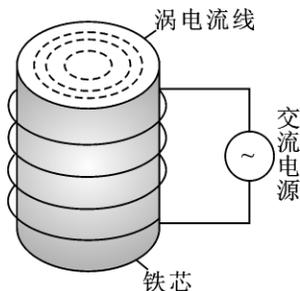


图 14 - 12 铁芯中的涡电流



图 14 - 13 高频感应炉

涡电流与普通电流一样要放出焦耳热 .利用涡电流的热效应进行加热的方法叫做感应加热 .冶炼金属用的高频感应炉就是感应加热的一个重要例子 ,如图 14 - 13 所示 ,当线圈通入高频交变电流时 ,坩埚中的被冶炼金属内部出现强大的涡电流 ,它所产生的热量可使金属很快熔化 .采用高频的目的是考虑到涡电流所产生的热量与交变电流频率的二次方成正比 .这种冶炼方法的最大优点之一就是冶炼所需的热量直接来自被冶炼金属本身 ,因此可达极高的温度并有快速和高效的特点 .此外 ,这种冶炼方法易于控制温度 ,并能避免有害杂质混入被炼金属中 ,因此适于冶炼特种合金和特种钢等 .

涡电流的热效应对于变压器和电机的运行极为不利. 首先, 它会导致铁心温度升高, 从而危及线圈绝缘材料的寿命, 严重时甚至可使绝缘材料当即烧毁. 其次, 涡电流发热要损耗额外的能量(叫做涡流损耗), 使变压器和电机的效率降低. 为了减小涡电流, 变压器和电机的铁心都不用整块钢铁而用薄的硅钢片叠压而成. 硅钢是掺有少量硅的钢, 其电阻率比普通钢大, 因此涡电流损耗得以减少. 把硅钢制成片状则是为了借用片间的绝缘漆(或自然形成的绝缘氧化层), 切断涡电流的通路以进一步减小涡电流的发热.

除涡电流的热效应外, 涡电流还具有磁效应. 如图 14-14 所示, 在电磁铁未通电时, 由铜板 A 做成的摆要往复多次才能停止下来. 如果电磁铁通电, 磁场在摆动的铜板 A 中产生涡电流. 涡电流受磁场作用力的方向与摆动方向相反, 因而增大了摆的阻尼, 摆很快就能停止下来. 这种现象称为电磁阻尼.

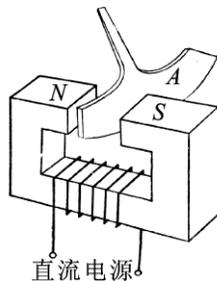


图 14-14 电磁阻尼

电磁仪表中的电磁阻尼器就是根据涡电流磁效应制作的, 它可使仪表指针很快地稳定在应指示的位置上. 此外, 电气机车的电磁制动器也是根据这一效应制作的.

§ 14-4 自感和互感

法拉第电磁感应定律指出, 只要使穿过闭合回路所围面积的磁通量发生变化, 回路中就会产生感应电动势. 由于引起磁通量变化的原因很多, 所以必须根据具体情况具体分析. 作为法拉第电磁感应定律的特例, 下面讨论自感和互感.

一、自感

当一个回路通有电流时, 此电流所产生的磁场的磁感线将穿过回路本身. 如果回路中的电流发生变化, 穿过该回路自身的磁通量也将随之变化, 于是在该回路中将产生感应电动势. 这种由于回路中电流变化而引起的磁通量发生变化, 从而在自身回路中激起感应电动势的现象, 称为自感现象. 相应的感应电动势称为自感电动势, 用 ε_L 表示.

考虑一个由一匝线圈构成的闭合回路, 其中的电流为 I , 根据毕奥-萨伐尔定律, 空间任一点的磁感强度都与回路中的电流 I 成正比. 因此, 穿过该回路所包围面积的磁通量也与电流 I 成正比, 即

$$\Phi = LI \quad (14-15a)$$

式中比例系数 L 称为回路的自感系数, 简称自感.

如果回路由 N 匝完全相同的线圈串联而成, 则式(14-12a)可改写为

$$\Psi = N\Phi = LI \quad (14 - 15b)$$

式中比例系数 L 是 N 匝线圈回路的自感。

实验表明,自感 L 与回路电流的大小无关,只取决于线圈回路的几何形状、大小、线圈匝数及周围磁介质的磁导率。由式(14 - 15)可见,某回路的自感 L 在数值上等于回路中通过单位电流时穿过回路所包围面积的磁链。

在国际单位制中,自感的单位为亨利(H)。

当自感 L 一定时,根据法拉第电磁感应定律,回路中所产生的自感电动势可表示为

$$\varepsilon_L = - \frac{d\Psi}{dt} = - L \frac{dI}{dt} \quad (14 - 16)$$

式中的负号是楞次定律的数学表示,它指出自感电动势将反抗回路中电流的变化。也就是说,电流增加时,自感电动势与原来电流的方向相反;电流减小时,自感电动势与原来电流的方向相同。

自感 L 的物理意义:由式(14 - 16)可知,回路的自感愈大,自感的作用也愈大,则改变该回路中的电流也愈不容易。换一句话说,回路的自感有使回路保持原有电流不变的性质,这一特性与力学中物体的惯性相仿。因此,自感可认为是描述回路“电磁惯性”的一个物理量,自感表征了回路本身的一种电磁属性。

在一些电器设备中,常利用自感具有维持原有电路状态的特性,可以用来稳定线圈回路的电流。日光灯的镇流器就是一个带有铁芯的自感线圈。此外,在电工设备中,常利用自感作用制成自耦变压器或扼流圈。在电子技术中,利用自感元件和电容器可以组成谐振电路或滤波电路等。

另一方面,通常在具有很大的自感和通有较大电流的电路中,当断开或接通电路的瞬间,在开关处将发生强大的火花,产生弧光放电现象,亦称电弧。电弧产生的高温可达 2 000 以上,有破坏开关、引起火灾的危险。因此通常都用油开关,即把开关放在绝缘性能良好的油里,以防止电弧的发生。

例 14 - 5 长度为 l 、横截面为 S 的密绕长直螺线管,总匝数为 N ,管中介质的磁导率为 μ 。求其自感。

解 有电流通过螺线管时,忽略漏磁和螺线管两端处磁场的非均匀性,管内磁感强度的大小为

$$B = \mu \frac{N}{l} I$$

通过螺线管的磁链为

$$\Psi = NBS = \mu \frac{N^2 S}{l} I$$

由式(14 - 15b)可得

$$L = \mu \frac{N^2}{l} S$$

设螺线管上单位长度的线圈匝数为 n , 螺线管的体积为 $V = Sl$, 则

$$L = \mu \left(\frac{N}{l} \right)^2 Sl = \mu n^2 V$$

由此可知, 某个导体回路的自感只由回路的线圈匝数、大小、形状和介质的磁导率所决定, 与回路中有没有电流无关. 因此, 与电容 C 、电阻 R 等一样, 自感 L 也是表征电路元件本身电磁特性的一个物理量. 各种不同的线圈具有不同的自感.

例 14 - 6 如图 14 - 15 所示, 设有一电缆由两个“无限长”同轴圆筒状的导体组成, 其间充满磁导率为 μ 的均匀磁介质. 某时刻在电缆中沿内圆筒和外圆筒流过大小均为 I , 但方向相反的电流. 设内、外圆筒的半径分别为 R_1 和 R_2 , 求单位长度电缆的自感.

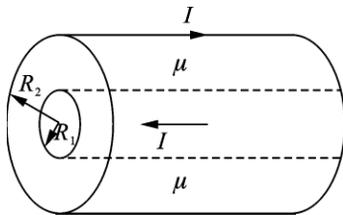


图 14 - 15

解 应用有磁介质时磁场的安培环路定理

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i$$

易得内圆筒以内(即 $r < R_1$)及在外圆筒以外(即 $r > R_2$)的区域中, 磁感强度均为零.

在内、外两圆筒之间(即 $R_1 < r < R_2$) 距离轴线为 r 处的磁感强度为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

任取一段长为 l 的电缆, 穿过电缆纵剖面上的面积元 $dS = ldr$ 的磁通量为

$$d\Phi = B \cdot dS = BdS = Bldr$$

对某一时刻而言 I 为一定值, 则穿过长度为 l 的两圆筒之间的总磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu I l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由电感定义可知, 长度为 l 的这段电缆的自感

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

则单位长度电缆的自感为

$$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

二、互感

设有两个彼此邻近的导体回路 1 和 2, 分别通有电流 I_1 和 I_2 , 如图 14 - 16 所示. I_1 激发的磁场, 有一部分磁感线要穿过回路 2 所围面积, 用磁通量 Φ_{21} 表示; 当回路 1 中的电流 I_1 发生变化时, Φ_{21} 也要变化, 因而在回路 2 中产生感应电动势 ε_{21} . 类似地, 回路 2 中的电流 I_2 变化时, 它也使穿过回路 1 所围面积的磁通量 Φ_{12} 变化, 因而在回路 1 中也产生感应电动势 ε_{12} . 这种由于一个回路中的电流变化而在另一个回路中产生感应电动势的现象, 称为互感现象, 相应的感应电动势称为互感电动势, 用 ε_M 表示.

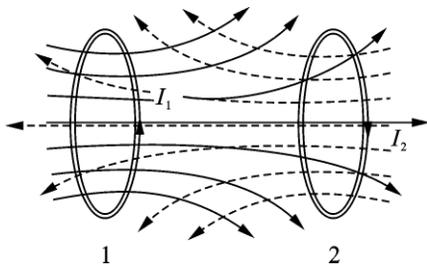


图 14 - 16 互感

假设上面两个回路的形状、大小、相对位置和周围磁介质的磁导率都不改变, 则根据毕奥 - 萨伐尔定律, 由电流 I_1 在空间任何一点激发磁场的磁感强度与 I_1 成正比, 相应穿过回路 2 的磁通量 Φ_{21} 也必然与 I_1 成正比, 即

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

式中 M_{21} 是比例系数. 同理, 对于电流 I_2 , 有

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2$$

式中 M_{12} 是比例系数. 理论和实验都证明, M_{21} 和 M_{12} 只与两个回路的形状、大小、相对位置、线圈匝数及其周围磁介质的磁导率有关. 而且 $M_{21} = M_{12} = M$, M 称为两个回路的互感系数, 简称互感. 则上两式可写为

$$\begin{cases} \Phi_{21} = M I_1 \\ \Phi_{12} = M I_2 \end{cases} \quad (14 - 17)$$

由式(14 - 17)可见, 两个导体回路的互感在数值上等于其中一个回路通过单位电流时, 穿过另一个回路所围面积的磁通量.

根据法拉第电磁感应定律, 可以计算互感电动势. 若上述回路 1 中电流强度 I_1 发生变化, 在回路 2 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{21} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = - M \frac{dI_1}{dt} \quad (14 - 18a)$$

同理, 若回路 2 中电流强度 I_2 发生变化, 在回路 1 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = - M \frac{dI_2}{dt} \quad (14 - 18b)$$

由式(14 - 18)可以看出, 当一个回路中的电流随时间的变化率一定时, 互

感系数越大,则通过互感在另一回路中引起的互感电动势也越大;反之亦然.因此,互感系数是表征两个回路相互感应强弱的物理量.

由式(14-18)可得

$$M = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \quad (14-19)$$

此表明,互感 M 等于一个回路中的电流改变单位值时,在另一回路所围面积中引起磁链数的改变值.

在国际单位制中,互感的单位与自感相同,都是亨利(H).

例 14-7 如图 14-17 所示,有两个长度均为 l 的密绕长直螺线管,同轴套装放置.原线圈 C_1 为外层线圈(用实线表示)共有 N_1 匝,副线圈 C_2 为内层线圈(用虚线表示)共有 N_2 匝.设两螺线管的横截面积均为 S ,且螺线管直径远小于螺线管的长度,螺线管内磁介质的磁导率为 μ .试求:(1)两螺线管的互感 M ;(2)两螺线管的自感 L_1 和 L_2 与互感 M 的关系.

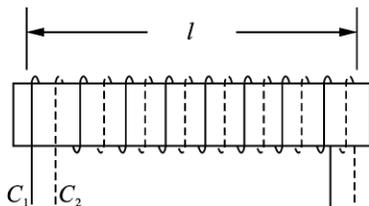


图 14-17

解 (1)假设在螺线管 C_1 中通以电流 I_1 ,则该螺线管内的磁感强度为

$$B = \mu \frac{N_1}{l} I_1$$

通过螺线管 C_2 的磁通匝链数为

$$\Psi_{21} = N_2 BS = \mu \frac{N_1 N_2}{l} I_1 S$$

由互感的定义可得

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu \frac{N_1 N_2}{l} S$$

(2)在螺线管 C_1 中通以电流 I_1 时,穿过螺线管 C_1 自身的磁链为

$$\Psi_{11} = N_1 BS = \mu \frac{N_1^2}{l} I_1 S$$

其自感为

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \mu \frac{N_1^2}{l} S$$

同理,可求得螺线管 C_2 的自感为

$$L_2 = \frac{\Psi_{22}}{I_2} = \mu \frac{N_2^2}{l} S$$

由此可得

$$L_1 L_2 = M^2$$

即

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

必须指出,只有在两个通电线圈各自所产生的磁通量完全穿过对方线圈各匝时,也就是两个线圈的相对位置符合本题条件时, $M = \sqrt{L_1 L_2}$ 才适用.这种情况称为两个线圈的完全耦合,或理想耦合.在一般情况下,两个线圈不是完全耦合,则 $M < \sqrt{L_1 L_2}$. 此时,两螺线管的自感 L_1 和 L_2 与互感 M 的关系可写为

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

k 称为耦合因数,其值视两个线圈的相对位置(即耦合的紧密程度)而定.

互感现象是在电工和电子技术中经常遇到的现象.有些电器利用互感现象把电能从一个回路输送到另一个回路中去,比如变压器、感应圈等.但在有些情况中,互感现象也会带来不利的一面.例如,有线电话往往由于两路电话线之间的互感而有可能造成串音;收录机、电视机及电子设备中也会由于导线或部件间的互感而影响正常的工作.为了避免这些互感的干扰,就要尽量减小 k 值.

§ 14 - 5 磁场的能量

磁场和电场一样,也具有能量.下面从分析自感现象中能量转换关系入手加以讨论.

一、自感电路中的能量转换

如图 14 - 18 所示,由电阻值为 R 的电阻、自感为 L 的线圈、电动势为 ε 的电源连接成的电路.当开关 S 没有闭合时,回路中无电流,线圈中也没有磁场.闭合开关 S 瞬间,线圈中的电流从零迅速增加到稳定值 I_0 . 线圈中电流增加的过程中,将在线圈中产生自感电动势 ε_L ,在这个过程中,电源提供的能量,一部分通过电阻转变为热能,另一部分用于克服自感电动势做功而转变为线圈中磁场的能量.

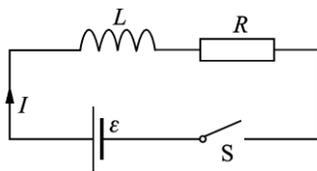


图 14 - 18 含自感的电路

设电流从零增加到 I_0 的过程中 t 时刻回路中的电流为 i ,则该时刻线圈中的自感电动势为

$$\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$$

根据欧姆定律,有

$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} = iR$$

两边同乘以 $i dt$ 得

$$\varepsilon i dt = i^2 R dt + Li di$$

利用初始条件 $t = 0$ 时 $i = 0$ $t = t_0$ 时刻 $i = I_0$ 对上式积分

$$\int_0^{t_0} \varepsilon i dt = \int_0^{t_0} i^2 R dt + \int_0^{I_0} Li di$$

式中 $\int_0^{t_0} \varepsilon i dt$ 是从 $t = 0$ 到 $t = t_0$ 时间内电源提供的能量,一部分 $\int_0^{t_0} i^2 R dt$ 通过电阻 R 转化为焦耳热,另一部分 $\int_0^{I_0} Li di = \frac{1}{2} LI_0^2$ 则是用于克服自感电动势做功,转化为磁能储存于线圈中。

因此,当自感为 L 的线圈中通过电流 I 时,线圈中所储存的磁能为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (14 - 20)$$

二、磁场能量

当线圈中电流从零增长到某一值 I 的过程中,会在线圈附近的区域建立起一定强度的磁场,线圈中储存的磁能就是定域在磁场中的能量。我们知道,磁场的性质是用磁感强度来描述的,因此,磁能也可以用描述磁场性质的物理量 B 来表示。

为了简单起见,考虑一个很长的密绕直螺线管,管内充满磁导率为 μ 的各向同性均匀磁介质。当此长直螺线管通有电流 I 时,在螺线管附近空间的磁场主要集中在管内。由例 14 - 5 知,若用 n 表示螺线管单位长度的线圈匝数,则管内磁感强度为 $B = \mu n I$,此长直螺线管的自感为 $L = \mu n^2 V$ 。代入式(14 - 17)得

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu} V$$

则单位体积内的磁场能量

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (14 - 21a)$$

式中的 w_m 称为磁场中的磁场能量密度,其单位为焦耳每立方米($J \cdot m^{-3}$)。式(14 - 21)表明,磁场能量密度与磁感强度的二次方成正比。对于均匀各向同性的介质,由 $B = \mu H$ 上式可写为

$$w_m = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} BH \quad (14 - 21b)$$

必须指出,式(14 - 21)虽然是从均匀磁场这种特殊情况下导出的,但对非均匀磁场也是适用的。在非均匀磁场中,任一体积元 dV 内的 B 和 μ 都可看作是

均匀的,因此,体积元 dV 内的磁场能量为

$$dW_m = w_m dV = \frac{1}{2} BH dV$$

则在体积为 V 的有限空间内磁场能量为

$$W_m = \int_V dW_m = \int_V \frac{1}{2} BH dV \quad (14-22)$$

例 14-8 一根很长的同轴电缆,由半径分别为 R_1 和 R_2 的同轴内、外导体圆筒组成,内、外圆筒间充满磁导率为 μ 的均匀磁介质.某时刻在电缆中沿内圆筒和外圆筒流过大小均为 I 、但方向相反的电流,如图 14-19 所示.试求长度为 l 的一段电缆内所储存的磁场能量.

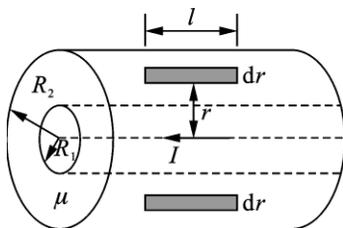


图 14-19

解 由安培环路定理,在内圆筒以内和外圆筒以外(即 $r < R_1$ 和 $r > R_2$)的区域,磁感强度都为零,在内、外圆筒之间(即 $R_1 < r < R_2$ 的区域)

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

则磁场能量密度

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu I^2}{8\pi r^2}$$

在内、外圆筒之间距轴线为 r 处,取厚度为 dr 、长度为 l 的体积元

$$dV = 2\pi r l dr$$

则体积元内的磁能

$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

长度为 l 的一段电缆内所储存的磁场能量为

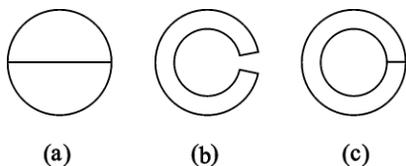
$$W_m = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

思考题

14-1 在电磁感应定律 $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ 中,负号的含义是什么?如何根据负号来判断感应电动势的方向?

14-2 如题图所示的几种形状的导线回路,假设均匀磁场垂直于纸面向

里,且随时间减小.试判断这几种形状的导线回路中,感应电流的流向.



思考题 14 - 2 图

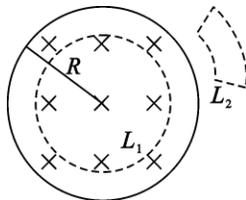
14 - 3 将一磁铁插入一个由导线组成的闭合电路线圈中,一次迅速插入,另一次缓慢地插入.问:

- (1)两次插入时在线圈中的感生电荷量是否相同?
- (2)两次手推磁铁的力所做的功是否相同?
- (3)若将磁铁插入一不闭合的金属环中,在环中将发生什么变化?

14 - 4 让一块很小的磁铁在一根很长的竖直钢管内下落,若不计空气阻力,试定性说明磁铁进入钢管上部、中部和下部的运动情况,并说明理由.

14 - 5 条形磁铁沿铜质圆环的轴线插入圆环时,铜环中有感应电流和感应电场吗?如用塑料圆环代替铜质圆环,环中仍有感应电流和感应电场吗?

14 - 6 如题图所示,均匀磁场被限制在半径为 R 的圆柱体内,且磁感强度随时间变化率 $\frac{dB}{dt} = \text{常量}$,试问:各



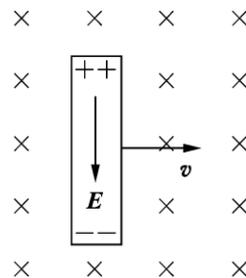
点的 E_i 是否均为零? $\oint_{L_1} E_i \cdot dl$ 和 $\oint_{L_2} E_i \cdot dl$ 各为多少?

14 - 7 在随时间变化的磁场空间中,如果没有导体,则这个空间是否存在感生电场,是否存在感生电动势?

思考题 14 - 6 图

14 - 8 将尺寸完全相同的铜环和木环适当放置,使通过两环内的磁通量的时间变化率相等.这两个环中的感生电场是否相等?感生电动势是否相等?

14 - 9 如题图所示,当导体棒在均匀磁场中以速度 v 做切割磁感线运动时,棒中出现稳定的电场,其大小为 $E = vB$,这是否和导体中 $E = 0$ 的静电平衡条件相矛盾?为什么?是否需要外力来维持此棒在磁场中做匀速运动?



14 - 10 如果要设计一个自感较大的线圈,应该从哪些方面去考虑?

14 - 11 两螺线管 A、B 其长度和直径都相同,都只有一层绕组,相邻各匝紧密相靠,绝缘层厚度可忽略,螺线管 A 由细导线绕成,

思考题 14 - 9 图

螺线管 B 由粗导线绕成. 哪个螺线管自感较大?

14 - 12 将自感为 L 、电阻为 R 的线圈和电动势为 \mathcal{E} 的电源串联构成一个闭合电路, 当开关接通的瞬间, 线圈中还没有电流, 自感电动势为什么最大?

14 - 13 长为 l 的单层密绕直螺线管, 绕有 N 匝导线, 问在下列情况下, 螺线管的自感 L 如何变化?

- (1) 将螺线管的半径增大 1 倍;
- (2) 换用直径比原来导线直径大 1 倍的导线密绕;
- (3) 在原来密绕的情况下, 用同样直径的导线再顺序密绕一层;
- (4) 在原来密绕的情况下, 用同样直径的导线再反方向密绕一层.

14 - 14 试说明: (1) 当线圈中的电流增加时, 自感电动势的方向和电流的方向相同还是相反; (2) 当线圈中的电流减小时, 自感电动势的方向和电流的方向相同还是相反. 为什么?

14 - 15 有两个半径相接近的线圈, 如何放置方可使其互感最小? 如何放置可使其互感最大?

14 - 16 两个直螺线管串联相接, 两管中都通有相同的恒定电流, 试问两螺线管之间有没有互感存在? 解释之.

14 - 17 互感电动势与哪些因素有关? 要在两个线圈间获得较大的互感, 应该用什么办法?

习 题

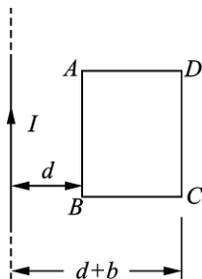
14 - 1 一匝数 $N = 100$ 的线圈, 通过每匝线圈的磁通量为

$$\Phi = 5 \times 10^{-4} \sin 10\pi t \text{ Wb.}$$

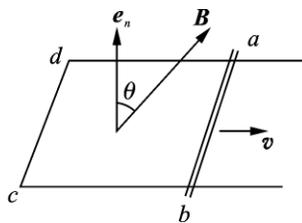
求: (1) 任意时刻线圈内感应电动势的大小; (2) 在 $t = 10 \text{ s}$ 时, 线圈内感应电动势的大小.

14 - 2 如题图所示, 一无限长直导线通有交变电流 $i = I_0 \sin \omega t$, 在它的旁边有一与它共面的矩形线圈 ABCD, 长为 l 的 AB 和 CD 两边与直导线平行, 它们到直导线的距离分别为 d 和 $d + b$. 试求矩形线圈所围面积的磁通量.

14 - 3 如题图所示, 线圈 abcd 放在 $B = 6.0 \times 10^{-1} \text{ T}$ 的均匀磁场中, 磁场方向与线圈平面的法线方向之间的夹角为 $\theta = 60^\circ$, 长为 0.20 m 的 ab 边可左右滑动. 若令 ab 边以速率 $v = 5.0 \text{ m/s}$ 向右运动, 试求线圈中感应电动势的大小及感应电流的方向.



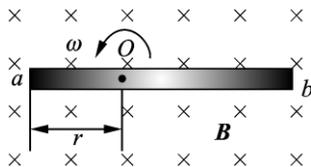
习题 14 - 2 图



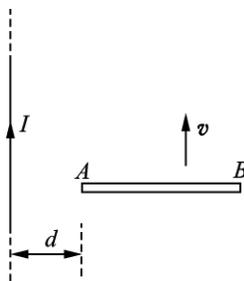
习题 14 - 3 图

14 - 4 两同轴平面圆线圈的半径分别为 R 与 r ($R > r$) 相距 x 平行放置. 由于 $x \gg R$, 小线圈面积内的磁场可以看成是均匀的. (1) 试求小线圈面积的磁通量; (2) 若小线圈以匀速率 v 沿轴线方向离开大线圈而平行移动, 试求在小线圈中产生的感应电动势的大小和方向.

14 - 5 长为 L 的铜棒, 以距端点 r 处为支点, 并以角速率 ω 绕通过支点且垂直于铜棒的轴转动. 设磁感强度为 B 的均匀磁场与轴平行, 求棒两端的电势差.



习题 14 - 5 图



习题 14 - 6 图

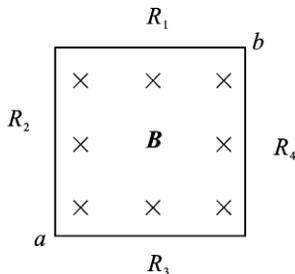
14 - 6 如题图所示, 长度为 L 的金属杆 AB , 以匀速率 v 平行于载流无限长直导线移动. 通有电流为 I 的无限长直导线与金属杆 AB 在同一平面内, 已知金属杆 A 端距长直导线为 d . 问: 金属杆中的感应电动势为多大? 杆的哪一端电势较高?

14 - 7 有一磁感强度为 B 的均匀磁场, 以恒定的变化率 dB/dt 在变化. 把一块质量为 m 的铜, 拉成截面半径为 r 的导线, 并用它做成一个半径为 R 的圆形回路. 圆形回路的平面与磁感强度 B 垂直. 试证: 此回路中的感应电流为

$$I = \frac{m}{4\pi\rho d} \frac{dB}{dt}$$

式中 ρ 为铜的电阻率, d 为铜的密度.

14 - 8 如题图所示,边长为 L 的正方形金属框,四个边的电阻分别为 R_1 、 R_2 、 R_3 和 R_4 ,将此正方形金属框置入与金属框平面垂直且磁感强度为 B 的均匀磁场中.已知 $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 15 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$. 磁感强度随时间的变化率 $\frac{dB}{dt} = 5 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$,试求:



习题 14 - 8 图

(1)通过该正方形金属框平面的磁通量;(2)金属框中的感应电动势、感应电流;(3)金属框两对角 a 、 b 之间的电势差.

14 - 9 在长为 0.60 m 、直径为 5.0 cm 的圆纸筒上应绕多少匝线圈才能使绕成的螺线管的自感为 $6.0 \times 10^{-3} \text{ H}$?

14 - 10 一长为 0.50 m 、横截面积为 10.0 cm^2 的空心长直螺线管,若其上密绕线圈 3000 匝,则:(1)自感为多少?(2)若其中电流随时间的变化率为 $10 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$,自感电动势的大小和方向如何?

14 - 11 一纸筒长 30 cm ,直径 3.0 cm ,上面绕有 500 匝线圈,试求该线圈的自感 L_0 . 如果在该线圈内放入 $\mu_r = 5000$ 的铁芯,并假定线圈与铁芯之间设有缝隙,试求这时线圈的自感 L .

14 - 12 由漆包细导线绕成的小圆圈的面积为 $S_1 = 4.0 \text{ cm}^2$,其匝数为 $N_1 = 50$. 把它放在另一个半径 $R_2 = 20 \text{ cm}$, $N_2 = 100$ 匝的圆线圈中心,两线圈同轴共面. 如果把大线圈在小线圈中产生的磁场看成是均匀的,这两个线圈之间的互感为多少? 如果大线圈导线中的电流每秒减小 50 A ,试求小线圈中的感应电动势.

14 - 13 一螺线管长 30 cm ,由 2500 匝漆包导线均匀密绕而成,其中铁芯的相对磁导率 $\mu_r = 1000$. 当它的导线中通有 2.0 A 的电流时,求螺线管中心处的磁场能量密度.

14 - 14 真空中有一匀强电场的电场能量密度与一均匀磁场的磁场能量密度相等,已知磁感强度为 0.50 T ,试求该电场的电场强度.

14 - 15 一根长直导线载有电流 I ,且电流 I 均匀地分布在导线的横截面上,试求在长度为 l 的一段导线内部的磁场能量.

第 15 章 麦克斯韦方程组和电磁波

麦克斯韦在总结了从库仑到安培、法拉第等人研究成果的基础上,对电磁现象的规律进行了系统的研究,提出了“有旋电场”假说,指出变化的磁场可以激发电场,提出了“位移电流”假说,指出变化的电场可以激发磁场。麦克斯韦揭示了电场和磁场的内在联系,把电场和磁场统一为电磁场,建立了描述电磁场规律的一组方程——麦克斯韦方程组。麦克斯韦电磁场理论的重要成就之一是预言了电磁波的存在,即变化的电场和变化的磁场相互激发,形成变化的电磁场以波动的形式在空间传播。20年后,赫兹通过振荡电路实验首先证明了电磁波的存在,并且计算出电磁波在真空中传播的速度等于光速,从而揭示了光的电磁本质。麦克斯韦电磁场理论是人类对电磁现象和规律的总结,是19世纪物理学发展的最辉煌的成就。

本章的主要内容是:在介绍麦克斯韦“位移电流”的假说的基础上,介绍描述电磁场规律的麦克斯韦方程组;在讨论电磁振荡的基础上,介绍电磁波的产生及其特性。

麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831—1879)是英国伟大的物理学家。

麦克斯韦是经典电磁理论的奠基人,他在提出了“有旋电场”和“位移电流”假说的基础上,把电场和磁场统一起来,建立了电磁场理论,1873年,麦克斯韦的《电磁学通论》问世,这是一部可以与牛顿的《自然哲学的数学原理》相提并论的巨著,它涉及电磁学的各研究领域,内容及其广泛、成果及其丰富。这部专著处处闪烁着智慧和创造力的光芒,给后人以重要的启示和鼓舞。

麦克斯韦还是气体动理论的创始人之一。

纵观麦克斯韦的一生,他的科学思想和研究方法的特点是:(1)麦克斯韦的成功,在很大程度上是由他的首创精神决定的,他强调“新研究领域的发现和新科学观念的发展”;(2)善于正确地历史地审查物理学已有的重要成果及其基础,天才地发现问题的核心和关键,做出具有开拓性和奠基性的重大突破,直至建立完善的理



论体系 ;(3)涉足的领域广泛多样,他往往在一个时期内同时交叉地从事不同领域的研究,都做出了卓越的贡献 ;(4)重视科学理论与实验的结合,他所创建的卡文迪许实验室是世界上实验物理的研究中心,已成为人才辈出和硕果累累的摇篮.

§ 15 - 1 位移电流

一、问题的提出

我们知道,在稳恒的导体回路中传导电流是处处连续的,稳恒电流与它所激发的磁场之间遵守安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c = \int_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} \quad (15 - 1)$$

式中 I_c 是穿过以闭合线 L 为边界的任意曲面 S 的传导电流, \mathbf{j}_c 是传导电流密度.

在非稳恒条件下,安培环路定理是否还成立?为此,我们来分析电容器的充、放电过程.

在电容器充电的过程中,对整个电路来说,传导电流是不连续的.电路导线中的电流 I 是非恒定的,它随时间而变化.如图 15 - 1 所示,若在极板 A 的附近取一个闭合环路 L ,以此环路 L 为边界可以作无穷多个曲面.现取其中的两个曲面 S_1 和 S_2 ,其中 S_1 与导线相交, S_2 在电容器两极板之间,不与导线相交.

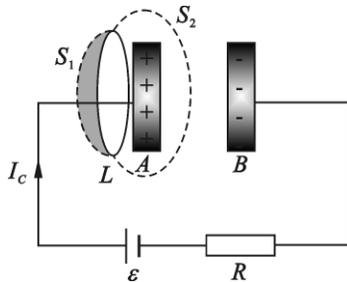


图 15 - 1

若将安培环路定理(15 - 1)应用到以同一个闭合环路 L 为边界的不同曲面,对曲面 S_1 ,由于其与导线相交, S_1 面的电流为 I ,有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c$$

如果取以同一个闭合环路 L 为边界的曲面 S_2 ,由于没有电流通过 S_2 ,于是有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

显然,这两个式子是相互矛盾的.上述矛盾的结果表明,在非稳恒电流的磁场中安培环路定理不适用,必须寻求新的规律.

二、位移电流

分析上述电容器的充电过程可以发现,问题的关键在于非稳恒情况下传导

电流不连续,因而(15-1)式与电荷守恒定律相矛盾.电荷守恒定律是精确的普遍适用的规律,而(15-1)式仅仅是在稳恒情况下建立起来的,显然,要解决上述矛盾理应修正(15-1)式.

在电容器充电过程中,虽然传导电流在电容器两个极板之间中断了,但是,随着充电的进行,电容器两个极板上的电荷量和面电荷密度 σ 都随时间的变化而变化,两个极板之间产生了随时间变化的电场.

为讨论方便,以平行板电容器为例.设任一时刻A极板上带有正电荷 $+q$,面电荷密度为 $+\sigma$;B极板上带有负电荷 $-q$,其面电荷密度为 $-\sigma$;它们都随时间而增大.某一时刻,通过导体横截面的电荷都到达电容器极板上,设电容器每一极板的面积均为 S ,电路中的充电电流为 I_c ,则

$$I_c = \frac{dq}{dt} = \frac{d(S\sigma)}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt}$$

传导电流密度为

$$j_c = \frac{d\sigma}{dt}$$

与此同时,电容器两极板间电位移的大小($D = \sigma$)和电位移通量($\Phi_D = DS = \sigma S$)也都随时间而变化,有

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}(DS) = S \frac{dD}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

可见,在电容器充电过程中,两极板之间电位移通量随时间的变化率 $\frac{d\Phi_D}{dt}$,在量值上与电路导体中的传导电流 $\frac{dq}{dt} = I_c$ 相等;两极板之间电位移随时间的变化率 $\frac{dD}{dt}$,在量值上与电路导体中的传导电流 $\frac{d\sigma}{dt}$ 相等.

下面讨论 $\frac{dD}{dt}$ 的方向:

当电容器充电时,传导电流 I_c 随时间增大,电容器极板上的面电荷密度 σ 随时间增大,两极板间电位移 D 随时间增大,此时 $\frac{dD}{dt}$ 的方向与回路中传导电流密度 j_c 的方向相同.

当电容器放电时,传导电流 I_c 随时间减小,电容器极板上的面电荷密度 σ 随时间减小,两极板间电位移 D 随时间减小,所以 $\frac{dD}{dt}$ 的方向与回路中传导电流密度 j_c 的方向也是相同的,如图15-2所示.

可见,无论是电容器的充电过程还是放电过程, $\frac{dD}{dt}$ 都与回路中的传导电流密度 j_c 量值相等、

方向相同. 如果用 $\frac{dD}{dt}$ 表示某种电流密度, 用 $\frac{d\Phi_D}{dt}$ 表示某种电流, 那么就可以把电容器两极板间中断了的传导电流接替下去, 使整个电路的电流变成连续的. 于是, 麦克斯韦引入位移电流 (displacement current) 和位移电流密度的概念. 定义: 电场中某点的位移电流密度 j_d 等于该点电位移的时间变化率, 即

$$j_d = \frac{dD}{dt} \quad (15-2)$$

通过电场中某截面的位移电流 I_d 等于通过该截面的电位移通量的时间变化率, 即

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} \quad (15-3)$$

三、全电流

麦克斯韦认为, 位移电流和传导电流一样, 都能激发磁场, 该磁场和与它等值的传导电流所激发的磁场完全相同. 对于普遍情况, 麦克斯韦认为传导电流和位移电流都可能存在. 于是, 他推广了电流的概念, 将二者之和称为全电流, 用 I_s 表示为

$$I_s = I_c + I_d \quad (15-4)$$

对于任何回路, 全电流是处处连续的. 运用全电流的概念, 可以自然地安培环路定理式(15-1)推广到非稳恒电流磁场中去. 在一般情况下, 安培环路定理被修正为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + I_d = I_c + \frac{d\Phi_D}{dt} \quad (15-5a)$$

或

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_s = \int_s \left(\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (15-5b)$$

上式表明: 磁场强度 \mathbf{H} 沿任意闭合回路的环流等于穿过此闭合回路所围曲面的全电流, 这就是全电流安培环路定理. 不仅传导电流可以在空间激发磁场, 变化的电场也可以在空间激发磁场, 且均为有旋磁场.

由此可见, 位移电流的引入, 深刻地揭露了变化的电场和磁场间的内在联系. 应该指出: (1) 位移电流并不是“电流”, 而是随时间变化的电场; (2) 位移电

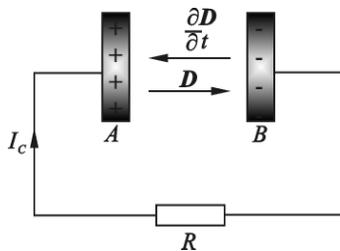


图 15-2

流和传导电流的唯一共同点是它们都激发磁场,并且激发磁场的规律相同;(3)

在真空中, $D = \varepsilon_0 E$ $j_d = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$.

例 15 - 1 一平行板电容器的两个极板都是半径为 $R = 5.0 \text{ cm}$ 的圆形导体薄片. 设充电后电荷在极板上均匀分布, 两极板间电场强度的时间变化率为 $dE/dt = 2.0 \times 10^{13} \text{ V/m} \cdot \text{s}$. 试求:(1) 两极板间的位移电流 I_d ;(2) 两极板间磁感强度的分布和极板边缘处的磁感强度.

解 (1) 由式(15 - 3)得两极板间的位移电流为

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = S \frac{dD}{dt} = \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = 1.4 \text{ A}$$

(2) 因为两极板为同轴圆片, 所以磁场对于两极板的中心联线(轴)具有对称性. 在垂直于该轴的平面上, 取以轴点为圆心, 以 r 为半径的圆作为积分环路. 根据对称性, 在此积分环路上磁感强度 B 的大小相等, 方向沿环路的切线方向, 且电流成右手螺旋. 于是, 由式(15 - 5)可得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\mu_0} B 2\pi r = \frac{d\Phi_0}{dt} = \pi r^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

可解得两极板间磁感强度的分布为

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt}$$

当 $r = R$ 时, 由上式可得两极板边缘处的磁感强度为

$$B(R) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} R \frac{dE}{dt} = 5.6 \times 10^{-6} \text{ T}$$

结果表明, 虽然电场强度的时间变化率已经相当大, 但它所激发的磁场仍然是很弱的, 在实验中不易测量到.

例 15 - 2 试求导体中位移电流与传导电流的比值.

解 假定我们在横截面积为 S 的导体中通以随时间变化的电流 $i = I_0 \cos \omega t$, 且电流沿横截面均匀分布, 则根据欧姆定律的微分形式 $j = \gamma E$, 可得

$$E = \frac{j}{\gamma} = \frac{i}{\gamma S} = \rho \frac{i}{S}$$

式中 $\rho = 1/\gamma$ 是导体的电阻率. 由式(15 - 3)可得导体中位移电流的瞬时值为

$$\begin{aligned} i_d &= \frac{d\Phi_D}{dt} = S \frac{dD}{dt} = S \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = S \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\rho}{S} \frac{di}{dt} \\ &= - \varepsilon_r \varepsilon_0 \rho \omega I_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

$$= \varepsilon_r \varepsilon_0 \rho \omega I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

于是, 导体中位移电流和传导电流的振幅之比为

$$\frac{I_{d0}}{I_0} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \rho \omega$$

对于一般的良导体 $\rho \approx 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, $\varepsilon_r \approx 1$, 则

$$\begin{aligned} \frac{I_{d0}}{I_0} &\approx 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{-8} \times 2\pi\nu \\ &\approx 5.6 \times 10^{-19} \nu \end{aligned}$$

结果表明, 只要 $\nu \ll 10^{18} \text{ Hz}$, 则比值 $\frac{I_{d0}}{I_0} \ll 1$. 因此, 尽管只要有电位移通量的变化就有位移电流存在, 但实际上, 当电场变化的频率不是非常高时, 在导体内位移电流与传导电流相比是微不足道的. 例如, 当时 $\nu = 50 \text{ Hz}$ 时, 导体内该比值为 $\frac{I_{d0}}{I_0} \approx 10^{-17}$.

此外, 比较以上关于 i_d 和 i 的表达式可以看出, 位移电流 i_d 在相位上比传导电流 i 及电压 u 超前 $\pi/2$, 因此位移电流不消耗功率, 即不产生焦耳热.

§ 15 - 2 麦克斯韦方程组

一、麦克斯韦方程组

在前面几章中, 我们从实验事实出发, 分别研究了静电场和恒定电流的磁场的基本性质以及它们所遵循的规律. 对于静电场

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

对于稳恒磁场

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_c$$

上述方程孤立地给出了静电场和稳恒磁场的规律, 它们只反映了电磁场在特定条件下的特性, 要把这些带有局限性的规律上升到具有普适意义的电磁场理论, 必须从理论上进行概括、总结和推广.

麦克斯韦在前人研究成果的基础上, 提出了“有旋电场”和“位移电流”两

个重要的假设 除静止电荷激发无旋电场外,变化的磁场还将激发涡旋电场

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

变化的电场和传导电流一样激发涡旋磁场

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + I_d = \int_S \left(\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

这就是说,变化的电场和变化的磁场不是彼此孤立的,它们相互联系、相互激发构成一个统一的电磁场.

自由电荷激发的电场和变化磁场激发的电场性质并不相同.在一般情况下,电场可以由自由电荷和变化磁场共同激发.若用 D 表示总电位移,则

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q = \int_V \rho dV \quad (15-6)$$

上式告诉我们,在任何电场中,通过任何封闭曲面的电位移通量等于该封闭面内自由电荷的代数和.在自由电荷所激发的电场中,通过任何封闭曲面的电位移通量等于它包围的自由电荷的代数和.变化磁场激发的电场是涡旋场,它的电位移线是闭合的,所以对封闭曲面的通量无贡献.

变化磁场与电场的关系为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (15-7)$$

此式反映了变化的磁场和电场的联系,它不但揭示了变化磁场激发电场的规律,而且表示出在稳定($\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$)时,式(15-7)仍能将自由电荷的静电场包括在内.因此,在一般情况下,电场可以由自由电荷和变化磁场共同激发,这时式(15-7)中的 E 便是它们的合场强.这就是说,在任何电场中,电场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过该曲线所包围面积的磁通量的时间变化率的负值.

磁场可以由传导电流激发,也可以由变化的电场激发,激发的方式虽然不同,但它们所激发的磁场都是涡旋场,磁感线都是闭合的.因此,在任何磁场中,通过任何封闭曲面的磁通量总是等于零.即

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (15-8)$$

变化的电场与磁场的关系为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (15-9)$$

式(15-9)揭示了变化的电场激发磁场的规律,并能把稳恒磁场包括在内.它表明在任何磁场中,磁场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过以该闭合曲线为

边线的任意曲面的全电流.

式(15 - 6)、(15 - 7)、(15 - 8)和(15 - 9)就是系统完整地描述电磁场普遍规律的方程组 称为麦克斯韦方程组的积分形式.

上述麦克斯韦方程组描述的是在某有限区域内(例如一个闭合曲线或一个封闭曲面所围的区域)以积分形式联系各点的电磁场量(E、D、B、H)和电荷、电流之间的依存关系 而不能直接表示某一点上各电磁场量与该点电荷、电流之间的相互联系.但是,在实际应用中,更重要的是要知道电磁场中某些点的场量.

引入算符

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

利用高等数学中的奥 - 高公式

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV$$

和斯托克斯公式

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}$$

可将麦克斯韦方程组的积分形式变换为微分形式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (15 - 10)$$

在应用麦克斯韦方程解决实际问题时,通常要涉及到电磁场和物质的相互作用,为此要考虑到介质对电磁场的影响,这种影响使电磁场量和表征介质电磁特性的量 ε 、 μ 、 γ 发生联系,即

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad (15 - 11)$$

在非均匀介质中还要考虑电磁场量在界面上的边值关系,以及具体问题中 E 和 B 的初始值条件,通过求解方程组,便可以得到任一时刻的 E(x、y、z)和 B(x、y、z),也就确定了任一时刻的电磁场.

必须指出,麦克斯韦的电磁场理论是从宏观的电磁现象总结出来的经验规律,它和牛顿力学一样,只在宏观实验所能达到的范围内适用.进一步研究表明,麦克斯韦方程组在高速领域中理应是正确的,仍可用它来研究高速运动电

荷所产生的电磁场及一般辐射问题.但是,当把麦克斯韦方程组推广到分子和原子的微观领域,却遇到了不可克服的困难,这说明宏观电磁理论在微观领域里并不完全适用,因而,又发展了更普遍的量子电动力学.宏观电磁理论可以看作量子电动力学在某些特殊条件下的近似规律.

二、电磁场的物质性

在讨论静电场和稳恒磁场时,总是把电场、磁场和场源联系在一起,没有场源时,电场、磁场就不存在了,所以场能定域化的问题尚不明显,即能量的携带者究竟是电荷和电流还是场,这两种观点的差别还不明显.但是,当存在随时间变化的电场或磁场时,由于变化的电场和变化的磁场相互激发,并以有限的速度在空间传播.离场源一定距离处的场并不由这一时刻场源的情况决定,而是由此时刻之前的某一时刻场源的情况决定,所以即使场源消失,电磁场还可以继续存在.有场的地方就有能量,这就证明了场是能量的携带者,能量定域在场中.因此,这是场的物质性的最有力的证明.

§ 15 - 3 电磁振荡

在电路中,电荷和电流以及与之相伴的电场和磁场的周期性变化称为电磁振荡.产生电磁振荡的电路叫做振荡电路.最简单的振荡电路是由一个电容器 C 和一个自感线圈 L 串联而成的,称为 LC 电路.本节只讨论 LC 电路的电磁振荡.

一、无阻尼自由电磁振荡

考虑一个 LC 电路,回路中电阻为零.利用外接电源对电容器充电后,再与电源断开.在电容器开始放电之前的瞬间,电路中没有电流,电能全部集中在电容器的两极板之间的电场中,如图 15 - 3(a)所示.

电容器两极板之间的电势差使正电荷从 A 极板经自感线圈流至 B 极板.由于线圈 L 的自感作用,电路中的电流不能立刻达到最大值,而是随着电容器极板上电荷的减少而逐渐增大.当电容器两极板上的电荷减小为零时,电路中的电流达到最大值,与电流相联系的磁场能量也达到最大.此时,电容器两极板间的电场为零,电场能量全部转换成自感线圈内的磁场能量,如图 15 - 3(b)所示.

当电流达到最大值并开始减小时,由楞次定律可知,电路中感应电流的方向应与原电流方向一致,使电容器反向充电,直到两极板上的电量达到最大值,反向充电过程结束.此时,磁场完全消失,电路中的电流为零,磁场能量全部转换成电容器两极板之间的电场能量,如图 15 - 3(c)所示.

在此以后,电容器又开始反向放电过程,直至两极板上的电荷全部消失,电

路中的电流达到反向最大值, 电场能量又全部转换成磁场能量, 如图 15-3(d) 所示.

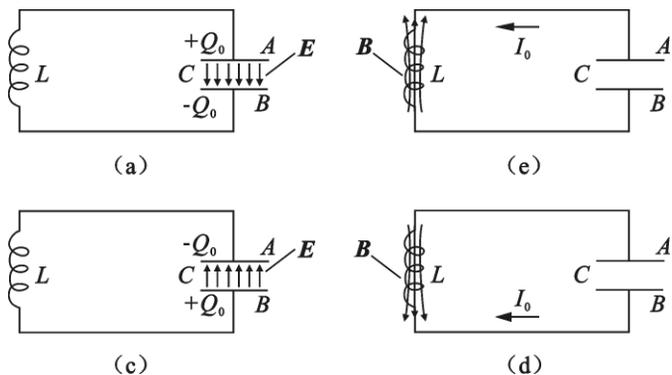


图 15-3 无阻尼自由电磁振荡

此后, 电容器又被充电, 当电路中反向电流减小为零时, 电容器两极板上的电荷达到最大值并恢复到原始状态, 完成了一个完全的振荡过程. 以后又重复上述一系列过程.

由上述讨论可知, 在 LC 电路中, 电荷和电流随时间作周期性的变化, 相应地电场和磁场也都随时间作周期性的变化, 而且不断地相互转换. 若电路中没有任何能量的损耗 (电阻为零, 无焦耳热损耗, 也无辐射等) 这种周期性的变化就将在电路中一直持续下去, 我们把这种电磁振荡称为无阻尼自由电磁振荡.

二、无阻尼自由电磁振荡的振荡方程

在无阻尼自由电磁振荡电路中, 由于没有电阻, 没有任何能量损耗, 任一时刻电场能量和磁场能量的总和应保持不变, 即

$$\frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \text{常量}$$

式中 q 为某一时刻电容器极板上所带的电荷, i 为该时刻回路中的电流. 将上式对时间 t 求导数, 可得

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = 0$$

因为 $i = \frac{dq}{dt}$, 上式可写成

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

令 $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ 则有

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$

这个方程与简谐振动方程形式完全相同,其解为

$$q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (15 - 12)$$

式中 q 为任一时刻电容器极板上的电荷, Q_0 为其最大值,称为电荷振幅, φ 为初相, Q_0 和 φ 的数值由电路的初始条件决定. ω 为振荡的角频率,则振荡频率为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (15 - 13)$$

式(15 - 13)表明,无阻尼自由电磁振荡的频率,是由振荡电路本身的固有性质(即由线圈的自感系数 L 和电容器的电容 C)所决定的.

将式(15 - 12)两边对时间求导数,可得电路中电流随时间作周期性变化的规律

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

这里 $\omega Q_0 = I_0$ 表示电流的最大值,则

$$i = -I_0 \sin(\omega t + \varphi) = I_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (15 - 14)$$

由式(15 - 12)和式(15 - 14)可以看出,在 LC 振荡电路中,电荷和电流随时间作周期性的变化,电流的相位比电荷的相位超前 $\frac{\pi}{2}$,如图 15 - 4 所示.

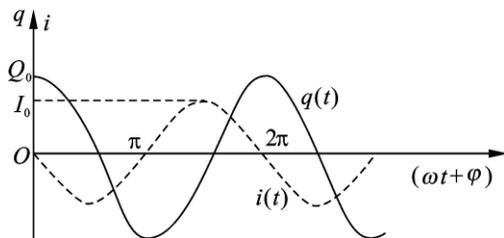


图 14 - 4 LC 电路中 q 和 i 的相位

三、无阻尼自由电磁振荡的能量

任一时刻 t , 设电容器的极板上带有电荷 q , 则电容器中的电场能量为

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (15 - 15)$$

上式表明,无阻尼自由电磁振荡电路中电场能量是随时间作周期性变化的. 设此时自感线圈中通过的电流为 i , 则线圈中的磁场能量为

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\
 &= \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi)
 \end{aligned} \tag{15-16}$$

上式表明,无阻尼自由电磁振荡电路中磁场能量也是随时间作周期性变化的。则无阻尼自由电磁振荡电路中的总能量为

$$W = W_e + W_m = \frac{Q_0^2}{2C} \tag{15-17}$$

可见,在无阻尼自由电磁振荡过程中,电场能量和磁场能量不断相互转换,但在任意时刻,其总和保持不变。在电场能量最大时,磁场能量为零;反之,磁场能量最大时,电场能量为零。

应当指出,无阻尼自由电磁振荡中的电磁场能量守恒是有条件的。首先,电路中的电阻必须为零,这样在电路中才会避免因电阻产生的焦耳热而损耗电磁能;其次,电路中不存在任何电动势,即没有其他形式的能量与电路交换;最后,电磁能不能以电磁波的形式辐射出去。但实际上任何振荡电路都有电阻,电磁能量不断地转换为焦耳热,而且在振荡过程中,电磁能量不可避免地还会以电磁波的形式向外辐射。因此,无阻尼自由电磁振荡电路只是一个理想化的振荡电路模型。

§ 15 - 4 电磁波

根据麦克斯韦电磁场理论,如果在空间某区域内的电场随时间变化,在它邻近的区域就会激发一个变化的磁场,此变化的磁场又要在较远的区域激发新的变化的电场,如此继续下去,变化的电场和变化的磁场不断相互交替的激发,由近及远地传播出去。这种变化的电磁场在空间以一定的速度传播,就形成了电磁波。

麦克斯韦提出电磁波的预言以后,赫兹于 1888 年通过实验证实了电磁波的存在。他还证明不仅电磁波的性质与光波的相同,而且传播的速度也相同,并且可以发生反射、折射、干涉、衍射和偏振等现象。也就是说,电磁波服从一般波动所具有的一切规律。

一、电磁波的产生与传播

要产生电磁波,必须有适当的波源。理论已经证明,电磁波在单位时间内辐射的能量与频率的四次方成正比。而前一节所讨论的 LC 振荡电路,所形成的变化的电场和变化的磁场几乎分别局限在电容器的极板间和自感线圈中,而不能

显著地向外辐射电磁能量.

由式(15 - 13)可见,为了提高振荡频率,使电磁能量有效地辐射出去,振荡电路需满足如下条件:

(1)将振荡电路所产生的电场和磁场散布到周围空间中去,也就是说,电路必须开放,这样才能更有效地把能量辐射出去;

(2)应减小 L 和 C 的值,以提高振荡频率,从而提高辐射频率,这样才能更好地把能量辐射出去.

如果我们把电容器两极板间的距离拉大,并减小极板面积,同时减少线圈匝数并逐渐拉直,最后简化成一根直导线,如图 15 - 5 所示.这样,电场和磁场便能发散到周围空间中去.同时,由于 L 和 C 的减小从而提高了电路的振荡频率.所以,只要在直线形的电路上引起电磁振荡,直线形电路的两端就会出现交替的等量异号电荷,称为振荡电偶极子.这样的电路可作为发射电磁波的波源.



图 15 - 5 电磁波的发射

下面以振荡电偶极子为例,说明电磁波的产生与传播.设振荡电偶极子的电偶极矩 p 可表示为

$$p = p_0 \cos\omega t$$

式中 p_0 为电偶极矩的振幅, ω 为角频率.

由于振荡电偶极子的正负电荷间距不断交替变化,因而电场和磁场也随时间不断变化.如果把振荡电偶极子的运动简化为正负电荷相对于它们的公共中心做简谐振动,则电场的变化如图 15 - 6 所示.设某一时刻正负电荷均在图 15 - 6(a)的原点处,然后,正负电荷分别作相位相反的振动.当它们分别向上、向下移至某一距离时,两电荷间的某一条电场线形状如图 15 - 6(b)所示.接着,两电荷逐渐向中心处靠近,电场线也逐渐改变成如图 15 - 6(c)的形状.然后,它们又回到中心处重合,完成了前半个周期的谐振动,其电场线的形状变成闭合状,如图 15 - 6(d)所示.在此后半周期的振荡过程中,正负电荷的位置互相对调,电场线的方向如图 15 - 6(e)所示.当后半周期终了时,又形成一条环绕方向与上述相反的一条闭合电场线,闭合电场线的形成表明已产生了涡旋电场.

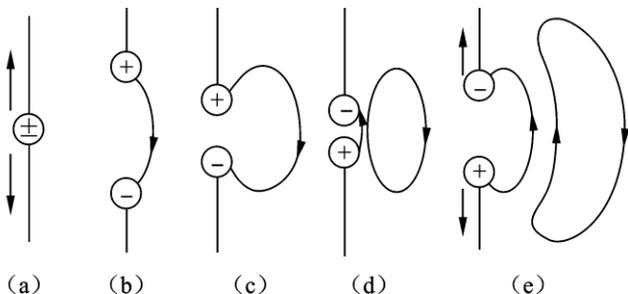


图 15 - 6 振荡电偶极子附近的电场线

以上只分析了振荡电偶极子附近一条闭合电场线的形成过程. 实际上, 在离振荡电偶极子较远的区域, 电场线都是闭合的, 而且随着距离的增大, 波面逐渐趋于球形, 电场强度也趋于切线方向. 此外, 振荡电偶极子也产生磁场, 磁感线是以电偶极子为轴的一系列同心圆. 若用曲线表示电场线, 以“ \times ”表示穿入纸面的磁场线, 以“ \cdot ”表示穿出纸面的磁场线, 某时刻振荡电偶极子周围的电磁场的大致分布情况如图 15 - 7 所示. 随着时间的推移, 电场线和磁场线便以波的传播速度向外扩张, 由近及远地辐射出去.

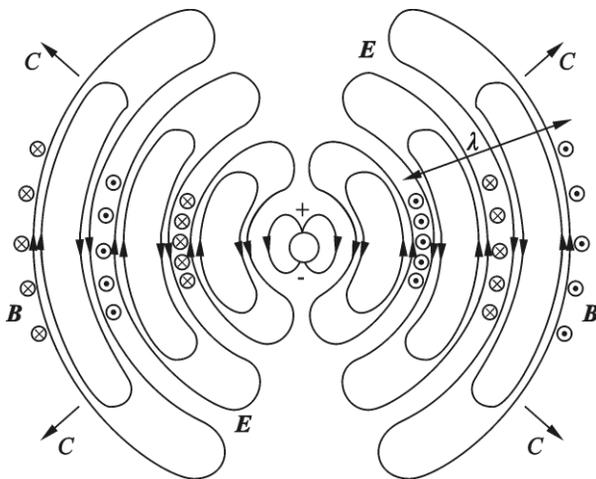


图 15 - 7 振荡电偶极子周围的电磁场

求解麦克斯韦方程组(略去), 可得振荡电偶极子所激发的交替变化的电场和磁场的函数表达式(即电磁波的波函数). 下面直接给出在离振荡电偶极子足够远的区域内的结果.

如图 15 - 8 所示, 振荡电偶极子位于原点 O 处, 电矩 p 的方向沿图中极轴的方向, 在球面上任取一点 P , 其径矢 r (也是波的传播方向) 与极轴方向的夹角

为 θ . 计算结果表明: P 点的电场强度 E 、磁场强度 H 和径矢 r 三个矢量相互垂直, 并成右手螺旋关系, 即矢积 $E \times H$ 的方向与 r 的方向一致. P 点的 E 和 H 的数值分别为

$$E(r, t) = \frac{\mu p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{u}\right) \quad (15-18)$$

$$H(r, t) = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu} p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{u}\right) \quad (15-19)$$

式中 u 为电磁波的传播速度, 它与介质的电容率 ε 和磁导率 μ 的关系为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

真空中 u 的数值为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

这个值与光在真空中的速度完全相等. 式(15-18)和式(15-19)就是距离振荡电偶极子足够远的球面电磁波的波函数, 而且 E 和 H 的数值都与 θ 角有关, 表明振荡电偶极子的辐射具有明显的方向性.

考虑距离振荡电偶极子很远的地方, 小范围内 θ 和 r 的变化很小, E 和 H 的振幅可看作常量, 振荡电偶极子辐射的电磁波可看作是平面波, 则式(15-18)和式(15-19)可分别写成

$$E = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = E_0 \cos(\omega t - kx) \quad (15-20)$$

$$H = H_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = H_0 \cos(\omega t - kx) \quad (15-21)$$

这就是沿 x 方向传播的平面电磁波的波函数, 式中 $k = \frac{\omega}{u}$. 可以看出, 在距离振荡电偶极子很远的区域, 电磁波已呈现为平面波, 如图 15-9 所示.

上述结论虽然是从振荡电偶极子得出的, 但其具有普遍性, 适用于任何作加速运动的电荷所辐射的电磁波.

二、电磁波的性质

根据以上的讨论, 可将电磁波的基本性质归纳如下:

(1) 电磁波是横波. 电磁波的电场强度 E 与磁场强度 H 垂直, 并都垂直于

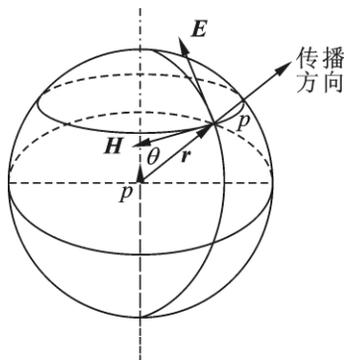


图 15-8

传播方向 E 、 H 、传播速度 u 三者相互垂直, 并成右手螺旋关系, 如图 15-9(b) 所示.

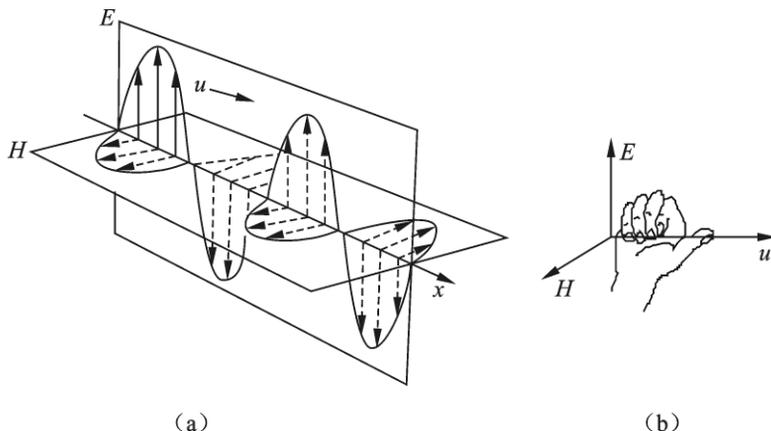


图 15-9 平面电磁波

(2) 沿着给定的方向传播的电磁波, 电场强度 E 、磁场强度 H 分别在各自的平面上振动, 如图 15-9(a) 所示, 这一特性称为偏振性.

(3) 电场强度 E 、磁场强度 H 振动的相位相同.

(4) 任一时刻, 在空间任一点, 电场强度 E 和磁场强度 H 的数值关系为 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$.

(5) 电场强度 E 、磁场强度 H 以相同的速度 $u = 1 / \sqrt{\epsilon\mu}$ 传播, 在真空中电磁波的传播速度等于光速.

三、电磁波的能量

由于电场和磁场都具有能量, 所以随着电磁波的传播, 就必然伴随着电磁能量的传播. 这是电磁波的主要性质之一. 电磁波所携带的电磁能量, 常称为辐射能.

我们知道, 电场的能量密度和磁场的能量密度分别为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2, \quad w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

所以, 电磁场的总能量密度为

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (15-22)$$

由于电磁波的能量密度决定于 E 和 H , 所以辐射能的传播速度就是电磁波的传播速度, 辐射能的传播方向就是电磁波的传播方向.

电磁波在单位时间内通过垂直于传播方向上单位面积的辐射能,称为电磁波的能流密度(或辐射强度),用 S 表示. 即

$$S = wu$$

将式(15-22)代入上式,并利用 $u = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ 和 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$, 可得

$$S = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} (\sqrt{\epsilon}E \sqrt{\mu}H + \sqrt{\mu}H \sqrt{\epsilon}E)$$

化简得

$$S = EH \quad (5-23)$$

由于 E 和 H 两者互相垂直,并且都垂直于传播方向,而辐射能的传播方向就是电磁波的传播方向,故常将能流密度用矢量表示为

$$S = E \times H \quad (5-24)$$

式中电磁波的能流密度矢量 S , 也称为坡印廷矢量(Poynting vector).

