大学物理学

（下）

主编　汪晓元

内容简介

本套书是根据教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神，结合当前高等学校大学物理课程教学改革实际情况和多年教学经验而编写的.全书分上、下两册，上册：力学（含相对论）、机械振动与机械波和热学；下册：电磁学、光学和量子物理基础.与之配套的还有《大学物理学（学习指导）》.两者既可彼此独立，又可相互配套使用.本套书对于大学物理课程内容与体系做了一些改革尝试，即精选经典内容，拓宽知识面，反映科技与物理学相关的新技术、新成果及其应用与发展，同时尽量使教材符合教学实际情况，篇幅适中，难度适宜.

本套书可作为各类高等学校工科各专业或理科非物理专业的大学物理课程的教材或参考书，也可供文科专业选用.

引 言

编写一本既符合教学改革的精神，又适合目前我国高等教育实际的大学物理课程的教材，一直被高校的广大物理教师所关注，这是一项具有非常重要意义的工作. 由于近一个世纪以来物理学的发展及其与物理学紧密联系的新技术的出现和广泛应用，使得这项工作变得不容易、甚至比较复杂. 许多从事物理教学工作的教师在这方面做了许多有益的尝试和探索，取得了一些成果和经验. 我们编写的这套《大学物理学》就是从物理课程教学改革的需要和教学实际情况出发所做的一种尝试和探索.

本套书根据"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的精神，借鉴国内外关于教材建设与改革的经验，结合多年来我们的教学实践编写成的. 它包括了工科大学物理课程指导委员会制订的教学基本要求的全部内容，同时，适度介绍了近代物理的知识以及新技术的物理基础. 力图使这套书成为既满足各个层次大学物理课程教学及改革的实际需要，又符合高校实际情况，具备鲜明特色的好教材. 本教材特点主要有以下几点：

1. 精选经典内容，构建教材新体系. 力学部分，省略了高中阶段已经掌握的知识，如直线运动、抛体运动、物体碰撞，主要介绍运动学描述方法及运动定律、定理和守恒定律等，与中学阶段的力学体系既有联系但又完全不同. 同时把相对论纳入力学部分，使之与经典的时空概念形成鲜明的对照，有助于学生理解掌握.

2. 力求内容现代化. 教材中除讲述相对论和量子物理等近代物理内容外，还介绍了许多当前新技术中的基础物理原理，包括熵、全息、光纤通信、激光、超导、能带理论、纳米科学. 在通篇教材中，加大了现代化内容的比重，使学生能接触到更多新的物理知识和概念，对提高学生学习物理的兴趣，培养学生的探索精神有益处.

3. 力求内容精炼、综合. 抓住主要内容，去粗取精，突出物理学中的重要定律与定理，从物理学发展的过程和教学实际情况的两个方面组织教学内容，精选例题、习题，用基本的、通俗的方法讲述物理内容. 力求既满足广大师生的教学需要，又能激发学生的学习兴趣，培养学生的创新能力.

4. 适度开"窗口"、重视科学素质培养. 在现代物理部分大胆地"渗透"一些科

技前沿信息，并介绍了非线性物理的一些内容和概念. 有些内容对学生学习可能有一定困难，但让学生尽早了解这些内容，有益于激发和培养学生的求知欲望和独立思考能力，提高学生的科学素质.

全套书由武汉理工大学汪晓元教授主编，参加讨论和编写的有赵明、陈德彝、廖红、邓伟明、雷杰、罗来龙、赵黎、黄学洪、杨应平、刘想宁、陈清明、张甫宽等. 邓伟明编写质点运动学和原子核物理部分，刘想宁编写质点动力学，罗来龙编写角动量与刚体部分，廖红编写机械振动和机械波，陈德彝编写热学，赵黎编写静电学，雷杰编写相对论和稳恒电流，汪晓元编写稳恒磁场及磁介质，黄学洪编写电磁感应和电磁波，赵明编写光学，杨应平编写量子物理基础，陈清明编写量子物理基础的部分内容及工程新技术的物理基础.《大学物理学（学习指导）》的相关部分仍由以上教师负责分工编写. 全套书由汪晓元负责统稿和定稿. 在编写的过程中，参加编写的教师们付出了大量的辛勤劳动，同时得到了许多同行们很好的建议及出版社等方面的大力支持和帮助，在此一并表示真诚地感谢.