式(15-23)和式(15-24)给出了辐射强度 S 与 E 和 H 的瞬时关系,它是周期性变化的. 取一个周期内的平均值

$$\bar{S} = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 H_0 \cos^2 \left(\omega t - \frac{r}{u} \right) dt = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

将式(15-18)和式(15-19)代入式(15-23),得振荡电偶极子辐射的电磁波的能流密度为

$$S = EH = \frac{\sqrt{\epsilon} \sqrt{\mu^3} p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{u} \right)$$

振荡电偶极子在单位时间内辐射出去的能量,称为辐射功率,用 P 表示. 对上式在以振荡电偶极子为中心,半径为 r 的球面上积分,并把所得结果取时间平均值,则得振荡电偶极子的平均辐射功率为

$$\bar{P} = \frac{\mu p_0^2 \omega^4}{12\pi u} \quad (15-25)$$

上式表明,平均辐射功率与振荡电偶极子频率的四次方成正比. 因此,振荡电偶极子的辐射功率随着频率的增大而迅速增大.

四、电磁波谱

自从赫兹用电磁振荡的方法产生电磁波,并证明它的性质和光波的性质完全相同以后,物理学家又做了许多实验,不仅证明了光波是电磁波,而且证明了后来发现的 X 射线、 γ 射线都是电磁波,它们在真空中的传播速度都是 c , 并都具有电磁波的共同特性. 电磁波的范围很广,为了便于比较,对各种电磁波有较全面的了解,我们可以按照波长(或频率)的大小,把它们依次排列成谱,称为电

磁波谱,如图 15-10 所示.

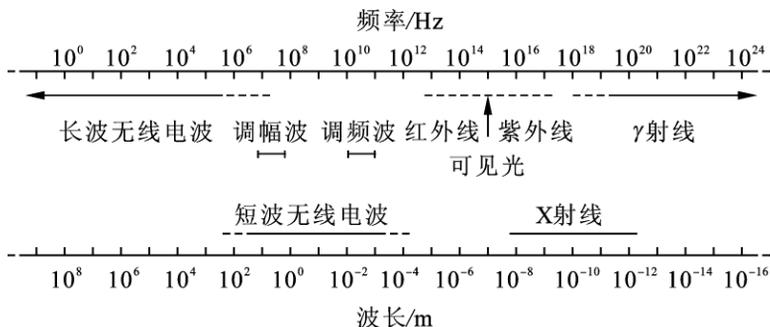


图 15-10 电磁波谱

在电磁波谱中,波长最长的是无线电波(有人已在地球表面上探测到频率 $\nu = 10^{-2}$ Hz 的电磁波,其周期约为 100s,波长是地球半径的 5000 倍),它又因波长的不同(从几千米到几毫米)而分为长波、中波、短波、超短波和微波等.长波在介质中传播时损耗很小,故常用于远距离通讯和导航;中波多用于航海和航空定向及无线电广播;短波多用于无线电广播、电报、通讯等;超短波、微波多用于电视、雷达、无线电导航以及其他专门用途.

红外线的波长在 $600\mu\text{m}$ 到 $0.76\mu\text{m}$ 之间,由于其处于可见红光的外侧,故称为红外线.它多用于红外雷达、红外照相和夜视仪上.因为红外线有显著的热效应(亦称为热波),所以可用来取暖,在工农业生产上常用作红外烘干等.波长在 760nm 到 400nm 之间的波,可为人眼所感知,称为可见光(一般简称为光波).波长在 400nm 到 5nm 之间的波称为紫外线,它能引起化学反应和荧光效应,在医学上常用来杀菌,农业上可用来诱杀害虫.红外线、可见光和紫外线这三部分电磁波合称为光辐射.

X 射线(亦称为伦琴射线)的波长在 5nm 到 0.04nm 之间,它的能量很大,具有很强的穿透能力,是医疗透视、检查金属部件内部损伤和分析物质晶体结构的有力工具.

波长最短的是 γ 射线,波长在 0.04nm 以下,其能量和穿透能力比 X 射线还大,可用来进行放射性试验,产生高能粒子,还可借助它研究天体、认识宇宙.

需要指出的是,电磁波谱中上述各波段主要是按照生产方式或探测方法的不同来划分的,随着科学技术的发展,不同方式产生的波会有一些共同的波段,从而出现不同波段相重叠的情形.

思考题

- 15 - 1 什么叫位移电流？位移电流的概念是如何引入的？
- 15 - 2 位移电流与传导电流有什么异同？
- 15 - 3 变化电场所产生的磁场,是否一定随时间发生变化？变化的磁场产生的电场,是否也一定随时间发生变化？
- 15 - 4 麦克斯韦方程组中哪一个方程相当于或包含下列事实？
- (1) 电场线起始于正电荷,终止于负电荷或无穷远处；
 - (2) 位移电流；
 - (3) 在静电条件下,导体内不可能有任何电荷；
 - (4) 一个变化的电场,必定有一个磁场伴随它；
 - (5) 穿过闭合面的磁通量始终为零；
 - (6) 一个变化的磁场,必定有一个电场伴随它；
 - (7) 磁感线是无头无尾的；
 - (8) 穿过一个闭合面的净电场通量与该闭合面内自由电荷的总量成正比；
 - (9) 凡是有电荷的地方就有电场；
 - (10) 自然界不存在磁单极子；
 - (11) 凡是有电流的地方就有磁场；
 - (12) 库仑定律；
 - (13) 静电场是保守场。
- 15 - 5 在 LC 电磁振荡中,电场能量和磁场能量如何交替转换？
- 15 - 6 普通的 LC 振荡电路为什么不能用来有效地发射电磁波？要有效地把电磁能量辐射出去,振荡电路必须具备哪些条件？
- 15 - 7 为什么说电磁波是横波？
- 15 - 8 什么是坡印廷矢量？
- 15 - 9 什么是电磁波谱？各种电磁波有哪些特性？

习 题

- 15 - 1 试证明平行板电容器两极板之间的位移电流可写为

$$I_d = C \frac{dU}{dt}$$

- 15 - 2 在一个电容为 $C = 1 \times 10^{-12} \text{ F}$ 的圆形平行板电容器上加一频率为 50Hz、峰值为 $1.74 \times 10^5 \text{ V}$ 的交变电压,试计算该电容器两极板间位移电流的最

大值.

15 - 3 设半径为 0.20 m 的圆形平行板电容器,两极板间为真空,极板间距离为 0.50 cm,设某一时刻对电容器充电的电流为 2A. 忽略平行板电容器的边缘效应,极板间电场可认为是均匀的. 求该时刻电容器极板间位移电流密度的大小.

15 - 4 一个圆形平行板电容器,极板上电荷均匀分布,设极板间的电场为 $E = 720 \sin(10^5 \pi t)$ (t 的单位为 s, E 的单位为 V/m), 忽略电容器的边缘效应. 试求:(1)电容器两极板间的位移电流密度;(2) $t = 2 \times 10^{-5}$ s 时刻,距电容器极板中心轴线为 $r = 1$ cm 处的磁感强度的大小.

15 - 5 半径为 $R = 0.10$ m 的两块圆形平板构成的平行板电容器,放置于真空中,现对电容器匀速充电,使两极板间电场随时间的变化率 $\frac{dE}{dt}$ 为常数. 试求:(1)两极板间的位移电流;(2)电容器内距中心轴线为 r ($r < R$) 处的磁感强度.

15 - 6 一个自感为 $10 \mu\text{H}$ 的线圈与电容分别为 5pF 和 20pF 的两个电容器分别构成两个 LC 振荡电路,电路中的电阻可以忽略不计. 试求这两个 LC 电路的振荡频率.

15 - 7 用一个电容可在 10pF 到 360pF 范围内变化的电容器和一个自感线圈并联组成无线电收音机的调谐电路.(1)求该调谐电路可以接收到的最大和最小频率之比;(2)为了使调谐频率能在 5.0×10^5 Hz 到 1.5×10^6 Hz 的范围内,需在原电容器上并联一个多大的电容? 此电路选用的自感应为多少?

15 - 8 在一个 LC 振荡电路中,电阻可以忽略不计. 若电容器两极板上的交变电压 $U = 50 \cos(10^4 \pi t)$, 电容 $C = 1.0 \times 10^{-7}$ F. 试求:(1)振荡的周期;(2)电路中的自感;(3)电路中的电流随时间变化的规律.

15 - 9 一振荡偶极子辐射电磁波,设偶极子的电矩振幅为 $p_0 = 2.26 \times 10^{-4}$ C · m, 频率为 800kHz. 求:(1)电磁波的波长;(2)偶极子的平均辐射功率;(3)在偶极子赤道面上 ($\theta = \pi/2$) 距离偶极子 2km 处的平均辐射强度以及该处的电场强度和磁场强度振幅.

15 - 10 有一根氦氖激光管,它所发射的激光功率为 1.0×10^{-2} W, 设发出的激光为圆柱形光束,圆柱截面的直径为 2.0×10^{-3} m. 试求激光的电场强度振幅 E_0 和磁感强度振幅 B_0 .

15 - 11 一广播电台的辐射功率是 10 kW, 假定辐射场均匀分布在以电台为中心的半球面上.(1)求距离电台为 $r = 10$ km 处的坡印廷矢量的平均值;

(2)若在上述距离处的电磁波可看作平面波,求该处的电场强度和磁场强度的振幅.

15 - 12 太阳垂直照射于地球表面上,每分钟照射在每平方厘米地面上的能量约为 8.1J ,试求照射在地面上的日光中的电场强度 E 和磁场强度 H 的方均根值.

第 16 章 波动光学

光学是物理学中发展较早的学科. 人类对光的研究至少已有两千多年的历史, 世界上最早关于光学知识的文字记载, 见于我国的《墨经》(公元前 400 多年). 人们最早观察和意识到的是光的直线传播、光的反射和光的折射等直观的现象. 此后, 以这些现象为依据, 大约在 17 世纪中叶建立了光的反射和折射定律, 奠定了几何光学的基础.

关于光的本性的认识一直是光学发展中争论的焦点. 早在 17 世纪, 关于光的本性问题有两派不同的学说. 一种学说是以牛顿(I. Newton)为代表的微粒说(corpuscular theory), 认为光是以一定速度在空间传播的微粒的集合. 应用光的微粒说理论能够解释光的直线传播、光的反射和光的折射等现象. 另一种学说是以惠更斯(C. Huygens)为代表的光的波动说(undulatory theory), 认为光是在介质中传播的一种波动. 光的波动说理论也能解释光的反射和折射等现象, 但光的波动说在解释光的直线传播时遇到了困难. 光的波动说虽然取得了一些成就, 但由于当时牛顿观点的权威性, 因而一直到 18 世纪, 光的微粒说理论始终占据主导地位.

19 世纪初, 随着科学的发展和实验条件的改善, 人们陆续发现了光的干涉、衍射、偏振等现象. 这些现象和微粒说是不相容的, 而应用光的波动说能够成功地解释这些现象. 关于两种学说长期争论的光在水和空气中传播速度的问题, 直到 1850 年, 才分别由傅科(J. B. K. Foucault)和斐索(A. H. L. Fizeau)用实验的方法测出了光在水中的传播速度小于在空气中的传播速度, 这些都成为了光的波动说的有力证据. 至此, 光的波动说取得了决定性的胜利.

19 世纪中期, 以麦克斯韦(J. C. Maxwell)为代表的科学家找到了光和电磁理论之间的联系, 认为光是一种电磁波.

到了 19 世纪末 20 世纪初, 光学的研究深入到光的发生、光和物质相互作用的微观领域中. 人们通过对一系列新现象如黑体辐射、光电效应、康普顿效应等现象的研究, 使人们对光的本性的认识又向前推进了一步, 确立了光是具有一定能量和动量的粒子所组成的粒子流, 这种粒子称为光子. 这里所说的光子不同于牛顿微粒说中的粒子, 光子是和光的频率(波动特征)联系着的. 光同时具有微粒和波动两种特性, 即光具有波粒二象性.

20世纪60年代,发现了激光,光学又取得了新的进展,出现了许多分支——光纤技术、激光全息技术、非线性光学、近代光学和量子光学等。

本章介绍波动光学,主要内容有:光的干涉、衍射及其应用,光栅和X射线的衍射,光的偏振现象等。

§ 16 - 1 光的电磁理论

一、光是一种电磁波

麦克斯韦所建立的光的电磁理论认为,光是一定波段的电磁波,电磁波在真空中的传播速度就是光在真空中的传播速度,即

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

其中 ϵ_0 是真空电容率, μ_0 是真空磁导率. 在介质中,光的传播速度为

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

其中 ϵ_r 是介质的相对电容率, μ_r 是介质的相对磁导率. 通常 ϵ_r 和 μ_r 都是大于1的常量,因此 u 是小于 c 的. 一般用折射率 n 来表征透明介质的光学性质,它定义为

$$n = \frac{c}{u} \quad (16 - 1)$$

考虑到在光频段所有的磁化机制都不起作用,介质的相对磁导率 $\mu_r \approx 1$, 于是有

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

这个公式把光学性质和电磁物理量联系起来. 当光波穿过不同的介质时,其频率 ν 或角频率 ω 保持不变,但光的传播速度 u 和波长 λ 都将随着介质的不同而改变.

光是一种电磁波,因此光就是电磁场中电场强度 E 和磁场强度 H 周期性变化在空间的传播,或者说, E 矢量和 H 矢量的振动在空间的传播. 而且,电磁波是横波, E 矢量和 H 矢量都与传播方向垂直. 研究表明,在光波中引起光效应的,即对人的眼睛或照相底片等感光器件起作用的,主要是电场强度 E . 因此,一般情况下我们都把光波看成是电场强度 E 的振动在空间的传播,并把 E 矢量称为光矢量(photo vector),把 E 矢量的振动称为光振动.

电磁波的传播总是伴随着电磁能量的传递,这个过程一般用平均能流密度 \bar{S} 来定量地描述. 在光学中,通常把平均能流密度 \bar{S} 称为光强,用 I 表示. 因此,

光强表示单位时间内通过与传播方向垂直的单位面积的光的能量在一个周期内的平均值,即单位面积上的平均光功率(average luminous power).无论是人的眼睛还是照相底片,所观测到的都是光强 I 而不是光振动 E . 对于平面简谐电磁波

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E_0^2 \propto E_0^2$$

其中 E_0 是光振动的振幅.

在波动光学中,主要讨论的是光波所到之处的相对光强,因此在同一种介质中往往就直接把光强定义为

$$I = E_0^2 \quad (16-2)$$

可见光(visible light)是指能为人眼睛感受到的一定波段的电磁波,其波长 λ 大约在 390 ~ 760nm 的狭窄范围内,它所对应的频率范围为 $(7.7 \sim 3.9) \times 10^{14}$ Hz. 不同频率的可见光会引起人眼有不同颜色的感觉.

表 16-1 光波的波长范围和频率范围

名称	波长范围	频率范围/Hz
远红外	100 μm ~ 10 μm	3×10^{12} ~ 3×10^{13}
中红外	10 μm ~ 2 μm	3×10^{13} ~ 1.5×10^{14}
近红外	2 μm ~ 760 nm	1.5×10^{14} ~ 3.9×10^{14}
红	760 nm ~ 622 nm	3.9×10^{14} ~ 4.7×10^{14}
橙	622 nm ~ 597 nm	4.7×10^{14} ~ 5.0×10^{14}
黄	597 nm ~ 577 nm	5.0×10^{14} ~ 5.5×10^{14}
绿	577 nm ~ 492 nm	5.5×10^{14} ~ 6.3×10^{14}
青	492 nm ~ 450 nm	6.3×10^{14} ~ 6.7×10^{14}
蓝	450 nm ~ 435 nm	6.7×10^{14} ~ 6.9×10^{14}
紫	435 nm ~ 390 nm	6.9×10^{14} ~ 7.7×10^{14}
紫外	390 nm ~ 5 nm	7.7×10^{14} ~ 6.0×10^{16}

二、单色光

具有单一频率的光波称为单色光.

普通光源的发光是处于激发态的原子(或分子)的自发辐射形成的.按照现

代物理学理论,原子(或分子)的能量只能处于一系列分立的能级上,能量处于最低能级的状态称为基态,处于其他较高能级的状态称为激发态.通常原子处于基态,基态是稳定态.当原子吸收外界能量处于激发态时,激发态极不稳定,原子在激发态上的平均寿命非常短,大约只有 $10^{-11} \sim 10^{-8} \text{s}$,然后,原子就会自发地回到较低的能级上,在这一过程中,原子向外发射光波(电磁波).

由于原子发光是间歇的、断续的,原子的一次发光持续的时间很短,所以,原子发射的光波是一段长度有限的波列.由傅里叶分析可知,一个长度有限的波列是许多频率不同的简谐波叠加的结果,因此,任何光源所发出的光波都有一定的频率范围,即波长范围,从这个意义上讲,严格的具有单一频率的单色光实际上是不存在的.通常所说的单色光都是含有一定频率范围的光,称为准单色光.准单色光中各种频率(或波长)的光所对应的

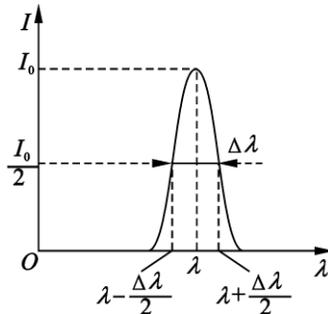


图 16 - 1 谱线及其宽度

的强度是不同的,以光的波长(或频率)为横坐标,以光的强度为纵坐标,可表示波长与强度间的对应关系,称为光谱曲线(或谱线).图 16 - 1 是以波长为 λ 的单色光为例的光谱曲线.设谱线中心处的波长为 λ ,强度为 I_0 ,把强度为 $I_0/2$ 的两点间的波长范围 $\Delta\lambda$ 叫做谱线宽度.用谱线宽度来衡量光的单色性的好坏, $\Delta\lambda$ 越小,光的单色性就越好.普通单色光源的谱线宽度的数量级为 $0.1 \sim 10^{-3} \text{ nm}$,而激光的谱线宽度的数量级在 10^{-9} nm 甚至更小.

§ 16 - 2 光波的相干叠加

一、相干光

由波的叠加原理可知,由振动频率相同、振动方向相同、相位相同或相位差恒定的两个波源所发出的波是相干波,在相干波相遇的区域内,空间有些点的振动始终加强,而有些点的振动始终减弱或完全抵消,即产生干涉现象.机械波干涉的例子比较常见,例如两个频率相同的音叉在房间里振动,可以听到房间里有些空间点的声振动始终很强,而另一些空间点的声振动始终很弱.但对于光波,就不容易观察到干涉现象,如在室内放两个频率完全相同的单色钠光源(黄光)在它们发出的光的叠加区域就观察不到光波始终加强或减弱的干涉现象,这表明两个独立的光源即使频率相同,也不能构成相干光源.普通光源发出的光是由光源中的原子(或分子)发出的光波列组成的,这些光波列之间没有固定的相位关系,所以,来自两个独立光源或同一光源不同部分发出的两列光波,

即使它们的振动频率相同,振动方向相同,但它们的相位差也不可能保持恒定,不满足相干条件,因而不能发生干涉现象.那么,两列光波满足怎样的条件才能发生干涉呢?

设两列频率相同、振动方向相同的光波,它们各自经过 r_1 和 r_2 在空间某一点 P 的光振动分别为

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_{10})$$

$$E_2 = E_{20} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_{20})$$

相应的光强分别为 $I_1 = E_{10}^2$, $I_2 = E_{20}^2$,它们在相遇点叠加合成后的光振幅

$$E_0^2 = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos\Delta\varphi$$

相应的光强为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\Delta\varphi \quad (16-3)$$

其中

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) + (\varphi_{20} - \varphi_{10}) \quad (16-4)$$

式(16-3)中 I_1 和 I_2 分别是两光波单独在 P 点的光强,第三项 $2\sqrt{I_1 I_2} \cos\Delta\varphi$ 称为干涉项(interference term).

由式(16-3)和式(16-4)可见,在 p 点合成后的光强不仅与分振动的光强 I_1 和 I_2 有关,还与两分振动的相位差 $\Delta\varphi$ 有关.当两列光波在空间不同位置相遇时,其相位差 $\Delta\varphi$ 将有不同的数值,即在两列光波的叠加区域,光强随空间位置的不同而不同,出现了明暗相间且有规律分布的干涉图样.这种情况称之为光的相干叠加,两列光波是相干光.当 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 时, $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$, 在这些位置的光强最大,称为干涉相长或干涉加强;当 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 时, $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$, 在这些位置的光强最小,称为干涉相消或干涉减弱.

如果干涉项为零,则 $I = I_1 + I_2$, 叠加后光强并不重新分布,即不发生光的干涉,这种叠加称为非相干叠加.

由以上讨论可知,两列光波叠加时发生干涉的条件是:振动频率相同,振动方向相同,相位相同或相位差恒定.满足这些干涉条件的光称为相干光,能够产生相干光的光源称为相干光源.

怎样才能获得相干光呢?要获得相干光,必须创造条件,使在任意时刻到达观察点的光是从同一光源上同一点发出,但经过不同路径的两列光波.各原子的发光在迅速地改变,但任何相位的改变总是同时在这两列光波中发生,所以它们到达空间同一位置时相位差总保持不变.通常把光源上同一点发出的光

设法分成两部分,然后再把它们叠加起来,这样获得的两列光波满足振动频率相同、振动方向相同、相位相同或相位差恒定的干涉条件,是相干光.用这种方式获得相干光的方法有两种:一种是分波阵面法,即从同一波阵面上取得的两部分光具有相同的相位,可作为相干光,如杨氏双缝、菲涅耳双镜、劳埃德镜干涉等;另一种获得相干光的方法是分振幅法,即当光射到两种介质的分界面时,分别取反射光和透射光作为相干光,如薄膜干涉等.

二、光程和光程差

1. 光程

在研究光的干涉时,光的相干叠加与非相干叠加的区别在于干涉项 $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$, 而干涉项的大小主要取决于相位差 $\Delta\varphi$. 为了方便地研究相位关系,我们引入光程的概念.

单色光在不同的介质中传播时,其振动频率不变,而传播速度和波长将发生变化.设某种单色光振动的频率为 ν ,在真空中的光速为 c ,波长为 λ ,其在折射率为 n 的介质中传播时速度为 u ,波长为 λ_n ,则有

$$u = \frac{c}{n}$$

又

$$u = \lambda_n \nu$$

所以

$$\lambda_n = \frac{u}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda}{n}$$

上式表明,在折射率为 n 的介质中光波的波长为真空中波长的 $1/n$.在此介质中如果光波通过的几何路程为 r ,那么在相同的时间内光在真空中通过的几何路程为

$$\frac{r}{u} \cdot c = nr$$

即在相同的时间内,如果光波在介质中通过的路程为 r ,则其在真空中通过的路程为 nr .我们将光波在某一介质中通过的几何路程 r 与此介质的折射率 n 的乘积 nr 称为与路径 r 相应的光程(optical path).引入光程的概念后,我们就可以把光在各种介质中通过的路程都折算为光在真空中通过的路程,以便于研究光在不同介质中的传播.

2. 光程差

引入光程的概念之后,我们来讨论光程与相干光相位差之间的关系.

为了使研究更具有普遍意义,我们选取两相干光在不同的介质中传播后相遇的情况.如图 16-2 所示, S_1 和 S_2 是频率为 ν 的相干光源,设它们发出的光

的初相位相同,分别在折射率为 n_1 和 n_2 的均匀介质中传播.在两种介质中所经历的几何路程分别为 r_1 和 r_2 ,则两相干光在相遇点 P 处的分振动分别为

$$E_1 = E_{10} \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_1}{\lambda_1} \right)$$

$$E_2 = E_{20} \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_2}{\lambda_2} \right)$$

则两相干光在点 P 处的相位差为

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right)$$

将光在两种介质中的传播都折算为在真空中的传播,则有

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{n_2 r_2}{\lambda} - \frac{n_1 r_1}{\lambda} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 r_2 - n_1 r_1)$$

上式中 2π 和 λ 均为常量,相位差 $\Delta\varphi$ 决定于 $(n_2 r_2 - n_1 r_1)$. $n_2 r_2 - n_1 r_1$ 表示两相干光到达点 P 时的光程差,常用 δ 表示.可见,相干光发生干涉时各处干涉加强和干涉减弱的情况取决于两相干光在该处的光程差,而不是几何路程之差.所以

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad (16-4)$$

式中 λ 为光在真空中的波长.所以

(1) 当 $\delta = \pm k\lambda$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 时 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$, 干涉相长(最强).

(2) 当 $\delta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 时 $\Delta\varphi = \pm (2k+1)\pi$, 干涉相消

(最弱).

三、透镜不引起附加的光程差

在光学实验中,经常要用到透镜.透镜的厚度是不均匀的,那么光通过透镜时会不会引起光程的变化呢?实验表明,平行光束通过透镜后,会聚于透镜焦平面上成一亮点.如图 16-3 所示,平行光束波前上各点(如图中 A、B、C、D、E 各点)的相位相同,到达焦平面上因干涉相长而得到一亮点,说明各光线的相位仍然是相同的.大量的类似实验都验证了光通过透镜时只改变光的传播情况,而不会引起附加的光程差.对此问题可这样理解,如图 16-3 所示,虽然光通过路径 AaF 到达点 F 比光通过路径 CcF 到达 F 的几何路程要长,但路径 CcF 在透镜中经过的路程要比路径 AaF 相应的长一些,由于透镜的折射率大于 1,将路径 AaF 和路径 CcF 均折算成光程,通过计算可以证明两者的光程是相等的.同

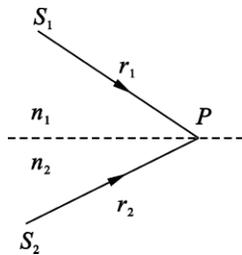


图 16-2 光程差的计算

理 B, C, D, E 各点到达点 F 时的光程也相等. 同理讨论也可知, 图中 AaF' 、 BbF' 、……的光程也相等. 所以使用透镜并不会引起附加的光程差.

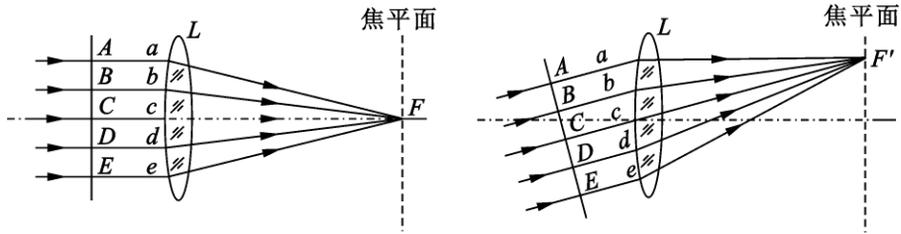


图 16 - 3 通过透镜的各光线的光程相等

§ 16 - 3 分波阵面干涉

如前所述, 分波阵面法是获得相干光的方法之一. 由于从光源发出的光波在同一波阵面上各点的振动具有相同的相位, 所以从同一波阵面上取出的两部分可以作为相干光源. 本节将要介绍的杨氏双缝、菲涅耳双缝和劳埃德镜等光的干涉实验中的相干光, 都是用分波阵面法得到的.

一、杨氏双缝干涉

1. 杨氏双缝干涉实验

1801 年, 英国物理学家托马斯·杨 (T. Young) 首次利用单一光源获得两列相干光波, 观察到了光的干涉现象, 并且用光的波动性成功解释了光的干涉现象, 从而进一步证实了光的波动理论.

如图 16 - 4 所示, 在普通单色光源后放置一狭缝 S , S 相当于一个单色线光源. S 后放有与 S 平行且等距离的两平行狭缝 S_1 和 S_2 , S_1 和 S_2 间的距离很小, 在远处放一平行的接收屏 P . 由惠更斯原理分析可知, S_1 和 S_2 位于由 S 发出的光波的同一波阵面上, 所以相位关系恒定, 满足相干条件, S_1 和 S_2 是相干光源, 所以在 S_1 和 S_2 发出的光的叠加区域, 产生干涉现象, 即在接收屏 P 上出现了一系列稳定的明暗相间的干涉条纹, 这些条纹与狭缝平行, 且条纹间距离相等. 这个实验称杨氏双缝干涉实验, 实验中

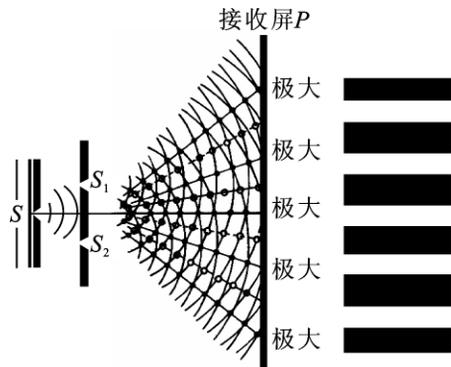


图 16 - 4 杨氏双缝干涉

相干光源 S_1 和 S_2 都是从同一光源 S 的同一波阵面上取出的两部分, 所以把这种方法称为波阵面干涉.

2. 干涉明暗条纹的位置

现在我们对接收屏上干涉条纹的位置做定量分析. 如图 16-5 所示, 设 S_1 和 S_2 之间距离为 d , 从 S_1 到接收屏 P 的垂直距离为 D , Q 为屏上任意一点, 点 Q 距 S_1 和 S_2 的距离分别为 r_1 和 r_2 , 点 Q 到屏上对称中心点 O 的距离为 x . 则从 S_1 和 S_2 发出的光到达点 Q 的光程差为

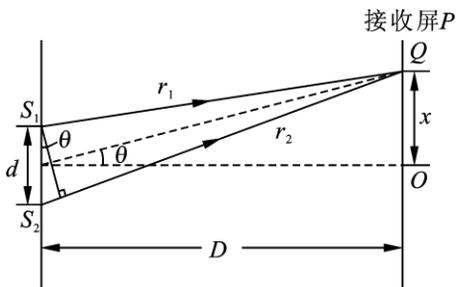


图 16-5 双缝干涉条纹的计算

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta$$

通常情况下 d 很小而 D 较大, 因此 θ 很小, 则

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{D}$$

所以光程差可表示为

$$\delta = \frac{xd}{D}$$

由于 S_1 和 S_2 是单色光源 S 发出的同一波阵面的两部分, 所以 S_1 和 S_2 的相位相同. 由前述知识可得, 当

$$\delta = \frac{xd}{D} = \pm k\lambda \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

即在接收屏上

$$x = \pm k \frac{D\lambda}{d} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (16-5)$$

的地方, 干涉加强, 点 Q 处为明条纹. 相对于 $k=0$ 的明条纹称为零级明条纹或中央明条纹. 相对于 $k=1, k=2, \dots$ 的明条纹分别称为第一级, 第二级, …… 明条纹. 式(16-5)中正负号表明干涉明条纹在中央明纹两侧对称分布, x 表示各级明条纹的中心位置. 当

$$\delta = \frac{xd}{D} = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

即

$$x = \pm (2k+1) \frac{D\lambda}{2d} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (16-6)$$

时,点 Q 处为暗条纹. 式(16-6)表示各级暗条纹的中心位置,它们也对称分布在中央明条纹两侧. 若由 S_1 和 S_2 发出的光到点 Q 的光程差既不满足式(16-5),也不满足式(16-6),则点 Q 处既不是最明,也不是最暗. 由式(16-5)和(16-6)可以看出,两相邻明条纹或相邻暗条纹的间距都是

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{d}$$

说明干涉条纹是等间距分布的. 另外,若已知 d 和 D , 测出 Δx , 则可由上式计算出入射单色光的波长 λ . 还可看出,若 d 和 D 的值一定,相邻明条纹(相邻暗条纹)间的距离 Δx 与入射光的波长 λ 成正比,波长越小,条纹间距就越小. 因而,若用自然光(复色光)作为光源时,则干涉结果是在中央明条纹(白色)两侧其他各级明条纹的位置,由于波长的不同而逐级拉开距离,从而出现由紫到红的彩色条纹,并且出现了各种颜色级次稍高的条纹将发生重叠,以致模糊一片而分不清条纹的现象.

例 16-1 利用杨氏双缝干涉装置测量物质的折射率. 用一厚度 $d = 1 \text{ mm}$ 的透明薄膜覆盖在杨氏双缝装置中的一条狭缝上,这时接收屏上的中央明条纹落到了原第 20 级明条纹的位置上. 如果入射光的波长为 600 nm , 求透明薄膜的折射率(设空气的折射率为 1.0).

解 当用透明薄膜覆盖双缝干涉装置中的一条狭缝时,因为薄膜的折射率与空气的不同,则由此缝发出的光到达 O(设接收屏的对称中心即原中央明条纹处为 O)处的光程要发生变化,所以中央明条纹的位置将发生相应的移动. 如明条纹移动了 N 条,则 O 处就成为第 N 级明条纹.

从双缝到达 O 处的光程差为

$$\delta = n_2 d - n_1 d$$

式中 n_2 和 n_1 分别为薄膜和空气的折射率. 根据双缝干涉明条纹条件得

$$\delta = (n_2 - n_1) d = N\lambda$$

所以透明薄膜的折射率为

$$n_2 = n_1 + \frac{N\lambda}{d} = 1 + \frac{20 \times 600 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-3}} = 1.012$$

例 16-2 用白光作光源观察双缝干涉. 设狭缝间距离为 d , 试求能观察到的清晰可见光谱的级次.

解 白光波长在 $390 \text{ nm} \sim 760 \text{ nm}$ 范围,明条纹条件为

$$\delta = d \sin \theta = \pm k\lambda \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

在 $\theta = 0$ 处,各种波长的光的光程差均为零,所以各种波长的零级条纹在接

收屏上 $x=0$ 处重叠, 形成中央白色明纹.

在中央明纹两侧, 各种波长的同一级次的明条纹, 由于波长不同而在接收屏上的位置也不同, 因而彼此错开, 并产生不同级次条纹的重叠. 在重叠区域内, 靠近中央明纹的两侧, 观察到的是由各种色光形成的彩色条纹, 再远处则各色光重叠的结果形成一片白色, 看不到条纹.

最先发生重叠的是某一级次的红光 (设波长为 λ_h) 和高一级次的紫光 (设波长为 λ_z). 因此, 能观察到的从紫到红清晰可见的光谱的级次可由下式求得

$$k\lambda_h = (k+1)\lambda_z$$

因而有

$$k = \frac{\lambda_z}{\lambda_h - \lambda_z} = \frac{390}{760 - 390} = 1.05$$

由于 k 只能取整数, 所以计算结果表明, 从紫到红排列清晰的可见光谱只能是正负各一级, 如图 16-6 所示.

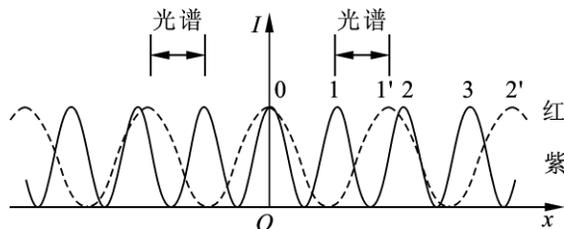


图 16-6 例 16-2 中白光干涉条纹强度分布

3. 杨氏双缝干涉的光强分布

将图 16-5 中由狭缝 S_1 和 S_2 发出的光波单独到达接收屏上点 Q 处的光振动的振幅分别设为 E_1 和 E_2 , 对应的光强分别为 I_1 和 I_2 , 由前述知识可得, 在点 Q 处两光波叠加后的合振幅为

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

由相位差与光程差的关系

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

得两光波在点 Q 处叠加后的光强为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)$$

为简单起见, 设 $E_1 = E_2 = E_0$, 则 $I_1 = I_2 = I_0$, 故有

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

由上式可知, 在满足 $\delta = \pm k\lambda$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 的地方, 光强 $I = 4I_0$, 这些地方

是明条纹的最亮处. 而对应于 $\delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 的各处, 光强 $I=0$, 这些地方是暗条纹的最暗处. 杨氏双缝干涉条纹的光强分布如图 16-7 所示. 由图可看出, 光的总能量是守恒的, 干涉条纹的出现只不过是光的干涉使得光的能量在空间进行了重新分布而已.

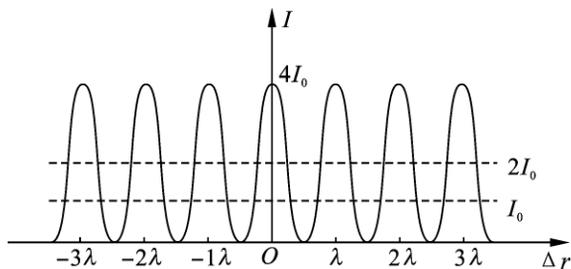


图 16-7 杨氏双缝干涉光强分布

二、菲涅耳双镜

杨氏双缝干涉装置中狭缝的宽度很小时, 在接收屏上才能出现清晰的干涉条纹, 但此时通过狭缝的光较弱, 所以干涉条纹不够明亮, 而且狭缝很小时它们的边缘往往对实验产生影响而使问题复杂化. 1818 年, 菲涅耳 (A. J. Fresnel) 提出了另一种分波振面获得相干光的方法, 可以在更为简单的情况下观察到干涉现象.

如图 16-8 所示, M_1 和 M_2 是两个紧靠在一起且夹角 θ 很小的平面镜, C 是两平面镜的交线, 为使从狭缝光源 S 发出的光不直接照射到接收屏 P 上, 可用一遮光板 L 将 S 和 P 隔开. S 发出的光经平面镜 M_1 和 M_2 反射后, 分成沿不同方向传播的两部分, 这两部分光如同从两虚光源 S_1 和 S_2 发出的一样, 实际上它们都是从同一光源 S 发出的, 满足相干条件. 可以看出, 菲涅耳双镜干涉与杨氏双缝干涉是类似的.

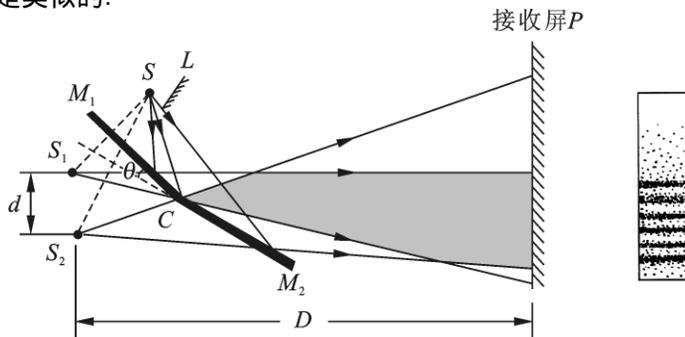


图 16-8 菲涅耳双镜干涉

两平面镜镜面之间的夹角为 θ , 可以证得 $\angle S_1CS_2 = 2\theta$, 根据杨氏双缝干涉已求得的计算公式, 可得菲涅耳双镜干涉条纹中相邻明纹(或相邻暗纹)之间的距离为

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} = \frac{D\lambda}{2r\sin\theta} \quad (16-7)$$

式中 r 是 C 到光源 S 的距离(图中 S, S_1 和 S_2 在以 C 点为圆心的同一圆周上).

例 16-3 在菲涅耳双镜实验中, 单色光源 S 的波长为 500 nm , S 与双镜交线 C 的距离为 10 cm , C 与接收屏 P 的距离为 2 m , 已知双镜的夹角为 $8'$, 求:

- (1) 接收屏上两相邻明条纹之间的距离;
- (2) 若双镜夹角扩大为 $10'$, 则接收屏上两相邻明条纹的间距有何变化?

解 (1) 由式(16-7)及题意可得, 接收屏上两相邻明条纹之间的距离为

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{2r \sin\theta} = \frac{(10 \times 10^{-2} + 2) \times 500 \times 10^{-9}}{2 \times 10 \times 10^{-2} \times \sin 8'} = 2.3 \text{ mm}$$

(2) 当双镜夹角 θ 变为 $10'$ 时, 接收屏上两相邻明条纹之间的距离为

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{2r \sin\theta'} = \frac{(10 \times 10^{-2} + 2) \times 500 \times 10^{-9}}{2 \times 10 \times 10^{-2} \times \sin 10'} = 1.8 \text{ mm}$$

由计算可知, 随着双镜夹角的增大(相当于两虚光源间的距离增大), 接收屏上相邻明条纹间的距离将变小.

三、劳埃德镜

1834 年, 劳埃德(H. Lloyd)提出了另一种观察干涉现象的装置.

如图 16-9 所示, 狭缝光源 S_1 为单色光源, 它发出的光的一部分(图中 a 表示的光)直接照射到接收屏 P 上; 另一部分掠射(入射角很大, 接近 90°)到一块下面涂黑(减少折射)的平玻璃板 M 上, 经其反射后(图中 b 表示的光)也照射到接收屏 P 上. 由 M 反射的光可看成是从 S_1 的虚像 S_2 发出的, 它和 S_1 直接照射到屏上的光是分波阵面得到的, 是相干光, S_1 和 S_2 构成了相干光源. 有关劳埃德镜干涉条纹计算的原理和杨氏双缝干涉相同.

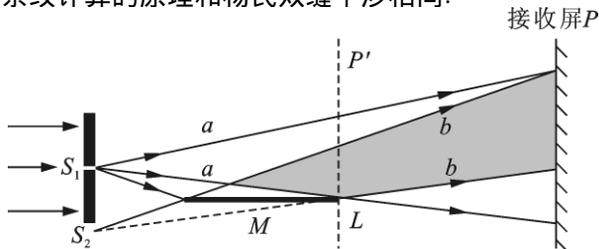


图 16-9 劳埃德镜干涉

但是,在劳埃德镜干涉实验中发现了另一现象,即如果把接收屏 P 平移到和平面镜 M 镜面边缘 L 相接触(图中 $P'L$ 位置),则在接触点应为明条纹的地方,实际却出现了暗条纹,其他的条纹也有相应的变化.之所以说在接触点 L 处应出现明条纹,是因为直观来看此时从 S_1 、 S_2 发出的相干光到达接触点 L 的光程是相等的,而在接触点实际出现暗条纹这一事实,说明了这一变化是光在反射过程中引起的,因为光在均匀介质中传播时,将不会引起以上变化.反射在介质表面上发生,因此光波的振动必然在这里使相位突然改变了 π ,即相当于反射光的光程在介质表面反射时损失了半个波长,这种现象称为半波损失.由于半波损失的存在,在劳埃德镜干涉的相关计算中,光程差的表达式将发生变化,其余则与前面讨论过的杨氏双缝干涉中的相同.所以说,劳埃德镜干涉实验不但显示了光的干涉,而且说明了光的半波损失.进一步的实验表明:光从光疏介质(相对而言光速较大或折射率较小的介质)射到光密介质(相对而言光速较小或折射率较大的介质)在两种介质的界面反射时,反射光的相位较入射光的相位有 π 的突变.相位的突变导致反射光的光程在反射过程中有半个波长的损失,即为半波损失.以后遇到光的反射时要注意是否有半波损失,如果存在,计算光程差时必须加以考虑.

例 16-4 如图 16-10 所示,湖面上 $h=0.5\text{ m}$ 处有一电磁波接收器位于 C 处,当一射电星从地平线渐渐升起时,电磁波接收器断续地检测到了一系列电磁波信号的极大值.已知射电星所发出的电磁波的波长为 20 cm ,试求第一次测到信号极大时,射电星的方位与湖面所成的角度.

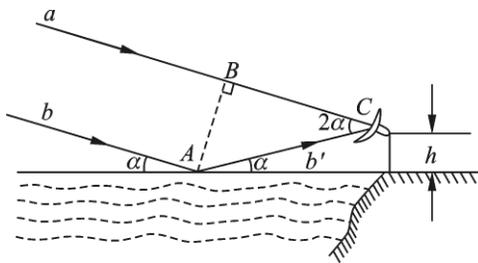


图 16-10

解 电磁波接收器所测得的电磁波是射电星发出的信号直接到达接收器的部分和经湖面反射的部分相互干涉叠加的结果,可用类似于劳埃德镜干涉的方法分析和计算.

设射电星所在位置与湖面成 α 角,电磁波接收器所接收信号的反射波(图中用 b' 表示)与入射波(图中用 a 表示)间的夹角为 2α .若信号在湖面上的反射

点为 A,由图可知 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, 则两相干信号波到达接收器的波程差为

$$\begin{aligned}\delta &= \overline{AC} - \overline{BC} + \frac{\lambda}{2} \\ &= \overline{AC}(1 - \cos 2\alpha) + \frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

式中 λ 为电磁波信号的波长, $\lambda/2$ 项是由于电磁波信号在湖面上反射发生相位突变而附加的波程差. 接收器接收到信号的极大值时, 两相干信号到达接收器的波程差应满足

$$\frac{h}{\sin \alpha}(1 - \cos 2\alpha) + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

解得

$$\sin \alpha = \frac{(2k - 1)\lambda}{4h}$$

第一次测到信号的极大值, 即 $k=1$, 此时射电星与湖面的夹角 α_1 为

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{\lambda}{4h} = \arcsin \frac{20 \times 10^{-2}}{4 \times 0.5} = 5.74^\circ$$

§ 16 - 4 分振幅干涉

上一节通过介绍杨氏双缝干涉等分析了分波阵面干涉, 这一节我们讨论另一种获得相干光的方法, 即分振幅法. 光照射到透明薄膜时, 经薄膜上下表面反射后能产生干涉现象, 如阳光照射下的肥皂膜、水面上的油膜、许多昆虫的翅膀呈现彩色花纹等. 这种情况下, 由于反射光和透射光的能量都是由入射光的能量分出来的, 可以认为入射光的振幅被分成若干部分, 这种获得相干光的方法称为分振幅法.

一、薄膜干涉

如图 16 - 11 所示, 均匀平面薄膜的厚度为 e , 折射率为 n_2 , 为使讨论具有普遍意义, 设薄膜上、下方介质的折射率相互独立, 分别为 n_1 和 n_3 . 一单色光照射到薄膜上, 入射角为 i . 在入射点 A 处, 一部分光发生反射, 另一部分光折射进入薄膜内, 这一部分光在薄膜下表面 C 处又分成两部分, 一部分光折射后射出薄膜, 另一部分光反射后到达薄膜的上表面 B 处, 到达点 B 处的光又分为两部分……可以看出, 折射进入薄膜的光线经一次、三次、五次……反射后都能折射出薄膜的上方, 但是经过多次折射、反射后光的能量损失较大, 其光强迅速下降, 因此我们一般只考虑如图 16 - 11 所示的 a、b 两条光线的干涉. 光线 a 和 b 是两条平行光线, 加上透镜 L 并在其焦平面上放置接收屏 P 就可以观察到清晰的干涉图样.

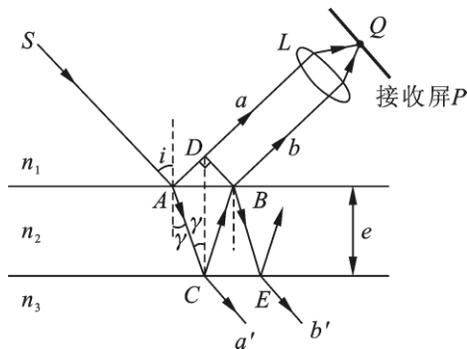


图 16 - 11 薄膜干涉

现在我们来计算两相干光线 a 和 b 在接收屏上点 Q 相遇时的光程差. 如图 16 - 11 所示, 从点 B 做光线 a 的垂线 BD , 由于透镜不引起附加的光程差, 所以 a 、 b 两条光线从 B 到 Q 和从 D 到 Q 的光程相等, 也就是说, 在入射点 A 以前和 B 、 D 两点之后, a 、 b 两条光线的光程是相等的, 这两条光线到达 Q 处的光程差是在由 A 到 D 及由 A 经 C 到 B 的过程中形成的. 所以光线 a 和 b 之间的光程差为

$$\delta = n_2(\overline{AC} + \overline{CB}) - n_1 \overline{AD} + \delta'$$

式中 δ' 是半波损失项. 在图 16 - 11 中 γ 是折射角, 由折射定律得

$$n_2 \sin \gamma = n_1 \sin i$$

且

$$\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{e}{\cos \gamma}, \quad \overline{AD} = \overline{AB} \sin i = 2e \tan \gamma \cdot \sin i$$

则

$$\delta = \frac{2n_2 e}{\cos \gamma} (1 - \sin^2 \gamma) + \delta' = 2n_2 e \cos \gamma + \delta'$$

$$= 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta' \quad (16 - 8)$$

于是, 可得到反射光的干涉条件为

$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta' = k\lambda \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad \text{明条纹} \quad (16 - 9)$$

$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta' = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad \text{暗条纹} \quad (16 - 10)$$

当入射光垂直入射 ($i=0^\circ$) 时, 干涉条件为

$$\delta = 2en_2 + \delta' = k\lambda \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad \text{明条纹} \quad (16 - 11)$$

$$\delta = 2en_2 + \delta' = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad \text{暗条纹} \quad (16 - 12)$$

关于半波损失项 δ' 的讨论:

(1) $n_1 > n_2 > n_3$ 或 $n_1 < n_2 < n_3$

当 $n_1 > n_2$ 时, 光线 a 由光密介质入射到光疏介质并在界面上 A 处反射, 无半波损失; $n_2 > n_3$, 光线 b 也是由光密介质入射到光疏介质并在界面上 C 处反射, 也无半波损失. 所以, 当 $n_1 > n_2 > n_3$ 时半波损失项 $\delta' = 0$. 若 $n_1 < n_2$, 反射光 a 由于出现相位 π 的突变而存在半波损失, $n_2 < n_3$, 光线在 C 点反射时也存在半波损失, 两者恰好相互抵消, 所以, 在 $n_1 < n_2 < n_3$ 的条件下 $\delta' = 0$.

(2) $n_1 < n_2 > n_3$ 或 $n_1 > n_2 < n_3$

当 $n_1 < n_2$ 时, 光线 a 在 A 处反射存在半波损失, $n_2 > n_3$, 光线 b 在 C 处反射无半波损失, 所以, 当 $n_1 < n_2 > n_3$ 时, 半波损失项 $\delta' = \frac{\lambda}{2}$. 同理分析可得, 当 $n_1 > n_2 < n_3$ 时 $\delta' = \frac{\lambda}{2}$. 故

$$\delta' = \begin{cases} 0 & n_1 > n_2 > n_3 \text{ 或 } n_1 < n_2 < n_3 \\ \frac{\lambda}{2} & n_1 < n_2 > n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 < n_3 \end{cases} \quad (16-13)$$

对于透射光也有干涉现象. 在图 16-11 中, 与讨论反射光干涉的情况相类似, 透射光线 a' 和 b' 是两相干光, 同理论可得它们的光程差为

$$\delta_T = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta''$$

式中 $\delta'' = \frac{\lambda}{2} - \delta'$, 即若反射光干涉存在半波损失, 则相应透射光干涉就无半波损失; 若反射光干涉无半波损失, 则相应透射光干涉就存在半波损失 (关于 δ'' 项, 读者可假设 n_1 、 n_2 和 n_3 各种不同的大小关系讨论). 说明反射光干涉相互加强时, 相应的透射光干涉就相互减弱, 反之亦然. 这种现象是符合能量守恒定律的.

利用薄膜干涉可以测量入射光的波长或薄膜的厚度, 并且还可以提高或降低光学器件的透射率. 在实际的光学仪器系统中, 由于反射的存在而使光的能量有较大的损失, 为减少入射光能量在透镜表面上反射所引起的光能损失, 人们常在镜面上镀一层厚度均匀且严格控制的透明薄膜. 常用的薄膜材料如氟化镁 (MgF_2), 它的折射率为 1.38, 介于玻璃和空气的折射率之间, 利用薄膜的干涉可使反射减少而增加透射, 这种能减少反射而增加透射光强的薄膜称为增透膜或减反膜.

如要进一步提高某种光的反射率或透射率, 可相应地采用镀多层膜的方法加以实现.

例 16-5 照相机的镜头表面通常镀一层类似 MgF_2 ($n = 1.38$) 的透明薄

膜,目的是为了利用干涉降低玻璃表面的反射.为了使透镜对波长为 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 的光反射最小,薄膜的厚度最小应为多少?(玻璃的折射率为1.5,空气的折射率取1.0,设光线垂直界面入射.)

解 由于 MgF_2 的折射率介于空气和玻璃折射率之间,入射光在其上、下表面反射时都存在半波损失,因而相互抵消,所以反射最小时有

$$\delta = 2ne = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

所以

$$e = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}$$

$k=0$ 时,薄膜厚度取最小值,即

$$e = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550}{4 \times 1.38} = 99.6 \text{ nm} = 9.96 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

例 16-6 一油轮漏出的油(折射率 $n_1 = 1.20$)污染了某海域,在海水($n_2 = 1.30$)表面形成一层薄薄的油污.

(1)如果太阳正位于该海域上空,一直升飞机的驾驶员从机上向下观察,他所正对的油层厚度为 460 nm ,则他将观察到油层呈什么颜色?

(2)如果一潜水员潜入该区域水下,他又将观察到油层呈什么颜色?

解 这是一个油膜干涉问题,太阳光垂直照射在海面上,驾驶员和潜水员所看到的分别是反射光的干涉结果和透射光的干涉结果.

(1)由于油层的折射率 n_1 小于海水的折射率 n_2 ,但大于空气的折射率,所以在油层上、下表面反射的太阳光均发生相位突变,因而两反射光的光程差为

$$\delta = 2n_1e$$

当 $\delta = k\lambda$,即 $\lambda = \frac{2n_1e}{k}$, $k=1, 2, 3, \dots$ 时,反射光干涉加强.

将 $n_1 = 1.20$, $e = 460 \text{ nm}$ 代入上式,可得干涉加强的光波波长为 $k=1$, $\lambda_1 = 2n_1e = 1104 \text{ nm}$, $k=2$, $\lambda_2 = n_1e = 552 \text{ nm}$, $k=3$, $\lambda_3 = \frac{2}{3}n_1e = 368 \text{ nm}$,...其中,波长为 $\lambda_2 = 552 \text{ nm}$ 的绿光在可见光范围内,而 λ_1 和 λ_3 则分别在红外线和紫外线的波长范围内,所以,驾驶员将看到油膜呈绿色.

(2)同理讨论可得,透射光的光程差为

$$\delta = 2n_1e + \frac{\lambda}{2}$$

而

$$\delta = k\lambda \quad (k=1, 2, 3)$$

所以

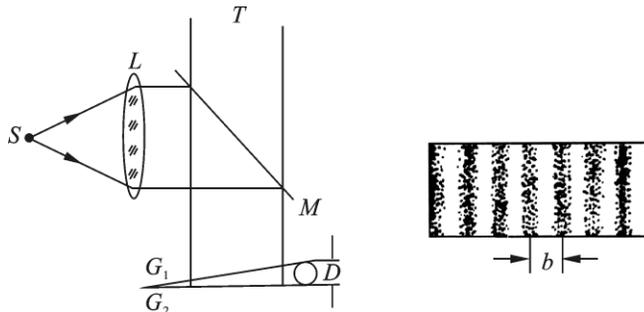
$$\lambda = \frac{2n_1 e}{k - \frac{1}{2}}$$

当 $k=1$ 时 $\lambda_1 = 2\ 208\ \text{nm}$; 当 $k=2$ 时 $\lambda_2 = 736\ \text{nm}$; 当 $k=3$ 时 $\lambda_3 = 441.6\ \text{nm}$; 当 $k=4$ 时 $\lambda_4 = 315.4\ \text{nm}$; \dots 其中波长为 $\lambda_2 = 736\ \text{nm}$ 的红光和 $\lambda_3 = 441.6\ \text{nm}$ 的蓝光在可见光范围内, 而 λ_1 是红外线 λ_4 是紫外线. 所以, 潜水员看到的油膜呈蓝红色.

二、劈尖

在薄膜的等倾干涉中, 我们研究了厚度均匀的薄膜的干涉现象. 如果薄膜的厚度不均匀, 用一束入射角一定的平行光照射薄膜时, 它的上、下表面的反射相干光的光程差仅与薄膜的厚度有关, 即薄膜厚度相同的地方, 相干光的光程相同, 因而干涉结果对应于同一条干涉条纹. 将这种干涉条纹称为等厚干涉条纹. 等厚干涉条纹的形状取决于薄膜层厚度的分布情况. 我们用观察等厚干涉的常用装置劈尖和牛顿环对薄膜的等厚干涉进行详细的讨论.

观察劈尖干涉的实验装置如图 16-12(a) 所示, 两块平面玻璃片 G_1 和 G_2 一端互相叠合, 另一端之间用线度为 D 的小物体(如细丝、纸片等)隔开, 此时夹在两平面玻璃片之间的劈形空气薄膜称为空气劈尖. 把两玻璃片的交线称为棱边或劈棱, 在平行于棱边的直线上, 劈尖薄膜的厚度是相同的. 图中 M 为倾角为 45° 放置的半透明半反射的平面镜, L 为透镜, T 为显微镜. 由光源 S 发出的单色光经透镜 L 后成为平行光, 经平面镜 M 反射后垂直照射劈尖装置. 此时经空气薄膜的上、下表面反射所形成的光为相干光, 因而发生干涉. 从显微镜中可观察到明暗交替且均匀分布的干涉条纹, 如图 16-12(b) 所示. 图中相邻明条纹(或暗条纹)中心间的距离 b 称为劈尖干涉的条纹宽度.



(a) 观察劈尖干涉装置

(b) 劈尖干涉条纹

图 16-12 劈尖干涉

劈尖干涉条纹的分布可借助图 16 - 13 来分析,图中的 L 为玻璃片的长度(也是空气劈尖的长度),两玻璃片之间的夹角 θ 称为劈尖角.由于 θ 很小,因而在劈尖的上表面和下表面反射的光都可认为是垂直于劈尖表面的,它们在劈尖上表面处相遇而相干叠加.设空气劈尖的折射率为 n ,玻璃的折射率为 n_1 ($n < n_1$) 在此情况下,由式(16 - 13)可知,半波损失项 $\delta' = \lambda/2$,所以经劈尖薄膜上、下表面反射的两相干光的光程差为

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$$

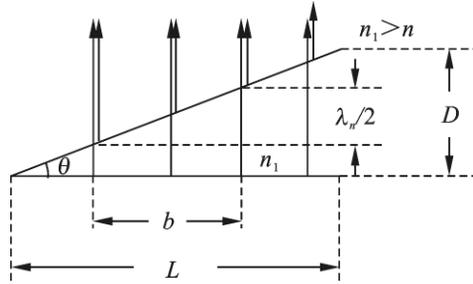


图 16 - 13 劈尖干涉条纹分布

式中 e 为相干光所在处空气劈尖的厚度.

因而,干涉产生明条纹的条件是

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (16 - 14)$$

干涉产生暗条纹的条件是

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (16 - 15)$$

由劈尖干涉条件可知,对某一波长的入射光,薄膜厚度 e 相同的地方,光程差也相同,因而干涉情况就相同.根据劈尖薄膜厚度的分布特点可知,干涉条纹是平行于棱边的明暗相间的直线条纹.在两玻璃片的接触处,劈尖厚度 $e=0$,所以 $\delta = \lambda/2$,即在棱边处干涉条纹为暗纹,这与实际观察结果是一致的.这一结果进一步印证了半波损失的结论.由式(16 - 14)和(16 - 15)容易得到,相邻明条纹或相邻暗条纹之间劈尖薄膜的厚度之差.设第 k 级明条纹处劈尖的厚度为 e_k ,第 $k+1$ 级明条纹处劈尖的厚度为 e_{k+1} ,则

$$e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda_n}{2}$$

式中 λ_n 为光在折射率为 n 的介质中的波长.上式表明,两相邻明条纹处劈尖薄膜的厚度差为入射光在劈尖介质中波长的一半;同理,两相邻暗条纹处劈尖薄

膜的厚度差也为入射光在劈尖介质中波长的一半,显然,相邻的明、暗条纹处劈尖薄膜的厚度差为入射光在劈尖介质中波长的四分之一。

另外,根据图 16-13,由几何关系可得

$$b \sin \theta = \frac{\lambda_n}{2}$$

式中 θ 角是定值,所以干涉条纹是等间距的,且 θ 越小,条纹间距越大; θ 越大,条纹间距越小,如果 θ 较大,条纹间距将小到无法分辨。一般 θ 角很小,在计算中常利用关系式 $\sin \theta \approx \tan \theta$, $\sin \theta \approx \theta$ 简化计算,故上式为

$$\theta = \frac{\lambda_n}{2b}$$

又
$$\frac{D}{L} = \tan \theta \approx \theta$$

所以
$$D = \frac{\lambda_n L}{2b} = \frac{\lambda L}{2nb}$$

由上式可知,若已知劈尖角 θ 和干涉条纹间距 b ,就可以计算出入射单色光的波长 λ ;反之,若已知单色光的波长 λ 和干涉条纹间距 b ,就可求出劈尖角 θ ,进而由几何关系可求得夹在两玻璃片之间的细小物体的线度。工程技术上常用此原理测定细丝的直径或薄片的厚度。

劈尖干涉在实际中有很多应用的例子,生产中常用来检测工件的平整度。由以上讨论可知,若劈尖的上下表面都是光学平面,干涉条纹是一系列平行且等间距的明暗条纹。如果两玻璃片中一块是标准的光学平面,而另一块是凹凸不平的待检玻璃片或金属抛光面,此时干涉条纹将不再是直条纹,而是疏密不均匀且不规则的条纹。如图 16-14(a)所示,图中 M 为透明的标准玻璃, M' 为待检平板,如果待检平板的表面也是理想的光学平面,则干涉条纹将是一组间距为 b 且均匀分布的平行直条纹,如图 16-14(b)所示。若待检平板的表面凹凸不平,则干涉条纹将不再是平行的直条纹,如图 16-14(c)所示。这种情况下,可根据条纹弯曲的程度及弯曲的方向,对待检平板在该处的凹凸情况做出判断。因相邻明(暗)条纹间空气薄膜的厚度相差是 $\lambda_n/2$,用这种方法能检测出约 $\lambda_n/4$ 的凹凸缺陷,精密度可达 $0.1 \mu\text{m}$ 左右。劈尖干涉应用的另一个例子是测定薄膜厚度。在半导体元件的制备过程中,常在半导体材料硅(Si)片上镀一层很薄的二氧化硅(SiO_2)薄膜以保护半导体元件,要对二氧化硅薄膜的厚度进行测量,可将其制成劈尖形状,如图 16-15 所示。利用劈尖干涉装置,可测出干涉明条纹(或暗条纹)的数目,再利用几何关系,就可计算出二氧化硅薄膜的厚度 e 。

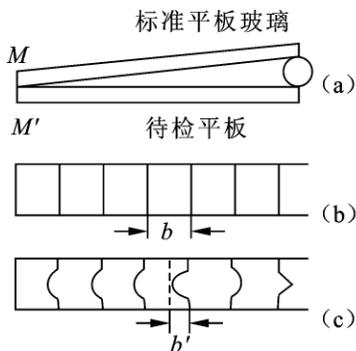
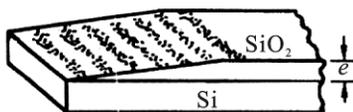


图 16-14 待检平板的表面检验

图 16-15 SiO_2 劈尖上的干涉条纹

例 16-7 利用劈尖干涉测量细金属丝的直径. 用平行单色光垂直照射空气劈尖, 单色光波长 $\lambda = 589.3 \text{ nm}$, 金属丝与棱边之间的距离 l 为 28.88 mm , 测得 30 条明条纹之间的总距离为 4.295 mm , 求细金属丝的直径 D .