由于编者水平有限，错误及不妥之处在所难免，请广大师生批评指正，以便今后逐步完善和提高.

编　者

2006 年 4 月

目　录

第四篇　电磁学

第五篇 波动光学

第六篇 量子物理基础

第四篇 电磁学

第12章 真空中的静电场

相对于观察者静止的电荷所激发的电场，称为静电场. 本章研究真空中静电场的基本特性，并从电场的外在表现，即对处在场空间中的电荷有力的作用，以及电荷在电场中移动时电场力将对其做功这两个方面，引入描述电场的两个重要物理量：电场强度和电势. 同时介绍反映静电场基本性质的场强叠加原理、高斯定理和场强环路定理，并讨论电场强度和电势之间的积分和微分关系.

12.1 电荷 库仑定律

12.1.1 电 荷

人们对于电的认识最初来自人为的摩擦起电现象. 两个不同质料的物体，例如干燥的丝绸和玻璃棒，经互相摩擦后，都能吸引羽毛、纸片等轻微物体，这表明两个物体经摩擦后，处于一种特殊状态，人们把处于这种状态的物体称为带电体，并说它们分别带有电荷. 带电体吸引轻微物体能力的强弱与它所带电荷的多少有关，用来量度电荷多少的量称为电量，在国际单位制(SI)中，电量的单位为库仑，用C表示. 在某些情况下，“电荷”一词实际是指带电体本身，在更多情况下则把电荷作为电量的同义词.

物体所带的电荷有两种，而且自然界也只存在这两种电荷. 为了区别起见，分别称为正电荷和负电荷. 带同号电荷的物体互相排斥，带异号电荷的物体互相

吸引.静止电荷之间的相互作用力称为静电力.

物体是由原子构成的.在正常情况下,由于原子核外的电子数和核内的质子数相等,且每个电子所带的负电荷量与每个质子所带的正电荷量是等值的,因而整个原子呈电中性,这亦使得通常的宏观物体处于不带电的电中性状态.一般而言,使物体带电的过程就是使处于电中性状态的物体获得或失去电子的过程.实验证明:无论是摩擦起电的过程,还是通过其他方法使物体带电的过程,正负电荷总是同时出现的,而且这两种电荷的量值一定相等.即当一种电荷出现时,必然伴随有等量值的异号电荷同时出现;一种电荷消失时,亦必然相伴有等量值的异号电荷同时消失.由此可见,在一个与外界没有电荷交换的孤立系统内,无论发生怎样的物理过程,系统内正、负电荷的代数和总是保持不变,这就是由实验总结出来的自然界中守恒定律之一的电荷守恒定律.要注意,定律中强调的是正、负电荷的代数和保持不变,而不是正、负电荷各自的量.在基本粒子的相互作用过程中,电荷是可以产生和消失的.例如,能量超过 1.02 MeV 的光子,在经过另一粒子(通常是原子核)附近时,可能转化为正、负电子对;又例如,在一定条件下,一个电子和一个正电子相遇会同时消失而产生两个光子.然而,这些电荷的产生和消失并未改变系统中正、负电荷的代数和,并不违背电荷守恒定律.

迄今为止的所有实验表明,一切带电体包括微观粒子所带电荷量,都是电子电量 $e=1.602\times10^{-19}\mathrm{C}$ 的整数倍.这种物体所荷电量只能取分立的、不连续量值的性质,称为电荷的量子化.不过,由于基本电荷量 e 很小,对于荷电量比它大得多的宏观带电体而言,电荷的量子性显现不出来,因此,在讨论宏观带电系统时可以不考虑电荷的量子性,而把它作为电荷连续分布来处理.近代物理的一种理论认为,有可能存在电量为 $\pm\frac{1}{3}e$ 和 $\pm\frac{2}{3}e$ 的基本粒子,但至今尚未为实验所证实.