解 参考图 16-13, 由几何关系可得

$$D = l \tan \theta$$

式中 θ 为劈尖角. 由于相邻明条纹间空气薄膜的厚度差为 $\lambda/2$, 则有

$$b \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

θ 角很小, $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{D}{l}$, 即

$$b \sin \theta = b \frac{D}{l} = \frac{\lambda}{2}$$

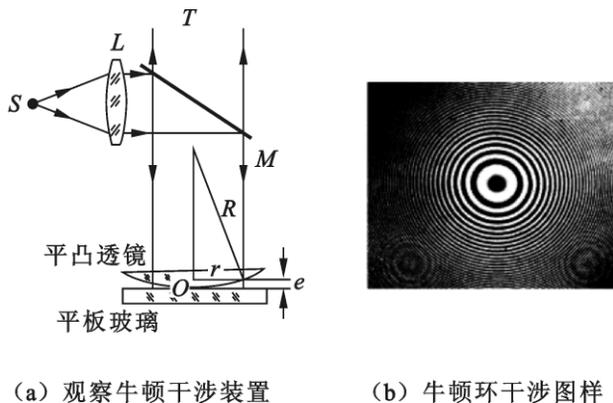
故金属细丝直径为

$$D = \frac{l \lambda}{2b} = \frac{28.88 \times 589.3 \times 10^{-6}}{2 \times \frac{4.295}{29}} = 5.746 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

三、牛顿环

如图 16-16(a)所示, 一曲率半径为 R (很大) 的平凸透镜放在一平板玻璃上, 两者之间形成厚度不均匀的空气薄膜, 即形成上表面是半径为 R 的球面, 下表面为平面的空气劈尖. 由 S 发出的单色光经半透半反镜 M 反射后, 垂直射向空气劈尖, 并在透镜下表面 (空气薄膜上表面) 和平板玻璃上表面 (空气薄膜下表面) 反射形成相干光, 从而在显微镜 T 中可观察到如图 16-16(b)所示的干涉条纹. 由于空气劈尖的等厚轨迹是以接触点 O 为圆心的一系列同心圆, 所以干涉条纹也都是以接触点 O 为圆心的一系列间距不等的同心圆环. 由于此干涉

图样最早是由牛顿观察到的,因而将此干涉图样称为牛顿环.牛顿环也是等厚干涉条纹.



(a) 观察牛顿干涉装置

(b) 牛顿环干涉图样

图 16 - 16 牛顿环干涉

由于空气劈尖的折射率(近似为 1)小于玻璃的折射率,因此在劈尖厚度为 e 处,由透镜下表面和平板玻璃上表面反射的两相干光的光程差(存在半波损失)为

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$$

所以干涉明暗条纹所在处空气劈尖的厚度应满足以下关系

$$2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad \text{明环} \quad (16-16)$$

$$2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad \text{暗环} \quad (16-17)$$

在接触点 O 处 $e=0$, 则有 $\delta = \lambda/2$, 因而反射式牛顿环的中心是暗纹.

由图 16-16(a)可得

$$r^2 = R^2 - (R - e)^2 = 2Re - e^2$$

式中 r 是薄膜厚度为 e 的等厚轨迹的半径. 因为 $R \gg e$, 所以 $e^2 \ll 2Re$, 将 e^2 项略去, 得

$$e = \frac{r^2}{2R}$$

将上式代入干涉明环和暗环条件, 得到干涉明环和干涉暗环的半径分别为

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad \text{明环半径} \quad (16-18)$$

$$r = \sqrt{kR\lambda} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad \text{暗环半径} \quad (16-19)$$

由式(16 - 18)和(16 - 19)可分别计算出各级明、暗环的半径及相邻明(暗)环间的距离,计算可知 k 越大,相邻明(暗)环之间的间距越小,因而干涉环并不是均匀分布的,而是内疏外密,越向外干涉环越密,如图 16 - 16(b)所示.

常用牛顿环实验测量透镜的曲率半径 R . 由于实际观察到的牛顿环中心并非暗点,而是有一定大小的暗斑(由于实际仪器元器件相互叠放的挤压等因素影响),暗斑的出现导致干涉环的半径不易直接准确测定,并且不能确定干涉环的级数,因而,在实际应用中,常取第 k 圈暗环的直径 d_k 和由它向外第 m 圈暗环的直径 d_{k+m} ,由暗环条件得

$$d_k^2 = (2r_k)^2 = 4kR\lambda$$

$$d_{k+m}^2 = (2r_{k+m})^2 = 4(k+m)R\lambda$$

则

$$d_{k+m}^2 - d_k^2 = 4mR\lambda$$

所以平凸透镜的曲率半径为

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{4m\lambda}(d_{k+m}^2 - d_k^2) \\ &= \frac{1}{4m\lambda}(d_{k+m} - d_k)(d_{k+m} + d_k) \end{aligned}$$

或

$$R = \frac{1}{m\lambda}(r_{k+m}^2 - r_k^2) = \frac{1}{m\lambda}(r_{k+m} - r_k)(r_{k+m} + r_k)$$

例 16 - 8 图 16 - 17 所示为测量油膜折射率的实验装置. 在平面玻璃片 G 上放一滴油,并扩展成圆形油膜. 在波长 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 的单色光垂直入射下,从显微镜 T 中可观察到油膜所形成的干涉条纹. 已知玻璃的折射率 $n_1 = 1.50$,油膜的折射率 $n_2 = 1.20$. 问:当油膜中心最高点与玻璃片的上表面相距 $h = 800 \text{ nm}$ 时,干涉条纹是如何分布的?可看到几条明条纹?明纹所在处的油膜厚度为多少?油膜中心点的明暗程度如何?

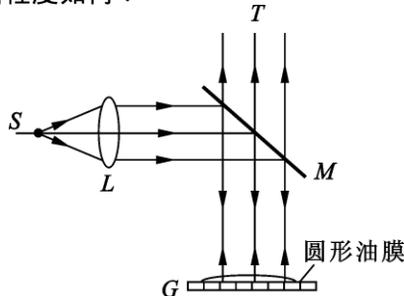


图 16 - 17

解 测量的原理与牛顿环和劈尖干涉测量的原理是类似的. 所不同的是, 该实验中光在空气—油及油—玻璃的交界面上反射时均有相位的突变, 因此产生明纹处油膜的厚度 e 满足的条件为

$$2n_2e = k\lambda, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

即
$$e = \frac{k\lambda}{2n_2}$$

由此可得 $k=0$ 时 $e_0=0$ $k=1$ 时 $e_1=2.5 \times 10^2 \text{ nm}$ $k=2$ 时 $e_2=5.0 \times 10^2 \text{ nm}$ $k=3$ 时 $e_3=7.5 \times 10^2 \text{ nm}$ $k=4$ 时 $e_4=1.0 \times 10^3 \text{ nm}$; ...

由于油膜厚度相同的地方干涉情况相同, 所以从显微镜中观察到的干涉条纹为明暗相间的同心圆环. 当 $h=800 \text{ nm}$ 时, 可观察到四条明条纹 ($k=0, 1, 2, 3$). 油膜外缘处 $e=0$, 为零级明纹中心, 油膜中心处 $e=h=800 \text{ nm}$, 其明暗程度介于明纹最亮和暗纹最暗之间.

§ 16 - 5 迈克耳孙干涉仪

干涉仪是根据光的干涉原理制成的精密测量仪器, 它可精密地测量长度的微小变化. 干涉仪的种类很多, 这一节我们介绍典型的双光束干涉仪——迈克耳孙(A. A. Michelson)干涉仪.

迈克耳孙干涉仪的原理如图 16 - 18 所示. M_1 和 M_2 是两片精密磨光的平面反射镜, 其中 M_2 用螺旋测微计控制, 可在支轨道沿镜面法线方向前后移动, 而 M_1 是固定的, M_1 和 M_2 相互垂直放置. G_1 和 G_2 是两块材料相同、厚度均匀且相等的平行玻璃板(要求非常严格, 一般是将一整块玻璃板磨成严格平行的光学平面, 然后将其分割成完全相同的两块). 玻璃板 G_1 的背面镀有半透明薄银层, 其作用使照射在 G_1 上的光分成强度几乎相等的透射光和反射光. G_1 和 G_2 两平行玻璃板与 M_1 和 M_2 成 45° 角放置.

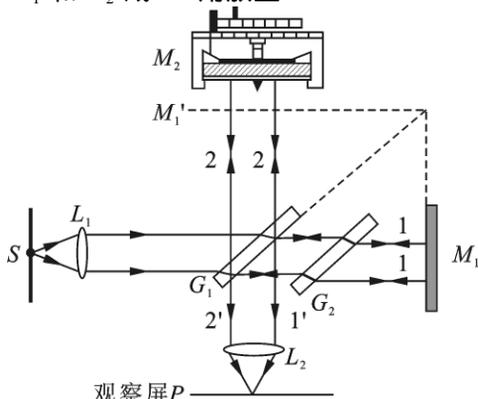


图 16 - 18 迈克耳孙干涉仪示意图

从单色光源 S 发出的一束光线经透镜 L_1 后水平照射到 G_1 上(与 G_1 成 45° 角入射)其背面的半透明膜使光线分成能量几乎相等的透射光线 1 和反射光线 2,它们分别垂直入射到 M_1 和 M_2 上.光线 1 透过 G_2 经 M_1 反射后再次透过 G_2 到达 G_1 处.在 G_1 处被反射后成为光线 1',向观察屏 P 处传播;光线 2 经 M_2 反射后回到 G_1 ,透过 G_1 后成为光线 2',也传向观察屏 P.显然光线 1'和 2'是相干光,在观察屏处可观测到干涉条纹.由于光线 2 先后三次穿过 G_1 到达观察屏,而光线 1 到达观察屏时只穿过了 G_1 一次,为了减小光线 2 因多次透过玻璃板 G_1 所形成的光线 2'与光线 1'形成过大的光程差,因此才设计了厚度和 G_1 完全相同的玻璃板 G_2 , G_2 起到了补偿光程的作用,所以常称玻璃板 G_2 为补偿板, G_1 常称为分光板.

对于观察者来说,来自 M_1 和 M_2 的反射光看上去是来自 M_1' 和 M_2 的反射光, M_1' 是平面镜 M_1 经 G_1 镀膜面所成的虚像,因而干涉产生的图样和由 M_1' 和 M_2 之间的空气薄膜产生的干涉图样相同.当 M_1 和 M_2 严格相互垂直时, M_1' 和 M_2 就严格平行,它们之间的空气薄膜厚度均匀,这时可以观察到等倾干涉条纹,调节可移动的 M_2 做微小移动,视场中的干涉条纹将发生变化, M_2 镜每移动 $\lambda/2$ 的距离,视场中心就会向外“涌出”或向中心“陷入”一个干涉环纹;当 M_1 和 M_2 不严格垂直时, M_1' 和 M_2 就不严格平行,它们之间形成空气劈尖,这时可以观察到等厚干涉条纹, M_2 镜每移动 $\lambda/2$ 的距离,就有一个明条纹从视场中移过,因此视场中明条纹移动的数目 N 与 M_2 镜移动距离的关系式是

$$d = N \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (16 - 20)$$

由式(16 - 20)可以看出,已知 M_2 镜移动的距离和视场中干涉条纹移过的数目 N ,就可以计算得单色入射光的波长;同样,已知波长和视场中移过的条纹数目 N ,就可以计算 M_2 镜移动的距离.光波的波长数量级为 10^{-7} m,所以用迈克耳孙干涉仪测量变化的距离的精度是很高的.

迈克耳孙干涉仪的测量结果精度很高,可以精确到与波长相比拟,应用很广.迈克耳孙用他设计的干涉仪最早以光的波长测定了国际标准米尺的长度,光的波长是物质的基本属性之一,由此可建立一个永久不变的标准.此外,迈克耳孙还用干涉仪研究光谱的精细结构,推动了原子物理和计量科学的发展,为此,迈克耳孙获得了 1907 年诺贝尔物理学奖.后来,人们又以迈克耳孙干涉仪为原型,研制了多种形式的干涉仪,用来测定物质的折射率和杂质浓度,以及检查光学元件的质量等.

§ 16 - 6 光的衍射

一、光的衍射现象

波在传播过程中遇到障碍物时,能够绕过障碍物的边缘前进,到达了按直线传播不能到达的地方,波这种偏离直线传播的现象称为波的衍射现象(或绕射现象).衍射和干涉一样,也是波动的主要特征之一.光是一种电磁波,也存在衍射现象.如图 16 - 19 所示,光源 S 发出的光照射到圆孔上,当圆孔的直径比较大时,在接收屏上显示的是一亮度均匀的圆光斑,如图 16 - 19(a)所示;如果将圆孔逐渐缩小,接收屏上的光斑也相应缩小,如图 16 - 19(b)所示;当圆孔的直径变得很小,与入射光的波长可相比拟时,接收屏上的光斑不再继续缩小,反而变大,并且形成明暗相间的圆环,如图 16 - 19(c)所示.类似的情况很多,例如把一根金属细线(作为对光的障碍物)放在光源和接收屏之间,在“影子”的中央应该是最暗的地方,实际观察到的却是明亮的.这种光绕过障碍物的边缘而进入几何阴影内传播,并且在接收屏上出现光强分布不均匀的现象,叫做光的衍射.

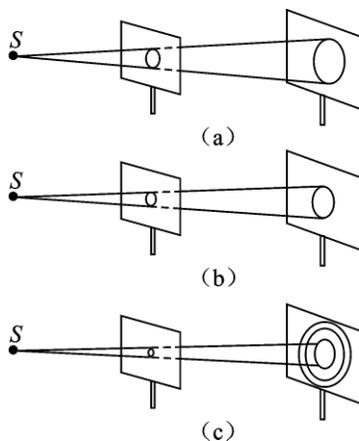


图 16 - 19 光通过不同的小孔

光的衍射现象日常生活中很少见到,衍射现象能否出现,主要决定于障碍物的线度和入射光波长大小的对比.光波的波长较小,数量级在 10^{-7} m 左右,当障碍物或孔隙的尺寸比入射光的波长大得多时,光沿直线传播;当障碍物或孔隙的尺寸与光波波长可以比拟时,衍射现象就明显地显现出来.声波的波长可达几十米,无线电波的波长可达几百米,它们遇到的障碍物通常小于其波长,因此它们在传播过程中绕过障碍物发生衍射的现象比较常见.一般的障碍物或孔

隙的尺寸都大于数量级为 10^{-7} m 的光波的波长,所以光通常表现为沿直线传播,发生衍射的现象则一般较少见到.

二、惠更斯 - 菲涅耳原理

前面我们曾介绍了惠更斯原理,应用惠更斯原理可以定性地解释光的衍射现象,但却不能定量分析衍射图样中光强的分布.

菲涅尔发展了惠更斯原理,补充了描述子波的相位和振幅的定量表达式,并在此基础上提出了子波相干叠加的原理,此原理称为惠更斯 - 菲涅耳(Huygens—Fresnel Principle)原理,此原理可简述为:波阵面上的每一点都可看成是产生子波的子波源,从同一波阵面上各点发出的子波是相干波,这些子波在空间某点相遇时,产生相干叠加.

惠更斯 - 菲涅耳原理中关于子波的振幅和相位可表述如下.如图 16 - 20 所示,波阵面 S 上每个面积元 dS 都可看成子波波源,则(1)波阵面是等相位面,可认为面积元 dS 上各点所发出的子波都具有相同的初相位,可设为 0;(2)子波在空间某点 P 处所引起的振幅与距离 r 成反比;(3)从面积元 dS 所发出的子波在 P 点的振幅正比于面积元 dS ,且与倾角 θ 有关,其中 θ 为 dS 的法线 e_n 与 dS 到点 P 的连线 r 之间的夹角.(4)子波在点 P 的相位由光程差 $\delta = nr$ 决定,即 $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi nr}{\lambda}$.

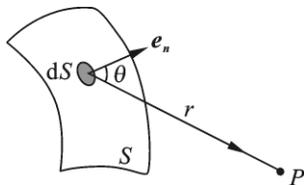


图 16 - 20 子波相干叠加

据此可得,面积元 dS 发出的子波在点 P 的振动可表示为(设 $t=0$ 时,波阵面 S 的相位为零)

$$dE = Ck(\theta)\frac{dS}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi nr}{\lambda}\right)$$

式中 C 为比例系数, $k(\theta)$ 为倾斜因子,随 θ 角的增大而减小,沿原波传播方向的子波振幅最大,当 $\theta=0$ 时 $k(\theta)$ 可取 1,子波不能向后传播,即当 $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ 时 $k(\theta) = 0$.

波阵面前方点 P 的振动是 S 面上所有面积元 dS 发出的子波在该点振动的叠加,所以

$$E = \int_s dE = C \int_s \frac{k(\theta)}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi nr}{\lambda}\right) dS \quad (16 - 21)$$

式(16 - 21)称为菲涅耳衍射积分.此公式较为复杂,只有在某些特殊条件下,积分可用代数加法或矢量加法代替.

三、菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射

根据观察方式的不同,光的衍射通常可分为两类.一类是光源或接收屏与衍射屏(孔或缝隙)的距离为有限远,此种衍射称为菲涅耳衍射或近场衍射,如图 16-21(a)所示.另一类是光源和接收屏与衍射屏(孔或缝隙)的距离为无限远,即衍射中的入射光和衍射光都是平行光,此种衍射称为夫琅禾费(J. Fraunhofer)衍射或远场衍射,如图 16-21(b)所示.在实验室中可用两个会聚透镜来实现夫琅禾费衍射.夫琅禾费衍射在理论分析上较为简单,而且在实际应用和理论研究中都十分重要,因此本教材只讨论夫琅禾费衍射.

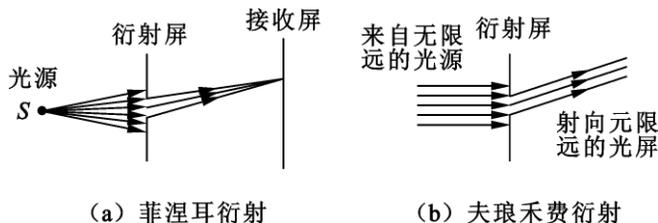
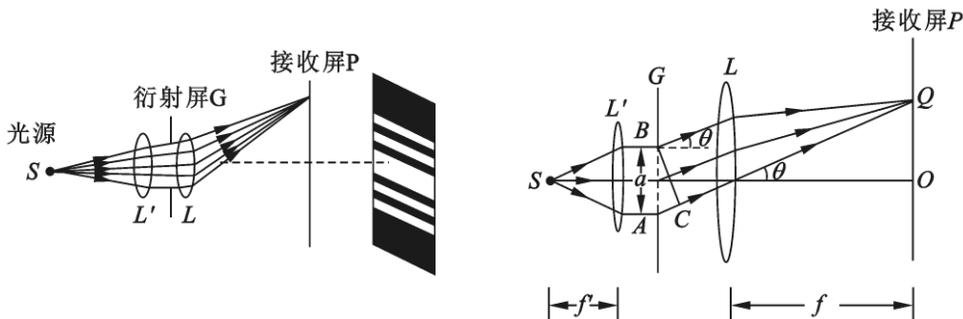


图 16-21 两类衍射

§ 16-7 夫琅禾费衍射

一、单缝衍射

夫琅禾费单缝衍射原理如图 16-22(a)所示,位于透镜 L' 焦平面上的单色线光源 S 发出的光,经透镜 L' 成为平行光,并照在开有单狭缝的衍射屏 G 上,透过单缝的光经透镜 L 会聚在位于透镜 L 焦平面上的接收屏 P 上,形成一组明暗相间的平行直条纹.



(a) 单缝衍射原理图

(b) 单缝衍射光路图

图 16-22 夫琅禾费单缝衍射

根据惠更斯-菲涅耳原理,单缝后接收屏上任一点的光振动是位于单缝处波阵面上所有子波波源发出的子波传到该点的振动的相干叠加.对于单缝衍射可用菲涅耳提出的波带法进行分析研究.图16-22(b)是夫琅禾费单缝衍射的光路图,单色平行光垂直照射宽度为 a 的狭缝 AB ,通过狭缝的光发生衍射,衍射光与狭缝所在平面法线的夹角叫做衍射角,图中用 θ 表示.衍射角 θ 相同的衍射光经过透镜 L 后会聚在焦平面上同一点 Q ,该点的光强就是由这些平行光相干叠加形成的.我们知道透镜 L 不产生附加的光程差,且平行的入射光在 AB 面是等相位的,所以,单缝 AB 两边缘处衍射光线之间的光程差为

$$\delta = \overline{AC} = a \sin\theta \quad (16-22)$$

菲涅耳在惠更斯-菲涅耳原理的基础上,提出了将波阵面分割成许多等面积的波带的方法.在单缝衍射中,把狭缝分割成一系列宽度相等的窄条带,并使相邻窄条带上的对应点(如每个窄条带的最上点、中点或最下点)发出的光在点 Q 的光程差都为入射光的半个波长,这样分割成的窄条带称为半波带,如图16-23所示.用这样的半波带来分析衍射图样的方法称为半波带法.由图16-23可知,相邻的两个半波带到达点 Q 的距离近似相等,它们所发出的子波在点 Q 的振幅可认为也是相等的,而相邻两个半波带上每一对应点所发出的子波的光程差总是 $\lambda/2$,或相位差总是 π ,所以,任何两个相邻半波带所发出的子波在点 Q 引起的振动将完全抵消.

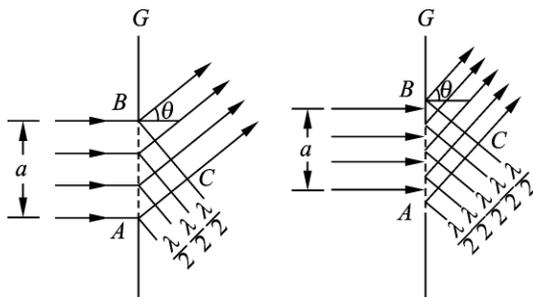


图16-23 单缝的菲涅耳半波带

当单缝处波阵面可分为偶数个半波带时,每对相邻的半波带所发出的光到达点 Q 引起的振动相互抵消,合振幅为零,因而出现暗条纹,而点 Q 所在处为该暗条纹的中心.当单缝处波阵面可分为奇数个半波带时,每对相邻的半波带所发出的光在点 Q 引起的振动相互抵消后,还剩下一个半波带发出的光没有被抵消,而在点 Q 合成,因而出现明条纹,点 Q 所在处为该明条纹的中心.若单缝处波阵面不能被恰好分为整数个半波带时,衍射光在点 Q 处叠加形成的条纹亮度介于最明和最暗之间.由式(16-22)可知,当 $\theta=0$ 时,所有衍射光的光程差为

零. 这些衍射光通过透镜 L 后会聚在透镜焦平面上, 这就是中央明条纹的中心位置. 所以, 夫琅禾费单缝衍射产生明暗条纹的条件分别为

$$\text{暗条纹中心} \quad a \sin \theta = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (16-23)$$

$$\text{明条纹中心} \quad a \sin \theta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (16-24)$$

式中 k 称为衍射级, 分别称为第一级暗(明)条纹, 第二级暗(明)条纹……. 式中正负号表示各级明暗条纹对称分布在中央明纹两侧.

需要说明的是, 式(16-23)和(16-24)均不包含 $k=0$ 的情况, 对于式(16-23)来说, $k=0$ 对应的是暗条纹, 但却是中央明纹的中心. 而对于式(16-24)来说, $k=0$ 虽然对应于一个半波带所形成的明条纹, 由后面讨论可知, 其仍处在中央明纹的范围内, 仅是中央明纹的一个组成部分, 形成不了单独的明条纹, 因而 $k \neq 0$.

由以上讨论可知, 中央明条纹是两个第一级暗条纹之间的区域, 中央明条纹的宽度最宽, 约为其他明条纹宽度的 2 倍. 也就是说, 中央明条纹的角宽度 θ_0 是两个第一级暗条纹之间的角距离. 设第一级暗条纹对应的衍射角为 θ_1 , 则

$$\theta_0 = 2\theta_1 = 2 \arcsin \frac{\lambda}{a}$$

θ_1 很小, $\sin \theta_1 \approx \theta_1$

$$\text{所以} \quad \theta_0 = 2\theta_1 = 2 \frac{\lambda}{a} \quad (16-25)$$

同理分析可得, 其余相邻暗条纹(或明条纹)的角宽度为

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{a} \quad (16-26)$$

若透镜 L 的焦距为 f , 则中央明条纹的线宽度为

$$l_0 = 2f \tan \theta_1 \approx 2f \sin \theta_1 = 2f \frac{\lambda}{a}$$

其余任意两相邻暗条纹间的距离, 即相应明条纹的宽度为

$$\Delta l = \theta_{k+1} f - \theta_k f = \Delta \theta \cdot f = \frac{\lambda}{a} f$$

单缝衍射的相对光强分布如图 16-24 所示. 由图可以看出, 单缝衍射的光强分布并不是均匀的. 中央明纹宽度最宽, 亮度最大, 其他明条纹的光强迅速下降. 这是因为随着衍射角 θ 的增大, 半波带数 N 增大, 每个半波带所占有的面积变小, 也就是说, 未被抵消的半波带面积变小. 一方面是 θ 增大, 另一方面是半

波带面积减小,根据惠更斯-菲涅耳原理,其他明条纹的光强将迅速下降.

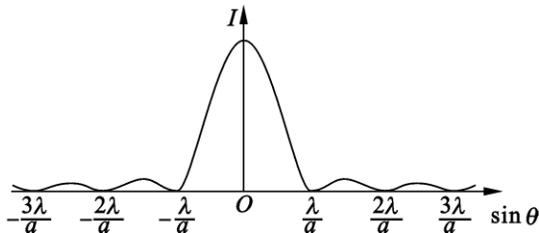


图 16-24 单缝衍射的光强分布

由以上各式可以看出,衍射图样中各级条纹的位置与入射光的波长有关,条纹宽度正比于波长 λ ,反比于缝宽 a .由此可见,如果用白光作光源,白光中不同波长的光产生的衍射图样除中央明纹中心外将彼此错开,于是观察到的衍射图样其中央明纹的中心仍是白色的,但由于条纹的宽度是波长的函数,所以中央明纹的边缘伴有彩色,其他各级明条纹呈现出逐次重叠展开的彩色条纹.

缝的宽度 a 对衍射条纹的分布是有影响的,由于相邻暗条纹(或明条纹)的角宽度为 $\Delta\theta = \lambda/a$,因此对于一定波长的光来说, a 越小,相邻暗(明)条纹的角宽度越大,衍射就越显著;反之, a 越大,衍射条纹就越密集,衍射就越不明显.若 $a \gg \lambda$, $\Delta\theta$ 将变得很小,表现为各级衍射条纹向中央条纹靠拢,使得衍射条纹密集得无法分辨,只能观察到一条明纹,它就是线光源 S 所成的几何光学的像,这时光可看成是直线传播的.由此可见,光的直线传播现象,是光的波长较通光孔或狭缝(或障碍物)的线度小很多时,衍射现象不显著的情形.

单缝衍射和本章第3节讨论的杨氏双缝干涉条纹分布是不相同的,干涉和衍射条纹都是明暗相间的条纹,但在分布上有间距均匀与相对集中的不同.杨氏双缝干涉条纹是等宽等亮度分布的,而单缝衍射条纹则是中央明纹既宽又亮,两侧的明条纹窄而较暗;单缝衍射的条纹条件和杨氏双缝干涉的条纹条件在形式上也正好是相反的.另外,讨论杨氏双缝干涉和单缝衍射时,我们都应用了光的叠加规律,它们都是光波相干叠加的结果,从本质上讲二者是没有区别的,只是参与干涉叠加的对象有所区别.一般而言,干涉是指分离、有限多的光束的相干叠加,而衍射是指连续的波阵面上无穷多子波源发出的光波的相干叠加,前者是粗略的,后者是精细的叠加.这只是一般的说法,实质上二者常出现在同一现象中.干涉中有衍射,衍射中也有干涉.如杨氏双缝干涉条纹的形成,实际上是两个狭缝发出的光束的相互干涉和每个狭缝本身发出的光的衍射的综合效果.

例 16-9 在单缝夫琅禾费衍射中,缝宽 $a = 5\lambda$,缝后透镜焦距 $f = 40\text{ cm}$,

试求中央明条纹和第一级明条纹的宽度.

解 由式(16 - 23)对第一和第二级暗纹中心有

$$a \sin \theta_1 = \lambda, a \sin \theta_2 = 2\lambda$$

因此第一级和第二级暗纹中心在屏上的位置分别为(以接收屏对称中心为坐标原点)

$$x_1 = f \tan \theta_1 \approx f \sin \theta_1 \approx f \frac{\lambda}{a} = 40 \times \frac{\lambda}{5\lambda} = 8 \text{ cm}$$

$$x_2 = f \tan \theta_2 \approx f \sin \theta_2 \approx f \frac{2\lambda}{a} = 40 \times \frac{2\lambda}{5\lambda} = 16 \text{ cm}$$

由此可得中央明条纹的宽度为

$$l_0 = 2x_1 = 2 \times 8 = 16 \text{ cm}$$

第一级明纹的宽度为

$$\Delta l_1 = x_2 - x_1 = 16 - 8 = 8 \text{ cm}$$

二、圆孔衍射

光通过小圆孔时也会象通过狭缝一样产生衍射现象. 光学仪器大多都是由透镜组成的, 透镜就相当于一个透光的小圆孔, 而且大多是通过平行光或近似平行光成像的, 在成像问题上常要涉及圆孔衍射, 所以讨论夫琅禾费圆孔衍射具有重要的意义.

将夫琅禾费单缝衍射装置中的狭缝用小圆孔代替, 其他条件不变, 就成为观察夫琅禾费圆孔衍射的装置. 在接收屏上看到的是圆孔衍射图样, 如图 16 - 25(b)所示. 中央是一个较亮的圆斑, 外围是一组同心的明暗相间的圆环, 由第一级暗环所围的中央光斑, 称为爱里(G. B. Airy)斑.

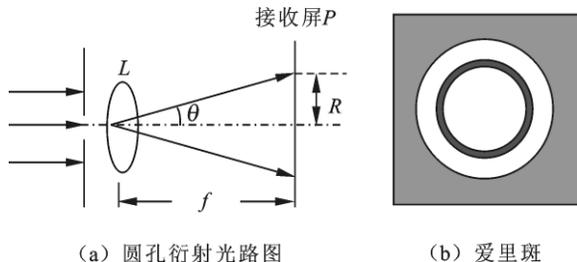


图 16 - 25 圆孔衍射

夫琅禾费圆孔衍射和单缝衍射是类似的, 圆孔衍射的光强分布也是不均匀的, 中央圆斑光强最大, 它集中了全部衍射光能量的 83.8% , 其余各级明环光强迅速减小. 圆孔的直径大小对衍射图样的影响和单缝衍射中缝宽对衍射图样的影响是相同的. 由理论计算可得

第一级暗环的衍射角 θ_1 满足

$$\sin\theta_1 = 0.16 \frac{\lambda}{r} = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

式中 r 和 d 是圆孔的半径和直径,可以看出,与单缝衍射第一级暗条纹角宽度 $\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$ 相比,只是比例系数不同而已.

爱里斑的角半径就是第一级暗环对应的衍射角,即

$$\theta_1 \approx \sin\theta_1 = 0.61 \frac{\lambda}{r} = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (16-27)$$

若透镜的焦距为 f ,则由图 16-25(a)可得爱里斑的半径 R 为

$$R = f \tan\theta_1$$

θ_1 很小, $\tan\theta_1 \approx \sin\theta_1 \approx \theta_1$

所以 $R = f \tan\theta_1 = 0.61 \frac{\lambda}{r} f = 1.22 \frac{\lambda}{d} f \quad (16-28)$

三、光学仪器的分辨率

从几何光学的观点来看,物体通过光学仪器成像时,每一物点就有一个对应的像点,从这个意义上说,一个微小的物体或远处的物体,只要选择合适的光学仪器,总能放大到清晰可见的程度.然而,光学仪器中常用的透镜、光阑等都相当于一个透光的小圆孔,当光透过这些小圆孔时,会发生衍射现象.这样,象点不再是一个几何点,而是一个主要部分是爱里斑的圆孔衍射图样.当然,光学仪器中所用的透镜或光阑等透光圆孔的孔径比波长大多,不是衍射实验中的可与波长相比拟的小孔径,但孔径毕竟有限,像点仍是一个弥散的小亮斑,它的中心位置就是几何光学中像点的位置.如果两个物点相距很近,并且它们形成的衍射圆斑又比较大,以至两个圆斑大部分重合而混为一体,那么就不能分辨出是两个物点了,如图 16-26(c)所示.如果圆斑足够小,或两个圆斑相距足够远,那么两个圆斑虽有一些重叠,但重叠部分的光强较爱里斑中心处的光强要小得多,此时仍能分辨出是两个物点,如图 16-26(a)所示.

如何确定能否分辨的定量标准呢?德国物理学家瑞利(L. Rayleigh)提出了一个标准:如果一个物点衍射图样的中央最亮处刚好与另一个物点衍射图样的第一个暗环相重合,如图 16-26(b)所示,此时认为两个物点恰好能被人眼或光学仪器所分辨,这一标准称为瑞利判据(Rayleigh criterion).此时两个物点的连线上中点处的光强约为每个爱里斑中心光强的 80%,对于人眼来说恰能分辨出是两个像点.

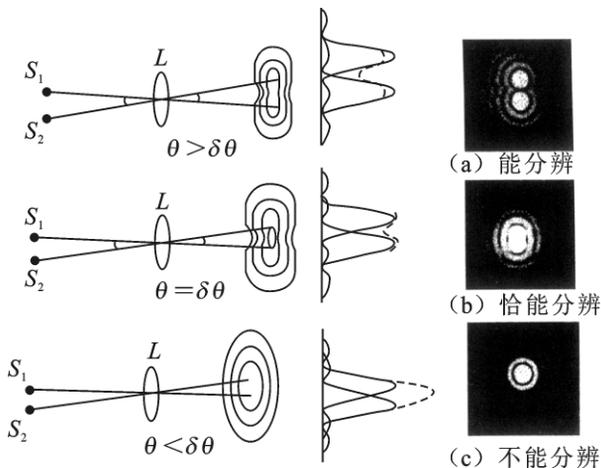


图 16 - 26 光学仪器的分辨本领

根据瑞利判据可定量分析光学仪器的分辨本领. 以透镜为例, 恰能分辨时两物点对透镜光心的张角称为最小分辨角, 用 $\delta\theta$ 表示. 如图 16 - 26(b) 所示. 最小分辨角也称为角分辨率, 它的倒数称为分辨率, 常用 R 表示.

对于夫琅禾费圆孔衍射来说, 瑞利判据最小分辨角 $\delta\theta$, 就是第一级暗环的衍射角, 即

$$\sin\delta\theta = \sin\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

即
$$\delta\theta = \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

分辨率为

$$R = \frac{1}{\delta\theta} = \frac{d}{1.22\lambda} \quad (16 - 29)$$

由式(16 - 29)可以看出, 分辨率 R 的大小与光学仪器的透光孔径和入射光波长有关. 对于望远镜, 通过增大物镜的孔径来提高其分辨率. 1990 年发射的哈勃太空望远镜物镜的直径达到 2.4 m, 而现在最大的反射式望远镜的直径已达到 10 m 以上. 至于显微镜, 则采用极短波长的光来提高其分辨率. 光学显微镜一般使用波长为 400 nm 的紫光照射, 分辨距离为 200 nm 左右. 放大倍数约为 2 000. 由于电子具有波动性, 在 12 万伏加速电压下, 电子束波长可达 0.1 nm 数量级, 所以利用电子波动性成像的电子显微镜最小分辨距离可达几个纳米, 放大倍数最高可达几百万.

例 16 - 10 通常亮度下, 人眼的瞳孔直径约为 3 mm, 则人眼的最小分辨角是多少? 放在远处的两根细丝之间的距离为 4.0 mm, 则人在多远处恰能分辨

出是两根细丝？

解 人的眼睛相当于一个透镜，且人眼最敏感的光波波长为 550 nm，所以人眼的最小分辨角为

$$\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d} = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{3.0 \times 10^{-3}} = 2.2 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

设恰能分辨出两根细丝间时人与细丝间的距离为 S，则两细丝相距为 l，两细丝对人眼张角 θ 为

$$\theta = \frac{l}{S}$$

恰能分辨时

$$\delta\theta = \theta$$

所以

$$S = \frac{l}{\delta\theta} = \frac{4.0 \times 10^{-3}}{2.2 \times 10^{-4}} = 18.2 \text{ m}$$

§ 16 - 8 衍射光栅

一、光栅

由大量等宽等间距的平行狭缝构成的光学器件称为光栅 (grating)。常用的光栅是在玻璃上刻出一系列等宽等间距的平行刻痕，刻痕处因漫反射而相当于不透光部分，刻痕之间的光滑部分相当于透光的狭缝，这种光栅称为透射光栅。在光洁度较高的金属表面刻画出一系列等宽等间距的平行刻痕，刻痕之间的表面可以反射光，这种光栅称为反射光栅。

简易的光栅可用照相的方法制作，印有一系列平行且等间距的黑色条纹的照相底片就是透射光栅。实用的光栅在每毫米内有成千上万条刻痕，每毫米内的刻痕越多，光栅质量就越好。在单缝衍射中，若增大狭缝的宽度，虽然明条纹的亮度会有增加，但相邻明条纹的间距将随之变窄；若减小狭缝宽度，条纹间距虽可加宽，但明条纹的亮度却显著减小。这两种情况下，要准确地测量条纹宽度进而测定入射光的波长就显得较为困难了。光栅相当于很多条单缝，利用光栅可得到既明亮又分得很开的衍射条纹，并且可以对复色入射光进行光谱分析。

二、光栅衍射条纹的形成

设透射光栅的总条数为 N，缝宽为 a，缝间不透光部分的宽度为 b，两者之和 $d = a + b$ 称为光栅常数。单色平行光垂直照射在光栅上，仅靠光栅后面放一透镜 L，在透镜的焦平面上放置接收屏 P，如图 16 - 27 所示。透过光栅每个狭缝的光都要发生衍射，并且每个狭缝的衍射图样通过透镜后完全重合，而通过光栅不同狭缝的光还要发生干涉，所以说，光栅的衍射实际上是每一个狭缝的衍射和

不同狭缝间干涉叠加的总效果.

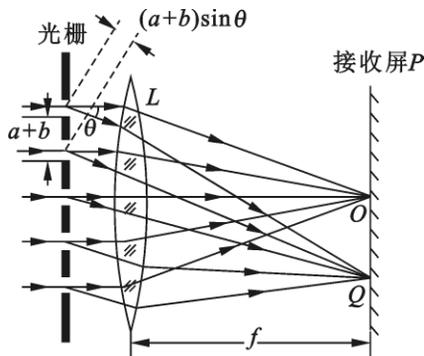


图 16 - 27 光栅衍射

对应于某一衍射角 θ , 任意两相邻狭缝发出的光到达接收屏上点 Q 的光程差均为

$$\delta = (a + b)\sin\theta$$

(1) 明条纹条件 若相邻两狭缝发出的光束间的相位差为 2π 的整数倍, 或者说相邻两狭缝间的光程差为波长的整数倍, 则 N 个狭缝的光束在点 Q 干涉相长, 合振动振幅最大, 产生明条纹. 所以明条纹的条件是

$$(a + b)\sin\theta = \pm k\lambda \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (16 - 30)$$

式(16 - 30)称为光栅方程. 满足光栅方程的明条纹称为主明纹或主极大, k 称为主极大级数. $k=0$ 时是中央明条纹, $k=1, 2, 3, \dots$ 分别称为第一级、第二级、第三级……主极大明条纹. 式中正负号表示各级主极大明条纹对称分布在中央明条纹两侧.

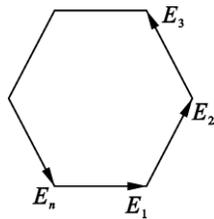
(2) 暗条纹条件 如果在点 Q 处光振动的合振幅为零, 将出现暗条纹. 设相邻两狭缝发出的光束间的相位差为 $\Delta\varphi$, 分振动的振幅矢量分别为 $E_1, E_2, E_3, \dots, E_N$. 要使这 N 个矢量叠加后完全相消, 意味着它们恰好组成如图 16 - 28 所示的闭合多边形, 此时合振幅为零, 产生暗条纹. 相位差与光程差的关系为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

N 个矢量构成闭合多边形时有

$$N\Delta\varphi = \pm k' \cdot 2\pi \quad (k' = 1, 2, 3, \dots)$$

用光程差可表示为



16 - 28 N 个光振幅叠加

$$N\delta = \pm k'\lambda$$

$$\text{即} \quad (a+b)\sin\theta = \pm k' \frac{\lambda}{N} \quad (k' = 1, 2, 3, \dots)$$

应该注意的是,上式讨论中包含了 $\Delta\varphi = \pm k \cdot 2\pi$ 或 $\delta = \pm k\lambda$ ($k=0, 1, 2, \dots$)的情况,而这些情况是产生主明纹的条件,所以应该舍去,即将 $k' = kN$ 的情况舍去.

所以光栅衍射的暗条纹条件为

$$(a+b)\sin\theta = \pm k' \frac{\lambda}{N}, (k' = 1, 2, 3, \dots) \text{且 } k' \neq kN (k \text{ 为整数}) \quad (16-31)$$

也就是说,这里 k' 不含 $N, 2N, \dots$ 诸值,因为这些已属于式(16-30)光栅方程所规定的衍射主明纹的情形了.由式(16-30)可以看出两相邻主明纹之间有 $N-1$ 条暗条纹.

(3)次明纹 相邻的两主明纹之间有 $N-1$ 条暗纹,而在两暗纹之间必定有一明条纹,推知两相邻主明纹之间有 $N-2$ 条明条纹.这些地方的振动矢量并未完全抵消,只是部分抵消,但计算表明这些明条纹的光强度仅为主明纹光强度的4%左右,所以称为次明纹或次极大.

综上所述,由于光栅的狭缝总数 N 很大,两相邻主明纹之间的暗纹和次明纹数目很多,两相邻主明纹之间实际上是一片暗区,明条纹明显分开且很细,光强集中在很小区域内,明纹变得很亮,光栅的衍射图样是在几乎黑暗的背景上出现了一系列分得很开的又细又亮的明条纹,如图16-29所示.



图 16-29 光栅衍射图样

我们知道,光栅的衍射是各狭缝的衍射与狭缝间的干涉共同作用的结果.图16-30给出了光强度分布之间的关系,其中图16-30(a)给出了单缝衍射图样的光强分布,图16-30(b)给出了多缝干涉图样的光强分布,多缝干涉和单缝衍射共同决定的光栅衍射的总光强分布如图16-30(c)所示.由图可以明显看到各级主明纹的光强受单缝衍射光强的调制.在图16-30(c)中, $k = \pm 3, \pm 6$ 等点满足光栅方程的主明纹条件 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$,该处应为主明纹.但由于这些地方又同时满足单缝衍射的暗纹条件 $a\sin\theta = k'\lambda$ [如图16-30(a)],单缝

衍射在此处光强为零,所以光栅衍射的主明纹在此处并没有出现,这种现象称为缺级现象.也就是说,在某个衍射角 θ 方向上,首先必须存在有每个狭缝的衍射光,然后 N 条衍射光才能产生干涉,即使 θ 满足了光栅方程使干涉结果为一主明纹,但若该 θ 同时又满足单缝衍射的暗条纹条件,因而在此方向根本就没有衍射光,那么结果就只能是暗条纹了.

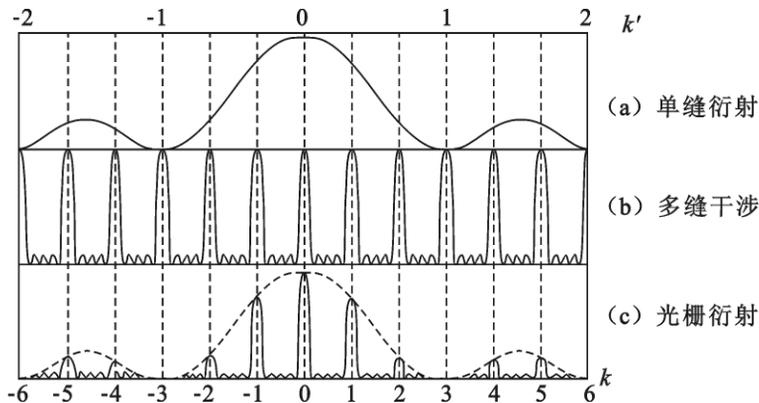


图 16-30 光栅衍射的光强分布

干涉主极大满足

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

衍射极小满足

$$a\sin\theta = \pm k'\lambda \quad (k'=1, 2, 3, \dots)$$

如果某一行射角同时满足以上两方程,则 k 级主极大缺级.将以上两式相除得缺级级数 k 为

$$k = \pm k' \frac{a+b}{a} = \pm k' \frac{d}{a} \quad (k'=1, 2, 3, \dots) \quad (16-32)$$

由式(16-32)可知,缺级的级数由光栅常数 d 和缝宽 a 决定.如果光栅常数 d 与缝宽 a 构成整数比时,就会发生缺级现象.若 $(a+b)$ 与 a 之比为3:1,则在 k 与 k' 之比为3:1的位置处就会出现缺级,即在 $k=3, 6, 9, \dots$ 这些应该是主明纹出现的地方,实际上却观察不到它们,出现缺级.

例 16-11 用波长为 $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ 的单色平行光,垂直照射每毫米刻有500条刻痕的光栅.问最多能看到第几级条纹?总共有多少条明条纹?

解 由光栅方程 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$ 得

$$k = \frac{a+b}{\lambda} \sin\theta$$

可见 k 的可能最大值相应于 $\sin\theta = 1$.由题意可得光栅常数为

$$d = a + b = \frac{1}{500} = 2 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

由此可得

$$k = \frac{2 \times 10^{-3}}{589.3 \times 10^{-6}} = 3.4$$

k 只能取整数, 故取 $k=3$, 即单色平行光垂直入射时能看到第三级条纹. 总共有 $2k+1=7$ 条明条纹.

三、衍射光谱

上面讨论的是单色光经光栅衍射后形成的衍射图样. 如果用白光照射光栅, 各种波长的单色光将各自产生衍射, 由光栅方程可知, 对于给定的光栅, 各级主明纹衍射角的大小与入射光的波长有关, 波长短的衍射角小, 波长长的衍射角大. 所以紫光衍射条纹距中央明纹最近, 红光衍射条纹距中央明纹最远. 这样, 除中央明条纹仍为各色光混合的白光外, 其两侧各级明纹都是由紫到红对称排列的彩色光带. 把这种光栅衍射产生的按波长排列的谱线称为衍射光谱, 如图 16-31 所示. 由图可看出, 级数较高的光谱中有部分谱线是彼此重叠的.

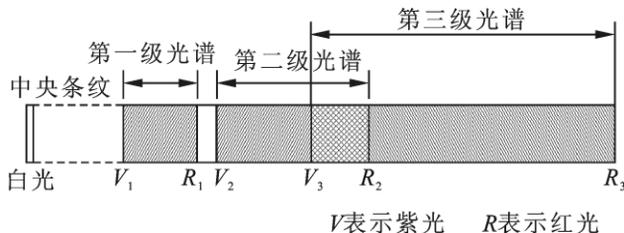


图 16-31 衍射光谱

每种物质都有自己特定的谱线, 通过物质的光谱可研究物质的结构, 而原子、分子的光谱是研究原子、分子结构及运动规律的主要途径. 光谱分析是现代物理学重要的研究手段, 广泛应用于工程技术分析、鉴定等领域.

光栅满足怎样的条件才能把不同波长的两条谱线分开呢? 为此引入光栅的分辨本领(即分辨率). 光栅的分辨本领是指把波长靠得很近的两条谱线分辨清楚的本领, 是表征光栅性能的主要技术指标. 通常把光栅恰能分辨的两条谱线的平均波长 λ 与这两条谱线的波长差 $\delta\lambda$ 之比定义为光栅的色分辨本领, 用 R 表示, 即

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

一个光栅能分开的两波长的波长差 $\delta\lambda$ 越小, 其分辨本领就越大. 由瑞利判据知, 一条谱线的中心恰与另一条谱线距谱线中心最近的一个极小重合时, 两

条谱线恰能分辨. 也就是说, 对于 k 级光谱中波长为 λ 和 $\lambda + \delta\lambda$ 的两条谱线而言, 波长为 $\lambda + \delta\lambda$ 的 k 级主极大与波长为 λ 的第 $kN + 1$ 级极小重合.

k 级主极大满足的条件为

$$(a + b)\sin\theta = k(\lambda + \delta\lambda)$$

$kN + 1$ 级极小满足的条件为

$$(a + b)\sin\theta' = (kN + 1)\frac{\lambda}{N}$$

两者重合 $\theta = \theta'$, 因而得

$$k(\lambda + \delta\lambda) = \frac{(kN + 1)\lambda}{N}$$

化简有
$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$$

所以光栅的色分辨本领为

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN \quad (16 - 33)$$

由此可知, 光栅的色分辨本领与光栅的狭缝数 N 和光谱级次 k 有关, 这就是为什么光栅在单位长度上的刻痕越多, 光栅质量就越好的原因.

§ 16 - 9 X 射线的衍射

一、X 射线的衍射

X 射线是德国实验物理学家伦琴 (W. K. Rontgen) 在 1895 年发现的, 所以 X 射线又称为伦琴射线. 产生 X 射线的实验装置如图 16 - 32 所示. 在一个真空管内, K 是发射电子的热阴极, A 是由钨、钨或铜等金属制成的阳极, 也称对阴极. 两极之间加有数万伏的高电压, 使热阴极射出的电子在强电场作用下被加速, 高速电子撞击阳极产生 X 射线.

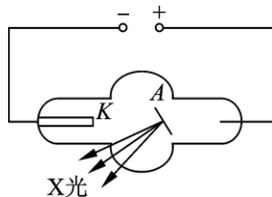


图 16 - 32 X 射线管

X 射线在本质上与可见光一样是电磁波, 但它的波长很短, 约在 0.01 nm 到 10 nm 之间. 既然 X 射线是电磁波, 就应该有干涉和衍射等现象, 但是由于它的波长非常短, 用普通的光栅观察不到其衍射现象, 也无法用机械方法制造出适用于 X 射线衍射的光栅.

1912 年德国物理学家劳厄 (M. V. Laue) 提出, 晶体是由一组有规则排列的微粒组成的, 各微粒之间的间隔与 X 射线波长的数量级相同, 它或许能构成一种适合于 X 射线衍射用的三维空间光栅. 据此劳厄进行了实验, 并成功地获得

了 X 射线的衍射图样,从而证实了 X 射线是电磁波,同时也证实了晶体内原子是等间隔排列的. 劳厄的实验装置如图 16-33(a)所示. 图中 PP' 是带有小孔的铅板, C 为晶体, E 为照相底片. 实验时 X 射线通过铅板 PP' 上的小孔投射到薄晶片上,在照相底片上发现了衍射形成的衍射斑点,此斑点又称劳厄斑点,如图 16-33(b)所示.

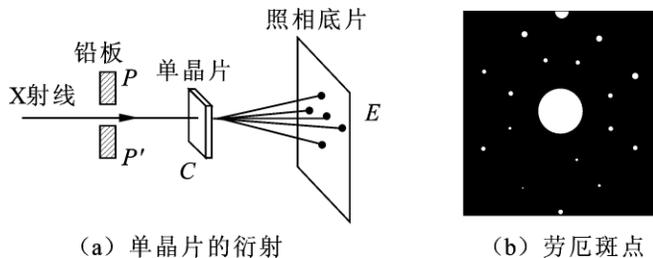


图 16-33 X 射线衍射

二、布拉格公式

劳厄通过实验获得了 X 射线的衍射图样,但在进行分析时涉及到了空间光栅,定量分析十分复杂. 1931 年英国物理学家布拉格父子 (W. H. Bragg, 1862 ~ 1942 和 W. L. Bragg, 1890 ~ 1971) 提出了一种新的研究方法,即把 X 射线衍射图样看作是由 X 射线对晶体每一个点阵平面组的相干反射形成的,此方法的原理和定量计算都

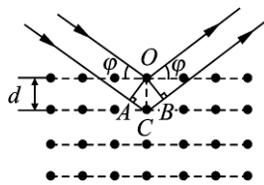


图 16-34 布拉格反射

较为简单. 布拉格父子把空间点阵简化,想像晶体是由一系列平行的晶面 (crystal Ptane) (即原子层) 组成的,如图 16-34 所示. 设各晶面之间的距离为 d , 当一束波长为 λ 的单色平行 X 射线以掠射角 φ 入射到晶面时,一部分被表面晶面散射,其余的被晶体内部的晶面散射,在符合反射定律的方向上射线的强度最大. 由图可得,相邻两晶面间反射光线的光程差为

$$\delta = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d \sin\varphi$$

那么,各层散射射线干涉加强形成亮点的条件为

$$2d \sin\varphi = k\lambda \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

上式称为布拉格公式.

X 射线衍射的应用主要在以下两个方面:一是已知晶面间距 d ,测出 X 射线衍射的掠射角 φ ,由布拉格公式可计算出 X 射线的波长,从而研究 X 射线谱,进而研究原子的结构. 另一方面,若用波长已知的 X 射线照射某种晶体的晶面,由掠射角 φ 可以推算出晶面间距 d ,由此可以研究晶体的结构. 这两方面的研究在科学和工程技术上有着广泛的应用.

§ 16 - 10 光的偏振

前面分别讨论了光的干涉和衍射,这两种现象说明了光的波动性,但不能说明光波就是横波.也就是说,不管是横波还是纵波,都可以产生干涉和衍射现象.而光的偏振现象有力地证实了光波是横波.

一、自然光和偏振光

光波是电磁波,光波的振动矢量 E (又称电矢量或光矢量)与光的传播方向垂直,因此光波是横波.光波是横波只说明振动矢量 E 与光的传播方向垂直,在与传播方向垂直的平面内还可能有不同的状态,可在此平面内取任意方向.把振动矢量 E 对于光传播方向不具有对称性,叫做偏振(Polarization).因为纵波的振动方向对于其传播方向永远是对称的,因此偏振是横波区别于纵波的一个明显标志,只有横波才有偏振现象.如果光矢量始终在与传播方向垂直的平面内某一确定的方向振动,这种光称为线偏振光.通常将光矢量的振动方向和光的传播方向组成的平面称为振动面,显然线偏振光的光矢量始终保持在固定的平面内,所以线偏振光又称为平面偏振光.

一个原子(或分子)每次发光所发出的光波列的振动矢量具有一定的方向,可以认为是线偏振光.但是,普通光源发出的光是由光源中大量的原子(或分子)发出的独立光波列组成的,这些光波列持续的时间很短,它们的初相位和振动方向是无规则随机变化的,所以它们朝各个方向振动的几率相同,即光的振动矢量在各个方向是对称分布的,振幅也相等,这种光称为自然光(natural light),它是非偏振的.普通光源发出的光都是自然光.

我们可以把自然光分解为两个互相垂直而且振幅相等的独立振动,两者之间没有恒定的相位关系,各自的光强等于自然光光强的一半.也就是把自然光分解成两束振动方向相互垂直、振幅相等的相互独立的线偏振光,两线偏振光光强各为自然光光强的一半.自然光常用如图 16 - 35 所示的方法表示,图中用短线表示在纸面内的光振动,用小点表示垂直于纸面的光振动,它们都垂直于光的传播方向.对自然光,小点和短线作等距分布,表示没有哪个方向的光振动更占优势.

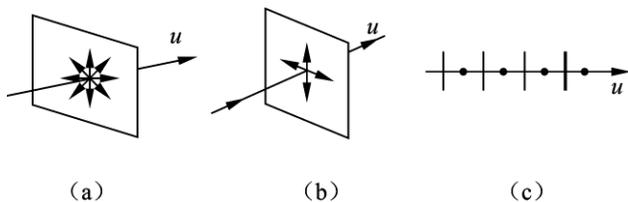


图 16 - 35 自然光的表示

如果两独立分振动的振幅不相等,而是在一个方向上大,在另一个方向上小,但不为零,这种光称为部分偏振光,部分偏振光的表示方法如图 16-36 所示,图 16-36(a)表示的部分偏振光在纸面内的光振动较强,图 16-36(b)表示的部分偏振光在垂直于纸面方向上的光振动较强.同理,线偏振光的表示方法如图 16-37 所示,图 16-37(a)表示振动方向在纸面内的线偏振光,图 16-37(b)表示振动方向垂直纸面的线偏振光.通常把线偏振光和部分偏振光简称为偏振光.

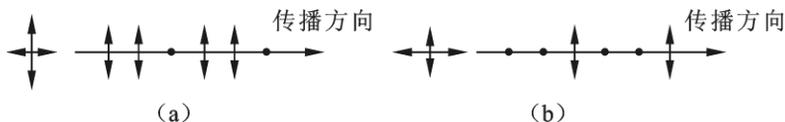


图 16-36 部分偏振光的表示

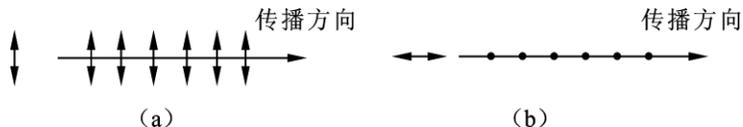


图 16-37 线偏振光的表示

二、起偏和检偏

在光学实验中发现,某些晶体如电气石,它只能让某个方向的光振动通过(有少量吸收),而吸收与该方向垂直的光振动(有少量透射),这种性质称为晶体的二向色性(dichroism).利用晶体的二向色性可以把自然光两个相互垂直的振动分量中的一个完全或大部分消除,进而获得偏振光.从自然光获得偏振光的过程称为起偏,产生起偏作用的光学元件称为起偏器(Polarizer).偏振片是一种常用的起偏器,它是由透明材料涂上一层定向排列的二向色性晶体制成的.偏振片只能透过沿某个方向的光矢量,把这个透光方向称为偏振片的偏振化方向或透振方向.

两个平行放置的偏振片 P_1 和 P_2 ,它们的偏振化方向用一组平行线表示,如图 16-38 所示.当自然光垂直入射到偏振片 P_1 时,透过 P_1 的光成为线偏振光,其振动方向与 P_1 的偏振化方向相同,强度为入射自然光强度的一半,此时称偏振片 P_1 为起偏器.透过 P_1 的线偏振光继续入射到偏振片 P_2 上,如果 P_2 与 P_1 的偏振化方向相同,则透过 P_2 的光强最强,如图 16-38(a)所示.如果 P_2 与 P_1 的偏振化方向正交,则光强为零,称为消光现象,如图 16-38(b)所示.将偏振片 P_2 以光的传播方向为轴慢慢转动,可以观察到透过 P_2 的光强周期性的变化.如果入射到偏振片 P_2 上的光是部分偏振光,此时旋转 P_2 ,则透过 P_2 的光强也要发生由弱到强或

由强到弱的变化,但不会出现光强为零的情况.可以看出,偏振片 P_2 可用来确定入射到其上的光的偏振状态.这个过程称为检偏,偏振片 P_2 为检偏器(analyzer).

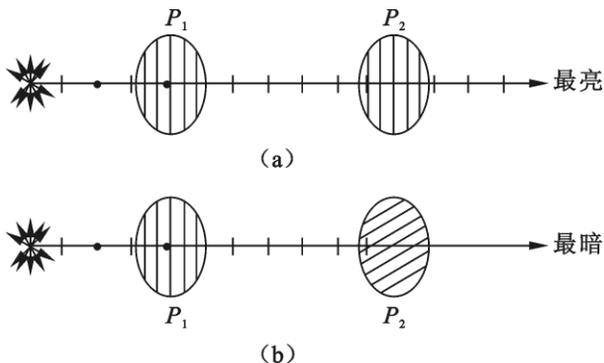


图 16 - 38 偏振片用作起偏器及检偏器

三、马吕斯定律

线偏振光通过转动的检偏器时,光强会连续变化.那么入射的线偏振光的强度 I_1 与通过检偏器后的透射光强度 I_2 之间有何关系?马吕斯(E. L. Malus)通过研究得出了著名的马吕斯定律:在不考虑吸收和反射的情况下,透射光的光强 I_2 与入射的光强 I_1 满足

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$$

式中的 α 是入射线偏振光的振动方向与检偏器偏振化方向之间的夹角.

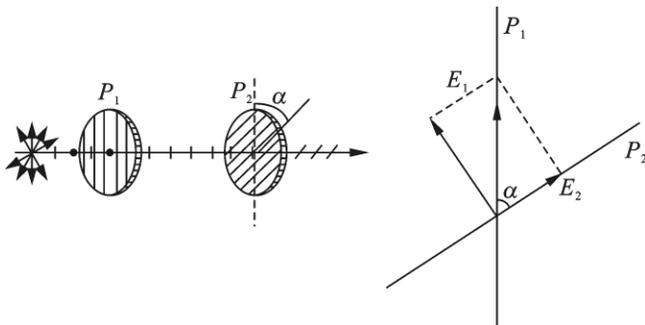


图 16 - 39 马吕斯定律

马吕斯定律证明如下:如图 16 - 39 所示,起偏器 P_1 与检偏器 P_2 偏振化方向间的夹角为 α , E_1 表示入射线偏振光光矢量的振幅, E_2 表示透过偏振片 P_2 的光矢量的振幅.将入射线偏振光的光振动分解为平行于 P_2 偏振化方向和垂直于 P_2 偏振化方向的两个分振动,显然只有平行分量可以透过 P_2 ,所以

$$E_2 = E_1 \cos \alpha$$

光的强度正比于振幅的平方,因此有

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{E_2^2}{E_1^2} = \cos^2 \alpha$$

即

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$$

由上式可得

$\alpha = 0^\circ$ 或 180° 时 $I_2 = I_1$, 光强最大;

$\alpha = 90^\circ$ 或 270° 时 $I_2 = 0$, 光强最小.

例 16 - 12 自然光和线偏振光的混合光束通过一偏振片时,随着偏振片以光的传播方向为轴转动,透过的最大光强与最小光强之比为 6:1,求入射光中自然光和线偏振光的强度之比.

解 设入射光中自然光与线偏振光光强分别为 I_1 和 I_2 ,通过偏振片后的光强分别为 I'_1 和 I'_2 ,则

$$I'_1 = \frac{1}{2}I_1, I'_2 = I_2 \cos^2 \alpha$$

由题意可知 $\alpha = 0$ 时,光强最大,即

$$I_{\max} = \frac{1}{2}I_1 + I_2$$

$\alpha = 90^\circ$ 时,光强最小,即

$$I_{\min} = \frac{1}{2}I_1$$

又

$$I_{\max} = 6I_{\min}, \text{即 } \frac{1}{2}I_1 + I_2 = 6 \times \frac{1}{2}I_1$$

所以

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2}{5}$$

即入射光中自然光和线偏振光的光强之比为 2:5.

思考题

16 - 1 若用两个细灯丝代替杨氏实验中的双狭缝,可否看到明暗相间的干涉条纹?为什么?

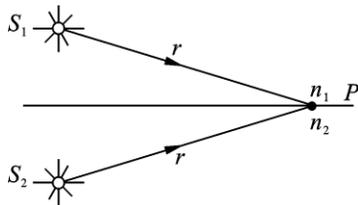
16 - 2 在杨氏双缝干涉实验中,若做如下一些变动时,接收屏上的干涉条纹将如何变化?

(1)将波长为 589.3 nm 的钠黄光换成波长为 632.8 nm 的氦氖激光;

(2)将整个装置浸入水中;

- (3) 将双缝(S_1 和 S_2) 的间距 d 增大；
 (4) 将接收屏向双缝屏靠近；
 (5) 在双缝之一的后面放一折射率为 n 的透明薄膜。

16-3 如题图所示,由相干光源 S_1 和 S_2 发出波长为 λ 的单色光,分别通过两种介质(折射率分别为 n_1 和 n_2 ,且 $n_1 > n_2$)射到这两种介质分界面上的一点 P 。已知两光源到 P 点的距离均为 r 。问这两条光线到达点 P 的几何路程是否相等?光程是否相等?光程差是多少?



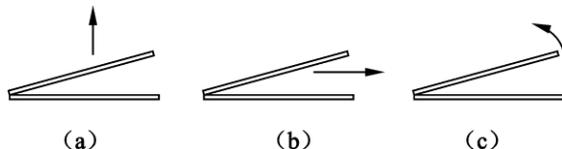
思考题 16-3 图

16-4 如果两束光是相干光,在这两束光相遇处总光强如何计算?如果两束光是不相干的,总光强又如何计算?(分别以 I_1 和 I_2 表示两束光的光强)

16-5 何谓等倾条纹?何谓等厚条纹?采用什么装置可观察到这两类条纹?