此外,实验还证明,一个电荷的电量与它的运动状态无关,亦就是说,在不同的参考系中观察,尽管电荷的运动状态不同,但其电量不变.电荷的这一性质叫电荷的相对论不变性.

12.1.2 库仑定律

不同物体带电后,其间存在着相互作用.研究静止电荷之间的相互作用的理论叫静电学.一般而言,带电体之间的相互作用是十分复杂的,它与带电体的形状、大小、所带电荷和电荷分布、带电体间的相对位置以及周围的介质的性质有关.这里先讨论最简单也是最基本的情况,即真空中静止点电荷之间的相互作用.

所谓点电荷，是一个理想的模型. 在实际问题中，通常将其线度与其他带电体之间的距离相比很小，以至于其本身的形状和大小对于所研究的问题来说可以忽略的带电体视作一个带电的几何点，亦即点电荷来处理.

库仑于 1785 年通过实验确立了两个静止点电荷之间相互作用的静电力（亦称库仑力）所服从的基本规律，即库仑定律，它是静电学的理论基础，可陈述如下：

在真空中，两个静止点电荷之间的相互作用力的大小与这两个点电荷的电量 q_1 和 q_2 的乘积成正比，而与它们之间距离 r 的平方成反比，作用力的方向沿着这两个点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸. 其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}=k\frac{q_1q_2}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{12-1}$$

或

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{12-2}$$

式中，$\boldsymbol{r}$ 为施力电荷指向受力电荷的矢径. k 和 ε_0 为比例系数，在国际单位制(SI)中，$k=8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$，$\varepsilon_0=1/4\pi k=8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}}$，$\varepsilon_0$ 称为真空电容率或真空介电常量.

实验证明，当点电荷 q 在点电荷系 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 的共同作用下，它所受到的静电力，等于 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 等各点电荷单独存在时作用于它的静电力的矢量和，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n \tag{12-3}$$

这一结论叫做静电力的叠加原理. 按照这个原理，也可计算两个连续带电体之间的静电力，具体做法是先将带电体划分为许多可看成是点电荷的电荷元，利用式(12－2)求出每一对电荷元间的作用力，然后再借助静电力的叠加原理，便可最终得到两个连续带电体之间的静电力. 库仑定律和静电力的叠加原理相配合，原则上可以求解静电学中的一切问题.

12.2 电场 电场强度

12.2.1 电 场

库仑定律反映了两个点电荷相互作用力的规律，但它没有从本质上说明电

荷间相互作用力是怎样传递的. 对于电力的传递问题,历史上有两种不同的观点:一种是所谓"超距作用"的观点,即认为库仑力是由一个带电体超越空间直接作用到另一个带电体,这种作用不需要任何中间物质,也不需要传递的时间. 这种作用方式可表示为

$$\text{电荷} \rightleftharpoons \text{电荷}$$

另一种是所谓"近距作用"的观点,即认为电荷间相互作用是通过这些电荷在周围空间所产生的实在的场而实现的,也就是说任一电荷都在自己的周围空间产生电场,并通过电场来对其他的电荷施以力的作用. 这种作用方式可表示为

$$\text{电荷} \rightleftharpoons \text{电场} \rightleftharpoons \text{电荷}$$

理论和大量实验证明场的观点是正确的. 电场是一种客观存在的特殊物质,它和其他一切实物一样,也具有能量、质量和动量.

相对于观察者静止的电荷在周围空间所产生的电场称为静电场,静电场的最主要的外在表现有:

(1)处于电场空间中的任何电荷均会受到电场的作用力,这种力称为电场力.

(2)当电荷在电场中移动时,电场力将对其做功.

静电场的这些性质是人们从不同的角度认识静电场的基础.

12.2.2 电场强度

1. 电场强度

下面先从静电场对处于场中的电荷有力的作用这一表现出发,利用试验电荷 q_0 引入一个与电场有关的矢量来描述电场. 所谓试验电荷,就是带电量很小的电荷,它的线度必须足够小,当它处于场中某点时,它的位置应具有确定的意义;它的电量也必须足够小,把它引入电场中,不会对电场有显著的影响,即不会改变产生电场的那些电荷的分布.

实验发现,试验电荷受到的电场力 $\boldsymbol{F}$ 除了与电场中场点的位置有关外,还和试验电荷 q_0 本身有关,但在电场中某一确定点,试验电荷受到的电场力 $\boldsymbol{F}$ 与试验电荷的电量 q_0 的比值 $\boldsymbol{F}/q_0$ 却是一个无论大小和方向都与试验电荷 q_0 无关的确定矢量,只决定于场点的位置. 这就说明,$\boldsymbol{F}$ 只能反映电场的某个侧面,而 $\boldsymbol{F}/q_0$ 才能客观地表达电场的特性,是表示电场中给定点电场性质的物理量,将其称为电场强度或简称场强,以符号 $\boldsymbol{E}$ 表示,即

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \tag{12-4}$$

当式中 q_0 为一个单位的正电荷，则 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}$，即电场中任一点的电场强度在数值上等于单位正电荷在该点所受电场力的大小，场强的方向与正电荷受力的方向一致. 在国际单位制(SI)中，场强 E 的单位是 $\mathrm{N \cdot C^{-1}}$，有时也写作 $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

这里还必须指出，电场是客观存在的，引入试验电荷 q_0 只是为了检验电场的存在，而电场的性质仅由产生该电场的电荷的分布所决定，与是否引入试验电荷无关.

一般来说，电场强度矢量在场中各点的大小和方向是各不相同的，它们是场中点的坐标的函数. 如果知道了电场强度在各空间点的大小和方向，即如果知道了该矢量函数的形式，就知道了该静电场的性质. 原则上，一旦电荷的分布确定后，电场矢量函数的形式就可确定.

2. 场强叠加原理

如果电场是由若干点电荷 $q_1,q_2,q_3,\cdots$ 产生的，在电场中某点 P 放一试验电荷 q_0，并假设 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\cdots$ 为各点电荷单独存在时作用于它的静电力，则根据静电力的叠加原理，q_0 受到的总静电力为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\cdots$$

两边同时除以 q_0，有

$$\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}=\frac{\boldsymbol{F}_1}{q_0}+\frac{\boldsymbol{F}_2}{q_0}+\frac{\boldsymbol{F}_3}{q_0}+\cdots$$

根据场强的定义，P 点的场强为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}=\frac{\boldsymbol{F}_1}{q_0}+\frac{\boldsymbol{F}_2}{q_0}+\frac{\boldsymbol{F}_3}{q_0}+\cdots=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\cdots=\sum_i \boldsymbol{E}_i \tag{12-5}$$

上式表明，若干个点电荷在周围空间某点 P 产生的场强等于各个点电荷单独存在时在该点产生场强的矢量和. 这个结论称为场强叠加原理. 由于任何带电体均可视作许多点电荷的集合，故由该原理，原则上可求得任意带电体所产生的场强.

3. 场强的计算

如果产生电场的场源电荷的分布已知，那么根据场强叠加原理，原则上可求得该场源电荷所激发的场强.