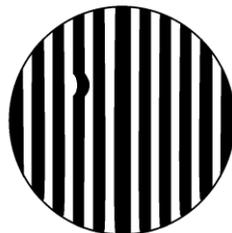
16-6 单色光垂直照射空气劈尖时,观察到的条纹宽度为 $b = \lambda/2\theta$,则相邻两暗条纹所在处劈尖薄膜的厚度差为多少?如用折射率为 n 的物质构成劈尖,条纹宽度将如何变化?相邻两暗条纹处劈尖的厚度差又为多少?

16-7 如题图所示,若空气劈尖的上表面向上缓慢平移[如图(a)],干涉条纹将怎样变化?若劈尖的上表面向右缓慢平移[如图(b)],干涉条纹又将怎样变化?若劈尖的劈尖角缓慢增大[如图(c)],干涉条纹又将发生怎样的变化?



思考题 16-7 图

16-8 工业上常用光学平面验规(表面经过精密加工,作为标准的平板玻璃)来检验金属平面的平整程度。如题图所示,将验规放在待检平面上形成一空气劈尖,并用单色光照射。如待检平面上有不平之处,干涉条纹将发生弯曲。试判断图中 A 处待检平面是凸起还是凹下,凸起或凹下的最大尺度为多少?



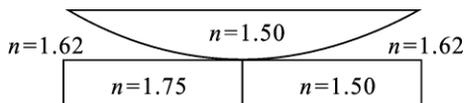
思考题 16-8 图

16-9 隐形飞机之所以很难被敌方发现,是由于飞机表面覆盖了一层电介质(如塑料或橡胶),从而使入射

的雷达波反射甚微. 试说明这层电介质是怎样减弱反射波的.

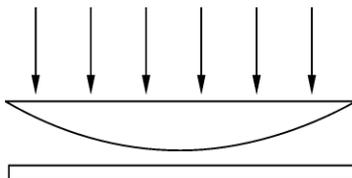
16 - 10 为什么劈尖干涉条纹是等宽的? 而牛顿环为什么则随着条纹半径的增大而变密?

16 - 11 如题图所示, 在牛顿环装置中, 如果平玻璃板由冕牌玻璃($n = 1.50$)和火石玻璃($n = 1.75$)组成. 透镜用冕牌玻璃制成, 而透镜与平玻璃间充满二硫化碳($n = 1.62$). 试说明在单色光垂直照射下反射光的干涉图样是怎样的, 请大致将其画出来.



思考题 16 - 11 图

16 - 12 如题图所示, 平凸透镜可以上下平移, 若以单色光垂直照射, 看见干涉条纹向中心移动, 问透镜是向上移动还是向下移动?



思考题 16 - 12 图

16 - 13 在日常生活中, 为什么声波的衍射比光波的衍射显著?

16 - 14 衍射的本质是什么? 干涉和衍射有什么区别和联系?

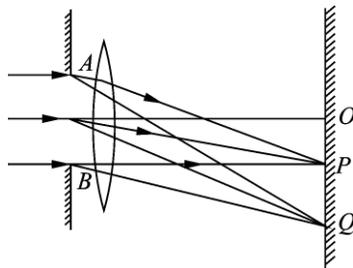
16 - 15 在夫琅禾费衍射装置中, 透镜的作用是什么?

16 - 16 一人手持一狭缝屏紧贴眼睛, 通过狭缝注视远处的一平行于狭缝的线状白光光源, 此人看到的衍射图样是菲涅耳衍射还是夫琅禾费衍射?

16 - 17 如题图所示, 用波长为 λ 的单色光垂直照射狭缝 AB.

(1) 若 $\overline{AP} - \overline{BP} = 2\lambda$, 问对点 P 来说, 狭缝 AB 可分成几个半波带, 点 P 是明还是暗?

(2) 若 $\overline{AP} - \overline{BP} = 1.5\lambda$, 则点 P 的明暗又将怎样? 对另一点 Q 来说, 若 $\overline{AQ} - \overline{BQ} = 2.5\lambda$, 则点 Q 的明暗将如何? 点 P 和点 Q 相比, 哪一点更亮一些? 为什么?



思考题 16 - 17 图

16 - 18 如题图所示, 在单缝的夫琅禾费衍射中, 若单缝处波阵面恰好被分成 4 个半波带. 此时光线 1 与光线 3 是同相位的, 光线 2 与 4 也是同相位的,

为什么点 P 的光强不是极大而是极小？

16-19 X 射线为什么不能用光栅观察其衍射现象而要改用晶体的晶格作为光栅来观察？

16-20 光学仪器的分辨率是如何确定的？纸上两点至少离多远时我们用 25 cm 的明视距离观察时还能将它们区分开来？

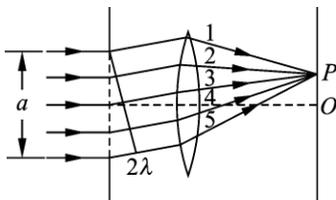
16-21 自然光与线偏振光、部分偏振光有何区别？用哪些方法可以获得线偏振光？

16-22 某光束可能是：(a) 自然光；(b) 线偏振光；(c) 部分偏振光。如何通过实验加以区分？

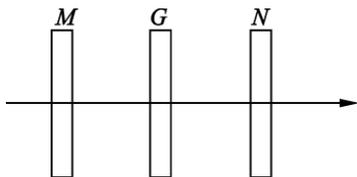
16-23 如题图所示，M 为起偏器，N 为检偏器，且使 M 和 N 的偏振化方向相互垂直。今以单色自然光垂直入射于 M，并在 M 和 N 之间插入另一偏振片 G，它的偏振化方向与 M 和 N 均不相同。问

(1) 透过偏振片 N 的光强如何？

(2) 若将偏振片 G 以入射光线为轴转动一周，试定性画出透射光强随转动角度变化的关系曲线。



思考题 16-18 图



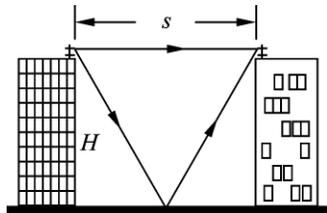
思考题 16-23 图

习 题

16-1 在杨氏双缝实验中，两缝间的距离是 0.30 mm，用单色光垂直照射时，在离缝 1.2 m 远处的接收屏上测得两个第 5 级暗条纹间的距离为 22.78 mm，问入射光的波长为多少？它是什么颜色的光？

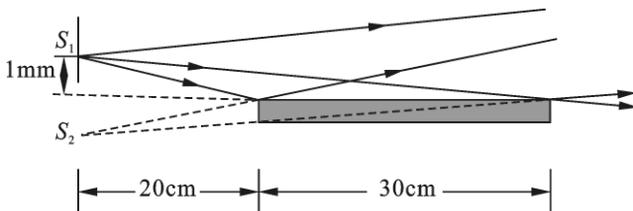
16-2 在双缝干涉实验中，两缝分别被折射率为 n_1 和 n_2 的透明薄膜遮盖，二者的厚度均为 e 。波长为 λ 的平行单色光垂直照射到双缝上，在接收屏中央处，求两束相干光的相位差。

16-3 移动通信发射台发出的无线电波可能直接传到手机，也可能经地面反射后传到手机，这样在有些地方可能引起干涉相消而使信号减弱。如题图所示，设一手机和发射机分别位于高度都是 60 m 的高楼上，工作频率都是 98 MHz。若引起干涉相消，两楼间水平地面的最大（有限）宽度是多少？（无线电波在地面反射有半波损失）



习题 16-3 图

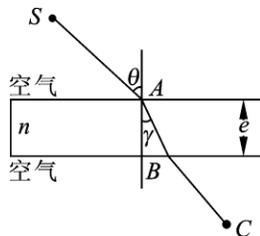
16-4 如题图所示,在劳埃德镜实验中,狭缝光源 S_1 和它的虚像 S_2 在离平面镜左边 20 cm 的平面内,平面镜长为 30 cm. 在镜的右边边缘处放置一毛玻璃光屏. 若光源 S_1 发出的光的波长为 680 nm,且到镜面的垂直距离为 1.0 mm,计算镜面右边缘到第一条明条纹中心的距离.



习题 16-4 图

16-5 一双缝装置中的一个狭缝被折射率为 1.40 的薄玻璃片所遮盖,另一个狭缝被折射率为 1.70 的薄玻璃片所遮盖. 在两玻璃片插入以后,接收屏上原来的中央极大所在处现变为第 5 级明条纹. 假定入射光波长 $\lambda = 480$ nm,且两玻璃片厚度均为 d ,求 d 的值.

16-6 如题图所示,由点 S 发出的 $\lambda = 600$ nm 的单色光,自空气射入折射率 $n = 1.23$ 的透明物质,再折入空气. 若透明物质的厚度 $e = 1.0$ cm,入射角 $\theta = 30^\circ$,且 $\overline{SA} = \overline{BC} = 5$ cm,求



习题 16-6 图

(1) 折射角 γ 为多少?

(2) 此单色光在这层透明物质里的频率、速度和波长各为多少?

(3) S 到 C 的几何路程为多少? 光程又为多少?

16-7 用白光作为双缝实验中的光源,两缝间距为 0.25 mm,接收屏与双缝距离为 50 cm,问在接收屏上观察到的第 2 级彩色带有多宽?(设白光的波长范围为 400 nm ~ 760 nm)

16-8 白光垂直照射到空气中一厚度为 380 nm 的肥皂膜上. 试问肥皂膜正面呈现什么颜色? 肥皂膜背面呈现什么颜色? 设肥皂膜的折射率为 $n = 1.33$.

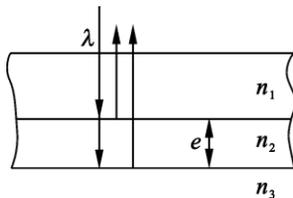
16-9 在空气中垂直入射的白光从肥皂膜上反射,在可见光谱中 630 nm 处有一干涉极大,而在 525 nm 处有一干涉极小,在极大与极小之间没有另外的极小. 假定肥皂膜的厚度是均匀的,试问膜的厚度是多少? 已知肥皂膜的折射率为 1.33.

16-10 如题图所示,用白光垂直照射厚度 $e=400\text{ nm}$ 的薄膜,若薄膜的折射率为 $n_2=1.40$,且 $n_1 > n_2 > n_3$,问反射光中哪种波长的可见光得到加强?

16-11 上题中,若薄膜厚度 $e=350\text{ nm}$,且 $n_2 < n_1, n_2 < n_3$,问

(1) 反射光中哪几种波长的光得到加强?

(2) 透射光中哪几种波长的光会消失?



习题 16-10 图

16-12 在折射率 $n_3=1.52$ 的照相机镜头表面涂有一层折射率 $n_2=1.38$ 的 MgF_2 增透膜,若此膜仅适用于波长 $\lambda=550\text{ nm}$ 的光,则膜的最小厚度为多少?

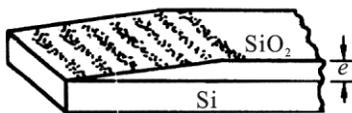
16-13 把一根钢丝夹在两块光学平玻璃板之间,形成空气劈尖.已知钢丝的直径 $D=0.048\text{ mm}$,钢丝与劈棱的距离 $L=120\text{ mm}$,用波长为 632.8 nm 的单色平行光垂直照射劈尖装置,求

(1) 劈尖角是多少?

(2) 相邻两明条纹间的距离是多少?

(3) 在这 120 mm 内呈现出多少条明条纹?

16-14 制造半导体元件时,常常要精确测定硅片上二氧化硅薄膜的厚度,这时可把二氧化硅薄膜的一部分腐蚀掉,使其形成劈尖,利用等厚条纹测出其厚度.已知 Si 的折射率为 3.42 , SiO_2 的折射率为 1.5 ,入射光波长为 589.3 nm ,观察到如题图所示的 7 条暗纹.问 SiO_2 薄膜的厚度 e 是多少?



习题 16-14 图

16-15 在利用牛顿环测未知单色光波长的实验中,当用波长为 589.3 nm 的钠黄光垂直照射时,测得第一和第四暗环的距离为 $\Delta l=4.0 \times 10^{-3}\text{ m}$;当用波长未知的单色光垂直照射时,测得第一和第四暗环的距离为 $\Delta l'=3.85 \times 10^{-3}\text{ m}$,求该单色光的波长.

16-16 在牛顿环实验中,当透镜与平板玻璃间为空气时,第 10 个亮环的直径为 $1.40 \times 10^{-2}\text{ m}$;当在其间充满某种均匀液体时(假定液体的折射率均小于透镜和平板玻璃的折射率),第 10 个亮环的直径变为 $1.27 \times 10^{-2}\text{ m}$,试求这种液体的折射率.

16-17 利用牛顿环装置可测量凹曲面镜的曲率半径,把已知的平凸透镜的凸面放置在待测的凹面上,如题图所示.在两镜面之间形成空气层,可观察到环状的干涉条纹.已知入射光的波长 $\lambda=589.3\text{ nm}$,平凸透镜的半径



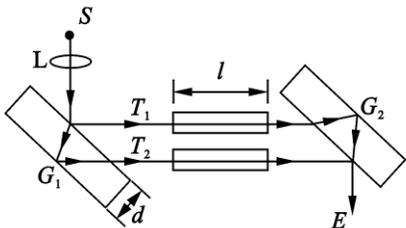
习题 16-17 图

为 $R_1 = 102.3 \text{ cm}$ 测得第 4 级暗环的半径 $r_4 = 2.250 \text{ cm}$. 求待测凹面镜的曲率半径 R_2 .

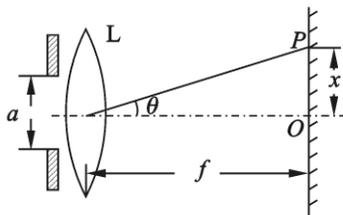
16-18 常用干涉仪来测定气体在各种温度和压力下的折射率. 干涉仪光路图如题图所示, S 为光源, L 为聚光透镜, G_1 、 G_2 为两块等厚(厚度均为 d)且相互平行的玻璃板, T_1 、 T_2 为等长的两个玻璃管, 其长度均为 l . 测量时, 先将两玻璃管抽空, 然后将待测气体缓慢充入其中一根玻璃管中, 此过程中, 在观察屏 E 处观察干涉条纹移动的数目, 即可求得待测气体的折射率. 设在某次测量中, 将待测气体缓慢充入 T_2 玻璃管内, 直到处于标准状态, 此过程中在观察屏 E 处共看到有 98 条干涉条纹移过. 所用光源波长为 $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ (真空中), $l = 20 \text{ cm}$, 求该气体在标准状态的折射率.

16-19 如题图所示, 狭缝的宽度 $a = 0.60 \text{ mm}$, 透镜焦距 $f = 0.40 \text{ m}$, 有一与狭缝平行的接收屏放置在透镜的焦平面处. 若以单色平行光垂直照射狭缝, 则在屏上离点 O 为 $x = 1.4 \text{ mm}$ 的点 P 看到衍射明条纹. 试求

- (1) 该入射光的波长;
- (2) 点 P 衍射条纹的级数;
- (3) 从点 P 看, 对该光波而言, 狭缝处的波阵面可分作半波带的数目.



习题 16-18 图



习题 16-19 图

16-20 一单色平行光垂直照射某一单缝, 若其第三条明纹的位置正好和波长为 600 nm 的单色光垂直入射时的第二级明纹位置一样, 求前一种单色光的波长.

16-21 已知单缝宽度 $a = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$, 透镜焦距 $f = 0.50 \text{ m}$, 用 $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ 和 $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$ 的单色平行光分别垂直照射, 求(1)这两种光的第一级明纹离屏中心的距离, 以及这两条明纹之间的距离;(2)若用每厘米刻有 1 000 条刻线的光栅代替这个单缝, 则这两种单色光的第一级明纹分别距屏中心多远? 这两条明纹之间的距离又是多少?

16-22 为了测定一光栅的光栅常数, 用波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的单色光垂直

照射光栅. 已知第一级明条纹出现在 30° 角的方向上, 问此光栅的光栅常数多大? 光栅 1 cm 内有多少条狭缝? 第二级明条纹是否可能出现? 为什么?

16 - 23 迎面开来的汽车上, 两盏前灯相距 120 cm. 设夜间人眼瞳孔的直径为 5.0 mm, 入射光波长 $\lambda = 550$ nm, 试问在夜间汽车离人多远的地方, 人的眼睛才能分辨出这两盏灯? (假设这个距离只取决于眼睛的圆形瞳孔处的衍射效应)

16 - 24 月球距地面约 3.86×10^5 km, 设月光波长可按 $\lambda = 550$ nm 计算. 问在月球表面距离为多远的两点才能被地面上直径 $D = 500$ cm 的天文望远镜所分辨?

16 - 25 使自然光通过两个偏振化方向相交 60° 的偏振片, 透射光强为 I_1 . 今在这两个偏振片之间插入另一偏振片, 它的偏振化方向与前两个偏振片偏振化方向均成 30° 角, 则透射光强 I_2 为多少?

16 - 26 一束光是自然光和线偏振光的混合, 当它通过一偏振片时发现透射光的强度取决于偏振片的取向, 其强度可以变化 5 倍, 求入射光中两种光的强度各占总入射光强度的几分之几.

第 17 章 相对论基础

20 世纪以前的 200 余年里,物理学在两大领域取得了巨大成功:其一是牛顿力学和热力学理论的建立,其二是包括光学在内的麦克斯韦经典电动力学的建立.它们不仅能很好地解释宏观的力学和电磁学现象,而且在历史上分别诱发了两次科技革命.

与牛顿力学相比较,在当时电磁学理论属于新兴学科.尽管关于电磁场的观念与牛顿力学格格不入,但是,长期以来牛顿力学的成就使当时许多物理学家的观念不可能很快转变.它们仍然试图在牛顿力学的框架内解释涉及到电磁场运动及电磁场与微观物质相互作用的一些实验.然而,自然法则是无情的,这样的尝试必然遇到了矛盾.用 1900 年开尔文在英国皇家学会新年庆祝会上的话说,在物理学明朗的天空中还有“两朵乌云”.这指的是用经典物理学理论无法解释的两类实验现象:其一是迈克耳孙-莫雷实验,其二是黑体辐射实验.

20 世纪初,伴随着这两大物理难题的解决,建立了相对论和量子论,正所谓“山重水复疑无路,柳暗花明又一村”.相对论和量子论是 20 世纪初物理学最伟大的成就,成为现代物理学的重要支柱.本章只讨论相对论的基础知识,包括狭义相对论和广义相对论思想的简要介绍.狭义相对论指出了物理定律对一切惯性参考系都是等价的,揭示了空间与时间的内在联系,质量与能量的内在联系.广义相对论进一步指出物理定律对一切参考系都是等价的,更深入地揭示了时空性质与运动的物质之间不可分割的联系.它从根本上改变了传统的时间、空间观念,建立了崭新的时空观.

§ 17 - 1 狭义相对论产生的科学背景

一、牛顿力学的时空观

要描述物体的运动状态,以及运动状态随时间的变化,必须选定适当的参考系,而且牛顿定律也都是对一定的参考系才有意义的.在处理实际问题时,视解决问题的方便,我们可以选取不同的参考系.相对于任一参考系分析研究物体的运动时,都要应用基本力学定律.这里就出现了这样的问题,对于不同的参考系,基本力学定律的形式是完全一样的吗?牛顿力学的回答是肯定的:对于任何惯性参考系,牛顿定律都成立.也就是说,对于不同的惯性系,力学的基本

定律——牛顿定律,其形式都是一样的.因此,在任何惯性系中观察,同一力学现象将按完全相同的形式发生和演变.这个结论叫牛顿相对性原理或力学相对性原理,也叫做伽利略不变性.

运动是物体位置随时间的变化,无论是对运动的描述还是对运动定律的说明,都离不开长度和时间的测量.因此,一个与运动联系的而又更根本的问题是:相对于不同参考系,对长度和时间测量的结果是否一样?关于空间和时间的问题,牛顿提出绝对空间和绝对时间概念.所谓绝对空间是指长度的量度与参考系无关,绝对时间是指时间的量度和参考系无关.也就是说,同样两点间的距离或同样的前后两个事件之间的时间间隔,无论在哪个惯性系中测量都是一样的.牛顿本人曾说过:“绝对空间,就其本性而言,与外界任何事物无关,而永远是相同的和不动的.”“绝对的、真正的和数学的时间自己流逝着,并由于它的本性而均匀地与任何外界对象无关地流逝着.”

牛顿的相对性原理和他的绝对时空概念是与伽利略变换相联系的.

设想有两个惯性参考系 S 和 S' , 分别在其上固定直角坐标系 (O, x, y, z) 和 (O', x', y', z') . 如图 17-1 所示, 它们的相应坐标轴相互平行, 开始时, 两个惯性参考系重合在一起. S' 相对于 S 沿 x 轴方向以速度 v 运动.

为了测量时间, 设想在 S 和 S' 系中各处都有自己的钟, 所有的钟结构完全相同, 而且同一参考系中所有的钟都是校准而同步的, 它们分别指示时刻 t 和 t' . 为了对比两个参考系中所测的时间, 我们假定两个参考系中的钟都以原点 O' 和 O 重合的时刻作为计算时间的零点. 让我们找出两个参考系测出的同一质点到

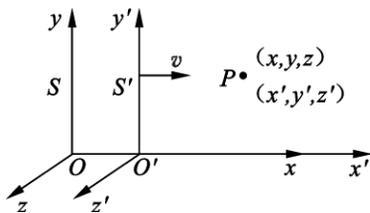


图 17-1 伽利略变换

达某一位置 p 的时刻以及该位置的空间坐标之间的关系. 由于时间量度的绝对性、空间量度的绝对性, 有

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (17-1)$$

式(17-1)称为伽利略坐标变换式. 由此式可进一步求得速度变换公式, 将其中前三式对时间求导数, 考虑到 $t' = t$, 可得

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}$$

于是得速度变换公式为

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \quad (17-2)$$

将式(17-2)写成矢量式 即

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (17-3)$$

上式称为伽利略速度变换式. 由上面的推导可以看出它是以绝对的时空概念为基础的.

将式(17-3)再对时间求导数, 可得出加速度变换公式. 由于 \mathbf{v} 与时间无关, 即 $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$, 所以有

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

即

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \quad (17-4)$$

这说明同一质点的加速度在不同的惯性系内测得的结果是一样的.

在牛顿力学里, 质点的质量和运动速度没有关系, 因而也不受参考系的影响. 牛顿力学中的力只与质点的相对位置或相对运动有关, 因而也是与参考系无关的. 因此, 只要 $F = ma$ 在参考系 S 中是正确的, 那么, 对于参考系 S' 来说, 由于 $F' = F$, $m' = m$ 以及式(17-4), 必然有

$$F' = m'a' \quad (17-5)$$

即对参考系 S' 来说, 牛顿定律也是正确的. 一般地说, 牛顿定律对任何惯性系都是正确的.

这样, 我们就由牛顿的绝对时空概念(以及“绝对质量”概念)得到了牛顿相对性原理.

牛顿力学与伽利略相对性原理构成了一个完善而自洽的理论体系. 利用它可以解释地面上的力学现象和天体运行规律. 尤其在利用它成功地预言了天王星的存在后, 人们对该理论体系更是深信不疑.

二、迈克耳孙 - 莫雷实验零结果的启示

17世纪中叶, 惠更斯提出了光的波动说, 给出了后人以他的名字命名的惠更斯原理, 并用这个原理成功地解释了光的反射和折射现象. 进入18世纪后, 继续从事这方面的研究, 在用光的波动性解释光的干涉、衍射和偏振等诸多现象方面取得了令人瞩目的成功, 使光的波动说得到了进一步的肯定和发展.

值得注意的是,那个时代是牛顿力学占统治地位的时代,振动都归于机械振动,波动都归于机械波,于是光也就自然地被认为是机械振动在某种物质中的传播.然而,光不仅能在空气、水和玻璃等实物媒质中传播,而且光也能在诸如太阳和地球之间的无实物的空间传播.这就促使人们需要假设存在着一种能传递光振动的媒质,称之为“光以太(ether)”,并进而假设光以太存在于宇宙的全部“真空”和各种实物之中.既然光以太存在于“真空”和一切实物之中,由此产生了一个问题,即运动的实物是否会带动或者拽引光以太呢?

19 世纪下半叶,电磁学是当时的领头学科.麦克斯韦发现,在电磁场的基本运动方程或由它导出的波动方程中包含了光速因子 c .从这一点来看,电磁学定律与牛顿定律截然不同,牛顿定律中不包含速度因子.因此,在伽利略变换下,不同惯性系中电磁现象的基本定律不再保持不变.这也意味着,从电磁学实验可以发现一个特殊的“绝对参考系”,当时称它为“以太系”.在以太系中光的速度为 c ;在其他惯性系,比如与地面相联系的惯性系中光速不再是 c ,且其值与 c 之差就是地球相对于以太系的速度,或者说就是地球感受到的“以太风”的速度.这一时期,探索以太风的存在,确定地球与以太的相对运动就成为物理学发展中的一个突出问题.

倘若有一运动参考系,它相对绝对参考系以速度 v 运动,那么,由牛顿力学的相对性原理,光在运动参考系中的速度应为

$$c' = c + v \quad (17 - 6)$$

其中 c 是光在绝对参考系中的速度, c' 为光在运动参考系中的速度.从上式可以看出,在运动参考系中,光的速度在各方面是不相同的.

不难想像,如果能借助某种方法测出运动参考系相对于以太的速度,那么,作为绝对参考系的以太也就被确定了.为此,历史上曾有许多物理学家做过许多实验来寻找绝对参考系,但都得出了否定的结果.其中最著名的是迈克耳孙(A. A. Michelson)和莫雷(E. W. Morley)所做的实验.

迈克耳孙 - 莫雷实验装置的原理,如图 17 - 2(a)所示.由光源 S 发出波长为 λ 的光,入射到半透半反镜 G 后,一部分透过 G 到达 M_1 ,再由 M_1 和 G 反射到达 T;另一部分则反射到平面镜 M_2 上,再由 M_2 反射回来透过 G 到达望远镜 T.假定 G 到 M_1 和 M_2 的距离均为 l ,且 M_1 和 M_2 间不严格垂直,那么在望远镜的目镜中将看到干涉条纹.

现把固定在地球上的整个实验装置作为运动参考系(亦叫实验室参考系),设想它相对于绝对参考系(即以太参考系)以速度 v 运动(方向如图).从实验室参考系来看,以太则以 $-v$ 的速度相对实验室参考系运动,光在以太中不论沿哪

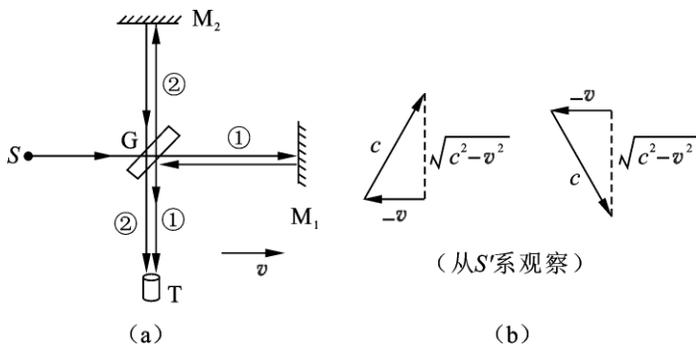


图 17-2 迈克耳孙—莫雷实验原理图

个方向的速度均为 c . 我们如若取以太参考系为 S 系, 实验室参考系为 S' 系, 那么, 根据式(17-6), 从 S' 系来看, 光自 G 到 M_1 的速度为 $c-v$, 而光自 M_1 到 G 的速度则为 $c+v$. 于是, 从 S' 系来看, 光从 G 到 M_1 , 然后再由 M_1 回到 G 所需的时间为

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

另外, 如图 17-2(b)所示, 从 S' 系来看, 光自 G 到 M_2 和自 M_2 到 G 的速度均为 $(c^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}$. 所以, 从 S' 系来看, 光从 G 到 M_2 , 然后再由 M_2 回到 G 所需的时间为

$$t_2 = \frac{2l}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = \frac{2l}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

由以上两式可以看出, 从 S' 系来看, G 点发出的两束光到达望远镜的时间差应为

$$\begin{aligned} \Delta t = t_1 - t_2 &= \frac{2l}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{2l}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{2l}{c} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots\right) \right] \end{aligned}$$

由于 $v \ll c$, 上式可写成

$$\Delta t \approx \frac{lv^2}{c^3}$$

于是, 两光束的光程差为

$$\delta = c\Delta t \approx l \frac{v^2}{c^2}$$

若把整个仪器旋转 90° , 则前后两次的光程差为 2δ . 在此过程中, 望远镜的视场内应看到干涉条纹移动 ΔN 条, 有

$$\Delta N = \frac{2\delta}{\lambda} = \frac{2lv^2}{\lambda c^2} \quad (17-7)$$

式中 λ 、 c 和 l 均为已知, 如果能测出条纹移动的条数 ΔN , 即可由上式算出地球相对于以太的绝对速度 v , 从而就可以把以太作为绝对参考系了.

在迈克耳孙 - 莫雷实验中 l 约为 10 m , 光的波长 $\lambda = 5.0 \times 10^3 \mu\text{m}$, v 取地球公转的速度 ($3 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), 可由上式估算出, 干涉条纹移动的条数 ΔN 约为 0.4 . 而迈克耳孙干涉仪的精度已达到条纹的 $\frac{1}{100}$, 因此, 他们应能毫不困难地观察到这 0.4 条条纹的移动. 但是, 他们没有观察到这个预期的条纹移动. 尽管迈克耳孙等人在不同的地理条件、不同的季节条件下, 进行了多次实验, 始终没有观察到预期的结果.

由于这一实验与静止以太论不相容, 所以引起了物理学界的震惊. 从当时的历史实际来说, 人们对菲涅耳的理论是极为信赖的, 不少人认为迈克耳孙 - 莫雷实验失败了, 其理由是看不到预期的结果.

1905 年, 年仅 26 岁的爱因斯坦在经过认真思考之后, 终于认识到“经过这么多失败, 现在应该是完全抛开以太的时候了”. 这就是说, 在电磁学领域也不存在绝对参考系. 或者说, 电磁学现象仍然满足相对性原理, 麦克斯韦方程在不同惯性系中应具有相同的形式. 然而, 由于麦克斯韦方程中包含光速 c , 因此, 为了使它的形式保持不变, 光速 c 也必须不变. 当然, 爱因斯坦在作出这样的选择时, 他也意识到必须抛弃伽利略变换, 寻求一种新的时空变换关系.

§ 17 - 2 狭义相对论的基本原理 洛伦兹变换

爱因斯坦 (Albert Einstein, 1879 - 1955 年), 犹太人. 被誉为“20 世纪的牛顿”、“20 世纪最伟大的科学家”.

创新是爱因斯坦主要的科学思想. 他在普朗克量子假设的基础上, 于 1905 年提出了光子假说, 成功地解释了光电效应的实验规律, 为此, 他荣获了 1921 年度的诺贝尔物理学奖. 1916 年提出自发辐射和受激辐射的概念, 为现代激光技术奠定了理论基础; 1924 年提出了量子统计方法——玻色——爱因斯坦统计. 在对时间、空间和物质运动的研究中, 他否定了牛顿的绝对时空观, 于

1905 年建立了狭义相对论,1915 年创立了广义相对论,他用广义相对论研究整个宇宙的时空结构,开创了现代宇宙学。爱因斯坦始终坚持不懈地进行把引力场与电磁场统一起来的研究。这些成就和科学思想深刻地影响着现代科学研究的进展。

对于人生观,爱因斯坦曾说过:“人只有献身于社会,才能找出那实际上是短暂而有风险的生命的意义”。

关于青年教育,爱因斯坦告诫人们:“学校的目标始终应该是:青年人在离开学校时,是作为一个和谐的人,而不是作为一个专家

……发展独立思考和独立判断的一般能力,应当始终放在首位,而不应当把专业知识放在首位。如果一个人掌握了他的学科的基础理论,并且学会了独立思考和自己的工作,他必定会找到自己的道路,而且比起那种主要以获得细节知识为其培训内容的人来,他一定会更好地适应进步和变化。”

一、狭义相对论的基本原理

19 世纪中后期,人们对光和电磁现象的研究逐步深入,已形成了比较完整的电磁理论——麦克斯韦电磁理论。它预言光是一种电磁波,并被实验所证实。这时,人们又提出了新问题,对于不同的惯性系,电磁现象的基本规律的形式是一样的吗?用伽利略变换对电磁现象的基本规律进行变换,发现这些规律对不同的惯性系并不具有相同的形式。这样,伽利略变换和电磁现象符合相对性原理的设想发生了矛盾。

在这个问题中,光速的数值起了特别重要的作用。以 c 表示在某一参考系 S 中测得的光在真空中的速率,以 c' 表示在另一参考系 S' 中测得的光在真空中的速率,如果根据伽利略变换,就应该有

$$c' = c \pm v$$

式中 v 为 S' 相对于 S 的速度,它前面的正负号由 c 和 v 的方向相反或相同而定。但是麦克斯韦的电磁场理论给出的结果与此不相符,该理论给出的光在真空中的速率

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

其中 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ (或 F/m) $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ (或

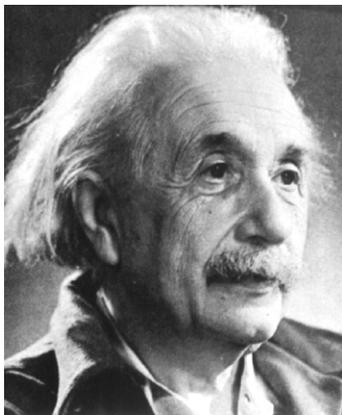


图 17-3 爱因斯坦

H/m) ,是两个电磁学常量. 将这两个值代入上式 ,可得

$$c = 2.99 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由于 ε_0 、 μ_0 与参考系无关 ,因此 c 也应该与参考系无关. 这就是说 ,在任何参考系中测得的光在真空中的速率都应该是这一数值. 这一结论还为后来的很多精确的实验和观察所证实. 它们都明确无误地证明光速的测量结果与光源和测量者的相对运动无关 ,亦即与参考系无关. 这就是说 ,光或电磁波的运动不服从伽利略变换.

为此 ,爱因斯坦提出了两个基本假设 ,亦称狭义相对论的基本原理.

1. 爱因斯坦相对性原理

伽利略变换和电磁规律的矛盾促使人们思考下述问题 :是伽利略变换正确 ,而电磁现象的基本规律不符合相对性原理呢 ? 还是已发现的电磁现象的基本规律是符合相对性原理的 ,而伽利略变换(实际上是绝对时空概念)应该修正呢 ? 爱因斯坦对这个问题进行了深入的研究 ,并在 1905 年发表了《论动体的电动力学》这篇著名的论文 ,对此问题作出了对整个物理学都有根本变革意义的回答. 即提出第一个基本假设 :

物理规律对所有惯性系都是一样的 ,不存在任何一个特殊的(例如“绝对静止”的)惯性系.

爱因斯坦称这一假设为相对性原理 ,我们称之为爱因斯坦相对性原理. 与牛顿相对性原理加以比较 ,可以看出前者是后者的推广 ,使相对性原理不仅适用于力学现象 ,而且适用于所有物理现象 ,包括电磁现象在内. 这样 ,我们就可以料到 ,在任何一个惯性系内 ,不仅是力学实验 ,而且任何物理实验都不能用来确定本参考系的运动速度. 绝对运动或绝对静止概念 ,从整个物理学中被排除了.

2. 光速不变原理

在把相对性原理作为基本假设的同时 ,爱因斯坦提出了另一个基本假设 :在任何惯性系中 ,光在真空中的速率都相等. 这一假设称为光速不变原理.

后来 ,人们正是根据光在真空中的速度与参考系无关这一性质 ,在精密的激光测量技术的基础上 ,把光在真空中的速率规定为一个基本的物理常量 ,国际科技数据委员会 1998 年的最新推荐值为 $c = 299\,792\,458 \text{ m} / \text{s}$,实用中常取 $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

SI 制的长度单位“m”就是在光速的这一规定的基础上规定的.

就是在看来这样简单而且最一般的两个假设的基础上 ,爱因斯坦建立了一套完整的理论——狭义相对论 ,从而把物理学推进到了一个新的阶段. 由于在

这里涉及的只是无加速运动的惯性系,所以叫狭义相对论,以区别于后来爱因斯坦发展的广义相对论,在那里讨论了做加速运动的参考系。

二、洛伦兹变换式

由于伽利略变换与爱因斯坦的两个基本假设相矛盾,因此,需要由这两个基本假设出发导出一组关于时空坐标的新的变换关系,以取代伽利略变换。

设有两个惯性系 S 和 S' , 其中惯性系 S' 沿 xx' 轴以速度 v 相对 S 系运动(图 17-3), 以两个惯性系的原点相重合的瞬时作为计时的起点. 若有一个事件发生在点 P , 从惯性系 S 测得点 P 的坐标是 (x, y, z) , 时间是 t , 而从惯性系 S' 测得点 P 的坐标是 (x', y', z') , 时间是 t' . 这里务必注意, 在伽利略变换中, $t = t'$, 即事件发生的时间是与惯性系的选取无关的. 这是被伽利略变换采纳的一条直接来自日常经验的定则, 然而在狭义相对论中, 却不能如此了。

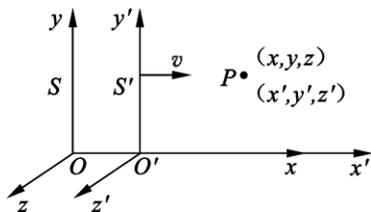


图 17-3 洛伦兹变换

下面由狭义相对论的相对性原理和光速不变原理, 导出该事件在两个惯性系 S 和 S' 中的时空坐标变换式。

在图 17-3 中, 对于 S 系的原点 O , 由 S 系来观察时, 不论在任何瞬时, $x = 0$, 但由 S' 系来观察时, 在瞬时 t' 的坐标是 $x' = -vt'$ 或 $x' + vt' = 0$. 可见, 对时空同一点而言, 数值 x 和 $x' + vt'$ 同为零. 而若考虑两者关系的一般情况, 那就可以假设 x 与 $x' + vt'$ 间具有线性关系, 即

$$x = k(x' + vt') \quad (17-8)$$

式中 k 为与 v 有关的常数。

同理, 考虑 S' 的原点 O' , 即有

$$x' = k'(x - vt)$$

根据狭义相对论的相对性原理, 这两个惯性系是等效的, 即除了应把 v 改写为 $-v$ 以外, 此式与式(17-8)应有相同的形式. 这就要求 $k' = k$, 故有

$$x' = k(x - vt) \quad (17-9)$$

关于 y 和 y' 以及 z 和 z' 的变换关系, 由图 17-3 可得

$$y' = y \quad (17-10)$$

$$z' = z \quad (17-11)$$

现在来寻求 t 和 t' 的变换关系. 把式(17-9)代入式(17-8), 有

$$x = k'(x - vt) + kv't$$

由此可得

$$t' = kt + \left(\frac{1 - k^2}{kv}\right)x \quad (17-12)$$

式(17-9)、(17-10)、(17-11)和(17-12)组成一组满足狭义相对论第一条——相对性原理的坐标变换式, 而各式中的 k 则需由第二条假设——光速不变原理求得. 为此, 假设在 O' 与 O 重合的瞬时($t' = t = 0$), 由重合点发出一沿 Ox 轴前进的光信号, 对两个坐标系来说, 光信号到达点 P 的坐标分别为

$$x = ct$$

$$x' = ct'$$

把式(17-9)和(17-12)代入式 $x' = ct'$, 得

$$k(x - vt) = ckt + \left(\frac{1 + k^2}{kv}\right)cx$$

由上式求解 x , 并与 $x = ct$ 相比较, 可得

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (17-13)$$

将此式分别代入式(17-9)、式(17-12), 并结合式(17-10)、式(17-11), 即得洛伦兹时空坐标变换式:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \quad (17-14)$$

式中 $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, c 为光速. 从式(17-14)可解得 x, y, z 和 t , 即得洛伦兹时空坐标的逆变换式为

$$\begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{cases} \quad (17 - 15)$$

式(17 - 14)和式(17 - 15)都叫做洛伦兹变换式. 应当注意 在洛伦兹变换式中, t 和 t' 都依赖于空间坐标, 即 t 是 t' 和 x' 的函数. 这与伽利略变换式迥然不同.

由洛伦兹变换式(17 - 14)容易看出, 当惯性系 S' 相对于惯性系 S 的速度 v 远小于光速 c 时 $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$, 洛伦兹变换式就转化为伽利略变换式了. 因此, 可以说, 在物体的运动速度远小于光速时, 洛伦兹变换与伽利略变换是等效的. 可见, 伽利略变换式只适用于低速运动物体的坐标变换.

对洛伦兹变换式 我们应当明确以下几点:

(1) 洛伦兹变换包括了伽利略变换, 也就是说狭义相对论原理是伽利略相对原理的发展. 当运动物体处于低速(即 $v \ll c$)时 根据洛伦兹变换式, 由 S' 系变换到 S 系, 有变换式

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'$$

可见, 在低速条件下, 洛伦兹变换退化为伽利略变换. 对 S 系变换到 S' 系也将有同样的结论. 说明洛伦兹变换是比伽利略变换更为普遍的坐标变换关系. 这也说明任何新理论的成功, 总是把旧理论的正确部分包含在其中. 这就是哲学上的所谓扬弃而不是抛弃.

(2) 洛伦兹变换是光速不变原理的具体表现.

(3) 在洛伦兹变换式中 $\sqrt{1 - \beta^2}$ 应为实数, 且不能等于零. 因此狭义相对论认为, 任何运动物体的速度都不能大于光速(极限速度).

(4) 洛伦兹变换否定了牛顿力学的时空观, 反映出一种新的时空观. 洛伦兹变换给出了空间与时间相互联系的具体形式, 揭示出时间和空间的量度和参照系的选取有关, 说明孤立的时间和孤立的空间都是不存在的. 它表明某一事件不能单独用空间坐标或单独用时间坐标来表达, 而必须用四维时空坐标(x, y, z, t)或(x', y', z', t')来表达, 这就是所谓的“四维坐标”概念. 这就说明应当用一种新的时空观来代替经典力学的绝对时空观. 总之, 洛伦兹变换揭示了时间、空间和物质运动之间的联系.

三、洛伦兹速度变换式

利用洛伦兹时空坐标变换式可以得到洛伦兹速度变换式. 设有惯性参考系 S' 和 S , 且 S' 以速度 v 相对于 S 沿 xx' 轴运动. 考虑一点 P 在空间的运动, 从 S 系来看, 点 P 的速度为 $u(u_x, u_y, u_z)$, 速度的分量为

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

从 S' 系来看, 点 P 的速度为 $u'(u'_x, u'_y, u'_z)$, 其分量为

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

我们的目的是要找出这些分量之间的关系, 为此, 对式(17-14)求微分, 有

$$dx' = \gamma(dx - vdt)$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

因此 u' 的 x 分量为

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{(dx - vdt)}{\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

类似地, 可得 u' 的 y 分量和 z 分量, 于是有

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} \end{cases} \quad (17-16)$$

式(17-16)叫做洛伦兹速度变换式. 同样, 我们还可以得到上式的逆变换式

$$\begin{cases} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\ u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)} \\ u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)} \end{cases} \quad (17-17)$$

由式(17-17)与式(17-3)相比较可以看出,相对论力学中的速度变换公式与牛顿力学中的速度变换公式不同,不仅 x 分量要变换,而且 y 分量和 z 分量也要变换。

在 $v \ll c$ 的情况下,式(17-17)将退化为式(17-3)。所以,伽利略变换式(17-3)仅适用于低速运动的物体。

现在不妨来对比一下,经典力学与相对论力学是如何看待光在真空中的速度的。设一光速沿 xx' 轴运动,已知光对 S 系的速度是 c ,即 $u_x = c$ 。那么,根据洛伦兹速度变换式,光对 S' 系的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = c$$

也就是说,光对于 S 系和 S' 系的速度相等,这个结论显然与伽利略速度变换的结果不同,但却符合前述实验事实和光速不变原理。

§ 17-3 狭义相对论的时空观

在相对论建立之前,人们认为空间间隔、时间间隔及物体的质量都是绝对的,而光速是相对的,这就是牛顿力学的绝对时空观。但是相对论恰好将这些观点完全颠倒。在相对论中,光速是绝对不变的,而空间间隔、时间间隔及物体的质量都是相对的,与观察者相对于物体的相对速度有关。这些结果反映了牛顿力学中的绝对时空观与相对论时空观之间的根本性差别。

根据爱因斯坦的时空观,时空的量度是相对的,这种相对性的关键在于“同时”的相对性。由同时的相对性,可以自然地得出空间间距量度的相对性以及时钟计率的相对性。下面逐一予以说明。

一、“同时”的相对性

为了描述一个质点的运动,需要给出质点的坐标随时间变化的函数曲线,

只有弄清楚“时间”是什么,以及怎样才能合理地测量时间后,才能完成这项工作.对时间的判断总是与对“同时性”的判断联系在一起的.例如,我们说“火车于上午 7 点从车站开出”,这句话的含义是,车站的钟指示 7 点与火车从车站开出是两个“同时”发生的事件.判断在同一地点的两个事件是否同时发生,只需在该地点放置一个钟就够了.

但是,如果要判断发生在不同地点的两个事件是否“同时”发生,或者比较在不同地点两个事件发生的时间的先后,问题就变得复杂了,因为时钟只能测量它所在地点的时间,而不能测量别处的时间.根据绝对时空观,两个事件“同时”发生是有绝对意义的,因为这一判断与这两个事件是发生在同一地点还是发生在不同地点无关.然而,根据相对论时空观,承认时空的相对性后,“同时”不具有绝对性.利用光信号把相对于本惯性系静止的放置在各处的时钟校准并使之达到同步.然而,根据光速不变原理很容易发现,对于两个相互间作匀速直线运动的惯性系 S 和 S' ,如果在 S' 系中认为在两个点的事件是同时发生的,那么在 S 系中看来,在这两个点的事件未必是同时发生的.同样,如果在 S 系中认为在两个点的事件是同时发生的,那么在 S' 系中看来,在这两个点的事件未必是同时发生的.

牛顿力学的绝对时空观认为时间是绝对的.若两事件在惯性系 S 中是被同时观察到的,那么在另一惯性系 S' 中也是同时观察到的.但是狭义相对论则认为,这两个事件在惯性系 S 中观察时是同时的,但在惯性系 S' 中观察,一般来说就不再是同时的了.这就是狭义相对论的同时相对性.

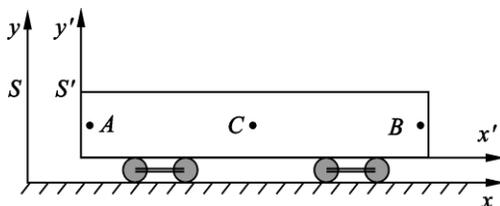


图 17 - 5 同时的相对性

设想有一车厢以速度 v 沿 Ox 轴做直线运动(图 17 - 5).在车厢正中间的 C 点发出一闪光,光将同时向车厢两端 A 和 B 传去.现在要问:分别从地面上静止的惯性系 S 和随车厢一起运动的惯性系 S' 来看,光到达 A 和 B 的先后顺序如何?对 S' 来说,由光速不变原理得知,光向 A 与向 B 传播的速度相同,因此,光应同时到达 A 和 B .可是对 S 来说,因为车厢的 A 端以速度 v 向光接近,而 B 端以速度 v 离开光,所以光到达 A 端要比到达 B 端早一些.也就是说,从惯性系 S

来看,由 C 点发出的光并不是同时到达 A 点和 B 点的.既然由 C 点发出的光到达 A 和到达 B 这两个事件的同时性与所取的惯性系有关,那么就不应当有与惯性系无关的绝对时间.这就是同时的相对性.

同时的相对性也可由洛伦兹变换式求得.设在惯性系 S' 中,不同地点 x'_1 和 x'_2 同时发生两个事件,即

$$\begin{aligned}\Delta t' &= t'_2 - t'_1 = 0 \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1\end{aligned}$$

由式(17-15)可得

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

现在 $\Delta t' = 0$, $\Delta x' \neq 0$, 所以 $\Delta t \neq 0$. 这表明在不同地点发生的两个事件,对 S' 系的观察者来说是同时发生的,而对 S 系的观察者来说便不是同时发生的.“同时”具有相对意义,它与惯性系有关.只有在 S' 系中同一地点($\Delta x' = 0$)同时($\Delta t' = 0$)发生的两事件, S 系中才会认为该两事件也是同时发生的.

对于相反的情形,仿照上述办法,不难得出结论:在 S 系中不同地点同时发生的两个事件, S' 系也不认为是同时发生的;只有 S 系中同一地点同时发生的两事件, S' 系才认为也是同时发生的.可见,不同的惯性参考系各有自己的“同时性”,并且所有的惯性系都是“平等”的.这正是相对性原理所要求的.

二、时间的延缓

既然“同时”是一个相对的概念,那么,两个事件的时间间隔或一个过程持续的时间也就具有相对性.

通常所说的两个时钟的快慢是否相同,包括两方面的含义.第一方面是指零点是否相同.如果钟 A 指示凌晨零点,钟 B 却指示零点 10 分,则称钟 B 比钟 A 快 10 分.第二方面是指,两钟走的快慢是否相同.如果把钟 A 与钟 B 都拨到零点,经过一段时间后,钟 A 指示凌晨 1 点而钟 B 却指示零点 50 分,则称钟 B 比钟 A 慢 10 分.

经典时空观认为,时钟计时的快慢与时钟的运动状态无关,这就是时钟计时的绝对性.爱因斯坦的时空观否定了这种绝对性,认为时钟计时的快慢与时钟的运动状态有关,具有相对性.

设在 S' 系中有一静止的钟,有两个事件先后发生在同一地点 x' ,此钟记录的時刻分别为 t'_1 和 t'_2 ,于是在 S' 系中的钟所记录两事件的时间间隔为 $\Delta t' = t'_2 - t'_1$,常称为固有时间 Δt_0 ,而 S 系中的钟所记录的时空分别为 t_1 和 t_2 ,即钟所

记录两事件的时间间隔为 $\Delta t = t_2 - t_1$. 若 S' 系以速度 v 沿 xx' 轴运动, 则根据洛伦兹变换式(17-15)可得

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{x'_1 v}{c^2} \right)$$

$$t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{x'_2 v}{c^2} \right)$$

于是

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t'$$

或

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (17-18)$$

由式(17-18)可以看出, 由于 $\sqrt{1 - \beta^2} < 1$, 故 $\Delta t > \Delta t'$. 这就是说, 在 S' 系中所记录的某一地点发生的两个事件的时间间隔, 小于由 S 系所记录该两事件的时间间隔. 换句话说, S 系的钟所记录该两事件的时间间隔要长些, 由于 S' 系是以速度 v 沿 xx' 轴方向相对 S 系运动的, 因此可以说, 运动着的钟走慢了, 此称为时间延缓效应. 同样, 从 S' 系看 S 系的钟, 也认为运动着的 S 系的钟走慢了.

在经典物理学中, 我们把发生两个事件的时间间隔, 看作是量值不变的绝对量. 在狭义相对论中, 发生两事件的时间间隔, 在不同的惯性系中是不相同的. 这就是说, 两事件之间的时间间隔是相对的概念, 它与惯性系有关. 只有在运动速度 $v \ll c$ 时 $\beta \ll 1$, 式(17-18)才简化为

$$\Delta t' \approx \Delta t$$

也就是说, 对于低速运动的情形来说, 两事件的时间间隔近似为一绝对量.

在牛顿力学中, 时间延缓是不可思议的, 但现代物理实验为相对论的时间延缓效应提供了有力的证据. 人们观测到从宇宙空间进入大气层的宇宙射线可以产生两种 μ 子(μ^+ 和 μ^-), 测得 μ 子的平均寿命为 $\tau_0 \approx 2.15 \times 10^{-6}$ s.

从测试中知道, 在距离地球表面为 6000 m 处的大气层中, μ 子的速度为 $v = 2.994 \times 10^8$ m \cdot s $^{-1}$, 即 0.998c. 若按经典力学的时空观, 可算得 μ 子在平均寿命 $\tau_0 = 2.15 \times 10^{-6}$ s 时间内所经历的路程为

$$y_0 = v\tau_0 = 643.7 \text{ m}$$

然而, 从地球上实验室参考系测得 μ 子在其平均寿命的时间内, 由地球上空到达地面所经历的路程, 却为 643.7 m 的十余倍. 由经典力学计算所得的值与实验室参考系所测得的值相差如此之大, 应该怎样解释呢?

下面, 我们从狭义相对论的时间延缓效应来加以说明.

设有一个惯性参考系 S' μ 子静止于这个参考系中, S' 系以速率 $v = 0.998c$ 竖直向下朝着地球参考系 S (即实验室参考系) 运动. 在 μ 子衰变过程中, 从 S' 系来看, 其平均寿命为 τ_0 , 这就是固有时. 然而, 从 S 系来看, 其平均寿命则为 τ , 由式(17-18)有

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.15 \times 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.998c}{c}\right)^2}} = 3.40 \times 10^{-5} \text{ s}$$

可见 $\frac{\tau}{\tau_0} \approx 16$. 这就是说, 从实验室参考系 S 测到的 μ 子的平均寿命 τ 约为相对 μ 子静止的参考系 S' 测得 μ 子平均寿命 τ_0 的 16 倍. 因此, 从实验室参考系 S 来看 μ 子在平均寿命 τ 时间内, 相对于地球所经过的路程应为

$$y = v\tau \\ = (2.994 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \times (3.40 \times 10^{-5} \text{ s}) = 1.02 \times 10^4 \text{ m}$$

这个值是 643.7 m 的 16 倍. 它与实验测得的结果是相符的.

三、长度的收缩

在伽利略变换中, 两点之间的距离或物体的长度是不随惯性系而变的. 长度为 1 m 的直尺, 不论在运动的车厢里或者在车站上测量, 其长度都是 1 m. 在洛伦兹变换中, 由于“同时”具有相对性, 意味着空间距离的量度也将具有相对性.

设有两个观察者分别静止于惯性参考系 S 和 S' 中, S' 系以速度 v 相对 S 系沿 Ox 轴运动. 一细棒静止于 S' 系中并沿 Ox 轴放置, 如图 17-6 所示. 考虑到棒的长度应是在同一时刻测得棒两端点的距离, 因此, S' 系中观察者若同时测得棒两端点的坐标为 x'_1 和 x'_2 , 则

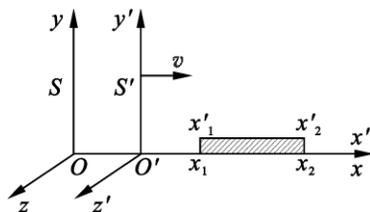


图 17-6 长度的收缩

棒长为 $l' = x'_2 - x'_1$. 通常把观察者相对棒静止时所测得的棒长度称为棒的固有长度 l_0 , 在此处 $l' = l_0$.

当 S' 系相对 S 系的速度 $v=0$ 时, 即两观察者相对静止时, 他们测得的棒长相等, 都等于 $l' = l_0$. 当 S' 系相对 S 系的速度 $v \neq 0$ 时, 比如 S' 系 (以及相对 S' 系静止的棒) 以速度 v 沿 $x(x')$ 轴相对 S 系运动时, 在 S' 系中观察者测得棒长不变, 仍为 l' , 而 S 系中的观察者则认为棒相对 S 系运动, 并同时测得其两端点的坐标为 x_1 和 x_2 , 即棒的长度为 $l = x_2 - x_1$. 利用洛伦兹变换式(17-14)有

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

式中 $t_1 = t_2$. 将上两式相减, 得

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

即

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (17 - 19)$$

由于 $\sqrt{1 - \beta^2} < 1$, 故 $l < l'$. 这就是说, 从 S 系测得运动细棒的长度 l , 比从相对细棒静止的 S' 系中所测得的长度 l' 缩短了 $\sqrt{1 - \beta^2}$ 倍. 同样的论述表明, 静止地放置于 S 系中的直尺, 在 S' 系看来, 因为它相对于 S' 系运动, 其长度收缩了, 这就是爱因斯坦时空观中空间间距量度的相对性. 物体的这种沿运动方向发生的长度收缩效应称为洛伦兹收缩.

在经典物理学中棒的长度是绝对的, 与惯性系的运动无关. 而在狭义相对论中, 同一根棒在不同的惯性系中测量所得的长度不同. 物体相对观察者静止时, 其长度的测量值最大, 而当它相对于观察者以速度 v 运动时, 在运动方向上物体长度要缩短, 其测量值只有固有长度的 $\sqrt{1 - \beta^2}$.

长度收缩效应纯粹是一种相对论效应, 当物体运动速度大到可以和光速比拟时, 这个效应很显著. 如果物体速度 $v \ll c$, 长度收缩效应微乎其微, 就显示不出来了. 我们在日常生活和技术领域中所遇到的运动, 其速度都比光速小得多, 对于这些运动, 由于 $\beta \ll 1$, 式(17 - 19)可简化为 $l' \approx l$. 这就是说, 对于相对运动速度较小的惯性参考系来说, 长度可以近似看作是一绝对量. 在地球上宏观物体所达到的最大速度一般为数千米每秒, 此速度与光速之比的数量级为 10^{-5} 左右. 在这样的速度下, 长度的相对收缩的数量级约为 10^{-10} , 故可以忽略不计.

例 17 - 1 如图 17 - 7 所示, 长度为 1 m 的细棒静止地放在 $O'x'y'$ 平面内, S' 系以速度 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ 沿 Ox 轴相对于 S 系做匀速运动. 在 S' 系的观察者测得此细棒与 $O'x'$ 轴的夹角为 45° . 试问:

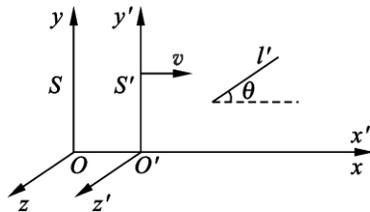


图 17 - 7

在 S 系的观测者测得此细棒的长度以及细棒与 Ox 轴的夹角各是多少？

解 设相对于 S' 系静止的细棒长度 $l' = 1$ m, 它与 $O'x'$ 轴的夹角为 $\theta' = 45^\circ$, 则此细棒在 $O'x'$ 轴和 $O'y'$ 轴上的分量分别为

$$l'_x = l' \cos \theta'$$

$$l'_y = l' \sin \theta'$$

由式(17-19)得 细棒在 Ox 轴上(即沿 v 方向)的分量为

$$l_x = l'_x \sqrt{1 - \beta^2} = l' \cos \theta' \sqrt{1 - \beta^2}$$

在 Oy 方向上, 由于 S' 系相对于 S 系的速度为零, 长度收缩效应只沿运动方向(即 x 方向)发生, 故从 S 系的观测者看, 细棒在 Oy 轴方向的分量 l_y 与 l'_y 相等, 即

$$l_y = l'_y = l' \sin \theta'$$

因此, 在 S 系的观测者测得此细棒的长度为

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = \left[(l' \cos \theta' \sqrt{1 - \beta^2})^2 + (l' \sin \theta')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= l' \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \theta'} \end{aligned}$$

在 S 系中, 设细棒与 Ox 轴的交角为 θ , 则

$$\tan \theta = \frac{l_y}{l_x} = \frac{l' \sin \theta'}{l' \cos \theta' \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\tan \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

由题意, 知 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, $l' = 1$ m, $\theta' = 45^\circ$, 所以有

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \theta'} = 0.79 \text{ m}$$

$$\tan \theta = \frac{\tan \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2$$

$$\theta = 63^\circ 43''$$

可见, 在 S 系的观测者看来, 运动着的细棒不仅长度要缩短, 而且细棒的方向还有改变.

综上所述, 承认光速不变原理意味着传统的经典时空观必须改变, 而代之以爱因斯坦的相对论时空观. 狭义相对论指出了时间和空间的量度与参考系的选择有关. 时间与空间是相联系的, 并与物质有着不可分割的联系. 不存在孤立的时间, 也不存在孤立的空间. 时间、空间与运动三者之间的紧密联系, 深刻地反映了时空的性质. 对爱因斯坦时空观的定量讨论, 需借助于相对论的时空变换(即洛伦兹变换)才能进行.

§ 17 - 4 相对论质量、动量和能量

动力学中,有一系列物理概念,比如质量、动量、能量等都是守恒量.在相对论中,这些物理量将被重新定义.定义时,除保持逻辑上的自治性外,应尽量保持基本守恒定律仍成立,这是定义新物理量的一条原则.

一、相对论质量

在牛顿力学中,速度为 v , 质量为 m 的质点的动量为

$$p = m v \quad (17 - 20)$$

在数值上 p 与 v 成正比, p 与 v 的方向一致.动量守恒是一条基本的规律.

在相对论力学中,动量守恒定律仍然被认为是一条基本的物理定律,而且质点的动量仍用式(17 - 20)定义,式中的 m 仍被定义为速度为 v 的质点的质量.所不同的是,在牛顿力学中质量被认为是与物体速率无关的恒量,而在相对论中,在洛伦兹变换下,必须认为物体的质量和自身的速率有关.

下面我们考察一个例子——两个完全相同粒子的完全弹性碰撞,来导出质量和速率的关系.

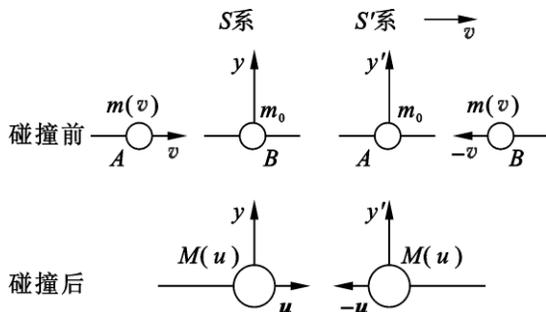


图 17 - 8 两粒子的完全弹性碰撞

惯性系 S' 相对于惯性系 S 以速度 v 匀速运动,完全相同的两个粒子 A 和 B 碰撞后结合成一个复合粒子.如图 17 - 8 所示,在 S 系中观察,粒子 B 静止,其质量为 $m_B = m_0$, 粒子 A 的速度为 v , 其质量为 $m_A = m(v)$. 在 S' 系中观察,粒子 A 静止,其质量为 $m_A = m_0$, 粒子 B 的速度为 $-v$, 其质量为 $m_B = m(v)$.

设碰撞后,复合粒子在 S 系的速度为 u , 其质量为 $M(u)$. 在 S' 系中,复合粒子的速度为 u' , 由对称性可以看出 $u' = -u$, 其质量仍为 $M(u)$. 根据动量守恒定律,有

$$m(v) v = M(u) u$$

由质量守恒,有

$$m(v) + m_0 = M(u)$$

由此有

$$\frac{M(u)}{m(v)} = \frac{m(v) + m_0}{m(v)} = \frac{v}{u} \quad (17 - 21)$$

根据相对论速度变换式(17 - 16) ,B 的速度为

$$u' = -u = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

即

$$\frac{v}{u} - 1 = 1 - \frac{u}{v} \frac{v^2}{c^2}$$

或

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 2\frac{v}{u} + \frac{v^2}{c^2} = 0$$

可解得

$$\frac{v}{u} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (17 - 22)$$

由于 $u < v$,上式中负号应舍去. 因此,由式(17 - 21)和式(17 - 22) ,可得任一个静质量为 m_0 的粒子,当它以速度 v 运动时,该运动粒子的质量为

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \quad (17 - 23)$$

$m(v)$ 是粒子速度为 v 时的质量,称为相对论质量.(17 - 23)式给出了一个物体的相对论质量和它的速率的关系,它是狭义相对论中的一个重要关系式. 注意这一速率 v 是粒子相对于某一参考系的速率,而不是某两个参考系的相对速率. 同一粒子相对于不同的参考系有不同的速率时,在这些参考系中测得的这一粒子的质量也是不同的.

当 $v \ll c$ 时,式(17 - 23)给出 $m \approx m_0$,这时可以认为物体的质量与速率无关,等于其静质量. 这就是牛顿力学讨论的情况. 从这里也可以看出,牛顿力学的结论是相对论力学在速度非常小时的近似.

在宏观物体所能达到的速度范围内,质量随速率的变化非常小,因而可以忽略不计. 对于微观粒子,其速率常会达到接近光速的程度,这时质量随速率的改变就非常明显了.