(1) 点电荷的场强

设在真空中有一个静止的点电荷 q，P 为其周围空间中的一点，称其为场点. 从 q 到 P 点的矢径写作 $\boldsymbol{r}$. 现将试验电荷 q_0 置于 P 点，由式(12-2)知，作用

在 q_0 上的电场力为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

利用式(12－4)可求得点电荷 q 在 P 点的场强为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{12-6}$$

由于 P 点的任意性，所以式(12－6)给出点电荷的电场分布，通常将它叫做点电荷的场强公式. 由式(12－6)可以看出点电荷的电场中任一点 P 的场强方向总是在点电荷所在点与 P 点的连线上，若 $q>0$，则 P 点的场强方向与 $\boldsymbol{r}$ 的方向一致，即场强的方向是从点电荷所在位置指向 P 点；若 $q<0$，则 P 点的场强方向与 $\boldsymbol{r}$ 的方向相反，即场强的方向是从 P 点指向点电荷所在位置. 此外，电场中任一点的场强大小与产生电场的点电荷的电量成正比，与该点到点电荷的距离平方成反比. 若以点电荷所在位置为球心，作一半径为 r 的球面，则球面上各点的场强大小相等，方向沿各点径向，即点电荷产生的电场具有球对称性.

(2) 点电荷系的场强

如果电场由 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 所组成的点电荷系产生，设第 i 个点电荷指向场点 P 的矢径为 $\boldsymbol{r}_i$，则根据式(12－5)和(12－6)，可得 P 点的场强为

$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^{3}}\boldsymbol{r}_i \tag{12-7}$$

(3) 连续分布电荷的场强

对于连续分布的电荷，可将其视为许多电荷元的集合，任意一电荷元 $\mathrm{d}q$ 的电场在场中给定点的场强为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为电荷元 $\mathrm{d}q$ 指向该点的矢径. 根据电场的叠加原理，可求得连续分布的电荷的电场在该点的合成场强为

$$\boldsymbol{E}=\int_0^{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\int_q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{12-8}$$

由于电荷的分布情况不同，点电荷元 $\mathrm{d}q$ 常有 3 种不同的表达方式：

① 体分布　电荷连续分布在带电体内的称为体分布. 体分布电荷的电荷元，可以通过电荷体密度 ρ 表示为 $\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V$，并用体积分

$$\boldsymbol{E}=\int_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\mathrm{d}V}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{12-9}$$

表达带电体上各电荷元场强的叠加.

② **面分布**　电荷连续分布在厚度可忽略不计的几何面上称为面分布. 面分布电荷上的电荷元,可以通过电荷面密度 σ 表示为 $\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S$,并用面积分

$$\boldsymbol{E}=\int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\mathrm{d}S}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{12-10}$$

表达带电面上各电荷元场强的叠加.

③ **线分布**　电荷连续分布在粗细可忽略不计的几何线上称为线分布. 线分布电荷上的电荷元,可以通过电荷线密度 λ 表示为 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$,并用线积分

$$\boldsymbol{E}=\int_L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}l}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{12-11}$$

表达带电线上各电荷元场强的叠加.

以上三式右端的积分均为矢量积分,在实际的具体运算过程中,通常是将 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在直角坐标系的 x,y,z 三个坐标轴方向上进行分解,并通过分量积分先求出 $\boldsymbol{E}$ 各分量 E_x,E_y,E_z 后,再进行合成求得 $\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}+E_z\boldsymbol{k}$.

例 12－1　计算电偶极子轴线上和中垂线上任一点的场强.

解　相距一定距离的两带等量异号的点电荷,当它们之间的距离 l 比从它们到所考虑的场点的距离小得多时,这一点电荷系统称为电偶极子. 连接两点电荷的直线称为电偶极子的轴线,取从 $-q$ 指向 $+q$ 的矢量 $\boldsymbol{l}$ 的方向作为轴线的正方向,电荷量 q 与矢量 $\boldsymbol{l}$ 的乘积定义为电偶极矩,简称电矩. 电矩是矢量,用 $\boldsymbol{p}$ 表示,即 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$.

首先计算电偶极子轴线的延长线上某点 A 的场强 $\boldsymbol{E}_A$.

设电偶极子的中点 O 至 A 点的距离为 r,则 $+q$ 和 $-q$ 在 A 点所产生的场强的大小分别为

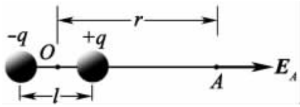


图 12－1　例 12－1 图 1(电偶极子延长线上某点的场强)

$$E_+=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r-\dfrac{l}{2}\right)^2}$$

$$E_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r+\dfrac{l}{2}\right)^2}$$

$+q$ 和 $-q$ 在 A 点所产生的场强的方向分别沿轴线的正向和负向,它们的矢量和就等于其代数和,即 A 点的总场强 $\boldsymbol{E}_A$ 的大小为

$$\begin{aligned}E_A&=E_+-E_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r-\dfrac{l}{2}\right)^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r+\dfrac{l}{2}\right)^2}\\&=\frac{2qrl}{4\pi\varepsilon_0 r^4\left(1-\dfrac{l}{2r}\right)^2\left(1+\dfrac{l}{2r}\right)^2}\end{aligned}$$

因为 $r\gg l$,故

$$E_A \approx \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$\boldsymbol{E}_A$ 与 $\boldsymbol{p}$ 同方向,所以

$$\boldsymbol{E}_A \approx \frac{2q\boldsymbol{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

下面计算电偶极子的中垂线上某点 B 的场强 $\boldsymbol{E}_B$.

设电偶极子的中点 O 至中垂线 B 点的距离为 r,则 $+q$ 和 $-q$ 在 B 点所产生的场强的大小分别为

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}$$

$$E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}$$

其方向分别在 $+q$ 和 $-q$ 与 B 点的连线上,如图 12-2 所示.

设 $\pm q$ 到 B 点的连线与电偶极子轴线间的夹角为 α,则 B 点总场强 $\boldsymbol{E}_B$ 的大小为

$$E_B = E_+ \cos\alpha + E_- \cos\alpha = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + \frac{l^2}{4})^{3/2}}$$

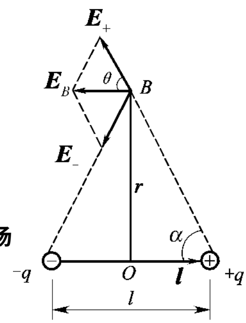


图 12-2 例 12-1 图 2(电偶极子的中垂线上某点的场强)

因为 $r \gg l$,故有

$$(r^2 + \frac{l^2}{4})^{3/2} \approx r^3$$

$$E_B = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$\boldsymbol{E}_B$ 与 $\boldsymbol{p}$ 反方向,所以

$$\boldsymbol{E}_B = -\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

由上述结果知,在远离电偶极子处的场强的大小与距离 r 的三次方成反比,与电偶极矩的大小 ql 成正比. 电偶极子是一个重要的物理模型,它在研究电介质的极化、电磁波的发射和吸收等问题中都要用到.

例 12-2 一带电直线段均匀带电,电荷线密度为 λ. 求电场中任一点 P 的场强,并讨论直线段为无限长时的极限情况.

解 如图 12-3,取 P 点到直线的垂足 O 点为坐标原点,Ox 轴沿带电直线,Oy 轴通过 P 点. 在带电直线上距原点 O 为 x 处取点电荷元 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$,由点电荷的场强公式,可得到在 P 点的场强

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为从 $\mathrm{d}q$ 指向场点 P 的矢量,其大小为 $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的方向与 $\boldsymbol{r}$ 相同,设其与 Ox 轴

正方向的夹角为 θ,则 d$\boldsymbol{E}$ 沿 Ox 轴和 Oy 轴两个方向的分量分别为

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta,\quad \mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\sin\theta$$

显然,所有电荷元之 d$\boldsymbol{E}$ 在垂直于 xOy 平面的 Oz 轴(图中未画出)方向的分量均为零,故有 $E_z=0$. 此外,由图可知,

$$x=a\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-a\cot\theta,\quad \mathrm{d}x=a\csc^2\theta\mathrm{d}\theta,\quad r^2=a^2\csc^2\theta$$