光子以速度 c 运动. 根据式(17 - 23) ,在 m 有限的情况下,只可能是 $m_0 = 0$.

这就是说,以光速运动的粒子其静质量为零.

由式(17-23)也可以看出,当 $v > c$ 时, m 将成为虚数而无实际意义,这表明真空中的光速 c 是一切物体运动速度的极限.

利用相对论质量与速度关系式(17-23) 相对论动量可表示为

$$p = m v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17-24)$$

在相对论力学中,仍然用动量变化率定义质点所受的力,即

$$F = \frac{d p}{d t} = \frac{d}{d t}(m v) \quad (17-25)$$

仍然正确. 由于当 $v \ll c$ 时, $m \approx m_0$ 与速率无关,上式可退化为

$$F = m \frac{d v}{d t} = m a$$

此即牛顿第二定律的表达式.

二、相对论能量

下面,我们推导相对论的另一重要关系式——质量与能量的关系.

为使讨论方便简单起见,假设一质点在变力 F 作用下沿 x 轴做直线运动. 当质点的速度由 0 增大到 v 时,它所具有的动能(即动能的增量)应等于外力所做的功,即

$$E_k = \int F_x d x = \int \frac{d p}{d t} d x = \int v d p$$

利用 $d(pv) = p d v + v d p$, 上式可写成

$$E_k = p v - \int_0^v p d v$$

将式(17-24)代入上式得

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} d v$$

积分得

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - m_0 c^2$$

利用式(17-23), 上式可写为

$$E_k = m v^2 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - m_0 c^2$$

$$\begin{aligned}
 &= mv^2 + mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - m_0 c^2 \\
 &= mc^2 - m_0 c^2
 \end{aligned} \tag{17 - 26}$$

式(17 - 26)是相对论动能的表达式,在 $v \ll c$ 的极限情况下,有

$$(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\beta^4 + \dots$$

略去高价小量,并代入式(17 - 26),得

$$\begin{aligned}
 E_k &= m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} c^2 - m_0 c^2 \\
 &= m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 - m_0 c^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_0 v^2
 \end{aligned}$$

这正是牛顿力学的动能表达式.这表明,牛顿力学的动能表达式是相对论力学动能表达式在物体的运动速度远小于光速情形下的近似.

此外,由式(17 - 26)可得

$$mc^2 = E_k + m_0 c^2$$

爱因斯坦对此作出了具有深刻意义的说明,他认为 mc^2 是质点运动时具有的总能量,而 $m_0 c^2$ 为质点静止时具有的静能量.上式表明,质点的总能量等于质点的动能与其静能量之和,或者说,质点的动能是其总能量与静能量之差(式 17 - 26).从相对论的观点来看,质点的能量等于其质量与光速的二次方的乘积,若以符号 E 代表质点的总能量,则有

$$E = mc^2 \tag{17 - 27}$$

这就是质量与能量的关系,简称质能关系式.它是狭义相对论的一个重要结论,具有重要的意义.式(17 - 27)指出,质量和能量这两个重要的物理量之间有着密切的联系.

当粒子速率等于零时,总能量就是静能

$$E_0 = m_0 c^2$$

例如:一个电子 $m_{0e} = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 相应的静能为 $E_{0e} = m_{0e} c^2 = 8.19 \times 10^{-14} \text{ J}$; 一个质子的静质量为 $m_{0p} = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 相应的静能 $E_{0p} = m_{0p} c^2 = 1.503 \times 10^{-10} \text{ J}$; 质量 $m_0 = 1 \text{ kg}$ 的物体,其静能 $E_0 = m_0 c^2 = 9 \times 10^{16} \text{ J}$.

在核反应中,以 m_{01} 和 m_{02} 分别表示反应粒子和生成粒子的总静止质量,以 E_{k1} 和 E_{k2} 分别表示反应前后它们的总动能.利用能量守恒定律,有

$$m_{01}c^2 + E_{k1} = m_{02}c^2 + E_{k2}$$

由此得

$$E_{k2} - E_{k1} = (m_{01} - m_{02})c^2$$

$E_{k2} - E_{k1}$ 是核反应后与反应前粒子总动能的增量,也就是核反应所释放的能量,通常以 ΔE 表示, $m_{01} - m_{02}$ 表示经过反应后粒子的静止质量的减小,叫做质量亏损,以 Δm_0 表示.则

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2 \quad (17-28)$$

这说明核反应中释放的总能量等于质量亏损乘上光速 c 的平方.这个公式是关于原子能的一个基本公式.

例 17-2 大麦哲仑云中超新星 1987A 爆发时发出大量中微子.以 m_ν 表示中微子的静质量,以 E 表示其能量($E \gg m_\nu c^2$).已知大麦哲仑云离地球的距离为 d (约 1.6×10^5 l. y.) 求中微子发出后到达地球所用的时间.

解 由式(17-23)、式(17-27),有

$$E = mc^2 = \frac{m_\nu c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

得

$$v = c \left[1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E} \right)^2 \right]^{1/2}$$

由于($E \gg m_\nu c^2$) ,所以可得

$$v = c \left[1 - \frac{(m_\nu c^2)^2}{2E^2} \right]$$

由此得所求时间为

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{c} \left[1 - \frac{(m_\nu c^2)^2}{2E^2} \right]^{-1} = \frac{d}{c} \left[1 + \frac{(m_\nu c^2)^2}{2E^2} \right]$$

此式曾用于测定 1987A 发出的中微子的静质量.实际上是测出了两束能量相近的中微子到达地球上接收器的时间差(约几秒)和能量 E_1 和 E_2 然后根据式

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{d}{c} \frac{(m_\nu c^2)^2}{2} \left(\frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{E_1^2} \right)$$

可求出中微子的静质量.用这种方法估算出的结果是 $m_\nu c^2 \leq 20 \text{eV}$.

三、质能公式在核反应中的应用

能源是人类生存活动中不可缺少的重要资源.能量的年人均消耗量是一个国家工业发展程度和人们生活水平的标志.人类利用的煤、石油和天然气等化石能源是有限的,而且以煤和石油这些化工燃料为主体的能源结构给人类带

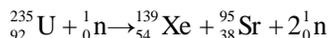
来严重的环境污染. 人类要生存, 要发展, 就需要能源. 要从根本上解决问题, 唯一的办法是开发新能源.

核反应分为重核裂变和轻核聚变. 在原子核的裂变(如原子弹)和聚变(如氢弹)的过程中, 都会有大量的能量被释放出来, 并遵守能量守恒定律. 所释放的能量可用相对论的质能关系进行计算.

1. 核裂变

1934年, 费米(Fermi)研究小组用中子轰击铀原子核获得成功. 拉开了人类利用核能的序幕.

有些重原子核分裂成两个较轻的核, 同时释放出能量, 这个过程称为裂变. 其中典型的是铀原子核 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 的裂变. ${}_{92}^{235}\text{U}$ 中有235个核子, 其中92个为质子、143个为中子. 在热中子的轰击下, ${}_{92}^{235}\text{U}$ 裂变为2个新的原子核和2个中子, 并释放出能量 Q , 其反应式为



实际上, Q 是在核裂变过程中, 铀原子核与生成原子核和中子之间的能量之差. 在这种情况下, 生成物的总静质量比 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 的质量要减少0.22 u, 此处符号“u”表示“原子质量单位”, $1\text{ u} = 1.66 \times 10^{-27}\text{ kg}$. 因此, 由质能公式可知, 1个 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 在裂变时释放的能量为

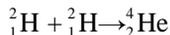
$$\begin{aligned} Q &= \Delta E = (\Delta m)c^2 \\ &= (0.22 \times 1.66 \times 10^{-27}) \times (3.0 \times 10^8)^2 \text{ J} \\ &= 3.3 \times 10^{-11} \text{ J} \approx 200 \text{ MeV} \end{aligned}$$

这个能量值看似很小, 其实不然, 因为1g铀235的原子核数约为 $N = 6.02 \times 10^{23} / 235 = 2.56 \times 10^{21}$. 所以1g铀235的原子核全部裂变时所释放的能量可达 $3.3 \times 10^{-11} \times 2.56 \times 10^{21} \text{ J} = 8.5 \times 10^{10} \text{ J}$. 值得注意的是, 在热中子轰击铀235核的生成物中有多于一个的中子, 若它们被其他铀核所俘获, 将会发生新的裂变. 这一连串的裂变称作链式反应, 利用链式反应可制成各种型号和用途的反应堆. 世界上第一座链式裂变反应堆于1943年建成, 1945年制造出第一颗原子弹, 1954年建成第一座核电站.

2. 核聚变

1934年, 卢瑟福和澳大利亚物理学家 M. L. E. Oliphant, 奥地利化学家 P. Harteck, 利用加速的氘或氚核去轰击氦靶时, 产生氦核同时释放出巨大的能量. 人们经过进一步研究发现, 与重核裂变相比, 轻核聚变不仅可释放更大能量, 而且产物无污染、更清洁, 原料资源十分丰富, 几乎取之不尽. 这就为人类最终解决能源问题指出了方向.

轻核聚变有许多种,它们都是由轻核结合在一起形成较大的核,同时还有能量被释放出来的过程,这个过程称为聚变.一个典型的轻核聚变是两个氘核(${}^2_1\text{H}$, 氢的同位素)聚变为氦核(${}^4_2\text{He}$),其反应式为



在核聚变过程中释放出能量 Q . 在上述聚变过程中,生成物氦核(${}^4_2\text{He}$)的静质量比两个氘核(${}^2_1\text{H}$)的静质量之和要小,它们相差的值约为 $\Delta m = 0.026 \text{ u} = 4.3 \times 10^{-29} \text{ kg}$. 因此,由质能关系式可知,因聚变而释放的能量为

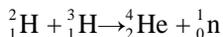
$$\begin{aligned} Q &= \Delta E = (\Delta m)c^2 = 4.3 \times 10^{-29} \times (3.0 \times 10^8)^2 \text{ J} \\ &= 3.87 \times 10^{-12} \text{ J} = 24 \text{ MeV} \end{aligned}$$

应当强调指出,似乎聚变过程释放的能量比起裂变过程释放的能量要小,其实不然,因为氘核的质量轻,1 g 氘(${}^2_1\text{H}$)的原子核数 N 约为 10^{23} 数量级,所以就单位质量而言,轻核聚变释放的能量要比重核裂变释放的能量大许多.

轻核聚变能释放出巨大的能量,为建造轻核聚变反应堆、发电厂提供了美好的前景.然而,如何实现轻核聚变的人工控制,成为当前的一大难题.实现受控核聚变主要有两种可能的途径,即惯性约束和磁约束途径.惯性约束途径就是利用各种方法引爆毫米或亚毫米尺寸的氘氚小球,并使小球中的大部分氘氚都能产生聚变反应.目前,引爆的方式主要是多路高功率激光束同时从各方向聚集到小靶球上,使之被压缩并升温到上千万度的高温.通常称为激光核聚变.磁约束是唯一能在地球上将高温等离子体约束在有限空间,使之持续产生聚变能的途径.磁约束核聚变的装置叫做托卡马克装置(Tokamak apparatus).

受控核聚变研究已经持续了 50 年,我们相信在科学家们的共同努力下,总有一天可以实现核聚变的人工控制,最终解决人类能源问题.

例 17-3 太阳内部的核聚变中,一个氘核(${}^2_1\text{H}$)和一个氚核(${}^3_1\text{H}$)可聚变成一个氦核(${}^4_2\text{He}$),并产生一个中子(${}^1_0\text{n}$)



已知一个氘核的静能量为 $1\,875.628 \text{ MeV}$, 一个氚核的静能量为 $2\,808.944 \text{ MeV}$, 一个氦核的静能量为 $3\,727.409 \text{ MeV}$, 一个中子的静能量为 939.573 MeV . 试问:在这个核聚变反应中,有多少能量被释放出来? 因释放能量而减少的质量是多少?

解 反应前氘核与氚核的静能量之和为

$$1\,875.628 \text{ MeV} + 2\,808.944 \text{ MeV} = 4\,684.572 \text{ MeV}$$

反应后氦核与中子的静能量之和为

$$3\,727.409 \text{ MeV} + 939.573 \text{ MeV} = 4\,666.982 \text{ MeV}$$

可见 在这个核聚变反应中 减少的静能量为

$$\Delta E = 4\,684.572\text{MeV} - 4\,666.982\text{MeV} = 17.59\text{MeV}$$

由 $\Delta E = \Delta mc^2$,可得因释放能量而减少的质量

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = 1.954 \times 10^{-16}\text{MeV}/c^2 = 3.127 \times 10^{-41}\text{kg}$$

应注意,“ MeV/c^2 ”中的“ c ”只作为符号,并不是数值,在核物理中,常用“ MeV/c^2 ”作为质量单位.

四、动量与能量的关系

在相对论中,静质量为 m_0 、运动速度为 v 的质点的总能量和动量,可由下列公式表示

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

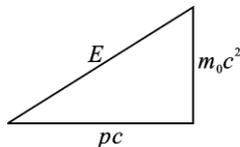


图 17 - 9 相对论动量
能量关系

从这两个公式中消去速度 v 后,将得到动量和能量之间的关系为

$$(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + m^2 v^2 c^2$$

由于 $p = mv$, $E_0 = m_0 c^2$ 和 $E = mc^2$,所以上式可写成

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (17 - 29)$$

这就是相对论的动量与能量关系式.为便于记忆,它们间的关系可用图 17 - 8 的三角形表示出来.一个动能是 E_k 的粒子,用 $E = E_k + m_0 c^2$ 代入式(17 - 29)可得

$$E_k^2 + 2E_k m_0 c^2 = p^2 c^2$$

当 $v \ll c$ 时,粒子的动能 E_k 要比其静能 $m_0 c^2$ 小得多,因而,上式中第一项与第二项相比,可以略去,于是得

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0}$$

即又回到了牛顿力学的动能表达式.

例 17 - 4 已知质子的静能量为 938MeV ,设一质子以速度 $v = 0.80c$ 运动.求其总能量、动能和动量.

解 根据质能关系式,质子的总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{938}{\sqrt{1 - 0.8^2}}\text{MeV} = 1\,563\text{MeV}$$

质子的动能为

$$E_k = E - m_0c^2 = 1\,563\text{MeV} - 938\text{MeV} = 625\text{MeV}$$

质子的动量

$$\begin{aligned} p &= mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1.67 \times 10^{-27} \times 0.8 \times 3 \times 10^8}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 6.68 \times 10^{-19} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

质子的动量也可以依此求得

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - (m_0c^2)^2} = \sqrt{1563^2 - 938^2} \text{MeV} = 1250 \text{MeV} \\ p &= 1250\text{MeV}/c \end{aligned}$$

注意, 在 MeV/c 中“ c ”是作为光速的符号而不是数值. 在核物理中经常用“ MeV/c ”作为动量的单位.

例 17-5 两个静止质量都是 m_0 的小球, 其中一个静止, 另一个以 $v=0.8c$ 运动. 它们做对心碰撞后粘在一起, 试求碰撞后合成小球的静止质量.

解 对微观碰撞系统, 其动量和能量守恒. 将相对论质量公式代入动量守恒定律和能量守恒定律, 得到碰撞后合成小球的质量, 再求其静止质量.

两个静止质量均为 m_0 的小球所组成的系统, 在碰撞前后动量守恒, 以 m 表示碰撞前运动小球的相对论质量, M, V 分别表示碰撞后合成小球的质量和速度, 则有

$$mv = MV$$

而

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{m_0}{0.6}$$

此系统碰撞前后遵循能量守恒定律, 则有

$$m_0c^2 + mc^2 = Mc^2$$

即

$$m_0 + m = M$$

故得

$$M = m_0 + \frac{m_0}{0.6} = \frac{8}{3}m_0$$

设碰撞后合成小球的静止质量为 M_0 , 则根据质速关系, 有

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

所以,合成小球的静止质量为

$$\begin{aligned} M_0 &= M \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} = M \sqrt{1 - \left(\frac{m}{M} \frac{v}{c}\right)^2} \\ &= \frac{8m_0}{3} \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{0.6} \cdot \frac{3}{8m_0} \cdot \frac{0.8c}{c}\right)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} m_0 \end{aligned}$$

§ 17 - 5 广义相对论简介

广义相对论是一个关于时间、空间和引力的理论. 比起狭义相对论, 广义相对论所用的数学知识比较难. 这里只简要地介绍广义相对论的主要思想和时空特性的概念.

一、狭义相对论的成就和缺陷

牛顿认为, 存在绝对的空间和绝对的时间, 二者之间没有联系. 狭义相对论揭示了空间与时间、能量与动量之间的联系. 爱因斯坦认为, 时间和空间不可分割, 是一个整体, 称为四维时空. 能量和动量不可分割, 也是一个整体, 称为四维动量. 狭义相对论认为, 不存在绝对的空间, 也不存在绝对的时间; 空间是相对的, 但它们作为一个整体则是绝对的. 也就是说, 存在绝对的“四维时空”. 能量是相对的, 动量也是相对的, 但它们作为一个整体是绝对的, 也就是说存在绝对的“四维动量”. 此外, 相对论还认为, 光速是绝对的, 在任何惯性系中光速都相同. 狭义相对论建立了一个新的时空理论.

狭义相对论的建立是物理学发展史上的一个里程碑, 成为现代物理的重要理论支柱. 与经典物理学相比较, 狭义相对论更客观、更真实地反映了自然规律. 目前, 狭义相对论不仅被大量的实验事实所证实, 而且已经成为研究宇宙星体、粒子物理以及一系列工程物理(比如反应堆中的能量释放, 带电粒子加速器的设计等)问题的基础. 正当全世界为相对论所震动、惊讶、争论和陶醉时, 正当人们对相对论及其发现者佩服得五体投地时, 爱因斯坦本人却冷静地看到了自己理论的缺陷.

其一, 作为“相对论”基础的惯性系, 现在已经无法定义了. 牛顿认为, 存在绝对空间, 所有相对于绝对空间静止或做匀速直线运动的参考系都是惯性系. 爱因斯坦的相对论认为不存在绝对空间, 牛顿定义惯性系的方法显然不适用了. 一个建议是, 把惯性系定义为, 不受力的物体在其中保持静止或匀速直线运动的参考系. 但是, 什么叫不受力呢? 也许有人会说, 物体在惯性系中, 保持静

止或匀速直线运动的状态,就叫“不受力”。不难看出,这里存在一个逻辑上的循环。定义“惯性系”要用到“不受力”,定义“不受力”,又要用到“惯性系”。这样的定义方式,在物理学中是不能接受的。

其二,万有引力定律无法写成相对论的形式。有几年,爱因斯坦致力于把万有引力定律纳入相对论的框架,几经失败后,他终于认识到,相对论容纳不了万有引力定律。

在取得巨大成就的喜悦之中,爱因斯坦冷静地看到,自己的理论存在着与“惯性系”和“万有引力”有关的两个基本困难。这两个困难的严重性在于相对论是研究惯性系之间的关系的,也就是说,相对论是建立在惯性系基础上的,而这个“基础”又无法定义。另一方面,当时已知的力只有电磁力和万有引力两种,竟然其中的一种就放不进相对论的框架中,真是太令人遗憾了。

爱因斯坦在认真分析这两个缺陷的基础上,把时空几何与运动物质联系起来,于 1915 年建立了新的理论——广义相对论。

二、广义相对论的基本原理

1. 等效原理

把牛顿第二定律和引力定律结合起来,对于在地球引力场中自由下落物体,有

$$G \frac{Mm_g}{r^2} = m_i g$$

其中 M 和 r 分别为地球的质量和半径, m_g 和 m_i 分别为同一落体的引力质量和惯性质量。上式可改写为

$$\frac{m_g}{m_i} = \frac{gr^2}{GM}$$

既然 g 对一切物体都相同,那么 m_g/m_i 就是一个与物体性质无关的常数。选取适当的单位,就能得出 $m_g/m_i = 1$, 即 m_i 和 m_g 相等的结论。

引力质量 m_g 与惯性质量 m_i 相等,已被许多实验结果所证实。由此可以说,引力与惯性是物质同一属性的两种表现。爱因斯坦认识到引力与惯性力有相同的根源,又考虑到引力与惯性力的相似性,把“引力质量与惯性质量相等”的事实进一步推进,提出等效原理:

引力场与惯性场的一切物理效应都是局域不可区分的。

按照等效原理,引力和惯性力在物理效果上完全没有区别,或者说,一个均匀的引力场与一个匀加速参考系完全等价。因此,一个局域参考系的加速度只有相对的意义,这正是广义相对论的基本观点。

现在,我们把惯性系定义为,狭义相对论所确立的物理规律在其中全部有效的参考系.上述自由下落的密封舱就是一个局域惯性系,宇宙飞船的太空舱内是一个局域惯性系.因此,惯性系是在引力场中作自由运动的参考系,于是惯性系就成为了至少能够局域地实现的参考系.

爱因斯坦认为,真正严格的惯性系只能是一些局域惯性系(partial inertial system).各个点上的局域惯性系之间是可以有相对加速度的,引力的作用就在于决定各个局域惯性系之间的联系.

2. 广义相对性原理

要破除惯性系在表达物理规律上的特殊地位,就要使一切参考系(包括惯性系与非惯性系)都有平等的权利.

等效原理的提出为广义相对性原理给出了一个强有力的论据.在爱因斯坦看来,我们没有什么理由把加速参考系排斥在相对性原理之外,因为根据加速场和引力场等效原理,我们可以把加速参考系 S' 看作是静止的(但 S' 中存在着一引力场),这个静止的参考系 S' 与其他各惯性系 S 相比,应该没有什么太特殊的地方.于是爱因斯坦认识到,物理规律应当在任何参考系中都能表达,反映物理规律的方程式在所有参考系中应当有相同的形式.把狭义相对论的相对性原理加以推广,就成为“广义相对性原理”:

一切参考系中的物理规律都是完全平等的.

这是广义相对论的又一个基本假设.

三、引力场效应的描述

爱因斯坦从这两个基本原理出发建立了广义相对论——一个相对论性的引力理论.这个理论的基本框架是这样的:引力可以等效为惯性力,惯性力又与所在参考系的加速运动有关,而一个以任意加速度运动的参考系的特征又可利用四维时空的几何性质来描述.这样,一个引力场就可等效为一个四维时空几何场.爱因斯坦把这种几何场用弯曲时空的黎曼几何表示.

狭义相对论认为时间、空间是一个整体(四维时空),能量、动量是一个整体(四维动量),但没有指出时间-空间与能量-动量之间的关系.广义相对论进一步指出了这一关系,认为能量-动量的存在(也就是物质的存在),使四维时空发生了弯曲.图 17-10 直观地表示了时空性质与运动物质存在之间的联系.

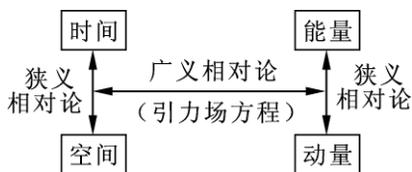


图 17-10 时空性质与物质存在的联系

广义相对论认为,万有引力并不是真正的力,而是时空弯曲的表现,如果物质消失,时空就回到平直状态.质点在万有引力作用下的运动(例如地球上的自由落体,行星绕日运动等)是弯曲时空中的自由运动——惯性运动.它们在时空中描出的曲线,虽然不是直线,却是直线在弯曲时空中的推广——短程线,即两点之间的最短线.当时空恢复平直时,短程线就成为通常的直线.

我们打一个形象的比喻来说明时空弯曲,假如四个人各拉紧床单的一个角,床单这个二维空间就是平的.假设床单足够光滑,床单的微小摩擦力可以忽略.放一个小玻璃球在上面,如果不去推这个小玻璃球,它就会保持静止或匀速直线运动状态不变.如果在床单中央放一个铅球,床单就会凹下去,这个二维空间就弯曲了.这时,如果再放置一个小玻璃球在床单上,它就会滚向中央的大球.按照牛顿的观点,这是由于大球作用的“万有引力”吸引小球.按照爱因斯坦的观点,则是由于大球的存在使空间变得弯曲了,并不存在什么“引力”,小球落向大球乃是弯曲空间中的自由(惯性)运动.

对于物理学的不同领域,狭义相对论和广义相对论所起的作用各不相同.在低速、宏观领域,狭义相对论和广义相对论的效应均可略去.在高速、微观领域,狭义相对论取得了辉煌成就.对于大尺度的宏观系统,才是广义相对论的用武之地.

思考题

- 17-1 什么是相对论?什么是狭义相对论?什么是广义相对论?
- 17-2 为什么要建立相对论?
- 17-3 牛顿力学时空观的核心是什么?
- 17-3 迈克耳孙-莫雷实验在建立狭义相对论中的意义何在?有人说“它是相对论赖以产生的判决性实验.”你认为这种理解对吗?
- 17-4 什么是力学相对性原理?在一个参考系内作力学实验能否测出这个参考系相对于惯性系的加速度?
- 17-5 什么是洛伦兹变换?它的基础是什么?它和伽利略变换有什么联系和区别?
- 17-6 在洛伦兹变换中,那些量是不变量?加速度是不变量吗?
- 17-7 同时性的相对性是什么意思?为什么会有这种相对性?如果光速是无限大,是否还会有同时性的相对性?
- 17-8 前进中的一列火车的车头和车尾各遭到一次闪电轰击,据车上的观察者测定这两次轰击是同时发生的.试问,据地面上的观察者测定它们是否

仍然同时发生？如果不同时，何处先遭到轰击？

17-9 在某一参考系中同一地点、同一时刻发生的两个事件，在任何其他参考系中观察都将是同时发生的，对吗？

17-10 如果在 S' 系中两事件的 x' 坐标相同， y' 坐标不同，那么当在 S' 系中观察到此两事件同时发生时，在 S 系中观察它们是否也同时发生？

17-11 一架民航客机以 $200 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 的平均速度相对地面飞行，飞机上的乘客下机后，是否因为时间延缓而需要对手表进行修正？

17-12 长度的量度和同时性有什么关系？为什么长度的量度会和参考系有关？长度缩短效应是否因为棒的长度受到了实际的压缩？

17-13 在相对论中，在垂直于两个参考系的相对速度方向的长度的量度与参考系无关，而为什么在这个方向上的速度分量却又和参考系有关？

17-14 在 S' 惯性系中 $t' = 0$ 时刻，一根细棒两端点的坐标分别是 x'_1 和 x'_2 ，则棒长为 $x'_2 - x'_1$ 。要在实验室坐标系 S 中求出此棒的长度，如果利用变换式 $x = \frac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ 则得 $x_2 - x_1 = \frac{(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ，于是，运动着的细棒变长了，这与狭义相对论中的长度收缩效应是相左的，问题出在什么地方？试解释之。

17-15 相对论的时间和空间概念与牛顿力学有何不同？有什么联系？

17-16 相对论中的质量、动量、动能、总能量、静止能量各如何表示？为使牛顿力学符合相对论效应，牛顿力学有关公式应如何修正？

17-17 在狭义相对论中，粒子的动能是否等于 $\frac{1}{2}mv^2$ ？

17-18 在什么条件下 $E = pc$ 的关系才成立？

17-19 广义相对论有哪两条基本假设？它是怎样提出来的？两者有何不同？

习 题

17-1 设 S' 系以速率 $v = 0.60c$ 相对于 S 系沿 xx' 轴运动，且在 $t = t' = 0$ 时， $x = x' = 0$ 。

(1) 若有一事件，在 S 系中发生于 $t = 2.0 \times 10^{-7} \text{ s}$ ， $x = 50 \text{ m}$ 处，该事件在 S' 系中发生于何时刻？

(2) 若有另一事件发生于 S 系中 $t = 3.0 \times 10^{-7} \text{ s}$ ， $x = 10 \text{ m}$ 处，在 S' 系中测得这两个事件的时间间隔为多少？

17-2 设有两个参考系 S 和 S' ，它们的原点在 $t = 0$ 和 $t' = 0$ 时重合在一

起. 有一事件在 S' 系中发生在 $t' = 8.0 \times 10^{-8} \text{ s}$, $x' = 60 \text{ m}$, $y' = 0$, $z' = 0$ 处. 若 S' 系相对于 S 系以速率 $v = 0.6c$ 沿 xx' 轴运动, 问该事件在 S 系中的时空坐标各为多少?

17-3 一列火车长 300 m (火车上的观察者测得), 以 $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度行驶. 地面上观察者发现有两个闪电同时击中火车的前后两端. 问火车上的观察者测得两闪电击中火车前后两端的时间间隔为多少?

17-4 在惯性 S 系中, 某事件 A 发生在 x_1 处, 经过 $2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$ 后, 另一事件 B 发生在 x_2 处, 已知 $x_2 - x_1 = 360 \text{ m}$.

问: (1) 能否找到一个相对 S 系做匀速直线运动的参考系 S' , 在 S' 系中, 两事件发生在同一地点?

(2) 在 S' 系中, 上述两事件的时间间隔为多少?

17-5 设在正负电子对撞机中, 电子和正电子以速度 $v = 0.90c$ 相向飞行, 它们之间的相对速度为多少?

17-6 以速度 v 沿 x 方向运动的粒子, 在 y 方向上发射一光子, 试求地面观察者所测得光子的速度.

17-7 S' 系以恒定速率相对 S 系沿 xx' 轴运动. 在惯性系 S 中观察到有两个事件发生在同一地点, 其时间间隔为 4.0 s , 从另一惯性系 S' 中观察到这两个事件的时间间隔为 6.0 s , 试问从 S' 系测量到这两个事件的空间间隔是多少?

17-8 半人马星座 α 星是离太阳系最近的恒星, 它距地球为 $4.3 \times 10^{16} \text{ m}$. 设有一宇宙飞船自地球往返于半人马星座 α 星之间. (1) 若宇宙飞船的速率为 $0.999c$, 按地球上的时钟计算, 飞船往返一次需要多少时间? (2) 若以飞船上的时钟计算, 往返一次的时间又为多少?

17-9 宇宙射线与大气相互作用时能产生 π 介子衰变, 此衰变在大气层放出叫做 μ 子的粒子. 这些 μ 子的速度接近光速 ($v = 0.998c$). 由实验室内测得的静止 μ 子的平均寿命等于 $2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$, 试问在 8000 m 高空由 π 介子衰变放出的 μ 子能否飞到地面.

17-10 在 S 系中观察到两个事件同时发生在 x 轴上, 其间距离是 1 m . 在 S' 系中观察这两个事件之间的距离是 2 m . 求在 S' 系中这两个事件的时间间隔.

17-11 一只装有无线电发射和接收装置的飞船, 正以 $\frac{4}{5}c$ 的速度飞离地球. 当宇航员发射一无线电信号后, 信号经地球反射, 60 s 后宇航员才收到返回信号. (1) 在地球反射信号的时刻, 从飞船上测得的地球离飞船多远? (2) 当飞船接收到反射信号时, 地球上测得的飞船离地球多远?

17-12 某人测得一根静止细棒的长度为 l_0 , 其质量为 m_0 , 于是得出此棒的线密度为 $\lambda = \frac{m_0}{l_0}$. (1) 当细棒以速度 v 沿棒长方向运动时, 此人测得该棒的线密度为多少? (2) 若细棒以速度 v 沿垂直于棒长方向运动时, 此人测得该棒的线密度又为多少?

17-13 S' 系以速率 v 相对 S 系沿 xx' 轴运动. 有一固有长度为 l_0 的棒在 S 系中沿 x 轴放置, 并以速率 u 沿 xx' 轴运动. 试问从 S' 系测得此棒的长度为多少?

17-14 若从一惯性系中测得宇宙飞船的长度为其固有长度的一半, 试问宇宙飞船相对此惯性系的速度为多少? (以光速 c 表示)

17-15 一固有长度为 4.0 m 的物体, 若以速率 $0.60c$ 沿 x 轴相对某惯性系运动, 试问从该惯性系来测量, 此物体的长度为多少?

17-16 一静止面积为 $S_0 = 100 \text{ m}^2$, 面密度为 σ_0 的正方形板, 当观测者以 $v = 0.6c$ 的速度沿其对角线运动, 求:

(1) 所测得图形的形状与面积;

(2) 面密度之比 $\frac{\sigma}{\sigma_0}$.

17-17 若一电子的总能量为 5.0 MeV , 求该电子的静能、动能、动量和速率.

17-18 一被加速器加速的电子, 其能量为 $3.00 \times 10^9 \text{ eV}$.

(1) 这个电子的质量是其静质量的多少倍?

(2) 这个电子的速率为多少?

17-19 在什么速度下粒子的动量等于非相对论动量的两倍? 又在什么速度下粒子的动能等于非相对论动能的两倍?

17-20 在电子偶的湮没 (annihilation) 过程中, 一个电子和一个正电子相碰撞而消失, 并产生电磁辐射. 假定正负电子在湮没前均静止, 由此估算辐射的总能量 E .

17-21 若把能量 $0.50 \times 10^6 \text{ eV}$ 给予电子, 让电子垂直于磁场运动, 其运动径迹是半径为 2.0 cm 的圆.

(1) 该磁场的磁感强度 B 有多大?

(2) 此电子的动质量为静质量的多少倍?

17-22 有一 π^+ 介子, 在静止下来后衰变为 μ^+ 子和中微子 ν , 已知其静止质量分别为 m_π , m_μ 和 0 , 试求 μ^+ 和中微子 ν 的动能.

第 18 章 量子物理基础

19 世纪末,经典物理理论在当时看来已发展到相当完善的阶段.常见的各种物理现象都可以从相应的理论中得到说明:作机械运动的物体,当其运动速度远比光速小时,准确地遵从牛顿力学的规律,热现象有完整的热力学和统计力学来解释,电磁现象被总结为麦克斯韦方程,光的现象有光的波动理论(最后也归结为麦克斯韦方程)来说明.就在物理学的经典理论取得重大成就的同时,人们又发现了一些新的物理现象——热辐射、光电效应、放射性、原子的线状光谱、电子等.新的实验事实却给经典物理学以有力的冲击,这些冲击主要来自以下三个方面.一是 1887 年的迈克尔孙 - 莫雷实验否定了绝对参考系的存在;其次是 1900 年瑞利和金斯用经典的能量均分定理来说明热辐射现象时,出现了所谓的“紫外灾难”;三是 1896 年贝克勒尔首次发现放射性现象,说明原子不是物质的基本单元,原子是可分的.经典物理理论无法对这些新的实验结果作出正确的解释.由此揭露了经典物理的局限性,突出了经典物理与微观世界规律性的矛盾,从而为揭开量子物理发展的序幕奠定了基础.

为了摆脱经典物理学的困境,一些思想敏锐而又不为旧观念束缚的物理学家,重新考虑了物理学中的某些基本概念,经过艰苦而又曲折的道路,提出了新的思想、新的理论.为说明黑体辐射现象,普朗克于 1900 年提出了著名的“能量子”假说;1905 年,爱因斯坦在提出狭义相对论的同时,又提出了“光量子”的概念,成功地解释了光电效应的实验规律.从而将光的波动性和粒子性统一了起来.直到 1913 年,一些知名的物理学家仍把爱因斯坦的光量子概念谴责为“迷失了方向”.可是,年仅 28 岁的丹麦物理学家尼尔斯·玻尔,却创造性地把量子概念用到卢瑟福原子结构模型上,提出了量子态的概念,解释了长达 30 年的光谱之谜.这是物理学发展史上的一个重要成就.然而,玻尔的理论只是在经典理论的基础上加了量子假设,仍不能完全反映微观世界的本质.为了建立严密的理论体系,德布罗意于 1924 年将光的波粒二象性推广到实物粒子,在此基础上,经薛定谔、海森堡、玻恩、狄拉克等人的几年努力,终于在 1925 ~ 1928 年建立起了描述微观粒子运动规律的量子力学.它和相对论一起构成近代物理学的两大理论支柱.

量子力学是反映微观粒子运动规律的理论,量子力学与相对论并列被认为

是近代物理学的两大理论支柱. 量子力学的许多基本概念、规律和方法都与经典物理的截然不同. 在物理学中引起了深刻的变化, 使 20 世纪的物理学彻底改观. 尽管它的哲学意义至今仍在科学家中争论不休, 然而, 量子力学的应用越来越广泛, 量子力学已在现代科学和技术中获得了巨大的成功, 如材料科学, 生命科学(DNA 螺旋结构, 有机生物分子), 半导体的掺杂、纳米技术、介观物理特性, 化学(量子化学), 电子技术(量子点、量子线、量子开关等等), 使得它成为现代物理学的基础之一.

系统地介绍量子力学, 需要涉及较深的概念和较多的数学工具. 限于本课程的要求, 我们只介绍量子物理建立的主要思想. 在介绍能量子、光量子概念的基础上, 引入实物粒子波动性的概念, 然后介绍量子力学的基本方程——薛定谔方程的基本概念和方法, 对用量子力学处理的氢原子等实际问题, 只能介绍经计算得到的一些重要结论.

§ 18 - 1 量子概念的诞生

量子概念是普朗克于 1900 年首先提出的. 19 世纪末, 人们发现了原子的线状光谱、X 射线、放射性、电子等许多新的实验现象, 这些新现象用经典物理学理论是无法解释的. 1900 年, 普朗克针对经典物理学解释黑体辐射时遇到的困难, 提出辐射能量量子化的概念, 从而拉开了量子物理学发展的序幕.

一、黑体辐射

在热力学温度 $T > 0$ 的任何情况下, 一切宏观物体都会向周围空间辐射能量, 这种能量叫做辐射能.

实验指出, 在一定时间内, 物体向周围空间辐射的能量及辐射能按波长的分布都与该物体的温度密切相关. 在室温下, 物体单位时间内辐射的能量很少, 而且辐射波谱大多分布在波长较长的区域. 随着温度升高, 单位时间内辐射的能量迅速增加, 辐射能中短波部分所占比例也逐渐增大. 例如, 把一根铁棒插入炉火中, 它会被烧得通红. 起初在温度不太高时, 我们看不到它发光, 却可以感觉到它辐射出来的热量. 随着温度的升高, 我们不仅会感觉到它辐射的热量的迅速增长, 还会看到铁棒开始微微的发红了. 如果继续升高温度, 它的颜色也由暗红逐渐转为橙红, 再变黄, 继而变白. 当温度极高时, 铁棒呈现青白色, 我们会感觉到铁棒灼热逼人. 这种现象其实是物质共有的特性. 随着物质温度的升高, 不仅单位时间内辐射的能量迅速增加, 而且辐射电磁波中可见光成分逐渐显著, 物体由暗红色, 逐渐变为赤红、黄、白、蓝白色等. 物质的这种由其温度所决定的电磁辐射称为热辐射(heat radiation). 物体在辐射电磁波的同时, 也吸

收投射到它表面的电磁波. 当辐射和吸收达到平衡时, 物体的温度不再变化而处于热平衡状态, 这时的热辐射称为平衡热辐射.

以上事实表明, 辐射能随着温度的升高而增加, 同时辐射能的分布也逐渐向短波部分转移. 如图 18-1 所示, 画出了几个温度下, 物体表面发出辐射的强度按波长的分布曲线. 每一条曲线都有一个辐射强度的最大值, 在这个温度下物体辐射的电磁波主要集中在这一波长附近. 我们所看到的辐射体的颜色就是由它决定的.

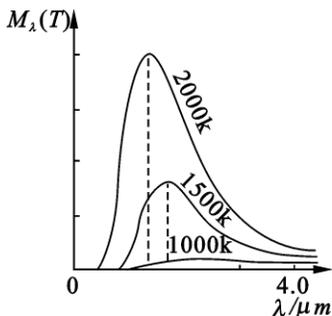


图 18-1 辐射随波长的分布

理论和实验表明, 物体的辐射本领越大, 其吸收本领也越大, 反之亦然. 辐射能量具有交换性质, 物体向外辐射能量, 同时也吸收其他物体的辐射. 实验发现, 黑色表面吸收最好, 发射效率也最高. 人们有时在评论某个贪财的人时, 常贬称他为“黑心”, 就是说这个人对于什么东西都贪得无厌. 与此相似, 在任何温度下, 如果一个物体能够完全吸收任何波长的入射辐射能, 我们就称该物体为绝对黑体, 简称黑体 (black body).

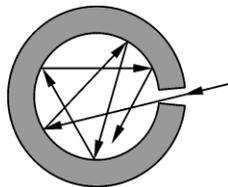


图 18-2 带有小孔的空腔作为黑体的模型

自然界中, 真正的黑体是不存在的. 和质点、刚体、理想气体一样, 黑体也是一种理想模型. 我们可以得到很接近黑体的空腔辐射体, 如图 18-2 所示. 从小孔进入空腔的辐射能在空腔内经腔壁反射, 每反射一次腔壁就吸收一部分能量. 经多次反射后, 进入空腔的辐射能几乎全部被空腔内壁吸收, 最后再由小孔出的辐射能小至可以忽略. 更何况, 一旦射线由小孔射入空腔, 将很难再通过小孔反射出来. 在日光照射下建筑物的小窗口看起来总是黑的, 就是这个缘故.

在定量介绍热辐射的基本规律之前, 下面先说明一下有关的物理量.

(1) 单色辐出度

单位时间内,从热力学温度为 T 的黑体的单位面积上,在单位波长范围内所辐射的电磁波能量,称为单色辐射出射度 (radiant exitance),简称单色辐出度.显然,单色辐出度是黑体的热力学温度 T 和波长 λ 的函数,用 $M_\lambda(T)$ 表示.

(2) 辐出度

在单位时间内,从温度为 T 的黑体的单位面积上,所辐射出的各种波长的电磁波的能量总和,称为辐射出射度,简称辐出度,它只是黑体的热力学温度 T 的函数,用 $M(T)$ 表示,其值显然可由 $M_\lambda(T)$ 对所有波长的积分求得,即

$$M(T) = \int_0^\infty M_\lambda(T) d\lambda$$

19 世纪末,人们研究了各种温度下的黑体辐射,得出了图 18-1 那样的实验曲线.分析实验结果,可以得到关于黑体辐射的两条普遍规律.

1. 斯特藩 - 玻耳兹曼定律

在图 18-1 中,每一条曲线都反应了在相应温度下,黑体的辐射强度随波长的变化规律,而曲线下的总面积则代表在该温度下黑体的辐出度 $M(T)$.由图可见,随着温度的升高, $M(T)$ 迅速地增大, $M(T)$ 与温度的关系是

$$M(T) = \sigma T^4 \quad (18-1)$$

式中 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4})$ 称为斯特藩常数.这一结果被称为斯特藩 - 玻耳兹曼定律.

2. 维恩位移定律

由图 18-1 可见,对应于每一温度 T ,单色辐出度 $M_\lambda(T)$ 都有一最大值,对应 $M_\lambda(T)$ 峰值的波长用 λ_m 表示. λ_m 随温度的升高而减小, λ_m 与 T 成反比

$$T\lambda_m = b \quad (18-2)$$

式中常数 $b = 2.897 \times 10^{-3} (\text{m} \cdot \text{K})$,这一结果被称为维恩位移定律.此定律指出,黑体的温度升高时,单色辐出度的最大值向短波方向移动.由此可以说明,为什么炉火温度升高时,其颜色由红变黄的现象.

实验发现,对于大多处于常温状态的物体而言,所辐射电磁波的波长主要位于红外波段.这一特性对于观察和测定肉眼无法观察的对象具有特殊的意义.正是这一发现和它在军事方面的重要用途,使红外技术迅速发展起来.第二次世界大战期间,相继出现了红外探测、红外夜视等军用红外技术.以后,尤其是 20 世纪 50 年代以来,随着半导体工艺和激光技术的发展,为红外技术提供了灵敏度高、响应速度快的光子探测器件和单色性好、能量集中的相干光源,从而使红外技术获得了突飞猛进的发展.目前,红外技术的应用十分广泛.在工农业生产、医疗卫生和科学研究中,主要用于红外测温、红外加热、红外无损检测、

红外光谱分析、红外热成像、红外遥感等。特别在军事上得到了广泛应用。如红外夜视、红外侦察、红外制导、红外雷达等。

二、量子假说

在 19 世纪末,已经从实验上得到了如图 18 - 1 所示的黑体辐射规律。如何从理论上得出这些曲线的解析表达式,就成为当时物理学中引人注目的问题之一。不少物理学家曾作过许多努力。

1893 年,维恩把辐射体的原子看作是带电谐振子,运用统计方法求得了辐射公式

$$M_{\lambda}(T) = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$$

式中 C_1 、 C_2 是两个经验常数。此公式只在短波部分与实验符合,如图 18 - 3 所示。

1899 年,瑞利和金斯把分子动理论中的能量按自由度均分原理应用于辐射情况,得到如下公式

$$M_{\lambda}(T) = 2\pi c \frac{kT}{\lambda^4} \quad (18 - 3)$$

式中 c 为光速, k 为玻耳兹曼常数。此式只适用于长波段(见图 18 - 4),当波长很短时引起发散。这就是当时有名的“紫外灾难”(ultraviolet catastrophe)。

普朗克总结了前人失败的教训,在认真分析和反复思索后,于 1900 年大胆地抛弃了经典理论中关于能量连续辐射的传统观念,提出了能量不连续的全新的假设——“能量量子化”假说。其内容是:辐射体是由许多带电谐振子组成(分子、原子的振动可视为线性谐振子)的,线性谐振子振动时向外辐射电磁波。各谐振子振动的频率不同,每一个谐振子只发出一种单色的辐射,整个辐射的全部谐振子就发出连续的辐射。

每个线性谐振子只能处于某些特定的离散状态,在这些状态中,对于频率为 ν 的线性谐振子来说,其能量为

$$\varepsilon = h\nu \quad (18 - 4)$$

这是能量的最小单元,叫做“量子”(quantum of energy)。空腔壁上带电谐振子发射或吸收的能量 E 只能取最小能量 $h\nu$ 的整数倍,即

$$E = nh\nu$$

式中 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ 称作量子数。 h 叫做普朗克常量,1998 年,国际科技数据委员会的最新推荐值为

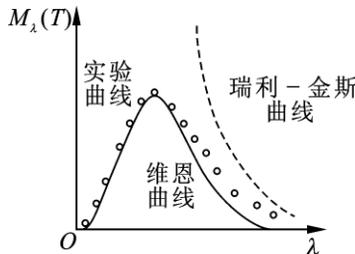


图 18 - 3

$$h = 6.626\ 068\ 76(52) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

一般计算时取 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. 这一能量离散(旧称“分立”)的概念,称为能量量子化.

相邻两状态的能量差值是 ε , 当谐振子吸收或辐射电磁波时, 将从一个状态跃迁到另一个状态.

按照这个假设, 一个频率为 ν 的谐振子的最小能量是 $h\nu$, 它在与周围的辐射场交换能量时, 也只能整个地吸收或放出一个个能量子.

三、普朗克黑体辐射公式

普朗克按照他的量子假设, 并用经典的玻耳兹曼统计代替能量均分定理, 求出了一维谐振子的平均能量, 从而得到在单位时间内, 从温度为 T 的黑体单位面积上, 在频率 ν 附近单位频率范围内所辐射的能量为

$$M_\nu(T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (18-5a)$$

这就是著名的普朗克黑体辐射公式. 由普朗克公式给出的结果与实验结果是十分吻合的. 因为 $\lambda\nu = c$, 普朗克黑体辐射公式还可以写成

$$M_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (18-5b)$$

普朗克公式与实验结果符合得很好. 而且, 在频率低时, $h\nu \ll kT$, 普朗克公式蜕化成瑞利-金斯定律的公式, 在频率高时, $h\nu \gg kT$, 普朗克公式蜕化成维恩定律的公式.

普朗克的能量子假设, 冲破了被神圣化了的经典物理的束缚, 第一次提出了微观粒子具有离散的能量值, 打开了人们认识微观世界的大门, 在物理学发展史上起了划时代的作用. 能量是一份一份的, 而不是连续的, 就像物质是由原子、分子组成的一样. 在这个基础上, 经过许多人的努力, 终于逐步认识了辐射的粒子性. 描述微观粒子(分子、原子、电子等等)的一些物理量具有的量子化特性, 最终形成了反映微观粒子运动规律的量子物理学.

事实上, 能量子假设不仅圆满地解释了绝对黑体的辐射, 还解释了固体的比热, 以后又被爱因斯坦发展推广为著名的“光量子假设”, 并在此基础上建立了爱因斯坦光电效应方程, 揭示了光的波粒二象性, 成功地解释了光的波动理论无能为力光电效应. 后来, 德布罗意从爱因斯坦的光量子理论出发, 提出了电子、中子等微观粒子也具有波粒二象性的假设, 并为戴维逊和革末等人通过实验得到证实. 由此逐渐形成了近代物理学中极为重要的量子理论. 由于普朗克在发现能量子方面的重大贡献, 而获得 1918 年物理学诺贝尔奖.

实际上,普朗克的贡献远远超出物理学范畴,它启发人们在新事物面前,敢于冲破传统思想观念的束缚,勇于建立新观点、新概念,建立新理论。

可见,1900年是物理学发展史上量子论萌芽的一年。它标志着人类对自然规律的认识已从宏观领域进入到微观领域。

例 18-1 一弹簧振子的质量 $m = 0.5 \text{ kg}$, 劲度系数 $k = 8.82 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 振幅 $A = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 。若此弹簧振子的能量是量子化的, 则当量子数 n 改变 1 时, 能量的相对变化率有多大?

解 弹簧振子的频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

振子的机械能为

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

根据普朗克假说, 此振子的能量为

$$E = nh\nu$$

所以

$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{\pi A^2}{h} \sqrt{km}$$

当量子数改变 1 时, 能量的相对变化率为

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\nu}{nh\nu} = \frac{1}{n} = \frac{h}{\pi A^2 \sqrt{km}} = 10^{-30}$$

可见, 对于宏观系统来说, 能量的量子本性是很不明显的。

例 18-2 试证明, 普朗克公式在短波段可化为维恩公式, 而在长波段可化为瑞利-金斯公式。

证明 (1) 根据普朗克公式

$$M_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}$$

当波长足够短时, 上式分母中的指数 $e^{\frac{hc}{\lambda T}} \gg 1$, $e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1 \approx e^{\frac{hc}{\lambda T}}$, 于是, 普朗克公式化为

$$M_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda T}}$$

即为维恩公式, 式中常数 $2\pi hc^2 = C_1$, $\frac{hc}{k} = C_2$

(2) 当波长足够长时, 将式(18-5b)分母展为级数

$$e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1 = \frac{hc}{k\lambda T} + \frac{1}{2} \left(\frac{hc}{k\lambda T} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{hc}{k\lambda T} \right)^3 + \dots$$

略去二阶以上小量,得

$$M_{\lambda}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{k\lambda T}{hc} = 2\pi c \frac{kT}{\lambda^4}$$

此式即为瑞利 - 金斯公式.

例 18 - 3 试由普朗克公式推导出斯特藩 - 玻耳兹曼定律和维恩位移定律.

解 (1)由普朗克公式推导出斯特藩 - 玻耳兹曼定律,为方便起见,令 $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ 则

$$d x = - \frac{hc}{\lambda^2 kT} d \lambda = - \frac{kT}{hc} x^2 d \lambda$$

于是,普朗克公式(18 - 5b)可写为

$$M_{\lambda}(T) = \frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1}$$

故黑体在一定温度下的辐射能密度为

$$M(T) = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} d x$$

其中积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} d x = 6.494$$

于是得

$$M(T) = 6.494 \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} = \sigma T^4$$

上式即为斯特藩 - 玻耳兹曼定律.由此结果可以算出

$$\sigma = 6.494 \frac{2\pi k^4}{h^3 c^2} = 5.670 \times 10^{-8} (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4})$$

(2)由普朗克公式推导维恩位移定律,为求 $M_{\lambda}(T)$ 的极大值,将 $M_{\lambda}(T)$ 对 x 求导数,并令其导数等于零,即

$$\frac{d}{dx} M_{\lambda}(T) = \frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3} \cdot \frac{5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$$

由此得

$$5e^x - xe^x - 5 = 0$$

用迭代法解此超越方程,得 $x_m = 4.965$

$$\text{即} \quad \frac{hc}{\lambda_m kT} = 4.965$$

所以

$$\lambda_m T = \frac{hc}{4.965k} = b$$

此即维恩位移定律,由此结果可以算出

$$b = \frac{hc}{4.965k} = 2.897 \times 10^{-3} (\text{m} \cdot \text{K})$$

§ 18 - 2 光的波粒二象性

一、光电效应的实验规律

1887年,赫兹在用电火花放电的实验中,发现了电磁波,并确定其传播速度等于光速.在这个实验中他还观察到,当紫外光照射在火花隙的负极上,放电就比较容易发生,这就是光电效应的征兆.在以后的几年中,其他物理学家对此现象作了进一步研究,他们用紫外光以及波长更短的X光照射一些金属,都观察到被光照射的金属有电子逸出的现象.当光照射金属时,在一定条件下,金属中的自由电子可以吸收光能而逸出金属表面的现象叫做光电效应(photoelectric effect).所逸出的电子叫光电子(photoelectron).光电子这一名词仅表示它由于受光的照射而从金属表面飞出来的,它与普通电子并没有本质的区别.

研究光电效应的实验装置如图18-5所示.在高真空的玻璃泡内装有阴极K和阳极A.在玻璃泡上开有一个对紫外线吸收很小的石英玻璃小窗,紫外线能通过小窗照射在K极上. A极与K极之间加上一定的电压.当K不被光照射时,检流计G的指针不动,说明电路中无电流.当光照射K时,G的指针发生偏转,这表明电路中出现了电流.电路中之所以有电流出现,是因为光照射在阴极K上产生了光电效应.逸出的光电子在加速电势差 $U = V_A - V_K$ 的电场作用下,从阴极K飞向阳极A的结果.电路中的这种电流称为光电流(photo-current).

当以一定频率、一定强度的光照射K极时,光电流随加速电势差的改变而改变.从而可以测得光电流随加速电势差变化的曲线,如图18-5所示.由曲线

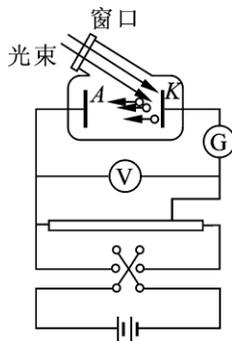


图 18 - 4 光电效应实验示意图

可以看出,若加速电势差为正值,光电流 I 随加速电势差 U 的增加而增大(曲线 AB 段);当加速电势差增大到某一数值后,光电流基本不再增加(曲线 BC 段),此时的光电流称为饱和光电流 I_s .若改变电源正负极,即 K 接正极, A 接负极,使 AK 之间的加速电势差反向,光电子离开 K 极后,将受到电场的阻止作用,光电流将随 $|U|$ 的增加而减小(曲线 AD 段);光电流减小到零时,所对应的加速电势差的绝对值 U_0 被称为遏止电势差(stopping potential).也就是说,当 AK 之间的反向电势差为 U_0 时,从 K 极逸出的动能最大($E_{k\max}$)的电子恰好不能到达 A 极.此时

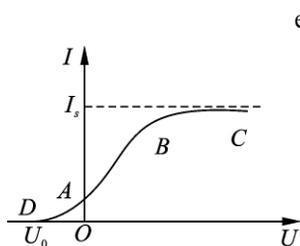


图 18-5 光电效应伏安特性

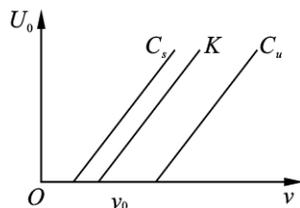


图 18-6 遏止电势差与入射光频率的关系

从光电效应的实验可归纳出如下规律:

(1)入射光的频率一定时,饱和光电流 I_s 与入射光的强度成正比.即单位时间内被光照射的电极上,逸出的光电子数与入射光强度成正比.

(2)对某一金属来说,只有当入射光的频率大于某一频率 ν_0 时,电子才能从金属表面逸出,电路中才有光电流.这个频率 ν 叫做截止频率(cutoff frequency),也称红限.如果入射光的频率 ν 小于截止频率(即 $\nu < \nu_0$),那么,无论光的强度有多大,都没有光电子从金属表面逸出.

(3)用不同频率的光照射金属 K 的表面时,只要入射光的频率 ν 大于截止频率 ν_0 ,遏止电势差(对应于光电子动能的最大值)与入射光频率具有线性关系,如图 18-6 所示.

(4)无论入射光的强度如何,只要其频率大于截止频率,则当光照射到金属表面上时,几乎立即就有电子逸出.根据测量,从光开始照射金属表面,到光电子首次被发射出来,其时间间隔不超过 10^{-9} s.这就是常说的光电效应的“瞬时性”.

二、用经典理论解释光电效应时的困难

按照光的电磁理论,光电效应的产生是由于金属中的自由电子在光波的作用下做受迫振动,使光波的能量转化为电子的能量,当其振动能量达到一定数

值时,电子就能摆脱金属的束缚而逸出金属表面成为光电子。根据光的波动理论,光波的能量密度与振幅的平方成正比。因此,无论何种频率的光,只要光波的强度足够大,就能提供电子逸出金属表面所需的能量。这显然与光电效应存在截止频率的实验事实相矛盾。

按照光的波动理论,入射光波的振幅由入射光的强度决定,而与光的频率无关。光强越大,光波振幅就越大,光波提供给电子的能量也就越大,从金属表面逸出的光电子的初动能也应该越大。也就是说,逸出的光电子的初动能随入射光的强度的增大而增大,与光波的频率无关。这与光电子的初动能随入射光的频率线性增加的实验事实相矛盾。

按照光的波动理论,光电子逸出金属表面所需的能量,是直接吸收照射在金属表面的光波的能量。当入射光很弱时,电子需要有一定的时间积累能量,在这段时间内,电子从光束中不断吸收能量,一直积累到足以逸出金属表面为止。因此,当光照射金属后,要滞后一段时间才会有光电子逸出。显然,这与光电效应的瞬时性相矛盾。

三、光子

为了解释光电效应的实验规律与光的波动理论之间的矛盾,爱因斯坦将普朗克的能量子假设加以推广,提出了关于光的本性的新理论——“光子”假设。他于 1905 年发表了三篇著名的科学论文,在论及光电效应等的实验结果时,这样写道:“尽管光的波动理论永远不会被别的理论所取代……但仍可以设想,用连续的空间函数表述的光的理论在应用到光的发射和转换的现象时可能引发矛盾。”他还假定:“从一个点光源发出的光线的能量并不是连续地分布在逐渐扩大的空间范围内的,而是由有限个数的能量子组成的。这些能量子个个都只占据空间的一些点,运动时不分裂,只能以完整的单元产生或被吸收。”在这里首次提出的光的能量子单元,1926 年被刘易斯(G. N. Lewis)定名为“光子”(photon)。

光本身可以看成是由光子组成的粒子流。真空中,每个光子都以速度 $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 运动。关于光子的能量,爱因斯坦假定,不同颜色的光,其光子的能量不同。对于频率为 ν 的光束,每个光子的能量为

$$E = h\nu \quad (18 - 6)$$

式中 h 是普朗克常数,此式和式(18 - 4)中的 ν 虽然都是频率,但意义不同,式(18 - 4)中的 ν 是谐振子的振动频率,而式(18 - 6)中的 ν 是光子辐射的频率。

按照爱因斯坦的光量子假设,频率为 ν 的光束是由许许多多能量都等于 $h\nu$ 的光子所组成。频率越高的光束,光子的能量越大。对给定频率的光来说,光的强度越大,就表示构成光束的光子数目越多。

按照爱因斯坦的光量子假设,当频率为 ν 的光束入射到金属表面时,金属中的单个自由电子全部吸收了一个光子的能量 $h\nu$. 这些能量的一部分消耗于电子从金属表面逸出时克服金属对它的束缚所需要做的逸出功 A ,另一部分则转换为电子逸出金属表面后的初动能 $\frac{1}{2}mv^2$. 根据能量守恒定律,有

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A \quad (18 - 7)$$

这就是著名的爱因斯坦光电效应方程.

利用爱因斯坦光子假设和方程(18 - 7),可以圆满地解释光电效应的实验规律.

按照光子假设,入射光的强度大,光束中所含的光子数就多. 如果 $\nu > \nu_0$,那么,随着光子数目的增多,单位时间内吸收光子的光电子数目也增多,光电流就增大. 所以,光电流与入射光的强度成正比.

对于给定金属,逸出功 A 一定,由式(18 - 7)清楚地表明,光电子的初动能与入射光的频率成线性关系,而与光强无关.

由式(18 - 7)可以看出,不同频率的光,光子的能量不同,当 $\nu = \nu_0$ 时,光子的能量 $h\nu_0 = A$,此时光电子的初动能 $\frac{1}{2}mv^2 = 0$,电子恰能逸出金属表面. $\nu_0 = \frac{A}{h}$ 即为前述的截止频率. 只有频率大于 ν_0 的光照射在金属上,电子才会逸出,并具有一定的初动能. 若入射光的频率小于 ν_0 ,则电子吸收的能量小于逸出功 A ,电子就不会逸出而成为光电子.

按照光子假设,当光照射到金属表面时,一个电子将一次性地吸收一个光子的全部能量 $h\nu$. 此过程几乎是立即发生的,不需要积累能量的时间. 这就是光电效应的瞬时性.

爱因斯坦的光子假设不仅成功地解释了光电效应,还能说明光的波动理论所不能解释的其他现象,从而确立了光的粒子性. 为此,爱因斯坦荣获 1921 年诺贝尔物理学奖.

为了纪念爱因斯坦的关于量子论和相对论方面的论文发表 100 周年,2005 年被联合国教科文组织(UNESCO)和联合国大会确定为“国际物理年”,这些论文为相对论、量子力学等物理学领域奠定了基础,使物理学在 20 世纪得到全新的发展.

例 18 - 4 已知截止频率为 $\nu_0 = 4.8 \times 10^{14}$ Hz 的铯感光层被波长为 $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ 的单色光照射,求铯释放出来的光电子的最大初速度.

解 根据爱因斯坦方程,光电子的最大初动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - A$$

光电子的最大初速度为

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(h\nu - A)} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}$$

将 $A = h\nu_0$ 代入,得

$$v = \sqrt{\frac{2h}{m}\left(\frac{c}{\lambda} - \nu_0\right)}$$

将 ν_0 和 λ 的数值代入,并取 $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 所以

$$v = 6.5 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

四、光的波粒二象性

关于光的本性的研究,从 1672 年牛顿提出光的微粒说和 1678 年惠更斯提出光的波动说开始,已有很长的历史.直到 1905 年爱因斯坦用光的量子说成功地解释了光电效应,进而提出光子具有能量、动量后,光具有粒子性和波动性的矛盾统一,才被认为是描述了光的本性.

光的干涉、衍射和偏振现象,表明光具有波动性,而光电效应又说明光具有粒子性,光同时具有波动性和粒子性的二重特性叫做光的波粒二象性.

光的波粒二象性,揭示了光的本性.值得注意的是,所谓光的粒子性,只是在光和电子等微观粒子交换能量、动量时,能量、动量总是按整个量子被吸收或交换.除此之外,并不意味着光子就是像经典力学中的质点那样的东西.一般来说,光在媒质中传播时,光的波动性占主要地位,因而产生干涉、衍射、偏振等现象.光在发射、吸收以及与物质相互作用过程中,光的粒子性起主要作用,因而产生光电效应、热辐射等现象.所谓光的波粒二象性,是指光在不同的条件下分别表现出波和粒子的行为.

化学中的光化反应,生物中二氧化碳和水分子吸收光子后产生糖一类的碳水化合物和氧,也都反映了光的粒子性.我们用频率 ν 、波长 λ 和周期 T 描述光的波动性,和对实物粒子的描述一样,用能量、质量和动量来描述光的粒子性.频率为 ν 光束,每个光子的能量为

$$E = h\nu$$

按照狭义相对论的质量与速度的关系式

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

可知 因为光速 $v=c$, 如果光子的静止质量不为零, 则光子的动质量将为无穷大, 这显然是不可能的. 所以, 我们只能认为光子的静止质量为零 ($m_{0\gamma}=0$), 而光子的质量(动质量)为有限值.

应该指出, 从狭义相对论质速关系, 推理得到的光子静质量 $m_{0\gamma}=0$ 实际上是一种假设. 关于光子静质量是否为零的实验研究从未中断, 目前实验测量的光子静质量的最强上限为

$$m_{0\gamma} \leq 10^{-63} \text{ kg}$$

从实用角度看, 如此之小的数值, 确实完全可以忽略不计. 但从理论研究的角度看, 是零或非零却是一个原则性的问题, 因为它涉及到现代物理学的基础问题.

根据相对论的质能关系式, 每个光子的质量 m_γ 与能量 E 之间有关系 $E = m_\gamma c^2$, 即

$$m_\gamma = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

根据相对论动量和能量的关系式 $E^2 = p^2 c^2 + m_{0\gamma}^2 c^4$, 光子的动量为

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

因此, 对于频率为 ν 的光, 光子的能量和动量分别为

$$\begin{cases} E = h\nu \\ p = \frac{h}{\lambda} \end{cases} \quad (18-8)$$

可见, 光的粒子性和波动性通过普朗克常数 h 定量地联系起来.

例 18-5 一个光子的质量恰等于一个电子的静止质量, 试求该光子的能量、动量、频率和波长.

解 光子的能量为

$$\begin{aligned} E &= h\nu = m_0 c^2 = 9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \\ &= 8.199 \times 10^{-14} \text{ (J)} \end{aligned}$$

由 $E^2 = p^2 c^2 + m_{0\gamma}^2 c^4$ 及 $E = m_0 c^2$, 得光子的动量

$$\begin{aligned} p &= \frac{E}{c} = m_0 c \\ &= 9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8 = 2.733 \times 10^{-22} \text{ (kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \end{aligned}$$

频率为

$$\nu = E/h = \frac{8.199 \times 10^{-14}}{6.63 \times 10^{-34}} = 1.24 \times 10^{20} \text{ (Hz)}$$

波长为

$$\lambda = c/\nu = \frac{3 \times 10^8}{1.24 \times 10^{20}} = 2.42 \times 10^{-12} (\text{m}) = 0.024 \text{ \AA}$$

五、康普顿效应

证明光具有粒子性的另一个著名实验是康普顿效应,亦称康普顿散射。

光的散射是我们并不陌生的自然现象.光在各向同性的均匀媒质中是直线传播的.因此,只有迎着光线观察,才能看见光,而从侧面观察,便看不见光.宇航员在太空飞行时,他们除了看见宇宙中大大小小的星体外,其他地方都是一片漆黑.当光束通过光学性质不均匀的媒质时,从侧面可以看见光线的现象称为光的散射.从窗户射进室内的太阳光,我们可以从侧面清晰地看到光束的轨迹,这就是太阳光被空气中的尘埃散射造成的.太阳光本是白光,然而,当太阳光通过大气层时,会受到大气分子的散射,其中波长较短的蓝色光散射较强,因此,天空呈现蔚蓝色,而波长较长的红色光散射较弱,大部分透射到地面,因此,我们看到一轮红日.

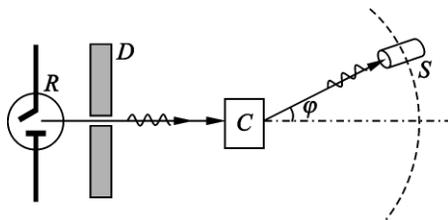


图 18 - 7 康普顿散射示意图

1923年,康普顿(A. H. Compton)研究了X射线经过碳、石墨、石蜡、金属等物质散射后的光谱成分.

图 18 - 7 是康普顿散射实验装置示意图,从X光管R发出的X射线,穿过光阑D与散射物质C(比如石墨)发生散射,由摄谱仪S可以测定散射线波长.实验结果表明,散射线中有与入射线波长 λ_0 相同的射线,也有波长 $\lambda > \lambda_0$ 的射线.这种波长改变的散射叫做康普顿效应(Compton effect).

我国物理学家吴有训在同康普顿一起从事X射线散射光谱研究期间,通过实验进一步指出康普顿散射有如下规律:(1)波长的改变 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 与原入射波长 λ_0 及散射物质无关,而随散射角 φ (散射线与入射线之间的夹角)的增大而增大.(2)原子量小的物质,康普顿散射较强,原子量大的物质,康普顿散射较弱.

应用光子概念,把康普顿散射视为光子和原子中单个电子的完全弹性碰撞,可以圆满解释康普顿效应.

在金属原子中,原子核对电子的束缚较弱,电子的电离能远小于X射线光

子的能量. 因此, 在讨论 X 光子与原子中电子碰撞时, 可以忽略电离能, 把电子看作自由电子. 由于这些电子的热运动平均动能(约百分之几电子伏特)和入射的 X 射线光子的能量($10^4 \sim 10^5$ eV)

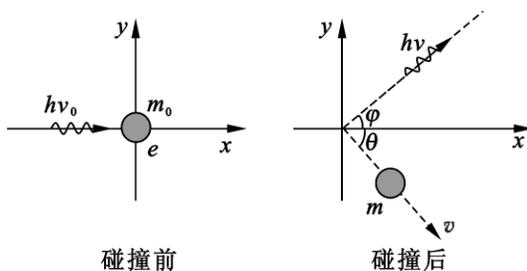


图 18 - 8 光子与自由电子碰撞

比起来, 可以略去不计, 因而这些电子在碰撞前, 可以看作是静止的. 如图 18 - 8 所示, 能量为 $h\nu_0$ 、动量为 $\frac{h\nu_0}{c}e_0$ (e_0 表示光子入射方向的单位矢量) 的 X 光光子, 与一个静止质量为 m_0 、能量为 m_0c^2 、动量为零的静止的自由电子作完全弹性碰撞. 碰撞后, 电子的能量变为 mc^2 , 动量变为 $m\boldsymbol{v}$, 这里 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, \boldsymbol{v} 是电子的

运动速度, 散射光子的能量为 $h\nu$, 动量为 $\frac{h\nu}{c}e$ (e 为碰撞后散射光子运动方向上的单位矢量), 散射角为 φ . 根据能量守恒定律, 有

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$$

$$\text{即} \quad mc^2 = h(\nu_0 - \nu) + m_0c^2 \quad (1)$$

根据动量守恒定律, 有

$$\begin{cases} \frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c} \cos \varphi + m\nu \cos \theta \\ 0 = \frac{h\nu}{c} \sin \varphi + m\nu \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{则} \quad m^2c^2 = (h\nu_0)^2 + (h\nu)^2 - 2h^2\nu_0\nu \cos \varphi \quad (2)$$

将式(1)平方后减去式(2), 可得

$$m^2c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2c^4 - 2h^2\nu_0\nu(1 - \cos \varphi) + 2m_0c^2h(\nu_0 - \nu)$$

上式化简, 得

$$h\nu_0\nu(1 - \cos \varphi) = m_0c^2(\nu_0 - \nu)$$

所以

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos \varphi) \quad (18 - 9)$$

式中 λ 和 λ_0 分别表示散射光和入射光的波长,此式称为康普顿散射公式. 式中 $\frac{h}{m_0 c}$ 具有波长的量纲,称为电子的康普顿波长(Compton wavelength),以 λ_c 表示.

将 h 、 c 、电子静质量 m_0 的值代入可算出

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

它与短波 X 射线的波长相当.

由式(18-9)可以清楚地看出,散射光波长的改变量 $\Delta\lambda$ 只与散射角 φ 有关,而与散射物质以及入射光的波长均无关.

上述推导过程表明,康普顿散射中,在一个光子与散射物质中的一个自由电子或束缚较弱的电子发生碰撞过程中,光子将一部分能量传递给了电子,散射光子能量就比入射光子能量少. 因为,光子的能量与频率成正比,所以,散射光的频率就比入射光的频率小(即波长 $\lambda > \lambda_0$).

式(18-9)是在假定电子是自由的前提下得出的. 对于内层电子,特别是重原子的内层电子,由于它们和原子核结合得非常紧密,因此,不能再视为自由电子了. 光子的散射可以认为是光子与整个原子交换动量和能量. 因为原子质量远大于光子质量,按照碰撞理论,碰撞后,光子虽然改变运动方向,但却不会明显地损失能量,散射光的频率也就不会有显著的改变,所以,散射光中也有与入射光波长相同的光. 重原子的内层电子比轻原子的内层电子多,因此,原子量大的物质,康普顿散射较弱;原子量小的物质,康普顿散射较强.

康普顿散射的理论和实验结果完全相符,这一点曾在量子论的发展中起过重要的作用. 它不仅有力地证实了光子理论,而且还证明了动量守恒定律和能量守恒定律在微观领域也严格适用. 由于这一重大发现,康普顿于 1927 年获得诺贝尔物理学奖.

应该指出,康普顿散射只有在入射波的波长与电子的康普顿波长可以相比拟时,才是显著的. 例如:入射波波长 $\lambda_0 = 400 \text{ nm}$ 时,在 $\varphi = \pi$ 的方向上,散射波波长的改变量 $\Delta\lambda = 4.8 \times 10^{-3} \text{ nm}$, $\Delta\lambda / \lambda_0 = 10^{-5}$. 这种情况下,很难观察到康普顿散射. 当入射波波长 $\lambda_0 = 0.05 \text{ nm}$, $\varphi = \pi$ 时,虽然波长的改变量仍是 $\Delta\lambda = 4.8 \times 10^{-3} \text{ nm}$,但 $\Delta\lambda / \lambda_0 \approx 10\%$,这时就能比较明显地观察到康普顿散射了. 这也就是选用 X 射线观察康普顿散射的原因. 在光电效应中,入射光是可见光或紫外线,所以康普顿效应不显著.

例 18-6 波长 $\lambda_0 = 0.1 \times 10^{-10} \text{ m}$ 的 X 射线与静止的自由电子碰撞. 在与入射方向成 90° 角的方向上观察时,康普顿散射 X 射线的波长为多大? 反冲电

子的动能和动量各如何？

解 将 $\varphi = 90^\circ$ 代入式(18-9), 可得

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\varphi) = \lambda_c(1 - \cos 90^\circ) = \lambda_c$$

由此得康普顿散射波长为

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_c = 1.24 \times 10^{-11} (\text{m})$$

至于反冲电子 根据能量守恒, 它所获得的动能 E_k 就等于入射光子损失的能量, 即

$$\begin{aligned} E_k &= h\nu_0 - h\nu = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0\lambda} \\ &= 3.8 \times 10^{-15} (\text{J}) = 2.4 \times 10^4 (\text{eV}) \end{aligned}$$

下面计算电子的动量, 参看图 18-9, 其中 p_e 为电子碰撞后的动量. 根据动量守恒, 有

$$\begin{aligned} p_e \cos\theta &= \frac{h}{\lambda_0} \\ p_e \sin\theta &= \frac{h}{\lambda} \end{aligned}$$

两式平方相加并开方, 得

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda^2}}{\lambda_0\lambda} h \\ &= 8.5 \times 10^{-23} (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{h}{p_e\lambda_0} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{8.5 \times 10^{-23} \times 0.1 \times 10^{-10}} = 0.78$$

所以

$$\theta = 38^\circ 44'$$

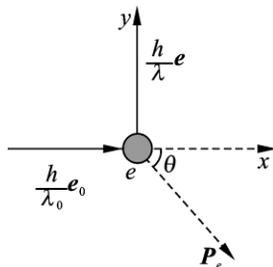


图 18-9

以上对光电效应和康普顿效应的讨论, 基本上是采用了前期量子理论处理光与物质相互作用的, 虽然对光电效应和康普顿效应分别采取了束缚电子和自由电子的模型, 但概括起来它们的基点还是认为光子与物质中的电子直接作用. 如果更进一步从量子场论(quantum field theory)——量子电动力学(quantum electrodynamics, 简称 QED)的观点看, 这样是不够恰当的(它与从量子力学观点看玻尔理论有缺陷类似).

量子场论把光电效应和康普顿效应看成是由光子的吸收(湮没 annihilation)和光子产生(creation)这两个阶段组成的过程, 不能认为是直接作用. 如果用费曼图表示两种效应, 如图 18-10 所示. 图 18-10(a)表示, 在 A 点电子吸收一个光子, 然后电子从 A 运动到 B, 在 B 点电子再放出一个光子, 但是

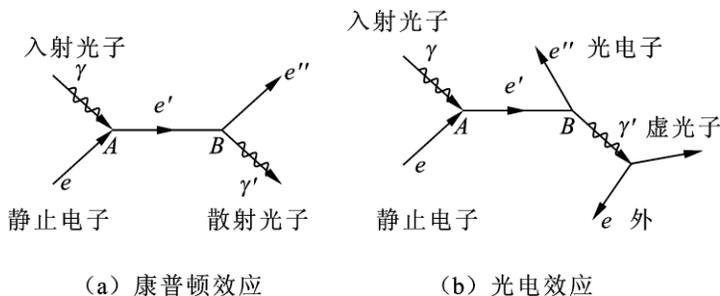


图 18 - 10 光电效应和康普顿效应的费曼图

A 到 B 是一个虚过程(它不满足能量守恒、动量守恒),在实验中观察不到.这就是康普顿效应.

图 18 - 10(b)表示一个光子被一个电子吸收,且由 A 运动到 B(表面),然后该电子和其他电子在 B 点发生库仑相互作用(相当于电子—电子散射)而交换虚光子,从而使这个电子失去部分能量(相当逸出功)而逸出金属表面,这就是光电效应.

综上所述,光电效应和康普顿效应的本质是电子吸收光子后,由 A 点运动到 B 点,然后,康普顿效应是该电子和实光子作用,而光电效应则是该电子同虚光子作用.这正说明了两种效应从本质上看既有联系又有区别.

§ 18 - 3 氢原子的玻尔理论

经典物理学不仅在对热辐射进行理论解释时遇到严重困难,而且在说明原子光谱的线状结构及原子本身的稳定性方面也遇到了不可克服的困难.丹麦物理学家玻尔发展了普朗克的量子假设和爱因斯坦的光子假说等,创立了关于氢原子结构的半经典量子理论,相当成功地说明了氢原子光谱的实验规律.

一、氢原子光谱规律

光谱是研究电磁辐射的波长成分和强度分布的记录,物理学上更注重波长成分的研究.光谱按其形状可分为连续光谱、带状光谱和线状光谱.随着产生光谱的物理条件的不同,可以产生其中的两种或三种不同的光谱.人们在长期研究中逐步了解到线状光谱是原子发出的,所以,把线状光谱称为原子光谱.由于各种原子所发出的光谱反映了原子内部的结构和能态变化规律,因此,研究原子光谱就成为人们了解原子结构的重要途径之一.原子分子光谱在研究原子、分子结构及物质分析等方面都有重要的意义.

所有原子中,氢原子的结构最简单,在实验和理论上都被人们研究得最充

分. 到 1885 年, 人们发现氢原子光谱在可见区和紫外区已经有许多条谱线, 构成了一个很有规律的系列. 这个系列在可见区的前几条分别被称为 H_α 、 H_β 、 H_γ 、 H_δ 、……如图 18 - 11 所示.

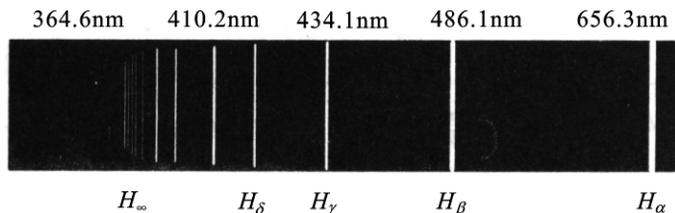


图 18 - 11 氢原子光谱中的巴尔末线系

同年, 瑞士一位中学教师巴耳末对这些谱线进行分析研究后, 提出了一个经验公式

$$\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad (n = 3, 4, 5, 6)$$

后来人们发现, 若用波长的倒数 $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ 表示单位长度内含波的数目, 则这个经验公式可表为

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{4}{B} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (18 - 10)$$

式中 $\tilde{\nu}$ 称为波数, $B = 365.47 \text{ nm}$ 是一个经验常数, n 为整数. 当 $n = 3, 4, 5, \dots$ 时, 分别给出 H_α 、 H_β 、 H_γ 等谱线的波数. 由于根据这个公式算得的值与实验测量值完全一致, 后人把 (18 - 10) 式称为巴耳末公式. 而将它所表达的一组谱线称为巴耳末系. 氢原子光谱在紫外区和红外区的其他线系也先后被赖曼、帕邢、布喇开、普丰特发现.

1889 年, 里德伯提出了氢原子光谱规律的普遍公式

$$\tilde{\nu} = R \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right] \quad (18 - 11)$$

式中 $R = 4/B$ 称为里德伯常数, $k = 1, 2, 3, \dots$. 对于每一个 k , $n = k + 1, k + 2, k + 3, \dots$ 分别构成不同的谱线系. 氢原子的所有谱线都可以用这个公式表示. $k = 1, n = 2, 3, 4, \dots$ 构成赖曼系; $k = 2, n = 3, 4, 5, \dots$ 构成巴耳末系; $k = 3, n = 4, 5, 6, \dots$ 构成帕邢系; $k = 4, n = 6, 7, 8, \dots$ 构成普丰特系.

从式 (18 - 11) 可以看出, 氢原子各谱线的波数可以用正整数 k 和 n 的两个函数之差表示. 即

$$\tilde{\nu} = T(k) - T(n) \quad (18 - 12)$$

式中 $T(k) = T/k^2$ 和 $T(n) = R/n^2$ 称为光谱项. 上式是里德伯、里兹等人在氢原子光谱基础上, 研究了碱金属元素的光谱后, 于 1890 年提出的, 称为里兹并合原理.

综上所述, 原子光谱的实验规律可以归纳为:

(1) 谱线的波数 $\tilde{\nu}$ 由两个谱项的差值 $T(k) - T(n)$ 决定.

(2) 若参变量 k 保持定值, 参变量 n 取不同的整数值 $k+1, k+2, \dots$, 可给出同一谱系中的各谱线的波数.

(3) 若改变 k 的值, 可给出不同的谱线系.

原子光谱规律的发现, 为原子结构理论的建立提供了条件.

二、卢瑟福模型

要正确解释原子光谱的规律性, 必须知道原子的结构. 1897 年汤姆逊发现电子以后, 又测出了电子的电量、质量. 通过实验进一步证实了电子是一切原子的组成部分, 而通常原子是呈电中性的, 因此, 原子中除了带负电的电子外, 必然还有带正电的部分. 它们在原子内部如何分布呢? 这就成为 19 世纪末、20 世纪初物理学的重要研究课题之一. 对于原子中正、负电荷如何分布的问题, 出现了许多见解, 而比较成功的当数卢瑟福的核型结构.

1909 年, 卢瑟福的学生盖革(H · Geiger)和马斯顿(E · Marsden)在用 α 粒子(带两个正电荷的氦核)轰击原子的实验中, 发现 α 粒子在轰击原子时有大约 $\frac{1}{80\ 000}$ 的概率被反射回来了. 卢瑟福充分尊重实验事实, 经过严谨的理论推论之后, 于 1911 年提出了原子核式结构模型. 其主要内容是:

(1) 一切原子都有一个半径约为 10^{-15} m 的核, 原子的质量几乎全部集中在核上.

(2) 原子核带有 Ze 的正电荷, Z 为原子序数.

(3) 电子在以核为中心的库仑场中运动, 就像行星绕太阳运动一样.

卢瑟福的核式模型提出后, 1913 年盖革和马斯顿进一步通过实验进行验证, 实验结果与理论计算完全符合. 从而有力地证明了核式模型的正确性.

按照卢瑟福的核式模型, 原子中原子核是很小的, 大多数 α 粒子穿过原子时, 因受核的作用很小, 故它们的散射角也很小. 只有少数 α 粒子进入到距核很近的地方, 这些 α 粒子受核的作用较大, 故其散射的角也较大. 极少数 α 粒子正对原子核运动, 故它们的散射角接近 180° , 即被反射回来.

卢瑟福的原子有核模型虽然成功地解释了 α 粒子的散射实验, 但却与经典电磁理论发生了矛盾. 按照经典电磁理论, 具有加速度的带电体将向外辐射电

磁波. 绕核运动的电子, 由于有加速度必然自动地向外辐射电磁波, 其能量逐渐减少, 电子会逐渐向中心靠拢, 最终落到原子核上. 也就是说, 卢瑟福原子是不稳定的. 按照经典电磁理论, 电子向外辐射电磁波的频率等于它绕核运动的频率. 随着电子能量的减少, 其绕核旋转的频率将连续变化, 因而辐射频率也连续变化. 也就是说, 原子发射的光谱是连续光谱. 事实上, 在正常状态下, 原子是稳定的系统, 原子光谱是离散的线状光谱.

三、玻尔的氢原子理论

1913年, 丹麦物理学家玻尔在卢瑟福的原子模型和原子光谱实验规律的基础上, 把普朗克的能量子概念引用到原子系统, 对原子结构问题提出了新的假设. 玻尔的基本假设可归纳为:

(1) 氢原子中的电子在原子核库仑场的作用下绕核做圆周运动, 电子只能处在一些离散的轨道上. 整个原子体系只能处在一些不连续的能量状态, 在这些状态中, 电子虽做加速运动, 但不产生电磁辐射, 这样的状态称为原子的稳定状态, 简称定态(stationary state). 每一个定态都对应一个确定的能量值. 此称定态条件.

(2) 原子从一个定态(E_k)跃迁到另一个定态(E_n)时, 会以电磁波的形式发射或吸收能量 $h\nu$, 其值由下式决定:

$$h\nu = E_n - E_k$$

所以

$$\nu = \frac{E_n - E_k}{h} \quad (18-13)$$

此称频率条件. $E_n > E_k$ 时, 原子吸收辐射, 当 $E_n < E_k$ 时, 原子发出辐射.

(3) 只有电子绕原子核做圆周运动的轨道角动量 L 等于 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 的整数倍的状态, 才是可能取的定态. 即

$$L = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (18-14)$$

式中 n 为量子数, 是不为零的正整数. 上式称为轨道角动量量子化条件.

玻尔在自己提出的三条假设的基础上, 利用牛顿定律和库仑定律计算了氢原子处于定态时的轨道半径和能量. 成功地解释了氢原子的光谱规律.

1. 氢原子的轨道半径

因为原子核的质量远大于电子的质量, 所以, 我们可以认为氢原子中电子绕原子核做圆周运动, 而核静止不动. 设电子的质量为 m , 电子做圆周运动的线

速度为 v , 可能的定态轨道半径为 r , 电子受核的库仑引力充当向心力, 则

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

根据玻尔第三条假设

$$L = mvr = n \cdot \frac{h}{2\pi}$$

由上二式消去 v , 并用 r_n 代替 r 表示具有一定 n 值时 (第 n 个稳定轨道) 的轨道半径, 则

$$r_n = n^2 \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi n e^2} \right) \quad (18-15)$$

式中 $n=1, 2, 3, \dots$, 当 $n=1$ 时, 得氢原子中电子绕核运动的最小轨道半径, 称为玻尔半径 (Bohr radius), 常用 a_0 表示.

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi n e^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ (m)}$$

于是, 式(18-15)又可写成

$$r_n = n^2 a_0 \quad (18-16)$$

由上式可知, 氢原子中第 n 个定态的轨道半径 r_n 与量子数 n 的平方成正比. 由于 n 只能取大于零的正整数, 所以 r_n 也只能取一些不连续的离散值. $n=1$ 的定态称为基态 (ground state), $n=2, 3, 4, \dots$, 各态均称为激发态 (excitation state). 氢原子处于各定态时电子轨道如图 18-12 所示. 这种物理量只能取某些不连续离散值的现象, 叫做量子化. 下面我们会看到, 其他一些物理量 (能量、角动量等) 的取值也是量子化的. 这正是微观体系区别于宏观体系的显著标志之一.

2. 氢原子的能级

氢原子的总能量应等于电子绕核运动的动能和原子核与电子这一带电系统的静电势能之和, 若以电子在无穷远处为电势能的零点, 则当电子在半径 r_n 的轨道上运动时, 氢原子的能量为

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

由

$$m \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$$

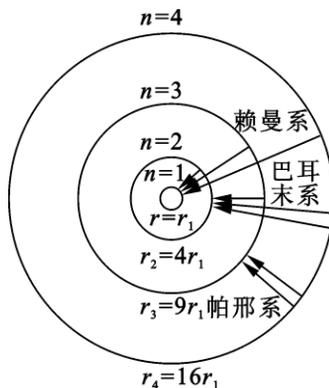


图 18-12 氢原子处于各定态时电子轨道

得
$$\frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}$$

将此式及式(18-16)代入上式,可得

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \right) \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (18-17)$$

这就是氢原子处在第 n 定态的总能量. E_n 为负值,是由于规定电子在无穷远处势能为零的必然结果,负能量表示电子被束缚在原子核周围.

式(18-17)表明 E_n 与 n^2 成反比. 由于电子轨道角动量不能连续变化,氢原子的能量也只能取一系列的离散值,这称为能量量子化,这种量子化的能量值称为能级. 式(18-17)就是氢原子的能级公式.

当 $n=1$ 时,氢原子的能量最低,称为基态能量. 由式(18-17)得

$$E_1 = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -2.17 \times 10^{-18} \text{ (J)} = -13.6 \text{ (eV)}$$

原子处于基态时,能量最低,原子最稳定. 随量子数 n 增大,能量 E_n 也增大,能级间能量间隔减小. $E > 0$ 时,原子处于电离状态,这时能量可连续变化. 图 18-13 是氢原子的能级图. 所以,式(18-17)也可写成

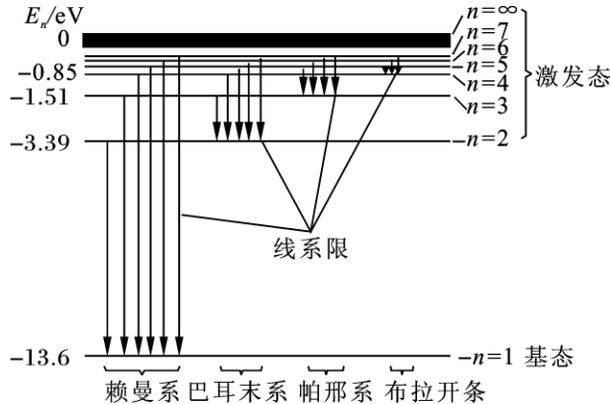


图 18-13 氢原子的能级图

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \quad (18-18)$$

$n > 1$ 的态称为激发态,激发态的能量比基态大. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $E \rightarrow 0$, 表明电子已经脱离原子核的束缚,而成为自由电子,即被电离,称为电离态. 可见,要将氢原子中处于基态($E_1 = -13.6 \text{ eV}$)的电子激发到电离态($E \rightarrow 0$),需要的能量为 $0 - (-13.6 \text{ eV}) = 13.6 \text{ eV}$,这就是电离能. 相反,一个自由电子与原子核结合成

为一个基态氢原子,至少要释放出 13.6 eV 的能量,此称为氢原子的结合能.

3. 氢原子光谱规律的解释

根据玻尔理论,氢原子光谱的产生是由于不同能级间跃迁的结果.由玻尔的第二条假设,原子中电子由较高能级 E_n 跃迁到较低能级 E_k 时,所发射出单色光的频率为

$$\nu = \frac{E_n - E_k}{h}$$

其波数为

$$\tilde{\nu} = \frac{E_n - E_k}{hc}$$

将式(18-17)代入上式,得

$$\tilde{\nu} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (18-19)$$

只要令

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

则上式可变为

$$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

这正是里德伯提出的描述氢原子光谱规律的公式(18-11).将已知数据代入,可得里德伯常数

$$R = 1.097373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

这个理论值与 R 的实验值完全相符.

按照玻尔的理论,原子在正常状态下处于最稳定的基态.当受到外界激发(如辐射照射,高能粒子碰撞等)时,将吸收一定的能量从基态跃迁到较高能量的激发态.由于原子处在激发态是不稳定的,它将自发地跃迁到基态或较低能量的激发态,同时发射出一个单色光子.原子从不同的初态跃迁到同一末态时,所发射出的光谱线属于同一谱线系.巴耳末系是氢原子中的核外电子从 $n > 2$ 的能态跃迁到 $n = 2$ 的能态时所发射出的谱线,帕邢系是氢原子中电子从 $n > 3$ 的能态跃迁到 $n = 3$ 的能态时所发射出的谱线;图 18-13 是氢原子光谱中的不同线系的跃迁过程,表示氢原子能级的变换与线光谱之间的对应关系.

玻尔不仅用自己的理论成功地对巴耳末系和帕邢系进行了计算,他还预言,氢原子中电子从不同的高能级跃迁到与量子数 $k=1, 4, 5$ 所相应的能级时,还存在一些新的谱线系.这一预言被赖曼(1916年)、布喇开(1922年)、普丰特(1924年)的实验所证实.

应该说明,在某一时刻,一个处于激发态的氢原子只能发射出具有确定频率的一个光子.处在不同激发态的氢原子才能发射出不同频率的光子.通常大量氢原子总是处在不同的激发态,因此,能同时观测到不同的谱线.

例 18 - 7 试求(1)氢原子光谱巴耳末线系辐射的、能量最小的光子的波长;(2)巴耳末线系的极限波长.

解 (1)从图 18 - 13 看出,巴耳末线系辐射的能量最小的光子相应于从 $n_i = 3$ 到 $n_f = 2$ 的跃迁.按式(18 - 18)有

$$\begin{aligned}\Delta E_{\min} &= E_3 - E_2 = E_1 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} \right) \\ &= -13.6 \times \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right) = 1.89(\text{eV})\end{aligned}$$

相应的波长为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.89 \times 1.60 \times 10^{-19}} \\ &= 655.7 \times 10^{-9}(\text{m}) = 655.7(\text{nm})\end{aligned}$$

(2)巴耳末线系的极限波长(称线系限)相应于从 $n_i = \infty$ 到 $n_f = 2$ 的跃迁的辐射波长.类似于上面的计算,有

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_{\infty} - E_2 = \frac{E_1}{2^2} = 3.40(\text{eV}) \\ \lambda &= \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{3.40 \times 1.60 \times 10^{-19}} = 347.4(\text{nm})\end{aligned}$$

四、玻尔理论的意义和缺陷

玻尔理论不仅圆满地解释了氢原子的光谱规律,而且对只有一个价电子的类氢离子的光谱也能给予圆的说明.事实上,只要在氢原子的各计算公式中,用 Ze 代替原子核电荷 e ,便可得到类氢离子的相应公式.所以,玻尔理论在一定程度上反映了单电子原子内部的客观实际.

不仅如此,玻尔理论还具有更普遍的意义.

(1)玻尔正确地指出了原子能级的存在,即原子的能量只能取某些离散的值.这个观点不仅为氢原子、类氢离子的光谱所证实,而且,夫兰克-赫兹实验证明,对于汞那样复杂的原子也是正确的.这说明玻尔关于能量量子化的假设比他的氢原子理论具有更为普遍的意义.

(2)玻尔正确地提出了定态的概念.即处于某一能量状态上的原子并不辐射电磁波,只有当原子从某一能量状态跃迁到另一能量状态时,才发射出一定

频率的光子. 事实证明, 这一结论对各种原子都是正确的.

(3) 由玻尔的量子化条件 $L = n\hbar$, 后来索末菲将其推广为 $\oint p dq = nh$ (式中 p 为广义动量, q 为广义坐标), 从而引出了角动量量子化这一普遍正确的结论.

为人类认识微观世界, 玻尔作出了开创性的工作, 他的理论不仅对量子论是重大发展, 而且, 对后来量子力学的建立也起了巨大的推动作用. 由于这一成就, 玻尔于 1922 年 12 月 10 日诺贝尔诞生 100 周年时, 在瑞典首都斯德哥尔摩接受了诺贝尔物理学奖.

应该指出, 玻尔理论仅是在经典理论上附加了一些量子假设, 对于比氢原子稍微复杂一些的原子, 玻尔理论已无法解释这些原子的发光规律. 即使是氢原子, 如果用更精密的光谱仪去测量其光谱, 会发现原来的一条谱线实际上是由若干条靠得很近的谱线所组成(即所谓的精细结构), 并不像里德伯公式所给出的那样简单. 另外, 如果在磁场中激发原子, 原子光谱的谱线会发生分裂现象(塞曼效应). 面对这些实验现象, 玻尔理论则显得无能为力.

玻尔理论之所以存在这些缺陷, 是由于他一方面把电子、原子等微观粒子看作经典力学中的质点, 用坐标、速度、轨道等概念描述其运动, 用牛顿力学计算其轨道. 另一方面, 又人为地加上量子条件来限制可能的轨道. 所以, 玻尔理论实质上是一个经典理论加量子化假设的混合物, 并没有一个完整的理论体系. 从下一节的讨论我们会看到, 由于微观粒子具有波粒二象性, 电子的坐标在原子大小范围内没有确定的值, 是按概率分布的, 不能把电子在原子中的运动看成是一个有确定坐标的轨道运动. 所以, 玻尔理论给出的氢原子中电子的轨道半径 r_n , 只能看成是对氢原子大小的估计. 从波粒二象性的观点看, 应该用概率分布来表示电子的坐标, r_n 应当是电子坐标概率分布的平均值. 我们形象地把电子坐标的概率分布状态称做“电子云”, 能更准确地反映其本质.

虽然玻尔理论存在缺陷, 但在原子结构的量子理论中, 它仍起承前启后的桥梁作用. 而且, 玻尔关于定态、能级和跃迁频率公式的概念, 在现代量子理论中仍然是正确的.

§ 18 - 4 实物粒子的波粒二象性

一、德布罗意假设

面对在微观领域中建立描述实物粒子运动规律时所遇到的困难, 在普朗克的能量子假设和爱因斯坦光具有波粒二象性的启示下, 1924 年, 法国青年德布罗意向巴黎大学物理学院提交的题为《量子理论的研究》的博士论文中提出, 所

有实物粒子都具有波粒二象性的假设.他指出:“整个世纪以来,在光学中,比起波的研究方法来,如果说是过于忽视了粒子的研究方法的话,那么在实物粒子的理论上,是否发生了相反的错误,把粒子的图像想得太多,而过分忽视了波的图像呢?”从而提出实物粒子(电子、质子、中子等)也具有波动性的假设.

德布罗意把对光的波粒二象性的描述,应用到了实物粒子上.一个质量为 m 以速度 v 做匀速运动的实物粒子,既具有以能量 E 和动量 p 所描述的粒子性,也具有以频率 ν 和波长 λ 所描述的波动性.它的能量 E 与频率 ν 、动量 p 与波长 λ 之间的关系,和光子的能量、动量公式[式(18-8)]相类似,即

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

按照德布罗意假设,以能量 E 、动量 p 运动的实物粒子的频率和波长为

$$\begin{cases} \nu = \frac{E}{h} \\ \lambda = \frac{h}{p} \end{cases} \quad (18-20)$$

式中 h 为普朗克常量.这种波叫德布罗意波,或物质波,式(18-20)叫做德布罗意公式,它给出了与实物粒子相联系的波的波长、频率和粒子动量、能量之间的关系.

若一静质量为 m_0 的粒子,其速率 v 比光速 c 小得多,则粒子的动量可写为 $p = m_0 v$,粒子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v}$$

若粒子的速率 v 与光速 c 可以比拟,则按照狭义相对论,其动量为 $p = \gamma m_0 v$,此处 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$,于是,这种粒子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{\gamma m_0 v}$$

例 18-8 一个初速度为零的自由电子经过电势差为 U 的电场加速,求其德布罗意波长.

解 因为,电子的速度 $v \ll c$, 则

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = eU$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$$

所以

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2em_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}}$$

将 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $e = 1.60 \times 10^{-16} \text{ C}$, $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 代入上式得

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{U}} (\text{\AA})$$

可见, 当加速电势差 $U = 150 \text{ V}$ 时, $\lambda = 1 \text{\AA}$. 若 $U = 10^4 \text{ V}$, 则 $\lambda = 0.122 \text{\AA}$. 所以, 电子的德布罗意波长在数量级上相当于晶体中的原子间距, 它比宏观线度小得多, 这就是电子的波动性为什么长期未被发现的原因.

例 18-9 一子弹的质量为 $m = 2 \times 10^{-2} \text{ kg}$, 其飞行速度 $v = 1000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 求子弹的德布罗意波长.

解 因为 $v \ll c$, 所以

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{m_0 v} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-2} \times 1000} \\ &= 3.315 \times 10^{-35} (\text{m}) = 3.315 \times 10^{-25} (\text{\AA}) \end{aligned}$$

可见, 一般宏观物体由于质量很大, 因而, 其德布罗意波长非常短, 超出了实验测量的能力. 所以, 对宏观物体, 我们可以不考虑其波动性.

应该强调的是, 对于微观粒子, 这里讲的“波”和“粒子”与经典物理的相应概念是截然不同的.

在经典物理中, 波和粒子这两个概念是两种仅有的、又完全不同的能量传播的形式. 波和粒子这两个概念永远无法同时使用, 也就是说, 不能同时用波和粒子这两个概念去描述同一现象. 对于理想的粒子, 它具有完全的定义域, 原则上可以无限精确地确定它的质量、动量和电荷. 粒子可被视为一个“质点”, 只要已知其初始位置和速度, 就可以用牛顿定律完全描述它未来的位置和速度. 对于理想的波, 它必具有确定的波长和频率, 原则上, 频率和波长可被无限精确地测定. 这个波必须是在空间无限扩大的. 波长的测定, 在实验上可以采取“拍”的方法.

在量子理论中, 波粒二象性是量子力学的极重要的概念. 波粒二象性的意思是, 微观粒子既表现出粒子的特性, 又表现出波动的特性. 所谓粒子性, 主要是指它具有集中的不可分割的特性. 例如, 频率为 ν 的光波, 光子的能量为 $h\nu$,

光波的能量只可能是 $h\nu$ 的整数倍, 决不会有 $\frac{1}{2}h\nu$ 、 $\frac{2}{3}h\nu$ 的光波. 所谓波, 不过是指周期性地传播、运动着的场而已. 微观粒子的位置与动量、能量与时间等服从海森堡不确定关系.

二、德布罗意波的实验验证

最早直接证实实物粒子具有波粒二象性的是戴维孙(C. J. Davisson)、革末(L. A. Germer)和汤姆孙(G. P. Thomson). 他们于 1927 年分别用类似 X 射线的劳埃法和德拜法成功地获得了电子在晶体上的衍射图样. 1925 年, 戴维孙和革末在一次偶然的机会中进行了电子束在晶体表面上的散射实验, 观察到了和 X 射线衍射图案类似的结果. 在了解到德布罗意的物质波概念后, 通过分析, 他们认为, 这就是电子衍射现象, 并于 1927 年较精确地进行了该实验. 于是他们首先证实了电子的波动性. 他们的实验装置简图如图 18-14(a)所示, 电子枪发射的电子束经电势差 U 加速后, 垂直射到镍晶体的某一晶面上, 同时用探测器测量沿不同方向散射的电子束的强度. 实验发现, 当入射电子的能量为 54 eV (即加速电势差 $U = 54$ V) 时, 在 $\varphi = 50^\circ$ 的方向上散射电子束强度最大.

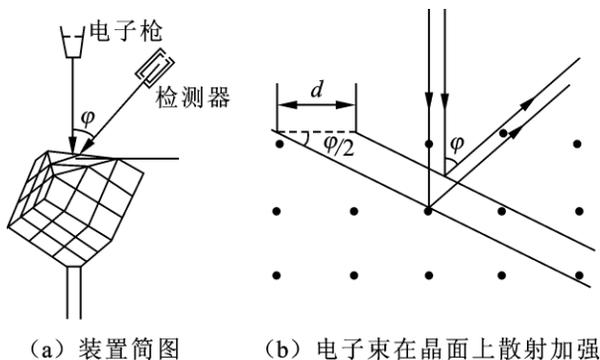


图 18-14 电子的衍射实验

按类似于 X 射线在晶体表面衍射的分析, 由图 18-14(b)可知, 设晶格常数为 d , 则相邻两晶面的散射电子束的波程差满足相干加强的条件为

$$2d \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = k\lambda$$

式中 k 为整数, 而 $2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \sin \varphi$, 所以, 散射电子束强度极大的方向应满足下列条件:

$$d \sin \varphi = k\lambda \quad (18-21)$$

下面验证此实验值与由德布罗意物质波公式所得的理论值是否一致.

已知镍的一组晶面之间的间距为 $d = 0.215 \times 10^{-9} \text{ m}$, 式(18 - 21)给出“电子波”的波长应为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{d \sin \varphi}{k} \\ &= \frac{0.215 \times 10^{-9} \times 0.766}{1} \\ &= 0.165 \times 10^{-9} \text{ m} = 0.165 \text{ nm}\end{aligned}$$

按德布罗意物质波公式(18 - 20), 该“电子波”的波长应为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 54 \times 1.6 \times 10^{-19}}} \\ &= 0.167 \times 10^{-9} \text{ m} = 0.167 \text{ nm}\end{aligned}$$

利用德布罗意波长公式, 有

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2em_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}}$$

与(18 - 21)式比较, 得

$$d \sin \varphi = k \frac{h}{\sqrt{2em_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}}$$

则

$$\sin \varphi = \frac{k}{d} \frac{h}{\sqrt{2em_0 U}}$$

将镍晶体原子间距 $d = 0.215 \text{ nm}$ 、加速电压 $U = 54 \text{ V}$ 以及 e 、 m_0 、 h 的数值代入, 可得

$$\sin \varphi = 0.777k$$

因为 k 是整数, 只有取 $k = 1$ 时, $\sin \varphi$ 才能小于 1, 故

$$\varphi = \arcsin 0.777 = 51^\circ$$

理论与和上面的实验结果符合得很好.

同年, 汤姆孙(G. P. Thomson)做了电子束穿过多晶薄膜的衍射实验, 成功地得到了和 X 射线通过多晶薄膜后产生的衍射图样极为相似的衍射图样.

应该指出, 他们的电子衍射实验只验证了德布罗意的波长关系式 $\lambda = h/p$, 只有德布罗意波长具有物理意义, 而频率关系式 $\nu = E/h$ 并未在任何实验中表

现出来.

早在 1927 年,爱因斯坦和玻尔就以电子双缝干涉实验为例来讨论量子力学的基本原理,后来这一例子被大多数不清的教材引用过.但是,由于技术上的困难,直到 20 世纪 70 年代以前,它还只是一个“思想实验”(thought experiment 或 gedanken experiment).20 世纪 70 年代以后,才有人发表真实实验的结果.1976 年 P. G. Merli 等人实现了电子双缝干涉实验,得到了非常漂亮的双缝干涉图样.图 18 - 15 是他们拍摄的电子双缝干涉图样的照片.

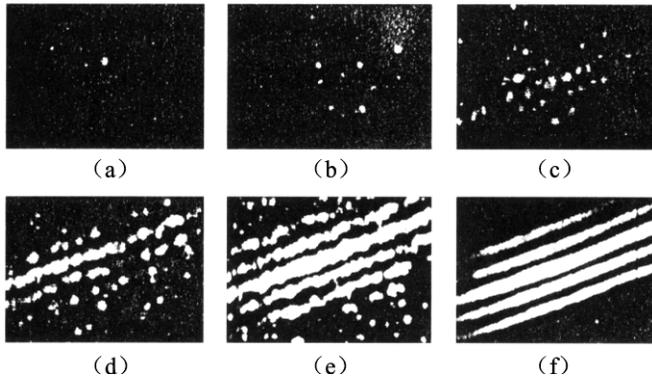


图 18 - 15 实验中电子双缝干涉图样

图 18 - 15 (a)是只有一个电子穿过双缝所形成的图像,图 18 - 16 (b)是几个电子穿过后形成的图像,图 18 - 15 (c)是几十个电子穿过后形成的图像.这几幅图像说明电子确是粒子,因为图像是由点组成的.它们同时也说明,电子的去向是完全不确定的,一个电子到达何处完全是概率事件.随着入射电子总数的增多,干涉图样依次如图 18 - 15 (d)、(e)、(f)诸图所示,电子的堆积情况逐渐显示出了条纹,最后就呈现明晰的干涉条纹,这些条纹和大量电子短时间内通过双缝后形成的条纹一样,把单个电子的概率行为完全淹没了.这又说明,尽管单个电子的去向是概率性的,但其概率在一定条件(如双缝)下还是有确定的规律的.

近年来,由于技术上的突破,人们不仅从实验中证实所有微观粒子(光子、电子、质子、原子、氢分子……)都具有波动性,而且能够操纵原子.粒子的波动性也得到极其广泛的应用.

三、电子显微镜

微观粒子的波动性在现代技术中的应用,一个常见的例子是电子显微镜.

借助光学显微镜,人们能用肉眼直接看到细胞、细菌和其他微生物.由于显

显微镜的分辨率与波长成反比,波长越短,分辨率越高.普通光学显微镜由于受到可见光波长的限制,分辨率不可能很高.而电子的德布罗意波长比可见光的波长短得多.随着生产和科学技术的发展,人们对微观世界的认识越来越深入,同时对于进行科学研究的手段、手法、设备等也就提出了更高的要求.1931年德国柏林大学鲁斯卡(E. Ruska)发明了世界上第一台透射式电子显微镜.一开始只能放大几百倍,到1933年很快提高到一万倍以上,分辨率达 10^{-5} mm.电子显微镜的发明开创了物质微观世界研究的新纪元,为此,鲁斯卡获得1986年诺贝尔物理学奖.

要提高显微镜的成像分辨率,必须改用波长比可见光短得多的射线.电子具有波动性,可以计算不同能量的电子束所相应的波长 λ .在电子显微镜中通过对电子的加速来提高电子的动能,从而缩短电子的波长.若加速电子所用的高电压为 U ,电子被加速到最大的动能为 eU ,则可得电子波长为

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}}$$

这是一个非相对论公式,当 $U > 10^5$ V时,电子速度就接近光速,要用下面的相对论公式计算

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU \left(1 + \frac{eU}{2m_0 c^2} \right)}}$$

下表列出了常用加速电压下电子的德布罗意波长.

表 18 - 1 常用加速电压下电子相应的德布罗意波长

加速电压 U/kV	60	80	100	200	500	1 000
电子波长/nm	0.004 86	0.004 17	0.003 70	0.002 50	0.001 42	0.000 87

由上表可见,当 $U = 10^5$ V时,电子波长约为 4×10^{-3} nm,要比可见光小5个数量级.在一般电子显微镜(俗称电镜)中,从电子枪出来的电子束正是得到了 10^5 V以上的电压的加速,所以电子的波长已经远比原子的半径(0.1 ~ 0.2 nm)小,因此,可用这种高能电子作为探针来探测样品中原子的分布情况.

要制成显微镜,有了短波长的电子束,还必须像光学显微镜一样,要有复杂的“透镜”组,使电子束会聚到样品上,然后成像和放大.对电子束所用的“电子透镜”,当然不是用玻璃做的,而是用电磁镜,即利用通电线圈所产生的一定分布的磁场来控制电子束运动,完全类似光学显微镜,也有聚光镜、物镜和投影镜之分.它们的功能是使电子束会聚到样品上,通过物镜成像,再通过投影镜,最

后在荧光屏上得到放大的像。

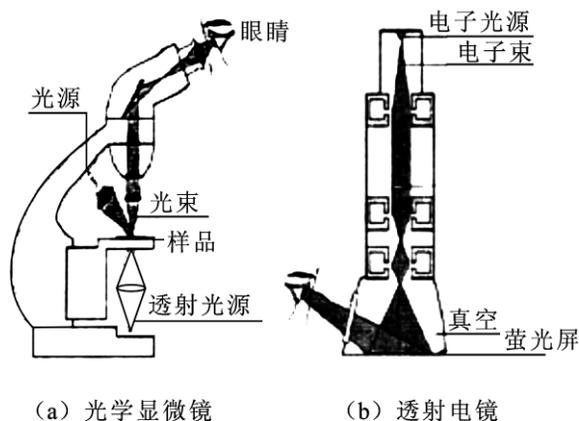


图 18 - 16 两种显微镜对照示意图

目前,常用的电镜有两种:一是透射式电镜,这是通常所讲的电子显微镜;二是扫描电子显微镜。

透射电镜的外形如图 18 - 16(b)所示。在直立镜筒中,高压电缆从顶部进入镜筒。顶部装有电子枪,中部的电子透镜系统起着聚光成像与放大作用,下部是观察记录的荧光屏。当电子影像射到荧光屏上时,由于电子激发荧光物质而产生荧光,便可在屏上看到标本的放大像,荧光屏下面为照相室,内装照相底片。移开荧光屏,则可将影像直接投到底片上。

由于透射电镜成像记录的是与样品发生过相互作用而从标本穿透出来的电子,而电子穿透样品的能力较低,故要求标本制作得很薄,约 $0.2 \mu\text{m}$ 。另外,透射电镜是以高速电子作为工作媒质,所以镜筒内要求保持高真空度(达 $1.33 \times 10^{-5} \text{ Pa}$),否则电子与残余气体原子相碰,引起电离和放电、造成灯丝被腐蚀、样品被沾污等。此外,现代透射电镜为达到更高分辨率,要求电压和电流非常稳定,飘移不能超过十万分之一,甚至要求达到百万分之一左右。这种稳定性要求必须依靠非常精确的电路来控制,才能得到实际样品的结构图像。

电子显微镜具有很高的放大倍数和分辨本领,目前,电子显微镜在医学、生物学、材料科学等领域得到了广泛的应用,它已成为现代技术和科学研究不可缺少的重要工具之一。

§ 18 - 5 不确定关系

在经典力学中,质点的运动都沿着一定的轨道,在轨道上任意时刻质点都

有确定的位置和动量,只要知道了粒子的初始位置和速度(动量),知道了粒子所受的力,根据牛顿方程即可知道粒子在以后任何时刻的位置和速度(动量).这就是经典的决定论观点,我们或者把它叫做因果律.这种方法在宏观世界,例如对天体、人造卫星的运动规律的描述,得到了巨大的成功.那么这条规律能否象能量守恒、角动量守恒那样推广到微观领域呢?

在经典力学的概念中,用位置(坐标)和动量(或速度)来描述一个质点在某一时刻的运动状态,一个粒子的位置和动量是可以同时被精确确定的.在微观领域中,量子理论的发展揭示出:由于微观粒子具有波动性,粒子的位置和动量不可能同时被精确地确定,而只能说出其可能性或概率.

为了简单起见,我们仅以电子的单缝衍射为例进行说明.如图 18-17 所示,一束动量为 p 的电子射向宽度为 Δx 的狭缝,通过狭缝衍射后在屏幕(照相底片)上形成衍射图样.

根据德布罗意的理论,电子的单缝衍射和光学中的单缝衍射在物理本质上是相同的,都是波动性的结果.由单缝衍射公式,零级极大与第一级极小之间应满足

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

这里 λ 为电子束的德布罗意波长.

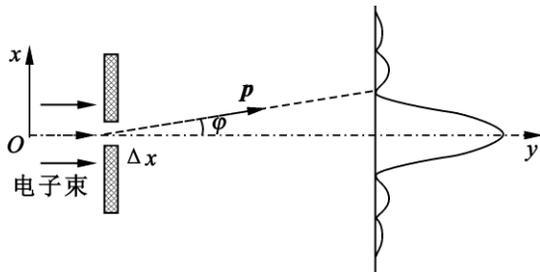


图 18-17 用电子单缝衍射说明不确定关系

现在,我们假定电子的运动状态仍可以用位置坐标 x 和动量 p 来描述.那么,一个电子通过狭缝时,它是从缝中哪一点通过的呢?显然,这一问题无法准确地回答,因为我们无法准确地测出它是从缝中哪一点通过的.也就是说,我们不能准确地确定电子通过狭缝时的位置坐标.而电子确实通过了狭缝,因此,我们只能说它是从宽为 Δx 的缝中通过的,因此,它在 x 方向上的位置不确定范围就是 Δx .它沿 x 方向的动量 p_x 是多大呢?如果说它在缝前的 p_x 等于零,在

通过缝时 p_x 就不再是零了. 因为如果还是零, 电子就要沿原方向前进而不会发生衍射现象了. 屏上电子落点沿 x 方向展开, 说明电子通过缝时已有了不为零的 p_x 值. 忽略次级极大, 可以认为电子都落在中央亮斑内, 因而电子在通过缝时, 运动方向可以有 φ 角的偏转. 如图 18 - 17 所示, 若只考虑一级衍射图样, 根据动量的矢量合成, 可知一个电子通过缝时在 x 方向动量的分量的大小 p_x 为下列不等式所限制:

$$0 \leq p_x \leq p \sin\varphi$$

这表明, 一个电子通过缝时在 x 方向上的动量不确定量为

$$\Delta p_x = p \sin\varphi$$

由单缝衍射公式, 暗纹的角位置 φ 由下式决定:

$$\varphi \approx \sin\varphi = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

由德布罗意公式

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

所以

$$\Delta p_x = \frac{h}{\Delta x}$$

即

$$\Delta x \Delta p_x = h$$

考虑到衍射条纹的次级极大, 应有

$$\Delta x \Delta p_x \geq h$$

坐标是任意选取的, 因此, 对于其他坐标, 上述关系仍然成立. 即

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq h \\ \Delta y \Delta p_y \geq h \\ \Delta z \Delta p_z \geq h \end{cases} \quad (18 - 22)$$

此式叫做不确定关系, 它不仅适用于电子, 也适用于其他微观粒子.

不确定关系表明, 如果要把粒子的动量非常精确地测定 $\Delta p \rightarrow 0$ (此处 p 为广义动量), 那么位置就非常不确定, 即 $\Delta q \rightarrow \infty$ (此处 q 为广义坐标), 也就是说, 不能限制粒子行进的道路, 只有在自由粒子时才能精确获得其动量. 反之, 若位置精确测定, 动量就非常不确定. 这表明在测量粒子的位置和动量时, 它们的精度存在着一个终极的不可逾越的限制. 如果我们仍用经典力学的物理量去描述微观粒子的状态, 那么, 只能在一定近似程度内做到. 所以粒子在某一向向上的位置坐标和在这个方向上相应的动量的确定程度是受到制约的, 不可能同时具有确定的位置坐标和相应的确定的动量. 若我们以更精确的办法确定粒

子的坐标(减小狭缝的宽度)则相应的动量的不确定程度必然更大(对应于第一级极小的衍射角 φ 更大). 反之亦然. 由于微观粒子的坐标和动量不可能同时被精确地确定, 所以, 不能用轨道的概念来描述其运动.

式(18-22)是只考虑第一级极小值处的偏转角 φ 和最大的缝宽 Δx , 作了十分粗略的近似而得到的结果, 实际的位置不确定度的平均值 Δx 和偏转角的平均值都要小于上述值, 计算出的 $\Delta x \Delta p_x$ 值还要小些. 更准确更一般的不确定关系, 最早是由德国物理学家海森堡(W. Heisenberg)于 1927 年提出的, 他所给出的关系式是

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \end{cases} \quad (18-23)$$

此称为海森堡不确定关系, 式中 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. 一些量子力学的专著给出了不确定关系的严格证明.

除了位置和动量的不确定关系外, 不确定关系也存在于对粒子的能量和时间测量的精度上. 考虑在一段时间 Δt 内测量一个粒子能量的不确定度 ΔE , 则有

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (18-24)$$

这个关系式可以用量子力学的方法推得, 也可以由位置和动量的不确定关系导出. 根据相对论的动量能量关系

$$E = mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

求微分, 得

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2} (p^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2c^2 p dp \\ &= \frac{c^2}{E} p dp = \frac{p dp}{m} = v dp \end{aligned}$$

则有

$$\Delta E \cdot \Delta t = \Delta p \cdot v \Delta t = \Delta p \cdot \Delta q \geq \frac{\hbar}{2}$$

在量子理论的观念中, 由于其粒子性, 可以谈论它的位置和动量, 但由于其

波动性,它的空间位置需要用概率波来描述,而概率波只能给出粒子在各处出现的概率,所以在任一时刻粒子不具有确定的位置,与此相联系,粒子在各时刻也不具有确定的动量.在任意时刻粒子的位置和动量都有一个不确定量.不确定关系不仅存在于位置和动量、能量和时间之间,实际上,凡是经典力学中具有共轭关系的两个物理量之间都存在着不确定关系.

不确定关系来源于物质的波粒二象性,是对波粒二象性的更明确的反映,是描述微观粒子本性的一条普遍的客观规律.也就是说,不确定关系是物质本性固有的特性所决定的,而不是由于测量仪器和测量方法的缺陷造成的.不论使用精确度多么高的测量仪器,我们认识一个物理体系的精确度也要受到限制.因此,不能把不确定关系理解为“不可能”、“不可知”、“不准确”等等.其次,不确定关系更真实地揭示了微观世界的运动规律,从这个意义上讲,应该说是更精确了.

由不确定关系可以看出,当普朗克常数 $h \rightarrow 0$ 时,则有 $\Delta x \Delta p_x \geq 0$,这表明物体的坐标和相应的动量可以同时被确定.这时物体的运动规律服从经典力学理论.反之,若 h 不能忽略,就必须考虑其微观特征,用量子力学的方法的处理.因此,不确定关系划分了经典力学与量子力学的界限.

例 18 - 10 一个电子和一粒质量为 0.02 kg 的子弹,速度均为 $500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,且其精确度为 0.01% .试问其位置的最小不确定度是多少?

解 由题意 $\frac{\Delta v}{v} = 10^{-4}$, 即 $\Delta v = 10^{-4} v$

所以 $\Delta p = m \Delta v = 10^{-4} m v$

由不确定关系 $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$

则

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi \Delta p_x} = \frac{h}{4\pi \times 10^{-4} m v}$$

(1)对于电子, $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 于是

$$\begin{aligned} \Delta x &\geq \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4 \times 3.14 \times 10^{-4} \times 9.11 \times 10^{-31} \times 500} \\ &= 1.1 \times 10^{-3} (\text{m}) \end{aligned}$$

(2)对于质量为 $m = 0.02 \text{ kg}$ 的子弹

$$\begin{aligned} \Delta x &\geq \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4 \times 3.14 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-2} \times 500} \\ &= 0.53 \times 10^{-31} (\text{m}) \end{aligned}$$

可见,具有同样速度的宏观物体其位置的不确定度比起电子要小得多,以至于利用现有的任何仪器都无法观察到它的不确定性.所以,不确定关系对于宏观物体是不重要的.

例 18 - 11 试由不确定关系计算束缚在原子内的电子的最小平均动能,进而说明电子不能落入核内.

解 假如电子被束缚在线度为 r 的范围内,依照式(18 - 23),电子的动量必有一个不确定度,它至少为

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2r}$$

Δp_x 的定义是

$$\Delta p_x = \sqrt{(p_x - \bar{p}_x)^2}$$

对于束缚在空间的电子,其动量在任何方向的平均分量必为零,即 $\bar{p}_x = 0$,故由上式得

$$(\Delta p_x)^2 = \overline{(p_x^2)}$$

对于三维空间

$$\overline{(p_x^2)} = \frac{1}{3}\overline{(p^2)}$$

依照这些关系,可以得到束缚在原子内的电子的最小平均动能为

$$E_k = \frac{\overline{(p^2)}}{2m} = \frac{3\hbar^2}{8mr^2}$$

随着电子距核越来越近,即 r 越来越小,它将从原子的线度(10^{-10} m)过渡到原子核的线度(10^{-15} m).电子的平均动能也越来越大.

当电子运动在原子范围($r_1 = 10^{-10}$ m)时,其平均动能为

$$\begin{aligned} E_{k_1} &= \frac{3\hbar^2}{8mr_1^2} = \frac{3\hbar^2}{32\pi^2 mr_1^2} \\ &= \frac{3 \times (6.63 \times 10^{-34})^2}{32 \times (3.14)^2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 10^{-20}} \\ &= 4.59 \times 10^{-19} \text{ (J)} = 2.89 \times 10^{-3} \text{ (eV)} \end{aligned}$$

当电子运动过渡到原子核范围($r_2 = 10^{-15}$ m)时,其平均动能为

$$E_{k_2} = \frac{3\hbar^2}{32\pi^2 mr_2^2} = 4.59 \times 10^{-9} \text{ (J)} = 2.89 \times 10^7 \text{ (eV)}$$

可见,若电子的运动范围从原子线度过渡到原子核线度,它的平均动能将增加 10^{10} eV. 电子从哪里获得这样大的动能呢? 没有任何这样的能量来源. 因此,电子不能靠近原子核,更不用说落入原子核了. 玻尔理论不能解释的问题,

不确定关系作了确定的回答.

§ 18 - 6 波函数

一、波函数

一切微观粒子都具有波粒二象性. 在量子力学中, 反映实物粒子波动性的德布罗意波是用一个随时间和空间变化的函数——波函数来描写的, 波函数用符号 Ψ 标记.

在经典物理学中, 一列频率为 ν 、波长为 λ 、沿 x 方向传播的单色平面机械波的波函数为

$$y(x, t) = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

沿 x 方向传播的、频率为 ν 、波长为 λ 的平面电磁波的波函数为

$$\begin{cases} E(x, t) = E_0 \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \\ H(x, t) = H_0 \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \end{cases}$$

显然, 平面机械波和平面电磁波的波函数在形式上是相同的.

一个不受外力作用的自由粒子, 在做匀速直线运动过程中, 其能量和动量保持不变. 由德布罗意关系式, 自由粒子物质波的频率和波长

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

也将保持不变. 从波动的观点看, 频率 ν 和波长 λ 恒定不变的波是单色平面波, 所以, 自由粒子的德布罗意物质波是单色平面波. 以描述粒子性的物理量 E 和 p 代替描述波动性的物理量 ν 和 λ , 就得到自由粒子物质波的波函数

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \psi_0 \cos 2\pi \left(\frac{E}{h} t - \frac{px}{h} \right) \\ &= \psi_0 \cos \frac{1}{h} (Et - px) \end{aligned}$$

式中 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ψ_0 是波函数的振幅. 利用欧拉公式可以将上式写成复数形式

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

在量子力学中, 通常把上式写成

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \quad (18 - 25)$$

这就是沿 x 方向运动的、能量为 E 、动量为 p 的自由粒子物质波的波函数.

在三维空间中,沿径矢 r 方向传播的自由粒子物质波的波函数为

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} \quad (18-26)$$

二、波函数的统计解释

波函数表示微观粒子的波动性,那么,它的物理意义是什么呢?我们知道,机械波是机械振动在弹性媒质中的传播, $y(x, t)$ 表示在 t 时刻、处于 x 处的媒质质点的振动位移. 对于电磁波, $y(x, t)$ 则表示在 t 时刻空间中 x 处的电场 E 或磁场 B 的值. Ψ 是和微观粒子相联系的物质波的波函数,它的实质是什么呢?

1926 年,德国物理学家玻恩(M. Born)找到了对德布罗意波的正确解释. 他认为,实物粒子的物质波只具有统计意义,因此,描述这种波的波函数也具有统计意义.

为了说明这个问题,我们将光的单缝衍射与电子的单缝衍射进行比较.

光通过单狭缝后,将产生衍射现象,在屏幕上出现明暗相间的条纹. 按照光的波动观点,在亮纹处光的强度大,在暗纹处光的强度小. 而按照光的粒子性观点,亮纹处表示单位时间到达这里的光子数多,暗纹处表示单位时间到达该处的光子数少. 从统计的观点看,在大量光子中到达某一区域的光子数多,就说明每一个光子到达该区域的概率大. 所以,在光强度大的亮处,光子出现的概率较大,而在光强度小的暗处,光子出现的概率较小,光强度为零的地方,光子出现的概率为零. 按照波动理论,波的强度与振幅的平方成正比. 因此,可以说,在某处光波的强度与该处光子出现的概率成正比,或者说,在某处的光波振幅平方与该处光子出现的概率成正比.

电子的单缝衍射也形成与光的单缝衍射完全类似的衍射图样,这是电子具有波粒二象性的必然结果. 因此,类似于上述分析方法,在某处电子波的强度与电子出现在该处的概率成正比. 不仅对于电子是如此,对于其他所有微观粒子也是如此. 所以,普遍地说,某处物质波的强度与粒子出现在该处的概率成正比.

由于实物粒子的物质波只能用复数形式表达,所以,利用复指数函数的运算法则,它的平方应等于波函数与其复共轭函数的乘积. 即

$$|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* \quad (18-27)$$

式中 Ψ^* 是 Ψ 的复共轭(complex conjugate)函数.