所以

$$\mathrm{d}E_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\mathrm{d}\theta,\quad \mathrm{d}E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

积分后得

$$E_x=\int_0^{E_x}\mathrm{d}E_x=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

$$E_y=\int_0^{E_y}\mathrm{d}E_y=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

式中的 θ_1 和 θ_2 分别为带电直线段左、右两端到 P 点的矢径与 Ox 轴正向的夹角. 场强 $\boldsymbol{E}$ 的大小和它与 Ox 轴正向的夹角 α,可分别由

$$E=\sqrt{E_x^{\ 2}+E_y^{\ 2}}$$

$$\alpha=\arctan\frac{E_y}{E_x}$$

进行计算.

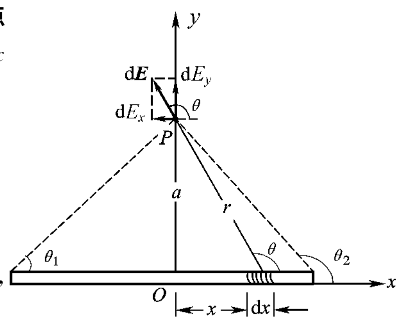


图 12－3　例 12－2 图(均匀带电直线外任一点处场强)

当带电直线段趋于无限长时,由 $\theta_1\to 0$ 和 $\theta_2\to\pi$,可得

$$E_x=0,\quad E_y=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

亦即

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a},\quad \alpha=90^\circ \tag{12－12}$$

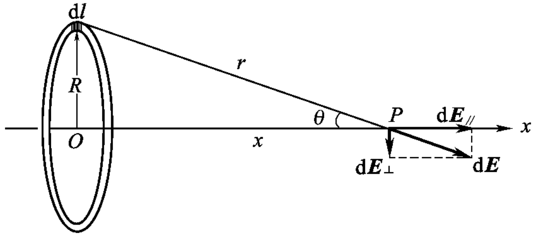
这时的电场,是一种场强大小与距离 a 成反比,垂直于带电直线的轴对称电场.

无限长的带电直线是不存在的. 当所求的场点 P 与带电直线两端的距离远大于它到直线段的垂直距离时,因 $\theta_1\to 0$,$\theta_2\to\pi$,直线段就可以看成是无限长的带电直线. 物理上的无限长和无限大、无限小,都是具体情况在一定条件下的近似,或者说,都是一定条件下简化的理想模型.

例 12－3　一均匀带电细圆环,半径为 R,所带总电量为 q(设 $q>0$),求圆环轴线上任一点的场强.

解　如图 12－4,将圆环分割成许多小的线元,任取一线元 dl,其上带电量为

$$\mathrm{d}q=\frac{q}{2\pi R}\mathrm{d}l$$



12 − 4　例 12 − 3 图(均匀带电细圆环轴线上的场强)

此电荷元 $\mathrm{d}q$ 在圆环轴线上距环心为 x 的 P 点的场强为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}=\frac{q\mathrm{d}l}{8\pi^2\varepsilon_0 Rr^3}\boldsymbol{r}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是从 $\mathrm{d}l$ 指向 P 点的矢量，其大小 $r=\sqrt{x^2+R^2}$. 由于圆环上各电荷元在 P 点激发的场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的方向各不相同，为此把 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 分解为平行和垂直于轴线的两个方向的分量 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\perp}$. 由于圆环电荷分布关于轴线对称，所以圆环上所有电荷元在 P 点激发的场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\perp}$ 之矢量和为零，P 点的场强沿轴线方向，其大小为

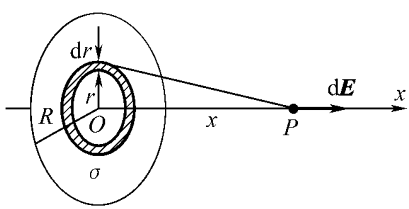
$$E=\int_0^{E_{/\!/}}\mathrm{d}E_{/\!/}=\int_0^{E_{/\!/}}\mathrm{d}E\cos\theta=\int_0^{2\pi R}\frac{q\mathrm{d}l}{8\pi^2\varepsilon_0 Rr^2}\,\frac{x}{r}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

在环心处 $E=0$；当 $x\gg R$，

$$E\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

表明在远离环心处的场强与环上电荷全部集中在环心处的一个点电荷所激发的场强相同.