如果在空间一个很小的区域 $x \rightarrow x + dx$, $y \rightarrow y + dy$, $z \rightarrow z + dz$ 内,粒子的波函数 Ψ 可视为不变,则 t 时刻粒子在 (x, y, z) 处、体积元 $dV = dx dy dz$ 内出现的概率除正比于 $|\Psi|^2$ 外,还应正比于体积元 dV . 即

$$|\Psi|^2 dV = \Psi \cdot \Psi^* dx dy dz \quad (18 - 28)$$

因此, $|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$ 表示 t 时刻在 (x, y, z) 处单位体积中粒子出现的概率, 称为概率密度.

综上所述, 波函数的物理意义是: 某时刻在空间某点实物粒子波函数模的平方 $|\Psi|^2$ 与该点附近体积元 dV 的乘积, 正比于该时刻在该点邻近体积元 dV 内发现该粒子的概率. 这就是波恩对波函数提出的统计解释. 它表明, 波函数本身并没有直接的物理意义, 有物理意义的是波函数的平方. 因此, 描述实物粒子的德布罗意波又叫做概率波 (probability wave).

对波函数的这种解释即维护了粒子性, 又能体现粒子的波动性, 由于概率波给出的是粒子出现的概率, 所以不要求分割电子, 粒子的概率分布是由波函数决定的, 所以能给出干涉、衍射图样, 又体现了波动性.

由概率波给出的单个粒子运动规律并不能给出每个粒子一定在哪里出现, 而只是给出概率分布, 当然对大量粒子形成的总分布能给出十分确定的结果, 这种规律为统计性规律.

三、波函数的归一化条件和标准条件

既然波函数模的平方 $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ 表示粒子出现在空间某处的概率, 那么, 在整个空间发现粒子的概率就应该等于 1, 即

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx dy dz = 1 \quad (18 - 29)$$

对波函数的这一要求称为归一化条件, 满足式 (18 - 29) 的波函数称为归一化波函数.

波函数一般是位置和时间的函数. 在某一时刻, $|\Psi|^2$ 是空间位置的函数, 在空间给定区域内, 粒子出现的概率应该是唯一的, 不可能既是这个值, 又是那个值, 而且应该是有限的 (实际上应小于 1). 在空间不同区域, 概率随位置的变化应该是连续分布的. 这就要求波函数 Ψ 必须是一个单值、有限和连续的函数. 这些条件叫做波函数的标准条件. 用量子力学处理具体问题时, 波函数的标准条件是十分重要的.

四、经典的和量子的“波”与“粒子”的联系和区别

在经典力学中谈到一粒子时, 总意味着它是具有一定的质量、电荷等属性的客体, 即物质的“颗粒性”或“原子性”. 物质的“原子性”是被实验所证实的, 比如, 电子具有质量 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 电荷 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$. 被视为质点的粒子遵循“决定性”规律, 粒子的位置及其他物理量原则上能精确测量. 但是,

粒子有完全确定的轨道的概念只是牛顿力学体系中的概念. 在宏观世界中, 这个概念是个很好的近似(例如炮弹的轨道, 卫星围绕地球运动的轨道等等), 但是, 这个概念从来也没有精细地为实验所证实. 例如, 假设玻尔轨道半径为 a_0 , 要肯定电子确实沿这条轨道运动, 就必须不断地对电子的位置进行测量, 并要求误差远小于 a_0 . 这只有用波长 $\lambda \ll a_0$ 的 X 光观测, 但按照康普顿散射, X 射线的光子与电子相互作用, 伴随着动量转移 $\sim \frac{h}{\lambda} \gg \frac{h}{a_0}$, 因而对电子的运动将产生一个扰动, 如果要求位置测量得越精确, 使用的 X 光波长就要求越短, 但这时对电子的扰动就越大, 电子就不可能维持原来的运动状态. 所以, 无限精确地跟踪一个电子是不可能的.

在经典力学中谈到一个波动时, 总意味着某种实际的物理量的空间分布做周期性的变化(比如水波、声波等). 更重要的是呈现干涉、衍射现象, 而干涉和衍射的本质在于波的相干叠加性.

在经典概念下, 粒子和波是两个彼此独立的概念, 它们根本不能统一到一个客体上.

在量子力学中, 仔细分析电子的衍射、干涉实验可以看出, 电子所呈现出来的粒子性只是经典概念中的“原子性”或“颗粒性”, 即电子总是以具有一定质量、电荷等属性的客体出现在实验中, 并不与“粒子有确切的轨道”的概念有什么必然联系. 事实上, 也没有什么实验证据妨碍我们抛弃电子有精确“轨道”的概念. 而电子所呈现的波动性, 也只不过是波动性中最本质的波的“叠加性”, 并不是一定要与某种实际的物理量在空间的分布联系在一起. 把微观粒子的波动性与粒子性统一起来, 更明确地说, 把微观粒子的“原子性”与波的“叠加性”统一起来是波恩提出来的概率波.

微观粒子的概率性与气体动理论中大量气体分子的统计行为类似, 但却存在着根本的差别. 气体动理论中显示的概率是大量粒子的一种集体行动, 它不会产生干涉、衍射效应, 而且其中每一个分子的行为仍然是决定性的. 在量子力学中, 我们所说的具有波粒二象性的微观粒子系统只有一个粒子. 微观粒子所显示的概率波是一种量子现象, 或者说是一种量子概率性, 这种概率性会产生干涉和衍射现象.

§ 18 - 7 薛定谔方程及其应用

在经典力学中, 质点的运动状态用位置矢量 $r(x, y, z)$ 和速度 $v(v_x, v_y, v_z)$ 来描述. 若已知质点在某一时刻的运动状态及其所受的力, 就可以由牛顿动力学

方程求出质点在任一时刻的运动状态. 在量子力学中, 微观粒子的运动状态是用波函数 $\Psi(r, t)$ 描写的, 那么, 决定微观粒子运动状态变化的方程又是什么呢?

在德布罗意物质波的基础上, 奥地利物理学家薛定谔于 1926 年建立了势场中微观粒子波函数所遵循的微分方程, 称之为薛定谔方程. 若已知微观粒子在某一时刻的状态, 就可由薛定谔方程求出它在任一时刻的状态.

一、薛定谔方程

为介绍薛定谔方程的建立, 先讨论自由粒子波函数所满足的方程. 一个能量为 E 、动量为 p 、沿 x 方向运动的自由粒子物质波的波函数为

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

将 $\Psi(x, t)$ 对坐标 x 求二阶偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}p\right)^2 \Psi = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi$$

用 $\frac{\hbar^2}{2m}$ 乘上式两端, 有

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{2m} \Psi \quad (18-30)$$

再将 $\Psi(x, t)$ 对时间 t 求一阶偏导数, 得

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi$$

用 $i\hbar$ 乘上式两端, 有

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \Psi \quad (18-31)$$

在非相对论(低速)情况下, 自由粒子的能量 E 和动量 p 的关系为

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (18-32)$$

由式(18-30)、(18-31)、(18-32), 可得

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (18-33)$$

这是一个不含能量 E 和动量 p 的线性偏微分方程, 称为一维自由粒子的薛定谔方程. 在(18-32)式的关系下, 式(18-25)所表示的一维自由粒子的波函数是式(18-33)的一个解.

对于一个在力场中运动的非自由粒子, 设粒子的势能为 $U(x, t)$, 则粒子的总能量为

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x, t) \quad (18-34)$$

由式(18-30)、(18-31)、(18-34)可得

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x, t)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (18-35)$$

这就是在势场中运动的一维粒子的薛定谔方程. 当 $U(x, t) = 0$ 时, 就得到一维自由粒子的薛定谔方程. 可见, 式(18-33)是式(18-35)的特殊情况.

对于在三维势场中运动的微观粒子, 只要将式(18-35)中的 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 换成

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

便可得

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U(\mathbf{r}, t)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (18-36a)$$

∇^2 称为拉普拉斯算符. 若引入哈密顿算符

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}, t)$$

则(18-36a)可写成

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (18-36b)$$

式(18-36a)或式(18-36b)就是普遍形式的薛定谔方程.

一般来说, 只要知道粒子的质量 m 和粒子所在势场势能函数 U 的具体形式, 就可以由式(18-36)写成其相应的薛定谔方程. 因为薛定谔方程是时间和空间的二阶偏微分方程, 所以, 还要根据给定的初值条件和边界条件求解, 从而得出描写微观粒子状态的波函数. 再由波函数模的平方给出粒子在不同时刻出现在不同位置的概率密度. 这就是量子力学处理微观粒子运动的方法.

自从 1926 年薛定谔方程提出以来, 关于低能微观粒子的大量实验事实无不证明, 用薛定谔方程计算所得的结果都与实验结果完全相符合. 因此, 薛定谔方程是量子力学的基本方程, 在量子力学中的地位和作用与牛顿方程在经典力学中的地位 and 作用相当. 它和牛顿定律一样, 是不可能由其他更基本的方程推导出来的. 薛定谔当初就是“猜”加“凑”出来的, 是量子力学的一个基本假设, 它的正确性主要看其所得的结论是否与实验结果相符. 所以, 上述建立薛定谔方程的过程, 并不是数学上的“证明”或“推导”, 只是说明方程建立过程的主要思路.

在有些情况下, 微观粒子的势能仅是坐标的函数 $U(x)$, 而与时间 t 无关. 于是, 就可以将式(18 - 25)所表示的波函数分成坐标函数与时间函数的乘积, 即

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t) = \psi_0(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad (18 - 37)$$

其中

$$\psi(x) = \psi_0(x)e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

把式(18 - 37)代入式(18 - 35)可得

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + (E - U)\psi(x) = 0 \quad (18 - 38)$$

式(18 - 38)称为势场中一维运动粒子的定态薛定谔方程.

若粒子在三维势场中运动时, 式(18 - 38)可推广为

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (18 - 39a)$$

$$\psi = E\psi \quad (18 - 39b)$$

在定态薛定谔方程中常数 E 就是微观粒子的能量, 所以, 粒子处于定态时, 能量 E 有确定值. 换言之, 定态就是能量具有确定值的状态.

在定态中, 概率密度也不随时间变化. 因为

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

所以

$$|\Psi(x, y, z, t)|^2 = \Psi\Psi^* = |\psi(x, y, z)|^2$$

与时间无关. 在处理定态问题时, 只需求出 $\psi(x, y, z)$ 即可. 因为 $\psi(x, y, z)$ 乘以时间因子 $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ 就可以得到最终形式的波函数 $\Psi(x, y, z, t)$.

定态薛定谔方程在物理学中有许多应用, 例如: 氢原子、一维无限深势阱、隧道效应等. 在材料科学、生命科学、半导体的掺杂、零点能的存在、纳米材料等等都有许多应用. 下面用薛定谔方程处理两个典型问题.

二、一维无限深势阱

在力场的作用下, 质量为 m 的粒子, 被限制在一定的范围内运动. 最简单的情况是粒子在外力场中的运动是一维的情形, 如图 18 - 18 所示为粒子在一维无限深势阱中运动. 在势阱内, 由于势能是常量, 所以粒子不受力而作自由运动. 在边界 $x=0$ 和 $x=a$ 处, 势能突然增至无限大, 所以粒子会受到无限大的指向阱内的力. 因此, 粒子的位置就被限制在阱内, 粒子的这种运动状态被称为束缚态.

图 18 - 18 所示的势能可以表示为

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (x \leq 0, x \geq a) \end{cases}$$

仅是空间坐标的函数,与时间无关,可以用定态薛定谔方程,并分区域求解该问题.

在 $x \leq 0$ 和 $x \geq a$ 处,因为势函数为无限大,只有波函数为 0 才能满足薛定谔方程,由定态波函数 $\Psi = 0$ 得出含时波函数 $\Psi = 0$.

在 $0 < x < a$ 区域内,由定态薛定谔方程(18 - 38)有

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi$$

解方程时,令 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, 则

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0$$

这是一个二阶常系数线性齐次微分方程.对本题而言,其通解表示为三角函数形式较为方便,即

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (18 - 40)$$

式中 A, B 为待定常数,可以由波函数的标准化条件确定它们的取值.

根据波函数的连续性条件,当 $x=0$ 和 $x=a$ 时,应有

$$\psi(0) = \psi(a) = 0$$

由 $\psi(0) = 0$, 可得 $B = 0$, 则定态波函数为

$$\psi(x) = A \sin kx$$

由 $\psi(a) = 0$, 可得

$$A \sin ka = 0$$

解此方程得 $ka = n\pi$, 即

$$k = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

与 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ 比较, 可得

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (18 - 41)$$

由此可见,要使问题有解,粒子的能量 E 只能取由 n 决定的一些不连续的离散值,故 n 称为能量量子数. E_n 称为本问题中能量 E 的本征值. 这里的 n 与玻

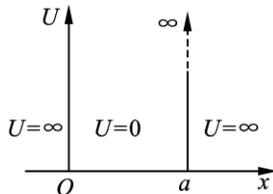


图 18 - 18 一维无限深势阱中的粒子

尔理论中的量子数相当,但在玻尔理论中,量子化条件是人为加上去的,而在这里,能量量子化条件是在求解薛定谔方程过程中,考虑边界条件和波函数的标准条件自然地得到的,没有任何人为的假定.

将 $B=0$ 及 $k = \frac{n\pi}{a}$ 代入式(18-40),可得

$$\psi(x) = A \sin \frac{n\pi}{a}x \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在上式中,对应于每一个 n ,相应地就有一个波函数.为此,我们用 $\psi_n(x)$ 表示对应于每一个 n 的波函数,即

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{a}x \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (18-42)$$

从数学上讲, n 可以取零和一切正负整数,但若 $n=0$,则 $k=0$, $\psi(x) = A \sin kx = 0$,这是没有意义的;若 n 取负整数,则 $\psi(x) = -A \sin \frac{|n|\pi}{a}x$,仅仅是改变符号而已,并不意味着 $|\psi|^2$ 有新的变化.因此,从物理角度考虑,此问题中 n 只取不为零的正整数.

下面,由归一化条件求式(18-42)中的待定系数 A .因为 x 的取值范围为 $0 < x < a$,所以

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

即

$$\int_0^a A^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a}x \right) dx = 1$$

由此得

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

将 A 代入式(18-42)可得一维无限深势阱中运动粒子的波函数为

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a}x & (0 < x < a) \\ 0 & (x \leq 0, x \geq a) \end{cases} \quad (18-43)$$

由式(18-41),当 $n=1$ 时

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

称之为基态能量,又称零点能,它不等于零.这在经典力学中是不可思议的.而在量子力学中,不等于零的零点能的存在是合理的,它是波粒二象性的必然结

果. 因为, 若粒子的能量 $E=0$, 则动量 $p=0$ 是一个定值, 必有 $\Delta p=0$. 而按照不确定关系 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ 就会有 $\Delta x \rightarrow \infty$. 但实际上, 粒子是处在势阱内的, 即 $\Delta x = a$, 因此, 必有一个动量的不确定度, 也就是说, 必存在一个不为零的能量.

由式(18-41)可得, 其他能级上的能量与基态能量之间有简单的关系:

$$E_n = n^2 E_1$$

与 E_n 对应的定态波函数为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

概率密度为

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

定态波函数及概率密度分布如图 18-19(a)、(b)所示.

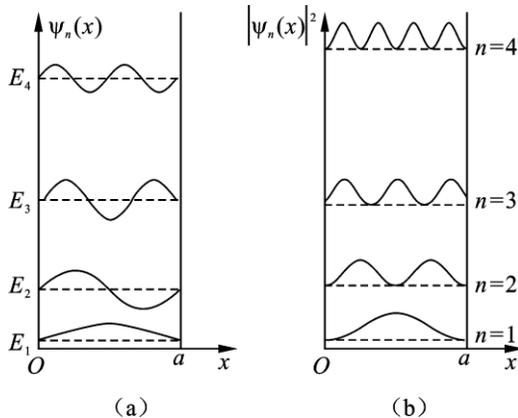


图 18-19 一维无限深势阱中粒子的波函数和概率密度

在量子数为 n 的量子态上, 粒子出现的概率密度为 $|\psi_n(x)|^2$, 概率密度最大的数目也是 n . 例如, $n=3$ 时, 分别在 $\frac{a}{4}, \frac{2a}{4}, \frac{3a}{4}$ 处概率密度最大.

相邻两能级之间的能量值相差为

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (2n+1)$$

在宏观粒子运动中, 即当势阱的宽度 a 很大或粒子的质量 m 很大时, 能级差 ΔE 值趋于 0, 这表明能量变为连续, 这时粒子的运动过渡为宏观运动状态. 可见, 宏观粒子的运动状态是微观粒子量子运动状态的一种大尺寸(或大质量)的近似. 一般地, 只有粒子运动范围接近或小于原子的限度时才具有明显的量子效应.

势阱是一种简单的理论模型. 自由电子在金属内部可以自由运动, 但很难逸出金属表面. 在此情况下, 自由电子就可以认为是处于以金属块表面为边界的无限深势阱中. 在粗略地分析自由电子的运动(不考虑点阵离子的电场)时, 就可以利用无限深方势阱这一模型.

例 18 - 12 设原子的线度为 10^{-10} m, 原子核的线度为 10^{-14} m 数量级, 已知电子质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, 质子的质量为 $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, 求电子在原子中的能量和质子在原子核中的能量.

解 把电子和质子看作分别局限在原子和原子核线度大小的无限深势阱中. 对电子, 有

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 = \frac{h^2}{8ma^2} n^2 \\ &= \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (10^{-10})^2} n^2 \\ &= 0.605 \times 10^{-17} n^2 (\text{J}) = 37n^2 (\text{eV}) \end{aligned}$$

所以 $n=1$ 时 $E_{1e} = 37 \text{ eV}$ $n=2$ 时 $E_{2e} = 148 \text{ eV}$

对质子

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{h^2}{8ma^2} n^2 = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (10^{-14})^2} n^2 \\ &= 2 \times 10^6 n^2 (\text{eV}) = 2n^2 (\text{MeV}) \end{aligned}$$

所以 $n=1$ 时 $E_{1p} = 2 \text{ MeV}$ $n=2$ 时 $E_{2p} = 8 \text{ MeV}$

例 18 - 13 粒子处在一维无限深势阱中, 试求其概率密度的最大值的位置.

解 一维无限深势阱中粒子的概率密度为

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi}{a} x \quad n=1, 2, 3, \dots$$

将上式对 x 求导一次, 并令它等于零

$$\frac{d}{dx} (|\psi_n(x)|^2) = 0$$

即

$$\frac{4m\pi}{a^2} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{a} x = 0$$

因为在阱内 ($0 < x < a$) $\sin \frac{n\pi}{a} x \neq 0$, 只有

$$\cos \frac{n\pi}{a} x = 0$$

于是

$$\frac{n\pi}{a}x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

由此, 可得概率密度最大值的位置为

$$x = (2k+1)\frac{a}{2n}$$

例如 $n=1, k=0$, 最大值位置为 $x = \frac{1}{2}a$

$n=2, k=0, 1$, 最大值位置为 $x = \frac{a}{4}, \frac{3}{4}a$

$n=3, k=0, 1, 2$, 最大值位置为 $x = \frac{1}{6}a, \frac{3}{6}a, \frac{5}{6}a$

可见, 概率密度最大值的数目和量子数 n 相等.

相邻两个最大值间的距离 $\Delta x = \frac{a}{n}$. 如果阱宽 a 不变, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$. 这

时最大值连成一片, 峰状结构消失, 概率分布成为均匀, 与经典理论的结论趋于一致.

三、一维方势垒

如图 18-20 所示, 假设粒子在势场

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0, x > a) \\ U_0 & (0 \leq x \leq a) \end{cases}$$

中沿 x 方向运动, 这种势能分布称为一维方势垒.

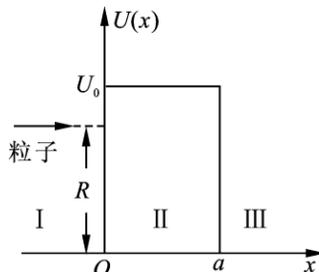


图 18-20 一维方势垒

为了讨论问题方便起见, 将整个空间分成 3 个区域: 区域 I ($x < 0$)、II ($0 < x < a$)、III ($x > a$). 把波函数在区域 I、II、III 中的函数形式分别用 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 表示.

对于从区域 I 沿 x 方向运动的粒子, 当粒子能量 $E > U_0$ 时, 无论从经典力学还是从量子力学来看, 粒子都可以穿过区域 II 到达区域 III. 不同的是, 从量子力学的观点来看, 考虑到微观粒子具有波动性, 粒子在分界面处还有反射, 故在区域 I 有入射波和反射波, 在区域 II 有透射波和反射波, 在区域 III 只有透射波.

当粒子能量 $E < U_0$ 时, 从经典物理学的观点看, 粒子无法穿越高垒进入 $x > a$ 区域的, 它只能逗留在 $x < 0$ 的区域 I. 量子力学却能给出完全不同的答案, 粒子是可以穿越区域 II 进入区域 III 的. 大量事实已经证明量子力学的结论是正确的.

设粒子的质量为 m , 以一定的能量 $E (E < U_0)$ 沿 x 方向从区域 I 向区域 II 运动. 因为 $U_{(x)}$ 仅是空间坐标的函数, 与时间无关, 所以也是一个定态问题. 由一维定态薛定谔方程(18 - 38), 可得各区域的波函数所满足的薛定谔方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_1 = 0 & (x < 0) \\ \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi_2 = 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \frac{d^2 \psi_3}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_3 = 0 & (x > a) \end{cases}$$

考虑到 $E < U_0$ 的情况, 令 $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$

这样 k_1 和 k_2 均为实数, 则上式可写成

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + k_1^2 \psi_1 = 0 & (x < 0) \\ \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} - k_2^2 \psi_2 = 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \frac{d^2 \psi_3}{dx^2} + k_1^2 \psi_3 = 0 & (x > a) \end{cases} \quad (18 - 44)$$

方程(18 - 44)的解具有如下形式

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + A_2 e^{-ik_1 x} & (x < 0) \\ \psi_2 = B_1 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} & (0 \leq x \leq a) \\ \psi_3 = C_1 e^{ik_1 x} + C_2 e^{-ik_1 x} & (x > a) \end{cases} \quad (18 - 45)$$

式(18 - 45)中, 波函数 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 的第一项表示沿 x 方向传播的平面波, 第二项表示沿 x 负方向传播的反射波. 由于粒子到达区域 III 后, 不会再有反射, 因此 $C_2 = 0$. 再由波函数的单值、连续条件

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0) \\ \frac{d\psi_1(0)}{dx} &= \frac{d\psi_2(0)}{dx} \\ \psi_2(a) &= \psi_3(a) \\ \frac{d\psi_2(a)}{dx} &= \frac{d\psi_3(a)}{dx} \end{aligned}$$

可以求得其他 5 个积分常数, 从而得到粒子在三个区域的波函数. (具体计算可参考一般量子力学专著).

图 18 - 21 表示粒子在三个区域中波函数的情况. 当粒子能量 $E < U_0$ 时, 在区域 I 中运动的粒子, 在一定的条件下, 将有可能穿透有限的势垒而出现在区域 III 内, 这个现象叫做势垒贯穿, 人们形象地称为隧道效应 (tunnel effect).

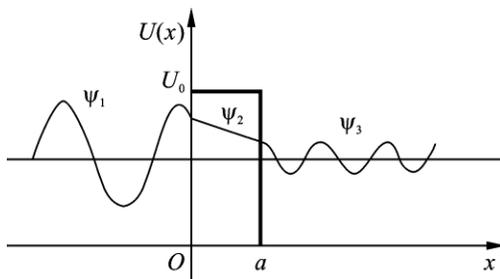


图 18 - 21 势垒穿透示意图

微观粒子穿透势垒的现象已被许多实验所证实, 制造扫描隧道扫描显微镜 (STM) 的基本理论依据就是隧道效应.

三、扫描隧道显微镜

势垒穿透现象的一个重要应用是扫描隧道显微镜 (Scanning Tunneling Microscope), 简称 STM. 1982 年, IBM 公司苏黎世研究所的物理学家宾尼 (G. Binnig) 和罗雷尔 (H. Rohrer) 发明的扫描隧道显微镜, 观察到了 Si(111) 表面清晰的原子结构, 从而使人类第一次进入原子世界, 直接观察到了物质表面上的单个原子. 为了表彰宾尼和罗雷尔的突出贡献, 1986 年授予他们诺贝尔物理学奖.

扫描隧道显微镜的基本原理如图 18 - 23 所示.

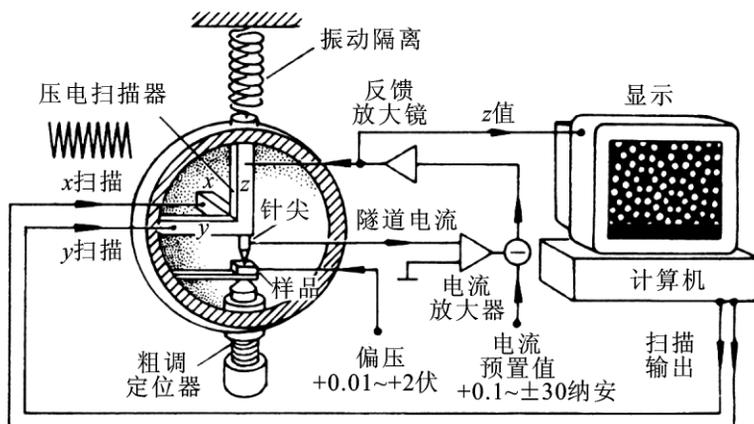


图 18 - 22 扫描隧道显微镜原理图

STM 的工作原理是基于量子力学中的隧道效应. 我们知道, 金属的表面处存在着势垒, 阻止着内部的电子向外逸出. 但由于微观粒子具有隧道效应, 表面

内的电子能够穿过表面势垒,到达表面外形成一层电子云. 这层电子云的密度随着与表面的距离的增大而按指数规律迅速减小. 这层电子云的纵向和横向分布由样品表面的微观结构决定,STM就是通过显示这层电子云的分布而考察样品表面的微观结构的.

使用 STM 时,先将探针推向样品,直至二者的电子云略有重叠为止. 这时在探针和样品间加上电压,电子便会通过电子云形成隧穿电流. 由于电子云密度随距离迅速变化,所以隧穿电流对针尖与表面间的距离极其敏感. 例如,距离改变一个原子的直径,隧穿电流会变化 1000 倍. 当探针在样品表面上方横向扫描时,根据隧穿电流的变化利用一反馈装置控制针尖与表面间保持一恒定的距离. 把探针尖扫描和起伏运动的数据送入计算机进行处理,就可以在荧光屏或绘图机上显示出样品表面的三维图像. 和实际尺寸相比,这一图像可放大到 1 亿倍.

STM 不但可以当作“眼”来观察材料表面的细微结构,而且可以用作“手”来摆弄单个原子. 可以用它的探针尖吸住一个孤立原子,然后把该原子放到另一个位置. 这就迈出了人类用单个原子这样的“砖块”来建造“大厦”即各种理想材料的第一步. 图 18-23 是 IBM 公司的科学家于 1993 年精心制作的“量子围栏”(quantum corral)的计算机照片. 他们在 4 K 的温度下,用 STM 的针尖一个一个地把 48 个铁原子栽到了一块精制的铜表面上,围成一个圆圈,圈内就形成了一个势阱,把在该处铜表面运动的电子圈了起来. 图中圈内的圆形波纹就是这些电子的波动图景,它的大小及图形和量子力学的预言符合得非常好.

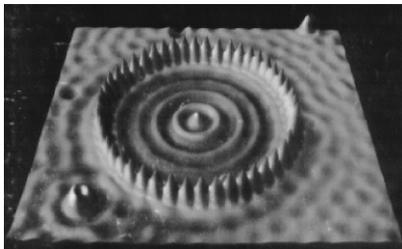


图 18-23 “量子围栏”

STM 的横向分辨率已达 0.1 nm,纵向分辨达 0.01 nm. STM 的出现,使人类第一次能够适时地观察单个原子在物质表面上的排列状态以及表面电子行为有关性质. STM 提供给科学家一个微小的实验室,用它来研究纳米世界里的一些新奇的现象,一些新的效应,这是其他技术做不到的.

在纳米结构半导体材料的研究中,出现的超晶格(super lattice)、量子阱(quantum well)、量子线(quantum wires)、量子点(quantum dots)等均认为是量子约束效应的结果,是上面我们讲的势阱和势垒理论的直接应用. 已成为新的研究方向.

§ 18 - 8 氢原子理论简介

众所周知,玻尔的氢原子理论是不自洽的,时而经典,时而量子,量子条件的引入是不协调的.在微观粒子波粒二象性基础上建立起来的量子力学,对氢原子问题的处理有较完整的论述.用薛定谔方程求解氢原子问题,能量量子化和角动量量子化的得出是自然的,无需任何人为的假设.氢原子的量子力学理论不仅能解释氢原子的结构、光谱、谱线强度,而且可以推广到更复杂的原子系统.但是,由于数学运算比较复杂,超出了大学物理课程的教学要求.因此,我们只简要介绍量子力学处理氢原子定态问题的方法、几个量子数及有关结论.

一、氢原子的薛定谔方程

氢原子由一个带负电荷的电子和一个带正电荷的原子核组成,是最简单的原子.氢原子核的质量大约是电子质量的 1836 倍.由于原子核的质量远大于是电子质量,故可以把原子核视为静止不动,电子在原子核的库仑场中运动,体系的势能为

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

式中 e 是电子电量的绝对值, r 是电子到核的距离. 因为 $U(r)$ 仅与空间坐标有关, 与时间无关, 故是一个定态问题. 将 $U(r)$ 代入式(18 - 39a), 可得到氢原子的定态薛定谔方程

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

由于势能 $U(r)$ 仅是 r 的函数, 具有球对称性, 所以, 采用球坐标 (r, θ, ϕ) 比用直角坐标 (x, y, z) 更为方便. 取原子核中心为坐标原点, 如图 18 - 24 所示, 有

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

在球坐标系中, 拉普拉斯算符的表达式为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

于是得到用球坐标表示的氢原子中电子运动的定态薛定谔方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

(18 - 46)

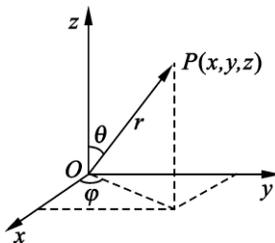


图 18 - 24 球坐标与直角坐标

由于势能仅为 r 的函数,且 ψ 仅为 r, θ, φ 的单值函数,把波函数 ψ 写成

$$\psi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi) \quad (18-47)$$

其中 $R(r)$ 仅为 r 的函数、 $\Theta(\theta)$ 仅为 θ 的函数、 $\Phi(\varphi)$ 仅为 φ 的函数. 经过一系列数学换算后,可得三个独立函数 $R(r)$ 、 $\Theta(\theta)$ 、 $\Phi(\varphi)$ 所满足的方程

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m_l^2 \Phi = 0 \quad (18-48)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[1(1+1) - \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (18-49)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{1(1+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (18-50)$$

二、量子化条件和量子数

根据波函数必须满足的标准条件求解方程(18-48)、(18-49)、(18-50)再代入式(18-47),便可得到描述氢原子各定态的本征函数

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r) \Theta_{l,m_l}(\theta) \Phi_{m_l}(\varphi)$$

在求解过程中还出现了3个量子数 n, l 和 m_l , 波函数 $\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi)$ 的具体形式由量子数确定. 给定一组 (n, l, m_l) 的数值, 就可以确定一个具体的本征函数, 也就确定了氢原子的一个状态. 因此, 量子数 n, l 和 m_l 可以作为原子状态的标志.

1. 能量量子化和主量子数

在求解径向波函数 $R(r)$ 的过程中, 对于 $E < 0$ 的束缚态, 为了保证 $R(r)$ 满足标准条件, 能量本征值只能取一些离散的值

$$E_n = - \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (18-51)$$

式中 $n = 1, 2, 3, \dots$ 称为主量子数. 可见, 在束缚态下能量是量子化的, 形成了原子的能级. 量子数 n 一经给定, E_n 的值就完全确定. 对应于 $n=1$ 的状态称为氢原子的基态, 当 $n=1$ 时, $E_1 = -13.6 \text{ eV}$, 这就是氢原子的基态能量. 对应于 $n > 1$ 的其他取值, 是氢原子的各个激发态.

将式(18-51)与玻尔理论的氢原子能量公式对比, 可以看出他们是完全一致的. 但是, 玻尔的氢原子能量公式是在经典力学的基础上加上三条量子假设导出的, 而量子力学的能级公式(18-51)不需要任何的人为假设, 它是波函数满足标准条件的必然结果. 它比玻尔理论更为合理.

2. 角动量量子化和角量子数

角动量 L 有3个分量 L_x, L_y, L_z , 可是, 对于具有波粒二象性的粒子, 如同坐标和动量不能同时被确定, 要受到不确定关系的限制一样, 角动量 L 有3个分

量也不能同时被确定,而要受到不确定关系的限制.但是,量子力学理论证明, L^2 和 L_z 都可以同时有完全确定的值.

求解氢原子波函数的角函数部分方程式(18-49)和径向部分方程式(18-50)时,要使方程有确定的解,电子绕核运动的角动量必须满足量子化条件

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (18-52)$$

式中 l 称为角量子数.由于角量子数 l 只能取 $0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 这些正整数,故角动量 L 的数值也只能取 $0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar$ 等一系列离散的数值.可见,角动量的大小是量子化的,角量子数 l 标志着角动量取不同值的状态.

应该注意,虽然量子力学的结果和玻尔理论都表明角动量的大小是量子化的,但两者截然不同.差别在于:(1)量子力学得出的角动量的最小值为零,而玻尔理论给出角动量的最小值为 $\frac{h}{2\pi}$.实验证明量子力学结果(18-52)式是正确的.(2)角量子数 l 受主量子数 n 的限制,例如 $n=1$ 时 l 只能取 0 , $n=2$ 时 l 只能取 0 和 1 ,而不能取其他值.

因为,对应于一个主量子数 n ,可以有 n 个不同的 l 值,则对应于同一能级,存在 n 个不同的角动量的数值.也可以说,对应于同一能级,存在 n 个不同的运动状态.例如,对于 $n=2$ 的确定能级,存在两个不同的稳定状态,所对应的角动量分别是 0 和 $\sqrt{2}\hbar$.这种能量不同的不同微观态的存在称为“简并”现象.

3. 空间量子化和磁量子数

电子的角动量由角量子数 l 决定,但是,式(18-52)只给出了角动量数值,角动量是一个矢量.因此,要完全确定电子的角动量,还必须知道它在空间的方位.在经典力学中,角动量的取向不作任何限制,但在量子力学中,角动量 L 还有一定的空间取向.

在求解氢原子波函数的角函数部分方程式(18-48)时,可知角动量只能取一些特定的方向,即角动量 L 在外磁场方向(取 z 方向)的投影必须满足量子化条件

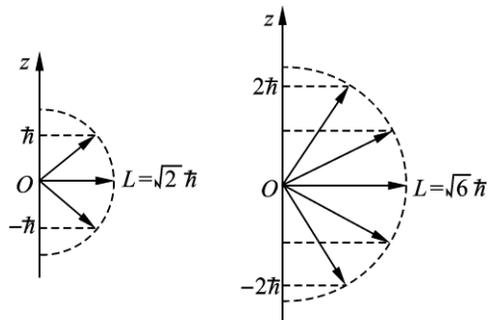
$$L_z = m_l \hbar \quad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l) \quad (18-53)$$

式中 m_l 称为磁量子数.式(18-53)表明,对于一个给定的 l 值, m_l 可以取 $(2l+1)$ 个不同的值.也就是说,角动量 L 在空间有 $(2l+1)$ 个不同的取向.这种现象叫做角动量空间取向量子化,简称空间量子化.

如图18-25所示,分别画出了 $l=1$ 和 $l=2$ 时,电子轨道角动量空间取向量子化的示意图.由同一个 n 和 l 表征的微观态,它可能又有 $(2l+1)$ 个不同的运动取向,也就是有 $(2l+1)$ 个不同的量子态.这就是空间量子化的意义.

在有外磁场存在时, z 轴一般取外磁场方向, L_z 就表示角动量在外磁场方向

的分量.



(a) $l=1, m_l=0, \pm 1$ (b) $l=2, m_l=0, \pm 1, \pm 2$

图 18-25 角动量的空间量子化

综上所述, 氢原子中电子的稳定状态是用一组量子数 n, l, m_l 来描述的. 在一般情况下, 电子的能量主要决定于主量子数 n , 与角量子数 l 只有微小关系. 在无外磁场时, 电子能量与磁量子数 m_l 无关. 因此, 电子的状态可以用 n 和 l 来表示. 在光谱学中, 常用 s, p, d, f, g, h, \dots 字母分别代表 l 取 $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 状态. 具有角量子数 $l=0, 1, 2, \dots$ 的电子, 分别称为 s 电子、 p 电子、 d 电子、 f 电子等. 对于一个主量子数 n 和角量子数 l 给定了的原子中电子的运动状态, 可以用 (n, l) 来标记. 例如 $n=2, l=1$ 的状态, 可用 $2p$ 表示, 并称作 $2p$ 态.

表 18-2 氢原子内电子的状态

状态 n \ l	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5
	s	p	d	f	g	h
n=1	1s					
n=2	2s	2p				
n=3	3s	3p	3d			
n=4	4s	4p	4d	4f		
n=5	5s	5p	5d	5f	5g	
n=5	6s	6p	6d	6f	6g	6h

三、氢原子中电子的概率分布

在量子力学中, 没有轨道的概念, 取而代之的是空间概率分布的概念. 在氢原子中, 求解定态薛定谔方程得到的电子波函数 $\psi(r, \theta, \varphi)$, 对应每一组量子数 (n, l, m_l) , 有一确定的波函数

$$\psi_{n, l, m_l}(r, \theta, \varphi) = R_{n, l}(r) \Theta_{l, m_l}(\theta) \Phi_{m_l}(\varphi)$$

描述一个确定的状态. 电子出现在原子核周围的概率密度为

$$|\psi|(r, \theta, \varphi)|^2 = |R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)|^2$$

在空间体积元 $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ 内, 电子出现的概率为

$$|\psi|^2 dV = |R(r)|^2 |\Theta(\theta)|^2 |\Phi(\varphi)|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

若用 $Y(\theta, \varphi)$ 代替 $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 即

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

则有

$$|\psi(r, \theta, \varphi)|^2 dV = |R(r)|^2 r^2 dr \cdot |Y(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$$

式中 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 是立体角, $|R(r)|^2 r^2 dr$ 表示电子在从 r 到 $r + dr$ 之间出现的概率, 它描述电子的径向概率分布. $|Y(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$ 代表在以原子核为顶端, 以 (θ, φ) 为方位角的立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 中电子出现的概率, 它描述电子的角向概率分布.

1. 径向概率分布

只要通过方程(18-50)解出给定 (n, l) 的径向函数 $R_{n,l}(r)$, 就容易得到电子的径向概率密度分布 $|R_{n,l}(r)|^2 r^2$.

图 18-26 给出了几个量子态的径向概率密度分布. 由该图可以看出, 对于主量子数 n 和角量子数 l 的状态, 径向位置概率分布曲线有 $(n-1)$ 个极大值峰. 当 n 值给定时, l 值越小, 主峰位置离原子核越远, 但主峰的数目增多, 最内层的峰离原子核越近. n 值不同而 l 值相同的状态, 其主峰按照主量子数 n 增加的顺序向离核远的方向依次排列.

$n = 1, l = 0$ 的量子态称为氢原子的基态, 其径向波函数为

$$R_{10}(r) = 2 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

这里 a_0 是玻尔半径. 则氢原子基态电子的径向概率密度分布为

$$|R(r)|^2 r^2 = r^2 \cdot \frac{4}{a_0^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

若要知道径向概率密度分布极大值的位置, 可令

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \cdot \frac{4}{a_0^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} \right) = 0$$

所以

$$r = a_0$$

可见, 当氢原子处于基态时, 电子在 $r = a_0$ 处出现的概率最大. 在玻尔理论中, 基态氢原子中电子运动的轨道半径是 a_0 . 而在量子力学中, 电子不仅出现在 $r = a_0$ 的地方, 还可能出现在 r 等于其他值的地方 (除 $r = 0$ 和 $r = \infty$ 外), 只是出现在 $r = a_0$ 处的概率最大.

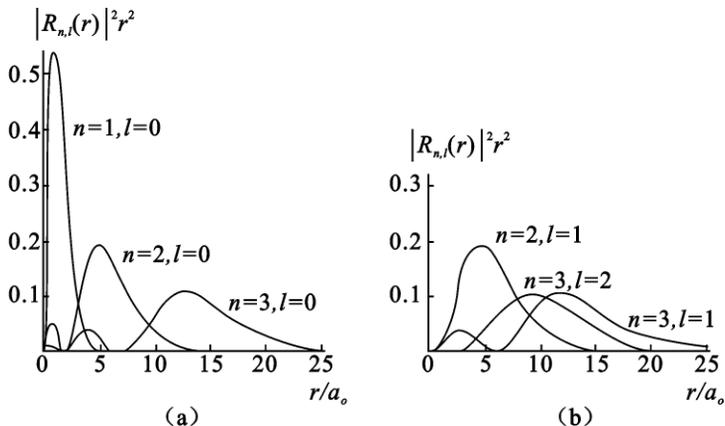


图 18 - 26 电子的径向概率分布

2. 角向概率分布

只要通过方程(18 - 48)和(18 - 49)解出给定 (l, m_l) 的角向函数 $\Phi(\varphi)$ 和 $\Theta(\theta)$ 就容易得到电子的角向概率密度

$$|Y(\theta, \varphi)|^2 = \Theta^*(\theta)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Phi^*(\varphi)$$

解(18 - 48)式可得

$$\Phi_{m_l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi}$$

则

$$\Phi_{m_l}(\varphi)\Phi_{m_l}^*(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{im_l\varphi} e^{-im_l\varphi} = \frac{1}{2\pi}$$

是一常数. 此说明 $|Y(\theta, \varphi)|^2$ 与 φ 无关, 角向概率密度分布对 z 轴是旋转对称的.

图 18 - 27 给出了 $l=0, 1, 2$ 时氢原子电子角向概率密度分布的示意图.

3. 电子云

如果把径向概率密度分布和角向概率密度分布结合起来, 则

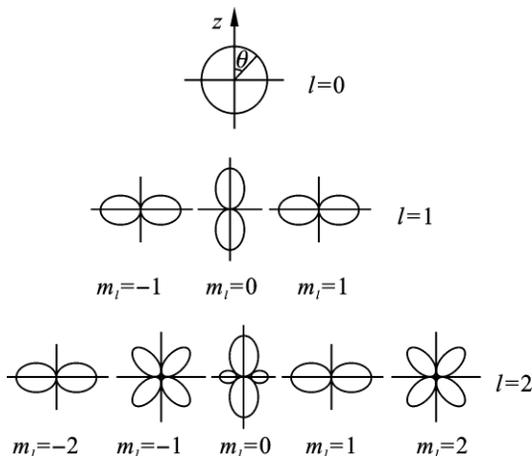


图 18 - 27 电子概率密度的角分布

$$|R(r)|^2 r^2 dr \cdot |Y(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 dV$$

就代表电子在空间体积元 dV 中实际出现的概率. 为了更形象一些, 人们常把这一概率分布想象成一种“云”, 概率大的地方“云层”浓密, 概率小的地方“云层”稀薄, 这就是所谓的“概率云”. 如果用电子电荷 e 与电子在原子内出现的概率密度 $|\psi(r, \theta, \varphi)|^2$ 相乘 $e|\psi(r, \theta, \varphi)|^2$ 就是电子概率分布的电荷密度, 称其为“电子云”. 所以图 18-26 和 18-27 所表示的电子在原子内出现的概率分布, 也就是这种“电子云”的相应密度分布.

当然, “电子云”只是对电子运动波动性的一种虚设的想像的直观性的描述, 并不意味着电子真像“云彩”那样弥散在空间各处.

§ 18-9 多电子原子中的电子分布

一、施特恩 - 盖拉赫实验

1921 年, 施特恩 (O. Stern) 和盖拉赫 (W. Gerlach) 为验证角动量的空间量子化, 所做的在非均匀磁场中观察银原子可能有磁矩的实验. 以后又用氢原子做了类似的实验. 这一实验导致了电子自旋的发现.

实验装置如图 18-28(a) 所示, 整个装置放在真空容器中. 银原子从加热炉 K 中以高速飞出, 通过具有细狭缝的隔板 A , 成为一细束定向飞出, 再通过磁体 S 极与 N 极之间很强且不均匀的磁场, 最后落到检测板 P 上. 实验发现, 在不加磁场时, 检测板 P 上沉积一条正对细狭缝的痕迹. 加上磁场后, 检测板 P 上呈现上下对称的两条沉积, 如图 18-28(b) 所示. 表明原子束通过非均匀磁场后分为两束, 这一现象证明了原子具有磁矩, 且磁矩在外磁场中只有两种取向, 即空间取向是量子化的.

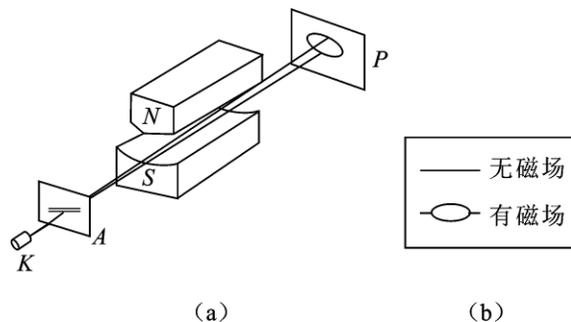


图 18-28 斯特恩—盖拉赫实验

施特恩 - 盖拉赫实验虽然证实了原子在磁场中的空间量子化, 但是, 所给

出的氢原子在磁场中只有两个取向的事实,却是空间量子化理论所不能解释的.按照空间量子化理论,当角量子数 l 一定时,磁量子数 m_l 有 $(2l + 1)$ 各取向,由于 l 是整数, $(2l + 1)$ 就一定是奇数.氢(或银)原子束在磁场中应该有奇数个取向,检测板 P 上沉积的痕迹应该是奇数条,而不可能是两条.

电子绕原子核运动,原子具有一定的角动量,也就具有一定磁矩.该实验所使用的处于基态的银原子最外层价电子处于 $5s$ 态(即 $n = 5, l = 0$),其轨道磁矩为零.显然,银原子磁矩并不是由于电子绕原子核的“轨道”运动形成的.那么,它是从何而来的呢?

二、电子自旋

为了说明上述实验结果,两位荷兰学者乌仑贝克(G. E. Uhlenbeck)和古兹密特(S. Goudsmit)于1925年提出“电子自旋”的大胆假设.乌仑贝克和古兹密特认为,电子除了轨道运动外,还存在着一种类似于陀螺绕自身轴旋转一样的自旋运动,电子具有自旋角动量 S 以及相应地自旋磁矩 μ_s .电子的自旋磁矩与自旋角动量成正比,而方向相反.上述实验结果表明,在外磁场中自旋磁矩是空间量子化的,在磁场方向上的分量 μ_{sz} 只能有两个量值,实验还表明,自旋角动量也是空间量子化的,在磁场方向上的分量 S_z 也只能有两个可能的量值.

因为自旋(角动量)这个假设有很多在经典物理中难以想像的东西,所以在自旋假设提出之初,许多物理学家不愿接受这个概念,但又不得不承认自旋的提出解决了许多过去难以解决的难题.自旋概念的完全被接受,是在质子自旋概念的提出并被验证以后,物理学家才认识到.自旋是微观理论中最重要的一个概念之一,它是微观粒子本身固有的、与生俱来的一个禀性.

现在,人们认识到电子自旋角动量的大小为

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad (18-54)$$

S 在磁场方向上的分量

$$S_z = m_s \hbar \quad (18-55)$$

此两式中, s 称为自旋量子数, m_s 称为自旋磁量子数.因为 m_s 所能取的量值与 m_l 所能取的量值相似,共有 $(2s+1)$ 个取值,但施特恩-盖拉赫实验指出, S_z 只有两个量值,于是

$$2s + 1 = 2$$

则得自旋量子数

$$s = \frac{1}{2}$$

从而可得自旋磁量子数

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

这样 式(18 - 54)和式(18 - 55)变为

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \quad (18 - 56)$$

$$S_z = \pm \frac{1}{2}\hbar \quad (18 - 57)$$

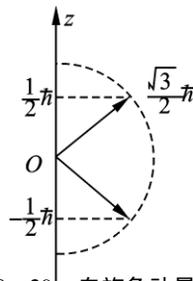


图 18 - 29 自旋角动量在
磁场方向分量的量子化

图 18 - 29 给出了电子自旋角动量的两种可能取向.

在任何情况下,电子的自旋角动量总是 $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$,因此,也可以把它看作是电子的一个特征常数.继电子之后,在实验中又发现质子、中子和其他一些“基本”粒子都有自旋.现在,自旋已和电荷、质量一样,被看作粒子最基本的特征之一,并且也是粒子分类的一个重要标志.

应该指出的是,自旋是量子概念,不能用经典力学的模型来描绘它.自旋是一个角动量,当然和转动有联系,但现在对粒子内部的机理知道的还很少,电子的内部机理还完全不知道,自旋与粒子内部运动的关系也还不清楚.我们称它为“自旋”,只是指在粒子“轨道”运动所带来的角动量之外,还有一个“固有角动量”,借用自旋这一名词,只是为了形象化而已.

三、多电子原子中的电子分布

总结前面的讨论,原子中电子的状态由下列四个量子数确定:

(1)主量子数 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. 主量子数 n 可以大体上决定原子中电子的能量.

(2)角量子数 $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$. 角量子数 l 可以决定电子的轨道角动量.一般来说,处于同一主量子数 n 而不同角量子数 l 的状态中的电子,其能量稍有不同.

(3)磁量子数 $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$. 磁量子数 m_l 决定电子绕核运动的角动量在外磁场方向的分量.

(4)自旋磁量子数 $m_s = \pm \frac{1}{2}$. 自旋磁量子数 m_s 决定电子自旋角动量在外磁场方向的分量.

下面根据这四个量子数对原子中电子的限制,确定原子核外电子的分布.

在多电子原子中,核外电子的分布是分层次的,这种电子的分布层次叫做

电子壳层. 这些壳层主要由主量子数 n 来区分, $n = 1$ 的壳层叫 K 壳层, $n = 2$ 的壳层叫 L 壳层, 依次有 M 壳层、N 壳层、O 壳层等. 在每一壳层上, 对应于 $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, 又可分成 s, p, d, f, ... 等分壳层. 一般说来, 壳层的主量子数 n 越小, 原子能级越低. 由于原子中的电子只能处于一系列特定的运动状态, 所以, 在每一壳层上就只能容纳一定数量的电子. 电子分布遵从下列两个原理:

1. 泡利不相容原理

泡利(W. Pauli)指出: 在一个原子中, 不可能有两个或两个以上的电子具有完全相同的量子态. 也就是说, 任何两个电子不可能有完全相同的一组量子数(n, l, m_l, m_s). 这就是泡利不相容原理.

按照泡利不相容原理, 当主量子数 n 给定时, 角量子数 l 的可能取值为 $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$, 共 n 个; 当 l 给定时, 磁量子数 m_l 的可能取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, 共 $(2l + 1)$ 个; 当 n, l, m_l 都给定时, 自旋磁量子数 m_s 只能取 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 两个值. 所以, 根据泡利不相容原理可以算出, 原子中同一壳层上可容纳的电子数为主量子数 n 的电子数目最多为

$$N_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 \quad (18-58)$$

由上式可得, 在 $n = 1$ 的 K 壳层上, 最多能容纳 2 个电子, 以 $1s^2$ 表示. 在 $n = 2$ 的 L 壳层上, 最多能容纳 8 个电子, 其中对应于 $l = 0$ 的电子有 2 个, 以 $2s^2$ 表示, 而对应于 $l = 1$ 的电子有 6 个, 以 $2p^6$ 表示. 依此类推. 下表列出了在多电子原子中, 各个壳层所能容纳的电子数.

表 18-3 原子中各壳层和分壳层最多可容纳的电子数.

N_l n	l	0	1	2	3	4	5	6	N_n
		s	p	d	f	g	h	i	
1	K	2							2
2	L	2	6						8
3	M	2	6	10					18
4	N	2	6	10	14				32
5	O	2	6	10	14	18			50
6	P	2	6	10	14	18	22		72
7	Q	2	6	10	14	18	22	26	98

2. 能量最小原理

原子系统处于正常状态时,每个电子趋向于占有最低的能级.当原子中电子的能量最小时,整个原子的能量最低,这时原子处于最稳定的状态,即基态.此即能量最小原理.

根据能量最小原理,原子中的所有电子总是从最内层开始向外排列.由于能级主要决定于主量子数 n ,所以,一般来说,最靠近原子核的壳层,最容易被电子占据.

能级除了与主量子数 n 有关外,还与角量子数 l 有关.因此,在某些情况下, n 较小的壳层尚未填满,而 n 较大的壳层上却开始有电子填入了.这一情况在化学元素周期表的第四个周期中就开始表现出来.关于 n 和 l 都不同的状态的能级高低问题,我国科学家徐光宪总结出这样一条规律:对于原子的外层电子而言,能级高低以 $(n + 0.7l)$ 值来确定,该值越大,能级就越高.例如 $4s$ 和 $3d$ 两个状态 $4s$ 态的 $(n + 0.7l) = 4$, $3d$ 态的 $(n + 0.7l) = 4.4$, 故有

$$E(4s) < E(3d)$$

因此 $4s$ 态应比 $3d$ 态先被电子所占有.

总之,按照以上原则,从能量最低的 $1s$ 态开始,将电子逐渐填充上去,将外层轨道属于同一能级组的元素排在同一周期,将电子组态类似的元素排在同一族,就得到了化学元素周期表.

§ 18 - 10 激光

激光是 20 世纪 60 年代初期开始发展起来的一种新光源.激光与我们常见的普通光源发出的光相比,具有一系列无与伦比的特点.因此,自从 1960 年第一台红宝石激光器问世以来,激光的研究一直受到人们极大的重视.激光对科学技术的各个领域产生了及其深刻的影响,它可与 20 世纪 50 年代半导体技术的发展相媲美,是 20 世纪伟大的科技成就之一.

常用激光器按工作物质分类:气体激光器、固体激光器、液体激光器、半导体激光器、自由电子激光器.

激光是基于受激辐射光放大原理而产生的.激光的英文名是“Laser”是“Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation”的第一个字母缩写而成的.所以,了解激光原理,必须理解“受激辐射”和“光放大”这两方面的概念.

一、辐射跃迁

通过前面的讨论我们知道,微观粒子具有离散的能级.每个发光的光源内部都有大量的原子分布在不同的能级上,原子在能级之间跃迁要发射或吸收光

子. 当原子从高能级 E_2 跃迁到低能级 E_1 时, 发射频率为

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

的光子. 光源所发射出的谱线的相对强弱, 决定于单位时间内从 E_2 能级跃迁到 E_1 能级的原子数目.

原子在能级间跃迁可以有以下三种不同的过程.

1. 自发辐射

处于高能级的原子, 在无外界影响的条件下会自发地从高能级 E_2 向低能级 E_1 跃迁, 同时放出光子, 这就是自发辐射. 如图 18 - 30 所示.

自发辐射是各个原子独立进行的, 发光时间参差不齐, 其偏振化方向、传播方向各不相同. 对大量原子而言, 它们可能处在不同的高能级, 从而辐射光子的频率 ν 不同, 且无恒定的相位差, 所以, 自发辐射的光不是相干光, 普通光源就是通过自发辐射而发光的.

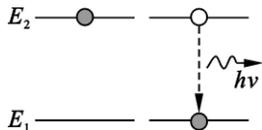


图 18 - 30 自发辐射

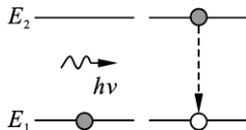


图 18 - 31 受激吸收

2. 受激吸收

如果处于低能级 E_1 的原子受到一外来光子的作用, 若该光子所带的能量 $h\nu$ 恰好与原子某一对能级的能量差 ($E_2 - E_1$) 相等, 原子就可以吸收这个光子的全部能量, 从低能级 E_1 跃迁到高能级 E_2 , 此过程称之为受激吸收, 如图 18 - 31 所示. 各种物质对光的吸收就是这一过程.

3. 受激辐射

受激辐射是激光器中最基本的过程. 如果处于高能级 E_2 的原子在能量为 $h\nu = E_2 - E_1$ 的外来光子激励下, 跃迁到低能级 E_1 , 同时发射出一个频率与入射光子频率、相位、偏振状态、传播方向都相同的光子, 这种过程称之为受激辐射. 如图 18 - 32 所示.

受激辐射的结果, 使原子从高能级 E_2 回到低能级 E_1 , 而光子数由一个变成了两个. 如果这两个光子再引起其他原子产生受激辐射, 就能得到更多特征完全相同的光子. 这个现象称为光放大, 如图 18 - 33 所示. 这是产生激光的基本点和关键所在.

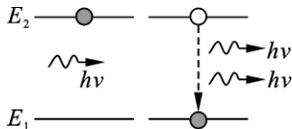


图 18-32 受激辐射

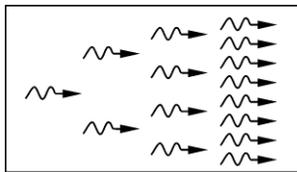


图 18-33 受激辐射光放大

应当明确,只有在外来光的激励下,并且满足跃迁定则(量子力学中有一定的要求)时才能产生受激辐射.受激辐射产生的光子的频率、发射方向、相位、偏振状态等特性都与入射光光子完全相同.所以,通过受激辐射所发射的光是相干光.

二、激光原理

1. 粒子数反转是产生激光的必要条件

由原子在能级间跃迁的三种不同过程可知,要实现光的放大作用,获得激光的条件是使受激辐射作用大于自发辐射和受激吸收的作用,要实现这一点的关键是使处于高能态的粒子数 N_2 远大于低能态的粒子数 N_1 ,这种分布称之为粒子数反转.

在热平衡下,即使工作物质受到外界的激励作用,但构成工作物质的大量原子处于各能态上的数目服从统计规律,即玻耳兹曼分布律

$$N_i = N_0 e^{-E_i/kT}$$

N_i 为处于 E_i 能级上的粒子数, N_0 为比例常数.

设两能级 E_m, E_n , 且 $E_m > E_n$. 当 $E_m - E_n \ll kT$ 时, 则 $\frac{N_m}{N_n} = e^{-(E_m - E_n)/kT} \approx 1$, 即能级间距相差很小, 两能级上的粒子数相等.

如果 $E_m - E_n \gg kT$ 时 $\frac{N_m}{N_n} = e^{-(E_m - E_n)/kT} \rightarrow 0$, 即在热平衡状态下, 绝大多数粒子处于低能态上, 亦即在热平衡时受激吸收占主导地位, 不能满足 $N_2 \gg N_1$ 的条件.

要使得 $N_2 \gg N_1$, 实现光放大, 必须打破热平衡, 使“受激辐射 > 自发辐射 + 受激吸收”, 达到粒子数反转. 但一般达到粒子数反转分布的系统并不稳定, 大量粒子又会通过自发辐射和受激辐射回到低能态, 打破热平衡. 所以, 要得到连续不断的光放大效果, 就需要外界连续不断地打破热平衡状态, 造成恒定的粒子数反转状态.

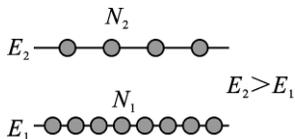


图 18 - 34 粒子数的正常分布

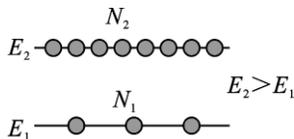


图 18 - 35 粒子数反转

2. 激励源是产生激光的外界条件

要实现粒子数反转,打破热平衡状态,就需要外界给工作物质源源不断地输送能量,即需要激励源的持续作用,所以,激励源是产生激光的必要的外界条件. 外界的激励可以通过光电(He - Ne、CO₂ 等激光)、电流和光照等.

有了激励源,并非所有的物质都能实现粒子数反转,因为大多数物质,处于高能态的原子的寿命约 10⁻⁸ 秒. 在这极短的时间内原子会自发跃迁到低能态,即受激辐射不占主导地位,难以实现 $N_2 > N_1$. 但自然界有些物质,如 Cr、Ne、CO₂、Kr 等都具有亚稳态结构,原子在亚稳态上的寿命较长(ms 量级). E_2 不能很快地跳到 E_1 ,从而外界不断地供给能量, E_2 就可以积累数量可观的粒子数,使得 $N_2 \gg N_1$,这样就保证了受激辐射占主导地位. 具有亚稳态能级的介质称为激活介质.

3. 谐振腔是产生激光的充分条件

如图 18 - 36 所示,当激活介质中粒子数达到反转状态下,要得到较强的激光辐射,必须外界有较强的激励作用,外界单色光(激励源)的能量密度越大,介质受激辐射的概率越大,所获得的激光强度自然也越强.

腔体越长,激励光走的路程越长,诱导的激光能量密度越大,但不可能把腔体做得无限长,为此在激光谐振腔的两端设置全反射镜 M_1 和部分反射镜 M_2 ,使腔体内光子经 M_1 与 M_2 又回到腔内,继续激励辐射,在腔内就像雪崩一样产生更多的光子, M_1 与 M_2 使腔体达到了无限长,从而使光强不断地放大. 对于偏离腔轴的光子,在腔体内经几个来回后会逸出腔外,从而保证由部分反射镜输出的激光的方向性.

腔体内光波在 M_1 与 M_2 之间来回反射产生叠加而形成驻波,即只有满足 $nL = \frac{k\lambda}{2}$ 的光波才能在振荡过程中产生激光,式中 n 为激活介质的折射率, k 为正整数, λ 为波长, L 为谐振腔的长度. 对于波长 λ 不满足上式的光,在振荡过程中将会衰减,最后被消除,可见激光谐振腔能够保证输出激光的单色性.

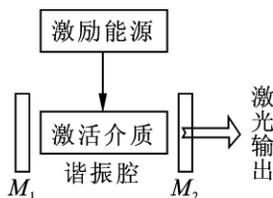


图 18 - 36 光学谐振腔

4. 阈值条件

在激光谐振腔内,除了有光的增益,还存在工作物质对光的吸收、散射以及反射镜的吸收和透射等造成的各种损耗,只有当光在谐振腔内来回一次所得的增益大于等于损耗时,才能形成激光.增益大于损耗的条件称为阈值条件.

三、激光的特性和应用

激光之所以能在短期内得到迅速发展,是与它的特殊性能分不开的.激光的主要特性如下:

1. 方向性好

判断方向性好坏的物理量是发散角 $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi$ 越小,方向性越好.平行光的发散角 $\Delta\varphi \rightarrow 0$;普通光源 $\Delta\varphi = 4\pi\text{rad}$,经透镜汇聚后, $\Delta\varphi$ 仍较大,能量利用率也很低.

激光的 $\Delta\varphi$ 在 $10^{-3} \sim 10^{-6} \text{rad}$,激光定位、导向、测距等就利用了方向性好的特点.现在用激光测量地球与月球之间的距离误差仅为厘米量级.

利用激光的方向性特点,可提高导向和准直技术,在探测海域、监测大陆板块的漂移、预报地震、高精度机械加工、基础建设、大型设备安装等领域广泛应用.

2. 能量集中,亮度高

亮度高低的物理量是辐射亮度,它表示光源从单位面积上向某方向立体角发射光的功率.

太阳表面的辐射亮度为 $2 \times 10^7 \text{W/m}^2$,脉冲激光的辐射亮度为 10^{22}W/m^2 ,相当于激光在百分之几 mm^2 的范围内可产生几百万度高的温度和几百万个大气压的压强,只有氢弹爆炸时的能量可以与之相比.当然,各种不同用途的激光可用不同的功率输出.

利用激光器的高能量可进行金属和非金属的加工、打孔、切割、焊接、引发核聚变、医疗上的手术刀等.

3. 单色性好

只有一个确定波长的光称为单色光,量度单色光的物理量是谱线宽度 $\Delta\lambda$, $\Delta\lambda$ 越小,单色性越好.对单色光 $\Delta\lambda \rightarrow 0$;在普通光源中单色性最好的是氪灯,它发出光的波长为 $\lambda = 605.7 \text{nm}$, $\Delta\lambda = 4.7 \times 10^{-4} \text{nm}$.氦氖激光器的激光波长 $\lambda = 632.8 \text{nm}$, $\Delta\lambda < 10^{-9} \text{nm}$,可见激光的单色性比氪灯高近万倍.

单色性好,使激光可以用作长度的精密测量、等离子体的测试、激光通讯、计量工作的标准光源等.

4. 相干性强

量度相干性程度的物理量是相干长度 $\Delta L_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \Delta L_{\max}$ 越高 相干性越好.

对普通光源的钠灯 $\lambda_s = 589.3 \text{ nm}$ $\Delta\lambda = 10^{-3} \text{ nm}$ $\Delta L_{\max} = 0.35 \text{ m}$. 对氦氖激光器 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ $\Delta\lambda = 10^{-8} \text{ nm}$ $\Delta L_{\max} = 4 \times 10^4 \text{ m}$. 可见, 激光的相干性是普通光源所发光相干性的 10^5 倍.

利用激光相干性好的特点可以进行物理量的精密测量, 如长度、孔径、角度、流速、温度、压力、电场强度、磁感强度等等, 测量精度达到 10^{-7} m .

激光还被广泛地用于立体图像的存储、微缩、保存古籍及艺术品、激光照排、排版、印刷等方面. 激光, 从它诞生 30 多年来引起了巨大技术进步和科技发展, 今后, 激光还会为人类社会造更多的福.

四、自由电子激光

自由电子激光 (free electron laser, 简称 FEL) 是一种新型的强相干辐射, 它是以自由电子为工作媒质的光受激辐射. 在特定含义上, 是指相对论性自由电子束通过一横向周期变化磁场时, 产生的光波受激放大. 近年来, 已将凡利用自由电子与电磁波相互作用所产生的从微波到 X 射线的受激辐射, 均称为自由电子激光.

自由电子激光概念是梅第 (J. Mada) 于 1971 年在他的博士论文中首次提出的, 并于 5 年后在斯坦福大学实现了远红外的“自由电子激光”. 20 世纪 80 年代初, 特别是美国在 1983 年 3 月提出“战略防御倡议” (亦称“星球大战”计划, SDI), 建立以 FEL 作为定向能武器方案的战略防御体系, 极大地推动了自由电子激光技术的发展.

自由电子激光器的基本原理如图 18-37 所示, 电子束由电子枪发射出来, 经加速器加速至可与光速比拟的水平, 进入谐振腔中的扭摆器. 所谓“扭摆器”是由永磁体或电磁铁构成的 N 极、S 极沿电子束方向 (设沿 z 轴) 交替变换的装置, 它产生的磁感应场呈周期性变化. 当电子束与激光同时通过扭摆器时, 电子束在扭摆器静磁场洛伦兹力的作用下发生横向 (设沿 y

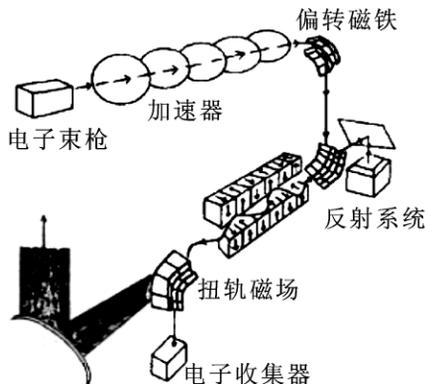


图 18-37 自由电子激光发射示意图

轴)周期运动,这一横向运动又与光场的磁分量相互作用产生轴向力.因为这个轴向力也是周期性的,电子在它驱动下便形成纵向群聚的团束,电子团束的光辐射与光场相干地叠加,当满足共振关系及其他条件时,激光光场从电子束中获取能量,实现受激光放大.

自由电子激光器有一般激光器难以与之相比的优点:

(1)波长连续可调.自由电子激光波长取决于电子束能量和扭摆器的磁场强度和周期,波长容易调节.自由电子激光波长覆盖范围原则上可以从毫米波段一直到真空紫外(vacuum ultraviolet regions),甚至软 X 射线波段.

(2)光束质量好,即方向性好、单色性好、亮度高.一般自由电子激光不存在工作物质温度升高引起的谱线增宽等现象,光束发散度可以接近衍射极限.

(3)精细而稳定的时间结构.光脉冲与电子束脉冲有着相同的时间结构.宏脉冲宽度一般为微秒量级,微脉冲宽度为皮秒量级,而且可以调节.

(4)效率高.电子束和光场的相互作用中,电子束能量除转换为激光能量外,仍然保存于电子束中,没有其他形式的能量耗散.

(5)输出功率高.目前实验上自由电子激光峰值功率可达 GW 量级,平均功率达 MW 量级.进一步提高激光能量输出仍有很大余地.

自由电子激光从出现至今才经历了 20 多个年头,虽尚处于发展的初级阶段,但已引起科学界、军事界、工业界、医学界的浓厚兴趣.现在 FEL 已成为科学技术中最活跃的领域之一.

§ 18 - 11 超导电性

超导电性是一种非常奇特的宏观量子现象.本节在超导电性概念的基础上,介绍超导电性的几个主要特性和作为超导微观理论的 BCS 理论.

一、超导电现象

1911 年,荷兰物理学家昂内斯(H. K. Onnes)发现,当温度降到 4.2K 附近时,汞样品的电阻突然降到零,如图 18 - 38 所示.不但纯汞,甚至汞和锡的合金也具有这种性质,这种性质称为超导电性.具有超导电性的材料称为超导体.超导体电阻降为零的温度称为转变温度或临界温度,通常用 T_c 表示,当 $T > T_c$ 时,超导材料与正常的金属一样,具有一定的电阻值,这时导电材料处于正常态,而当 $T < T_c$ 时,超导材料处于零电阻状态,称为超导态.昂内斯实现了氦的液化并发现了超导态,于 1913 年获得了诺贝尔物理学奖.

昂内斯的发现,开辟了研究和应用超导电性的新领域.从那时以后,人们又相继发现了在正常压强下有近 30 种元素、约 8000 种合金和化合物具有超导电

性.

从昂内斯发现超导电性以后,寻找新的超导材料和提高临界温度 T_c 的研究,一直受到世界上许多科学家的关注.1986年IBM苏黎世实验室发现临界温度达35K的镧钡铜氧化物(Ba-La-Cu-O)系列超导材料.在此后的短短几个月中,又研制成钇钡铜氧化物(Y-Ba-Cu-O)系列的高温超导材料,进一步把超导临界温度提高到90K以上.我国科学家在高温超导发展中作出了卓越的成绩,1987年2月24日,中国科学院物理研究所宣布赵忠贤等物理学家已制成临界温度为92.8K的高温超导材料.

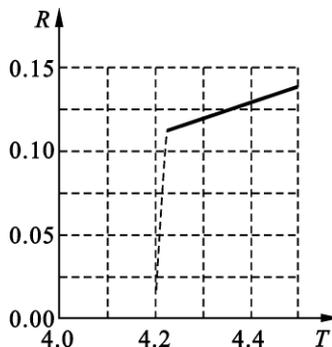


图 18-38 4.2K 附近汞的电阻变为零

表 18-4 几种超导材料的临界温度

材 料	临界温度 T_c	发现年代
汞(Hg)	4.15K	1911
铅(Pb)	7.26K	1913
铌(Nb)	9.2K	1930
氮化铌(NbN)	14.7K	1955
铌三锗(Nb_3Ge)	23.2K	1973
镧钡铜氧化物(La-Ba-Cu-O)	35K	1986
钇钡铜氧化物(Y-Ba-Cu-O)	90K	1987
铋锶铜氧化物(Bi-Sr-Cu-O)	105K	1988
铊钡钙铜氧化化(Tl-Ba-Ca-Cu-O)	125K	1989
汞钡钙铜氧化物(Hg-Ba-Ca-Cu-O)	134K	1993

二、超导体的主要特性

1. 零电阻

零电阻是超导体的一个重要特性.当超导体的温度达到临界温度时,其电阻完全消失,因而可承载很大的电流.只要这个电流不超过临界电流 I_c ,超导体内电流的流动就可看成是无阻的,热损耗也可忽略不计.若用这样的超导体组成一个闭合回路,一旦回路内激发起电流,此回路内的电流将长久地维持下去.由于超导体的电阻为零,所以电流在超导体内流动时,超导体内任意两点间没有电势差,整个超导体是一个等势体.由于回路中没有电能的消耗,因而不需要任何电源补充

能量 电流可以持续存在下去 形成所谓持久电流. 柯林斯 (J. Collins) 曾将铅环放在垂直于环面的磁场中 将其冷却到超变的转变温度以下 然后撤去磁场 这时在环中产生感应电流. 他观察电流的衰减情况 结果在长达两年半时间内也未观察到电流有丝毫的衰减. 所以 超导体是具有理想导电性的导体.

2. 临界磁场和临界电流

超导态不仅与材料的温度有关 而且还与外加磁场有关. 当表面磁感强度的数值 B 达到一定限度 B_c 时 表面电流会超过临界电流而导致失超. B_c 称为临界磁感强度. 比起磁场强度 H 尽管现在人们更认可磁感强度 B , 在超导界人们还是习惯用 H_c 来表示临界磁场的大小、 $H_c = B_c / \mu_0$ (μ_0 为真空磁导率). 临界磁场与温度的关系为

$$H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (18-59)$$

式中 H_0 为 $T=0$ 时的临界磁场, 曲线见图 18-39. 当 $T \rightarrow T_c$ 时, $H_c \rightarrow 0$.

由于临界磁场的存在, 限制了超导体中能够通过的电流. 当通过超导体导线的电流超过一定数值 I_c 后, 超导态便被破坏. I_c 称为超导体临界电流. 这是因为当超导体通上电流以后, 电流也将产生磁场. 当该电流在超导体表面所产生的磁场强度等于 H_c 时, 电流自身产生的磁场破坏了超导态. 临界电流与温度的关系如下:

$$I_c(T) = I_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (18-60)$$

式中 $I_c(0)$ 表示 $T=0K$ 时超导体的临界电流.

综上所述, 可以得出超导态的三个临界条件: 临界温度、临界磁场和临界电流, 它们之间密切相关.

大多数纯金属超导体的磁场与温度关系如图 18-39 所示. 若 $H > H_c$ 时, 它由超导态直接转变为正常态, 这种超导体称为第 I 类超导体.

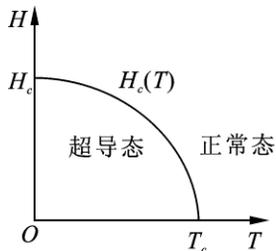


图 18-39 临界磁场与临界温度

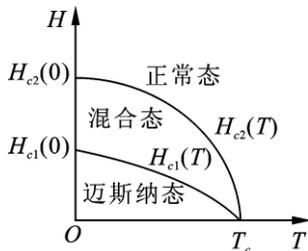


图 18-40 第二类超导体的临界磁场与临界温度的关系

还有一类超导体,在低于临界温度的一定温度下,有两个临界磁场 H_{c1} 和 H_{c2} 如图 18-40 所示.当材料处在磁场 $H < H_{c1}$ 下时,为纯粹超导态,或称迈斯纳态;当磁场增强至 $H > H_{c1}$ 时,它们不是从超导态直接转变为正常态,而是超导态和正常态混杂的混合态,一直到磁场 $H \geq H_{c2}$ 时,才完全转变为正常态.这类超导体称为第 II 类超导体.

3. 迈斯纳效应

由于超导体的零电阻特性,处于超导态时,超导体内任意两点间的电势差为零.这样,在超导体内不存在电场.由电磁感应定律

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})}{dt}$$

由于超导体的截面积是不变的,所以由上式可以看出,因超导体内 $\mathbf{E} = 0$,故 $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0$.这就是说,在超导体处于超导态时,其内部的磁场不随时间变化.当处于超导态的超导体置于外磁场中时,只要外磁场的磁场强度 H 小于临界磁场强度 H_c ,超导体内的磁场强度 H 总是为零,这就好像穿过超导体的磁场线被排斥出去了,这种现象称为迈斯纳效应.这个效应是 1933 年迈斯纳(W. F. Meissner)与奥克森菲尔德(R. Ochsenfeld)从实验中发现的.迈斯纳效应可以用图 18-41 和图 18-42 直观地表示出来,

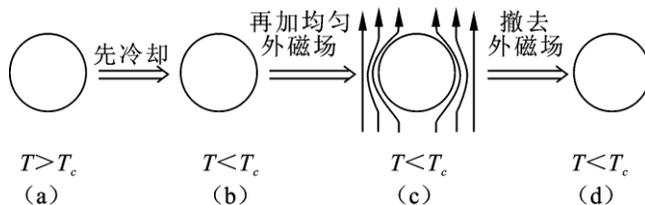


图 18-41 先冷却后加均匀磁场

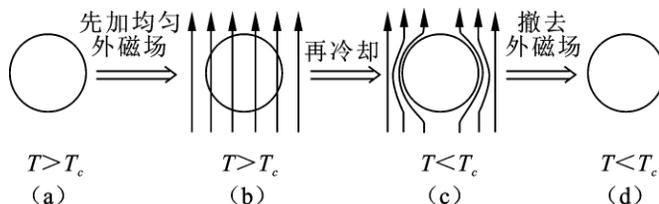


图 18-42 先加均匀磁场后冷却

由该图可见,在使样品转变为超导态的过程中,无论先降温后加磁场,还是先加磁场后降温,超导体内部的磁感应强度总是为零.迈斯纳效应表明,处于超

导态的超导体是一个具有完全抗磁性的抗磁体.

4. 磁通量子化和约瑟夫森效应

磁通量子化和约瑟夫森效应是超导体两种独特的宏观量子效应.

先介绍磁通量子化. 一个用超导材料制成的环状体, 将其放在沿轴向的外磁场中, 当 $T > T_c$ (即它还是正常态) 时, 磁场线能穿过环状体的内部以及它中间的空腔和外部, 如图 18 - 43(a) 所示. 若此时将温度降到临界温度以下, 即 $T < T_c$, 使该环状体变成超导体, 实验发现, 这时超导体内部 $B = 0$, 此即迈斯纳效应, 如图 18 - 43(b) 所示. 同时, 环状超导体内外表面薄层有表面电流, 正是这些表面电流产生的附加磁场与外磁场抵消, 才使得超导体内部的 $B = 0$. 若保持 $T < T_c$, 撤去外磁场, 则超导体外部的磁场及外表面的电流消失, 但是空腔内的磁通量基本不变, 人们称此为“冻结磁通”, 如图 18 - 43(c). 理论计算得到这些磁通量只能取某一最小磁通量的整数倍, 即

$$\Phi = n\Phi_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

最小的磁通量子为

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.06783461 \times 10^{-15} \text{ Wb}$$

式中 h 是普朗克常量, e 是电子电量 (绝对值), 表明磁通的值是量子化的.

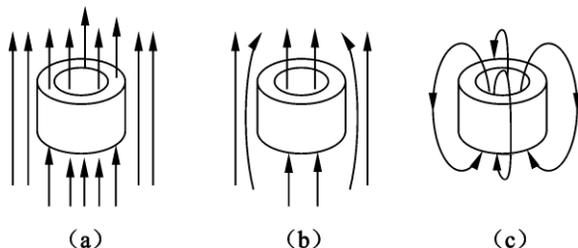


图 18 - 43 磁通量子化

约瑟夫森效应是超导体的另一种量子效应, 它是 1962 年由约瑟夫森从理论上预言的, 后为实验所证实. 如果在两超导体之间夹有 $10^{-3} \sim 10^{-4} \mu\text{m}$ 的绝缘薄层, 则即使绝缘层两侧不存在任何电压, 其间仍然可以持续地流过直流的超导电流, 这种效应称为直流约瑟夫森效应. 如果在绝缘层两侧的超导膜上加直流电压, 则在两超导膜之间将有一定频率的交流电通过, 并向外辐射电磁波, 交变超导电流的振荡频率可表示为

$$\omega = \frac{2eU}{\hbar}$$

式中 e 为电子电量, U 为加在两超导膜之间的直流电压, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h 为普朗克常量. 这种效应称为交流约瑟夫森效应. 以上两种效应统称为约瑟夫森效应.

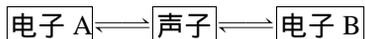
约瑟夫森效应是一种隧道效应. 起源于微观粒子的波动性的量子效应. 根据量子力学, 若运动粒子遇到高度大于其动能的势垒时, 除反射外, 还有透过势垒的波函数, 即粒子仍具有一定的透射概率, 这就是隧道效应.

利用约瑟夫森效应和磁通量子化, 制成了一种新型的器件, 称为超导量子干涉器件(SQUID). 这种器件测量磁通量的灵敏度可以达到 $10^{-20} \text{Wb} \cdot \text{Hz}^{-1}$. 现在已经广泛应用于物理学和医学等各个领域.

三、BCS 理论

自从 1911 年发现超导电现象以来, 人们一直在探寻超导电性的微观理论. 直到 1957 年才由巴丁(J. Bardeen)、库珀(L. V. Cooper)和施里弗(J. R. Schrieffer)提出了一个超导电性的量子理论, 简称 BCS 理论, 比较全面地解释了超导电性的微观机理, 他们三人共同获得 1972 年诺贝尔物理学奖.

BCS 理论认为, 自由电子在点阵中运动时, 由于异号电荷间的吸引作用, 影响了晶体点阵的振动. 当某个电子在晶格间运动时, 它以库仑引力吸引邻近的晶格正离子, 使正离子稍稍靠拢过来, 并形成一个小区域. 由于这些正离子偏离平衡位置而产生振动, 以波的形式在点阵中传播, 这种波称为格波(lattice wave). 按量子力学理论, 格波也是量子化的, 其量子称为“声子”(phonon). 这个形成格波的过程相当于电子发射出一个声子, 传播着的正电荷区又可以吸引另一个运动着的电子, 将动量和能量传递给这个电子, 这又相当于电子吸引了声子. 上述全过程可用以下示意图表示:



其净效应表现为两电子交换了一个声子, 通过这种声子交换使两个电子间产生了间接的吸引作用. 声子可被晶体中的自由电子所吸收, 于是两个自由电子通过交换声子而耦合起来. 这就好像一个电子发射的声子, 被另一个电子所吸收. 于是两电子之间彼此吸引, 成为束缚在一起的电子对, 这就是常称的“库珀对”. 研究表明, 组成库珀对(Cooper pair)的两个电子之间的距离约为 10^{-6}m , 而晶体的晶格常数约为 10^{-10}m , 即在晶体中库珀对要伸展到数千个原子的范围内. 进一步的研究还表明, 库珀对中的两个电子的自旋和动量均等值反向, 所以每一库珀对的动量之和为零.

当温度 $T < T_c$ 时, 超导体内存在大量的库珀对, 在外电场作用下, 所有这些库珀对都获得相同的动量, 朝同一方向运动, 不会受到晶格的任何阻碍, 形成几

乎没有电阻的超导电流. 当温度 $T > T_c$ 时, 热运动使库珀对分散为正常电子, 电子间的吸引力不复存在, 超导体就失去超导电性而转变为正常态. 如果在处于超导态的超导材料加上磁场, 所有库珀对将受到磁场的作用, 当磁场强度达到临界值 H_c 时, 磁能密度等于库珀对的结合能密度, 所有库珀对都获得能量而被拆散, 这时材料将从超导态过渡到正常态.

BCS 理论能够解释大量的超导现象和实验事实, 是一个比较成功的理论. 理论的成就, 促进了实际应用的发展.

四、超导电性的应用

超导的应用一般分为强电应用和弱电应用.

1. 强电应用

强电应用是指利用超导体的零电阻性质和能在比较大的空间产生强磁场的性质发展超导强磁技术. 例如:

(1) 在电力工业中用超导电缆可实现无损耗输电. 超导电缆是采用无电阻的、能传输高电流密度的超导材料作为导体并能传输大电流的一种电力设施, 具有截流能力大、损耗低、体积小和重量轻等优点, 是解决大容量、低损耗输电的一个重要途径.

(2) 超导电机可突破常规发电机的极限容量, 提高效率. 由于超导电机采用了超导绕组, 超导电机的运行电流密度和磁通密度都大大地提高了. 与常规电机相比较, 能够承载更大的电流从而产生更强的磁场, 能够在与常规电机功率输出相同的情况下使体积和重量减小到常规电机的 $1/5$ 大小.

(3) 用超导线圈储能可改善电网稳定性和调制峰值负载. 超导储能装置是利用超导线圈在电网运行处于低谷时把多余的电能储存起来, 而在电网运行处于高峰时, 将储存的电能送回电网. 由于储能线圈由超导线圈绕制且维持在超导态, 线圈中所储存的能量几乎可以无损耗地永久储存下去直到需要释放时为止. 超导储能装置不仅可用于调节电力系统的峰谷, 而且可用于降低甚至消除电网的低频功率振荡从而改善电网的电压和频率特性, 同时还可用于无功和功率因素的调节以改善电力系统的稳定性.

(4) 超导磁体. 用超导线圈制成的超导磁体不仅体积小、重量轻, 而且损耗小, 它所需励磁功率小, 为受控核聚变、高能加速器、磁流体发电、磁悬浮列车、核磁共振成像装置等提供大范围的强磁场.

(5) 超导磁悬浮列车. 超导磁悬浮列车是利用超导体的抗磁性, 使车轮与地面脱离接触而把列车悬浮于轨道之上, 并利用直线电机驱动列车运动的一种新型交通工具. 它具有高速、安全、噪音低和占地小等优点, 因此被认为是未来理想的交

通运输工具. 目前日本、德国已在运行中的磁悬浮列车, 车速可达 550 km/h .

2. 弱电应用

1962年, 英国物理学家约瑟夫森在研究超导电性的量子特性时提出了量子隧道效应理论, 也就是今天人们所说的约瑟夫森效应. 该理论认为: 电子对能够以隧道效应穿过绝缘层, 在势垒两边电压为零的情况下, 将产生直流超导电流, 而在势垒两边有一定电压时, 还会产生特定频率的交流超导电流. 在该理论的基础上诞生了一门新的学科——超导电子学.

超导技术在电子学中的应用, 经过多年的发展, 已有许多新型的超导电子器件研制成功, 这些超导电子器件包括: 超导量子干涉器(SQUID)、超导混频器、超导数字电路、超导粒子探测器等.

超导量子干涉器是一种磁通-电压转换器件, 如果用一个简单的输入变压器, 就转变成电流-电压放大器. 这种放大器灵敏度极高, 带宽能够达到兆赫, 没有相位畸变, 噪声极小. 例如, SQUID磁强计能够测量非常微弱的磁场, 可以用来测量人体的微弱磁场, 描绘出心磁力和脑磁图.

超导混频器利用约瑟夫森结的变频作用, 将高频信号转换成中频信号, 主要应用于无线电技术中.

超导数字电路利用约瑟夫森结在零电压态和能隙电压态之间的快速转换来实现二元信息. 应用约瑟夫森效应的器件可以制成开关元件, 其开关速度可达 10^{-11} s 数量级, 比半导体集成电路快100倍, 而功耗却要低1000倍左右, 为制造亚纳秒电子计算机提供了一个途径. 超导电子计算机功耗小, 超导芯片响应速度快, 其运算速度可达每秒几十亿次, 比硅半导体制成的计算机快20~50倍.

超导粒子探测器具有很高的灵敏度和纳秒级的速度, 可以用来检测从亚毫米波段到远红外波段的电磁波.

从迄今的发展情况看, 超导新材料的研究还处于初始阶段, 至于超导体的实际应用, 还有许多技术问题需要解决. 但就其应用前景来看, 是十分喜人的, 它可能会引起新的产业技术革命.

思考题

18-1 什么是热辐射? 什么是辐出度和单色辐出度? 两个温度相同的同样的物体A和B, 若物体A周围环境温度较A的高, 而物体B周围环境温度较B的低, 试问物体A和B的辐出度是否相等?

18-2 什么是黑体? 黑体与平常所说的黑色物体有什么区别? 在相同的

温度下,黑体与平常所说的黑色物体的辐出度是否相同?

18 - 3 一个不透明的红色物体,放在太阳光下为什么呈现红色?若将其温度升高,并放于黑暗处,试问它将辐射什么颜色的光?

18 - 4 若将一物体的温度升高一倍,其总辐射能增加多少?

18 - 5 由同种材料制成且半径为 r 的球、半球、边长为 r 的立方体各一个,它们均可视为黑体,具有相同的温度 T 时,三者辐射功率哪个最大?哪个最小?

18 - 6 所有物体都能发射电磁辐射,为什么用肉眼看不见黑暗中的物体?采用什么样的方法可以觉察到黑暗中的物体?

18 - 7 太阳表面发出的光近似于温度为 $6\,000\text{ K}$ 时的黑体辐射,红巨星表面温度是高于 $6\,000\text{ K}$,还是低于 $6\,000\text{ K}$?

18 - 8 试说明图 18 - 1 中的 $M_\lambda(T) - \lambda$ 曲线的极大值及曲线下面积的意义.由曲线的特点可总结出些什么?

18 - 9 普朗克“量子”假说的内容是什么?它在物理学的发展中具有什么意义?

18 - 10 普朗克提出黑体辐射出的电磁波的能量是量子化的,在经典物理范围内,有没有量子化的物理量?你能举出几个吗?

18 - 11 在光电效应实验中,如果

(1)入射光强度增加 1 倍;

(2)入射光频率增加 1 倍;

按照光子理论,这两种情况的结果是否一样?

18 - 12 用频率为 ν_1 的单色光照射某光电管阴极时,测定光电子的最大初动能为 E_{k1} ;用频率为 ν_2 的单色光照射某光电管阴极时,测定光电子的最大初动能为 E_{k2} .若 $E_{k1} > E_{k2}$,频率 ν_1 与 ν_2 哪一个较大?

18 - 13 什么是康普顿效应?为什么用可见光不能观察到康普顿效应?

18 - 13 光电效应和康普顿效应都是光子与电子的相互作用,这两个过程有何不同?你是怎样区别这两个过程的?

18 - 14 在康普顿效应中,反冲电子获得的能量总是小于入射光子的能量,这是否意味着入射光子被分成了两部分,其中的一部分被电子吸收?这与光子的粒子性是否矛盾?

18 - 15 什么是光的波粒二象性?

18 - 16 氢原子光谱的主要实验规律是什么?

18 - 17 按照经典物理学的观点,卢瑟福的原子核型结构遇到了哪些困难?

18 - 18 玻尔理论的基本假设是什么?在推导轨道半径和能量公式时,还

用到了哪几个经典物理概念？

18 - 19 在氢原子的玻尔理论中,势能为负值,但其绝对值比动能大,它的含义是什么？

18 - 20 在氢原子中,电子与原子核之间除了库仑力之外,还有万有引力.在氢原子的玻尔理论中,为什么忽略了原子内电子与原子核之间的万有引力？

18 - 21 氢原子处在第三激发态,试问它跃迁到哪个态时,(1)辐射光具有的波长最长?(2)辐射光的波长最短?(3)吸收的光波具有最长的波长？

18 - 22 1996年物理学家在加速器上成功地生产出反氢原子,这种原子由一个反质子和一个正电子构成.反质子和质子、正电子和电子的质量都相等,只是电荷电性相反.在你看来,反氢原子的光谱结构与正常氢原子的光谱结构相同还是不同？

18 - 23 德布罗意提出微观粒子具有波动性假设的主要思想方法是什么？

18 - 24 假设微观粒子的质量为 m ,速度为 v .由德布罗意公式 $h\nu = mc^2$, $\lambda = \frac{h}{mv}$,有 $\nu\lambda = \frac{c^2}{v}$.根据 $v = \lambda\nu$,可得 $v = c$.显然,此结论是错误的.请问错在什么地方？

18 - 25 在日常生活中,为什么觉察不到粒子的波动性和电磁辐射的粒子性呢？

18 - 26 如果电子和质子具有相同的动能,那么,德布罗意波长最短的是哪个粒子?如果电子和质子具有相同的速度,德布罗意波长最短的又是哪个粒子呢？

18 - 27 有人说“按照不确定关系,微观粒子的运动状态是无法确定的”.你认为这种观点正确吗?为什么？

18 - 28 按照波恩的解释,电子呈现出来的波动性反映了微观粒子运动的一种统计规律.这种统计性与气体动理论中的统计规律有何不同？

18 - 29 波函数的标准条件是什么?为什么波函数必须满足标准条件？

18 - 30 试说明波函数归一化 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ 的物理意义.

18 - 31 量子力学给出的一维无限深势阱内的粒子在各处出现概率,与经典物理的结论有何不同?关于粒子可能具有的能量,量子力学与经典物理给出的结论又有何不同？

18 - 32 在一维无限深势阱中,如果增大或减小势阱的宽度,其能级将如何变化？

18 - 33 处于基态的氢原子是否能吸收可见光？

18 - 34 将玻尔氢原子基态图象与薛定谔方程解出的氢原子基态图象进行比较,它们之间有哪些相似之处?有哪些不同之处?

习 题

18 - 1 夜间地面降温主要是由于地面的热辐射.如果晴天夜间地面温度为 5°C ,按黑体辐射计算,每平方米地面失去热量的速率多大?

18 - 2 设太阳射到地球表面上的辐射能量为 $1.4 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.地球与太阳间的距离为 $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$.若太阳可看作半径为 $7.0 \times 10^8 \text{ m}$ 的球形黑体,试计算太阳的温度.

18 - 3 根据宇宙大爆炸理论,今天的宇宙是 140 亿年以前的一次大爆炸产生的.大爆炸遗留在空间均匀的、各向同性的背景热辐射相当于 3K 黑体辐射.试求地球表面接受此辐射的功率.

18 - 4 钾的截止频率为 $4.62 \times 10^{14} \text{ Hz}$,若以波长为 435.8 nm 的光照射,试求钾放出的光电子的初速度.

18 - 5 铝的逸出功是 4.2 eV ,若用波长为 200 nm 的光照射铝表面,试求:

- (1) 光电子的最大初动能;
- (2) 遏止电势差;
- (3) 铝的红限波长

18 - 6 银河系空间内星光的能量密度为 $10^{-15} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$,相应的光子数密度为多大?假定光子的平均波长为 500 nm .

18 - 7 一个静止电子与一个能量为 $4.0 \times 10^3 \text{ eV}$ 的光子碰撞后,它能获得的最大动能是多少?

18 - 8 试求波长为下列数值的光子的能量、动量和质量.

- (1) 波长为 1500 nm 的红外线;
- (2) 波长为 500 nm 的可见光;
- (3) 波长为 20 nm 的紫外线;
- (4) 波长为 0.15 nm 的 X 射线;
- (5) 波长为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ nm}$ 的 γ 射线.

18 - 9 假设电子的德布罗意波长与某种光的波长相等,均为 0.20 nm .试求电子和光子的动量、动能、总能量.

18 - 10 在玻尔氢原子理论中,当电子由量子数 $n_i = 5$ 的轨道跃迁到 $n_f = 2$ 的轨道上时,对外辐射光的波长为多少?若再将该电子从 $n_f = 2$ 的轨道跃迁到游离状态,外界需要提供多少能量?

18 - 11 已知 α 粒子的静质量为 6.68×10^{-27} kg, 求速率为 $5\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 的 α 粒子的德布罗意波长.

18 - 12 温室(300 K)下的中子称为热中子, 求热中子的德布罗意波长.

18 - 13 电子位置的不确定量为 5.0×10^{-2} nm 时, 其速率的不确定量为多少?

18 - 14 铀核的线度为 7.2×10^{-15} m. 求其中一个质子的动量和速度的不确定量.

18 - 15 试证明自由粒子的不确定关系式可写成

$$\Delta x \Delta \lambda \geq \lambda^2$$

式中 λ 为自由粒子的德布罗意波的波长.

18 - 16 利用德布罗意物质波假设, 仿照弦振动的驻波公式, 求解一维无限深方势阱中自由粒子的能量与动量表达式.

18 - 17 在线度为 1.0×10^{-5} m 的细胞中有许多质量为 $m = 1.0 \times 10^{-17}$ kg 的生物粒子, 若将生物粒子作为微观粒子处理, 试估算该粒子的 $n = 10$ 和 $n = 11$ 的能级和能级差各是多少?

18 - 18 一粒子在一维无限深方势阱中运动, 并处于基态. 从阱宽的一端到距此端为四分之一阱宽的范围, 粒子出现的概率为多少?

18 - 19 一无限深方势阱中粒子的波函数在边界处为零. 这种定态物质波相当于两端固定的弦中的驻波, 因而势阱宽度 a 必须等于德布罗意波的半波长的整数倍. 试证明粒子能量的本征值为

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

18 - 20 一粒子处于一正立方盒子中, 盒子边长为 a . 试证明粒子的能量为

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

其中 n_x, n_y, n_z 为相互独立的正整数.

18 - 21 设有一电子在宽度为 0.20 nm 的无限深方势阱中运动.

(1) 计算电子处在最低能级对的能量;

(2) 当电子处于第一激发态 ($n = 2$) 时, 在势阱中何处出现的概率最小, 其最小概率为多少?

18 - 22 设想一电子在无限深势阱中运动, 如果势阱宽度分别为 1.0×10^{-2} m 和 1.0×10^{-10} m. 试求这两种情况下的能级和相邻能级的能量差.

18 - 23 一粒子处在宽度为 $a = 20$ nm 的一维无限深势阱中, 已知粒子在一维无限深势阱中的波函数为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

其中 a 为势阱宽度. 试求在 $n=3$ 状态时, 发现粒子概率最大的位置.

18 - 24 氢原子中的电子处于 $n=4, l=3$ 的状态. 试问:

(1) 该电子角动量 L 的数值为多少?

(2) 该角动量 L 在 z 轴方向的分量有哪些可能的值?

18 - 25 理论计算表明, 氢原子在 $n=2, l=1$ 状态的径向波函数为

$$R(r) = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3a_0}} e^{-r/2a_0}$$

式中 a_0 为玻尔半径. 试计算在此状态下, 电子概率最大处距核的距离.

问题与探究(二)

11. 库仑定律的讨论

库仑定律是电磁学的基本定律之一,库仑定律所描述的两个静止点电荷之间的作用力亦称电力平方反比律.

最早(1755年)发现有关静电现象和静止电荷之间相互作用的是富兰克林(B. Franklin),1772年,卡文迪许(H. H. Cavendish)利用导体空腔法测残留电荷,得出两个静止点电荷之间的作用力满足

$$F \propto 1/r^{2+\delta}$$

的规律,并测出偏差 $\delta \leq 2 \times 10^{-2}$ (当时没有公布这一结果). 1785年,库仑(C. A. Coulomb)利用扭秤实验证明静电斥力遵守距离平方反比律,利用振荡法证明静电引力也遵守距离平方反比律,其精确程度为 $\delta \leq 4 \times 10^{-2}$. 麦克斯韦(J. C. Maxwell)改进了卡文迪许实验方法,他把原来测量空腔导体内球的电量改进为测量电势,把精确度提高了3个数量级,测得 $\delta \leq 6 \times 10^{-5}$.

从此以后,人们不断改进实验方法,并与近代实验技术相结合,使实验结果提高到相当精确的程度. 比如,1971年,由威廉姆斯(E. R. Williams)、法勒(J. E. Faller)和希尔(H. A. Hill)测得的结果是 $\delta \leq 6 \times 10^{-16}$.

试讨论:

(1)库仑定律成立的条件(真空、静止)是否必要?条件能否放宽?为什么?

(2)分析卡文迪许和麦克斯韦精确验证电力平方反比律的实验,你得到了什么启示?

(3)库仑定律在电磁学中的地位;

(4)在近代物理中,电力平方反比律与光子静止质量 m_γ 有什么关系?为什么物理学家对 δ 和 m_γ 是否严格为零特别关注?

(5)为什么静止点电荷之间的库仑力遵守牛顿第三定律,而运动电荷之间的作用力却不遵守牛顿第三定律?牛顿第三定律与动量守恒定律有何关系?

12. 库仑力与万有引力的区别及其意义

相距为 r 、质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点之间万有引力的大小为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

两个静止点电荷之间的库仑力由库仑定律 $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

表述,它们都与距离的平方成反比.

- (1) 试比较库仑力与万有引力的异同；
- (2) 为什么电力可以屏蔽，而万有引力不能屏蔽？

13. 静电场问题的理想模型

在处理静电场问题时，点电荷与无限大均匀带电平面都是经常采用的理想模型，用它们代替实物，可以简化讨论过程。然而，这种模型的使用是有条件的。试讨论下面的研究对象，代换成两个截然不同模型的条件。

利用积分法，不难求出电荷均匀分布的圆盘轴线上观察点的场强大小为

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

σ 为电荷面密度， R 为圆盘半径， x 为观察点到盘心的距离。

(1) 在什么条件下，此带电圆盘可被视为无限大带电平面？此时，电场强度的理想值为

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

(2) 在什么条件下，又可以把这个均匀带电盘视为点电荷而不计其大小与形状呢？此时，把带电圆盘视为点电荷，电场强度对应的理想值为

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

式中 Q 为圆盘所带的电荷。

14. 电势零点的选择问题

电势和势能这类物理量一样，只有相对于确定的参考点才有确定的意义。在电场一定的情况下，空间各点的电势，与电势零点的选择密切相关。参考点不同，各点的电势也不同，但参考点的变化，虽然要影响各点的电势，却并不改变电场。正因为不同的电势可以描述同一电场，物理上允许电势零点选择的任意性。当零电势的参考点从一点移到另一点时，各点的电势只改变一个常量，并不影响场强的分布。

零电势点选择有一定的任意性，但也不是完全不受限制。零电势点的选取应遵循简单、方便、有意义的原则。在实际问题中，选择零电势点还要根据具体情况灵活决定，零点选择适当可以使问题简化。

(1) 对于分布在有限区域的电荷，常选择无穷远处为电势零点。为什么要这样选择？可以选择其他点为电势的零点吗？

(2) 分布在无限区域的电荷，电势零点应如何选择？

(3) 有没有普遍适用的对电势零点选择的限制？

(4)在讨论接地导体的电势分布时,常取接地点的电势为零.为什么要选择 $V_{\text{地}}=0$?它与选择无穷远处为电势零点 $V=0$ 是否相容?

(5)对于由几个电场组成的合电场的电势,各分电场电势零点要求不一样,叠加起来,合电场的电势的表达式如何?合电势的零点又该怎样确定?

15. 无限长截流直螺线管外部的磁场

一个均匀密绕的无限长截流直螺线管,沿轴向单位长度的线圈匝数为 n ,电流为 I ,当采用不同的方法计算其磁场时,发现出现了矛盾的结果(主要指螺线管外的磁场).

(1)若将螺线管视为沿轴向紧密地并排放置的无限多个圆电流环,则

$$\begin{cases} B_{\text{内}} = \mu_0 nI \\ B_{\text{外}} = 0 \end{cases}$$

(2)若采用安培环路定理,根据磁场的对称性,取半径为 r ($r >$ 螺线管半径 R)并与轴垂直的环路,可求得

$$B_{\text{外}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

为什么会出现这种矛盾的结果?

16. 洛伦兹力的相关问题

常把 $F = qv \times B$ 称为洛伦兹力,将 $F = qE + qv \times B$ 称为洛伦兹关系.用此公式讨论的一般问题有较强的综合性,在分析讨论问题时,常因对 v 的意义认识不明确而出现一些错误,且较隐蔽.

(1) v 是 q 相对于谁的速度?你作出对 v 的判断的依据是什么?请证明之.

(2)利用洛伦兹力公式分析问题时,容易出现哪些错误?应注意的主要问题有哪些?

17. 电磁波的相位

第15章中,在讨论LC振荡电路的基础上,介绍了电磁波的产生、传播及电磁波的基本特性.

在LC振荡电路中,电场和磁场交替变化,只要减小 L 和 C 的值(LC振荡电路变为振荡电偶极子),从而提高电路的振荡频率,这种变化的电场和变化的磁场不断相互交替的激发,由近及远在空间以一定的速度传播,就形成了电磁波.

然而,LC振荡电路中电场 E 与磁场 B 之间有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差.电磁波有一个基本性质:电场强度 E 、磁场强度 H 振动的相位相同.可见,电磁波的相位与波源的相位不同了.这是为什么?

18. 干涉和衍射的联系与区别

干涉现象和衍射现象是波动的重要特征. 满足相干条件的两列或两列以上的光波在空间相遇, 有些地方振动加强, 有些地方振动减弱的现象, 称为光的干涉现象. 不能用反射或折射来解释的光线对直线光路的任何偏离叫做光的衍射现象. 光在传播过程中, 只要遇到障碍物, 就必然会产生衍射现象. 障碍物的线度越小, 衍射现象越明显.

干涉和衍射现象不是孤立的, 试说明:

- (1) 光的干涉和衍射现象有什么联系?
- (2) 光的干涉和衍射现象有什么区别?

19. 虹霓现象

在自然界里, 雨后彩虹是人们常见的一种光学现象.

出现在天空中的一个红色在外、紫色在内、中间有各色光带的半圆弧叫做彩虹, 简称“虹”(rainbow). 彩虹呈弧形, 弧高 $40 \sim 42$ 度. 与彩虹相对的是“霓”(secondary rainbow), 也称作副虹、二级虹、次级虹, “霓”的色彩正好与虹相反, 外圈是紫色, 内圈是红色. 霓的弧高 $52 \sim 54.5$ 度. 20 世纪 70 年代, 人们又观察到原子虹现象, 甚至预见核的虹现象.

试分别利用几何光学、波动光学、光的量子理论知识定性和定量地讨论虹、霓现象.

20. 光电效应与康普顿效应

在一般大学物理教材中, 光电效应和康普顿效应是作为证明光具有“粒子性”的两个典型实验而出现的. 从宏观上说, 这两个效应都是一定频率的电磁波与物质的相互作用; 从微观上讲, 又都可看成是能量为 $h\nu$ 的光子与物质的原子碰撞的过程, 都是光子与电子的相互作用, 使光子的能量转化为物质粒子的能量的过程.

在光电效应中采用的是“束缚电子”模型; 处理康普顿效应时, 却采用了“自由电子”模型. 试讨论:

- (1) 光电效应和康普顿效应有共同之处, 为什么实验现象完全不同呢?
- (2) 这两个效应都是光子与电子的相互作用, 在处理过程中, 为什么采用了不同模型呢?
- (3) 为什么在一般大学物理教材中, 讨论光电效应时, 只谈能量守恒, 不谈动量守恒; 而在讨论康普顿效应中, 却明显指出能量、动量都守恒呢?
- (4) 光电效应和康普顿效应的发生概率由什么决定? 这两种效应究竟在什么情况下产生?

21. 物理学与科学美

物理学家海森堡曾指出“科学的探索者们最初往往是在美的光辉照耀下，去认识和发展真理”。

现代超导理论的奠基人库柏指出：“音乐和绘画能够直接触动我们的情感，但在物理学中，我们既听不到小提琴的哀怨泣诉，也看不到艺术家那令人惊叹的表演。在这里，感情在创造中展开，威力蕴藏在它的结果中，而我们的工作热情来源于科学理论的优雅、严谨和完美。”

物理学发展的历史，就是人们对“简单美”、“对称美”、“统一美”追求和创造的历史。对美的追求，不仅是物理学家研究的动因，而且也是物理学发展的动因。物理学家通过追求美，从而创造了美，推动了物理学的发展，他们所创立的物理学理论在形式上、内容上和逻辑上也必然放射着科学美的光辉。

爱因斯坦认为，物理之美的本质就是简单性，“要从尽可能少的假说或公理出发，通过逻辑的演绎，概括尽可能多的经验事实”，一切科学的伟大目标就在于“寻找一个能把观察到的事实联系在一起的思想体系，它将具有最大可能的简单性。”

对称性这一科学审美标准，最初来自于自然界物质形态及其运动图景和谐与对称。然而，物理学研究表明：一定的对称性对应着一定的“守恒定律”，由守恒定律可定义“守恒量”，守恒量恰恰是物理学家最感兴趣的量，是实验可测量。物理学家正是通过对守恒物理量的认识和测量来把握周围这个千变万化的自然界。

自然界的各种现象领域之间，必然具有某种本质的、内在的联系。不同形式和不同层次的物理定律之间，必然存在着一种深刻的统一性，这种统一性是自然界内在美的表现。对统一性的追求一直是科学家最高的审美理想，是物理学家的真正的、唯一的目标。

试从以下几个方面讨论物理学发展中的美学思想：

- (1) 物理概念描述得简单，物理规律表述得简洁；
- (2) 物理学中的对称性，对称性与守恒律，对称与破缺；
- (3) 物理学中，数学形式上的统一，物理观念上的统一，物理实质上的统一。

习题答案

第 11 章

$$11-1 \quad (1) F = F_y = \frac{b}{2\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(a^2 + b^2)^{3/2}}; (2) b = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$11-2 \quad (2) q = \pm 9.23 \times 10^{-8} \text{ C}; (3) \frac{d}{dt} x = -3.61 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$11-3 \quad \frac{1}{2} Q$$

$$11-5 \quad E_0 = E_y = -\frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

$$11-6 \quad E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

$$11-7 \quad E_p = E_{px} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{R} \ln \frac{R + \sqrt{R^2 + x^2}}{x} \right)$$

$$11-8 \quad F = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d+1}{d}$$

$$11-9 \quad (1) E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r_0}{x(r_0 - x)} \mathbf{i}; (2) F = \pm \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r_0} \mathbf{i}$$

$$11-10 \quad \Phi_e = \pi R^2 E$$

$$11-11 \quad 0, \pm E_2 a^2, -E_1 a^2, (E_1 + ka) a^2; ka^3$$

$$11-12 \quad \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \mathbf{e}_r, (0 < r < R); \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r, (r > R)$$

$$11-13 \quad E = 0, (r < R_1); E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \mathbf{e}_r, (R_1 < r < R_2);$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} \mathbf{e}_r, (r > R_2)$$

$$11-14 \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 + r^2/x^2}} \mathbf{e}_n$$

$$11-16 \quad E = \frac{4ar^2 - 3br^3}{12\epsilon_0}, (r < R); E = \frac{4aR^3 - 3bR^4}{12\epsilon_0 r}, (r > R)$$

$$11-17 \quad E=0 \quad (r < R_1) ; E = \frac{Q_1(r^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_0(R_2^3 - R_1^3)r^2} \quad (R_1 < r < R_2) ;$$

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_2 < r < R_3) ; E = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_3)$$

$$11-18 \quad (1)E=0 \quad (r < R_1) ; (2)E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (R_1 < r < R_2) ; (3)E=0 \quad (r > R_2)$$

$$11-19 \quad A' = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

$$11-20 \quad (1)\text{取柱面处 } V=0, V_m = \frac{\rho}{4\epsilon_0}(R^2 - r^2), V_{ex} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} ;$$

$$(2)\text{取轴线处电势 } V=0, V_m = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0}, V_{ex} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

$$11-21 \quad (1)\frac{\sigma}{2\epsilon_0}[\sqrt{R_2^2 + x^2} - \sqrt{R_1^2 + x^2}] ; (2)V_0 \geq \sqrt{\frac{e\sigma}{\epsilon_0 m}}(R_2 - R_1)$$

$$11-22 \quad (1)V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (r < R_1) ; V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (R_1 < r < R_2) ; V = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R_2)$$

$$(2) U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$11-23 \quad (1)V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{L + \sqrt{L^2 + x^2}}{x} \right] \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x \sqrt{L^2 + x^2}} \mathbf{j} ;$$

$$(2)(y > L) \quad V_p = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{y+L}{y-L} \quad E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (y^2 - L^2)} ;$$

$$(y < -L) \quad V_p = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \ln \frac{y-L}{y+L} \quad E_y = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (y^2 - L^2)} ;$$

$$(3)V_p = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \ln \left(\frac{2L + \sqrt{4L^2 + x^2}}{x} \right) \quad E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \frac{1}{\sqrt{4L^2 + x^2}}$$

$$11-24 \quad (1)V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} (\sqrt{R^2 + L^2} - L) ; (2)E_p = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right)$$

$$11-25 \quad (1)E_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \quad , \text{方向竖直向下.}$$

$$(2)V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 2 + \frac{\lambda}{4\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\pi} \ln 2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$11-26 \quad V_A = \frac{\rho}{2\epsilon_0}(R_2^2 - R_1^2)$$

$$11-27 \quad U_{AB} = V_A - V_B = \frac{\sigma R}{6\epsilon_0}$$

第12章

$$12-1 \quad \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$12-2 \quad 0, V_0 \quad (r < R_1)$$

$$\frac{R_1 V_0}{r^2} - \frac{R_1 Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r^2}, \frac{R_1 V_0}{r} + \frac{(r - R_1)Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r} \quad (R_1 < r < R_2);$$

$$\frac{R_1 V_0}{r^2} + \frac{(R_2 - R_1)Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r^2}, \frac{R_1 V_0}{r} + \frac{(R_2 - R_1)Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r} \quad (R_2 < r)$$

$$12-3 \quad q_1 = 6 \times 10^{-9} \text{ C}, q_2 = 4 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$12-4 \quad (1) \text{从左至右: } \frac{Q}{2}, -\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}, -\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}, -\frac{Qd_1}{2\epsilon_0 S}, \frac{Qd_2}{2\epsilon_0 S};$$

$$(2) \text{从左至右: } 0; -\frac{d_2 Q}{d_1 + d_2}, \frac{d_2 Q}{d_1 + d_2}, \frac{d_1 Q}{d_1 + d_2}, -\frac{d_1 Q}{d_1 + d_2}, \rho;$$

$$-\frac{Q}{\epsilon_0 S} \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}, \frac{Q}{\epsilon_0 S} \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$$

$$12-5 \quad -\frac{R}{r}q$$

$$12-6 \quad 4.58 \times 10^{-2} \text{ F}$$

$$12-7 \quad (1) C = 4\pi\epsilon_0(a+b);$$

$$(2) q_1 = \frac{aQ}{a+b}, q_2 = \frac{bQ}{a+b}$$

$$12-8 \quad 4.86 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$12-9 \quad \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1-\epsilon}{\epsilon_r R_2} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r R_3} \right)$$

$$12-10 \quad (1) R_1 E_1 \ln \frac{R_2}{R_1}; (2) 2.52 \times 10^3 \text{ V}$$

$$12-11 \quad (1) 1.53 \times 10^{-9} \text{ F}; (2) 1.84 \times 10^{-8} \text{ C}, 1.84 \times 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2};$$

$$(3) 1.2 \times 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$12-12 \quad 4.5 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}, 2.5 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}, 2.3 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$12-13 \quad \frac{\lambda}{2\pi r} e_r, \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r r} e_r, \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{\lambda}{2\pi r} e_r$$

12 - 14 (1) - 600V ;(2) $6.0 \times 10^3 \text{e}_r \cdot \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$;(3) $2.1 \times 10^3 \text{V}$

12 - 15 (1) $\frac{\epsilon_0 S}{d} U, \frac{U}{d}, \frac{\epsilon_0 S}{d}$;

(2) $\frac{\epsilon_0 \epsilon_r S U}{\delta + \epsilon_r (d - \delta)}, \frac{U}{\delta + \epsilon_r (d - \delta)}, \frac{\epsilon_r U}{\delta + \epsilon_r (d - \delta)}, \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\delta + \epsilon_r (d - \delta)}$;
 $\frac{\epsilon_0 S U}{d - \delta}, 0, \frac{U}{d - \delta}, \frac{\epsilon_0 S}{d - \delta}$

12 - 16 190V

12 - 17 $2.66 \times 10^{-5} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$

12 - 18 (1) $E_1 = \frac{Q}{4\epsilon_0 \epsilon_{r1} r^2}, (R_2 < r < R_2), E_2 = \frac{Q}{4\epsilon_0 \epsilon_{r2} r^2} (R_2 < r < R_3)$;

(2) $V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)$;

(3) $W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{\epsilon_{r1} R_1 R_2} + \frac{R_3 - R_2}{\epsilon_{r1} R_2 R_3} \right)$

12 - 19 (1) $\frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}$;(2) $\frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}$

12 - 20 $W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[Q_1^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + (q_1 + q_2)^2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \frac{(q_1 + q_2 + q_3)^2}{c} \right]$

第 13 章

13 - 1 (a) $\frac{\mu_0 I}{8R}$;(b) $\frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

13 - 2 $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$

13 - 3 0

13 - 4 $\frac{\mu_0 N I}{4R}$

13 - 5 $\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln \frac{r+b}{r}$

13 - 6 $\frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$

13 - 7 $\frac{\mu_0 I R}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

13 - 8 (1) $\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$;(2) $5.6 \times 10^{-3} \text{T}$

$$13-9 \quad (1) \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}; (2) \frac{\mu_0 I}{2\pi r}; (3) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}; (4) 0$$

$$13-10 \quad 0 \quad (r < a) \quad \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (a < r < b) \quad 0 \quad (r > b)$$

$$13-11 \quad 0; \mu_0 j$$

$$13-12 \quad -1.6 \times 10^{-13} \text{ k N}$$

$$13-13 \quad 0.057 \text{ T}; 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$13-15 \quad \text{朝东}, 3.2 \times 10^{-16} \text{ N}$$

$$13-16 \quad \text{朝东}, 2.98 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$13-17 \quad 0.1 \text{ T}$$

$$13-18 \quad \mu_0 I_1 I_2, \text{方向朝右}$$

$$13-19 \quad \pi R^2 I B$$

$$13-20 \quad 1.28 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$13-21 \quad \text{水平边受力} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}, \text{竖直边受力} \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(a+b)};$$

$$\text{斜边受力} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \ln \frac{a+b}{a}, \Phi_m = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_1}{2\pi} \left(b - a \ln \frac{a+b}{a} \right)$$

$$13-22 \quad 12.5 \text{ T}$$

$$13-23 \quad \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}, 0 \quad (r < R_1) \quad \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}, (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2);$$

$$\frac{\mu_0 I (R_3^2 - r^2)}{2\pi r (R_3^2 - R_2^2)}, 0 \quad (R_2 < r < R_3) \quad 0 \quad (r > R_3)$$

$$13-24 \quad 1.14 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$13-25 \quad H = 4 \times 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}, B = 20 \text{ T}$$

第14章

$$14-1 \quad (1) \varepsilon_i = 0.5\pi \cos 10\pi t; (2) 1.57 \text{ V}$$

$$14-2 \quad \varepsilon_i = -\frac{\mu_0 I_0 l \omega}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d} \cos \omega t$$

$$14-3 \quad 0.30 \text{ V}$$

$$14-4 \quad \varepsilon_i = \frac{3\mu_0 \pi r^2 R^2 I x v}{2(R^2 + x^2)^{5/2}}, \text{其方向与 } x \text{ 轴正方向构成右手螺旋.}$$

$$14-5 \quad U_{AB} = \frac{1}{2} \omega B L (L - 2r), \text{当 } L > 2r \text{ 时, 端点 A 处的电势较高.}$$

14 - 6 $\varepsilon_{AB} = -3.84 \times 10^{-5} \text{V}$ 点 A 电势较高.

14 - 8 (1) $\Phi = BL^2$;(2) $\varepsilon_i = 5L^2$;(3) $U_{ab} = L^2$

14 - 9 1.21×10^3 匝

14 - 10 (1) $L = 2.26 \times 10^{-2} \text{H}$;

(2) $\varepsilon_L = -0.226 \text{V}$,负号表明 ,当电流增加时 ,自感电动势的方向与回路中电流 I 的方向相反.

14 - 11 $L = 3.7 \text{H}$.

14 - 12 $M = 6.3 \times 10^{-6} \text{H}$; $\varepsilon_M = 3.1 \times 10^{-4} \text{V}$

14 - 13 $w_m = 1.7 \times 10^5 \text{J} \cdot \text{m}^{-3}$

14 - 14 $E = 1.51 \times 10^8 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

14 - 15 $W_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$

第 15 章

15 - 2 $I_{d \max} = 5.47 \times 10^{-5} \text{A}$

15 - 3 $j_d = 15.9 \text{A} \cdot \text{m}^{-2}$

15 - 4 (1) $j_d = 2 \times 10^{-3} \cos(10^5 \pi t)$;(2) $B = 1.26 \times 10^{11} \text{T}$

15 - 5 (1) $I_d = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi R^2$;(2) $B_r = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2} \cdot \frac{dE}{dt}$

15 - 6 $\nu_1 = 2.25 \times 10^7 \text{Hz}$; $\nu_2 = 1.13 \times 10^7 \text{Hz}$

15 - 7 (1) $\nu_{\max} / \nu_{\min} = 6.0$;(2) $C = 33.75 \text{pF}$; $L = 2.58 \times 10^{-4} \text{H}$

15 - 8 (1) $T = 2.0 \times 10^{-4} \text{s}$;(2) $L = 1.01 \times 10^{-2} \text{H}$;

(3) $I = -0.157 \sin(10^4 \pi t)$

15 - 9 (1) $\lambda = 375 \text{m}$;(2) $\bar{P} = 3.62 \text{kW}$;

(3) $\bar{S} = 1.08 \times 10^{-4} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$; $E_0 = 2.85 \times 10^{-1} \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$,

$H_0 = 7.56 \times 10^{-4} \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$

15 - 10 $E_0 = 1.55 \times 10^3 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$; $B_0 = 5.17 \times 10^{-6} \text{T}$

15 - 11 (1) $\bar{S} = 1.59 \times 10^{-5} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$;(2) $H_0 = 2.91 \times 10^{-4} \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$,

$E_0 = 0.109 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

15 - 12 $7.1 \times 10^2 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$; $1.9 \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$

第 16 章

16 - 1 517.7nm 绿色光

16 - 2 $2\pi \frac{(n_2 - n_1)e}{\lambda}$

- 16 - 3 $2.35 \times 10^3 \text{ m}$
 16 - 4 $8.5 \times 10^{-5} \text{ m}$
 16 - 5 $8.0 \times 10^{-6} \text{ m}$
 16 - 6 (1) 24° ; (2) $5.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$ $2.44 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 487.8 nm ;
 (3) 0.111 m 0.113 m
 16 - 7 $1.44 \times 10^{-3} \text{ m}$
 16 - 8 正面 673.9 nm 404.3 nm 紫红色 ; 背面 505.4 nm , 青绿色
 16 - 9 592.1 nm
 16 - 10 560 nm
 16 - 11 (1) 653.3 nm ; (2) 653.3 nm
 16 - 12 99.6 nm
 16 - 13 (1) $4 \times 10^{-4} \text{ rad}$; (2) $7.91 \times 10^{-4} \text{ m}$; (3) 152 条
 16 - 14 $1.28 \times 10^{-6} \text{ m}$
 16 - 15 546 nm
 16 - 16 1.22
 16 - 17 102.77 cm
 16 - 18 1.00029
 16 - 19 (1) 600 nm 466.7 nm ; (2) 3 A ; (3) 7 9
 16 - 20 428.6 nm
 16 - 21 (1) $3.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ $5.7 \times 10^{-3} \text{ m}$ $2.7 \times 10^{-3} \text{ m}$;
 (2) $2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ $3.8 \times 10^{-2} \text{ m}$ $1.8 \times 10^{-2} \text{ m}$
 16 - 22 $1.266 \times 10^{-6} \text{ m}$, 7 899 条 衍射角为 $\frac{\pi}{2}$, 不可能
 16 - 23 8.94 km
 16 - 24 51.8 m
 16 - 25 $2.25I_1$
 16 - 26 偏振光 $\frac{2}{3}$, 自然光 $\frac{1}{3}$

第 17 章

- 17 - 1 (1) $1.25 \times 10^{-7} \text{ s}$; (2) $2.25 \times 10^{-7} \text{ s}$
 17 - 2 $x=93 \text{ m}$, $y=0$, $z=0$, $t=2.5 \times 10^{-7} \text{ s}$
 17 - 3 $-1.0 \times 10^{-13} \text{ s}$ 负号说明火车上的观察者测得闪电先击中车头处.
 17 - 4 (1) $v=0.6c$; (2) $1.20 \times 10^{-6} \text{ s}$

17 - 5 $-0.994c$ 式中负号表示该电子沿 x' 轴负向飞行,正好与正电子相向飞行.

17 - 6 $u = c$ 速度 u 与 x 轴的夹角为 $\arctan \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{v}$

17 - 7 $1.34 \times 10^9 \text{ m}$

17 - 8 (1) $2.87 \times 10^8 \text{ s} \approx 9.9 \text{ a}$; (2) $1.28 \times 10^7 \text{ s} \approx 0.40 \text{ a}$

17 - 9 $l = 1.04 \times 10^4 > 8000 \text{ m}$, 所以 μ 子能飞到地面.

17 - 10 $5.77 \times 10^{-9} \text{ s}$

17 - 11 (1) $9 \times 10^9 \text{ m}$; (2) $2.7 \times 10^{10} \text{ m}$

17 - 12 (1) $\frac{\lambda}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$; (2) $\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

17 - 13 $\frac{l_0}{c^2 - uv} [(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)]^{1/2}$

17 - 14 $0.866 c$

17 - 15 3.2 m

17 - 16 (1) 测得图形的形状为菱形,其面积为 80 m^2 ; (2) 1.5625

17 - 17 0.512 MeV , 4.488 MeV , $2.66 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $0.995 c$

17 - 18 (1) 5.86×10^3 ; (2) $0.999\ 999\ 985 c$

17 - 19 $0.866 c$, $0.786c$

17 - 20 $1.64 \times 10^{-13} \text{ J}$ 或 1.02 MeV

17 - 21 (1) 0.146 T ; (2) 1.98

17 - 22 $E_{k\mu} = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2 c^2}{2m_\pi}$, $E_{kv} = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2) c^2}{2m_\pi}$

第 18 章

18 - 1 $292 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

18 - 2 $5\ 800 \text{ K}$

18 - 3 $1.5 \times 10^8 \text{ W}$

18 - 4 $5.74 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

18 - 5 (1) 2.0 eV ; (2) 2.0 V ; (3) 296 nm

18 - 6 $2.5 \times 10^3 \text{ 个/m}^3$

18 - 7 62 eV

- 18 - 8 (1) $1.33 \times 10^{-19} \text{ J}$ $4.42 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ $1.47 \times 10^{-36} \text{ kg}$;
 (2) $3.99 \times 10^{-19} \text{ J}$ $1.33 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ $4.41 \times 10^{-36} \text{ kg}$;
 (3) $9.97 \times 10^{-18} \text{ J}$ $3.31 \times 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ $1.10 \times 10^{-34} \text{ kg}$;
 (4) $1.33 \times 10^{-15} \text{ J}$ $4.42 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ $1.47 \times 10^{-32} \text{ kg}$;
 (5) $1.99 \times 10^{-13} \text{ J}$ $6.63 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ $2.21 \times 10^{-30} \text{ kg}$
- 18 - 9 $3.32 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 37.8 eV 6.22 keV $5.12 \times 10^5 \text{ eV}$ $6.19 \times 10^3 \text{ eV}$
- 18 - 10 $43.4 \mu\text{m}$, - 3.4 eV (负号表示电子吸收能量)
- 18 - 11 $1.99 \times 10^{-5} \text{ nm}$
- 18 - 12 0.146 nm
- 18 - 13 $1.46 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- 18 - 14 $1.47 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ $8.80 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- 18 - 16 $p = \frac{nh}{2a}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) $E = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)
- 18 - 17 $5.49 \times 10^{-39} \text{ J}$ $6.64 \times 10^{-39} \text{ J}$ $1.15 \times 10^{-39} \text{ J}$
- 18 - 18 0.091
- 18 - 21 (1) 9.43 eV ; (2) $x=0, 0.10 \text{ nm}, 0.20 \text{ nm}$ 处概率最小, 其值均为零
- 18 - 22 $6.04 \times 10^{-34} \times n^2 \text{ J}$, $(2n+1) \times 3.77 \times 10^{-15} \text{ eV}$;
 $37.7 \times n^2 \text{ eV}$, $(2n+1) \times 37.7 \text{ eV}$
- 18 - 23 3.33 nm , 10 nm , 16.67 nm
- 18 - 24 (1) $\sqrt{3} \frac{h}{\pi}$; (2) $0, \pm \frac{h}{2\pi}, \pm \frac{2h}{2\pi}, \pm \frac{3h}{2\pi}$
- 18 - 25 $4a_0$