例 12 − 4　试计算均匀带电圆盘轴线上与盘心 O 相距为 x 的 P 点的场强. 圆盘的半径为 R，电荷面密度为 σ.



−　12 − 4 图(均匀带电圆盘轴线上任一点处的场强)

解　如图 12 − 5 所示，将圆盘划分为成许多同心的细圆环，在其上任取一半径为 r，宽为 $\mathrm{d}r$ 的细圆环，此细圆环带电为 $\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$，根据上例的结果，该带电细圆环上电荷在 P 点所激发的场强的大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{x\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}$$

方向沿轴向. 由于组成圆盘的所有细圆环上的电荷在 P 点所激发的场强的方向都相同，所以 P 点场强的大小为

$$E=\int_0^E \mathrm{d}E=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

方向沿垂直于盘面的轴向.

当 $x \ll R$ 时，
$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{12-13}$$

此时在 P 点看来，均匀带电圆盘可视作“无限大”均匀带电平面. 由此可确定，在一无限大均匀带电平面的附近，电场是一均匀场，其大小由式(12－13)决定，方向垂直于无限大均匀带电平面.

当 $x \gg R$ 时，
$$(R^2+x^2)^{-1/2}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2}=\frac{1}{x}\left(1-\frac{R^2}{2x^2}+\cdots\right)\approx\frac{1}{x}\left(1-\frac{R^2}{2x^2}\right)$$

于是 P 点的场强为

$$E\approx\frac{\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

式中 $q=\pi R^2\sigma$ 为圆盘面所带的总电量. 这表明，在远离带电圆盘面的 P 点的场强与将圆盘面所带总电量 q 集中在盘心的一个点电荷在该点所激发的场强相同.

12.3 高斯定理

12.3.1 电通量

1. 电场的几何描述 电场线

为了研究电场的性质，必须知道电场强度的分布，即必须知道空间各点的场强的大小和方向. 但在实际问题中，电场的分布并不是总能用解析的函数形式如 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,y,z)$ 表示出来，这时采用图示的方法对电场进行几何描述不失为一种对电场进行研究的有效手段. 为此，引入电场线的概念，以形象地表示电场的分布.

电场线的概念首先是由法拉第提出来的. 在任何电场空间中，每一点的场强 $\boldsymbol{E}$ 都有确定的方向，所以可以在电场中做一系列曲线，使这些曲线上每一点的切线方向都与该点的场强方向一致，这些曲线就叫电场线. 图 12－6 所示为某一电场中的一条电场线.

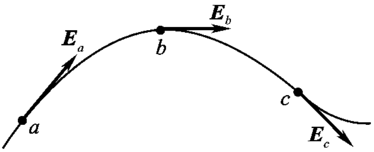


图 12－6 电场中的一条电场线的一部分

为了使电场线不仅能表示场强的方向，而且

能同时反映出场强的大小，可以对电场线做如下规定：在电场中的任一点，做一个与该点场强 E 垂直的面积元 $dS_\perp$，使通过该面积元单位面积的电场线数目，等于该点场强 E 的大小，即

$$E=\frac{dN}{dS_\perp} \tag{12-14}$$

式中 dN 为通过面积元 $dS_\perp$ 的电场线的条数. 显然，按这样规定画出的电场线，在场强较大的地方会较密集，而在场强较小的地方会较稀疏，即电场线的疏密程度反映了电场空间中场强大小的分布. 图 12－7 是几种典型的带电体系所激发的电场的电场线分布图.

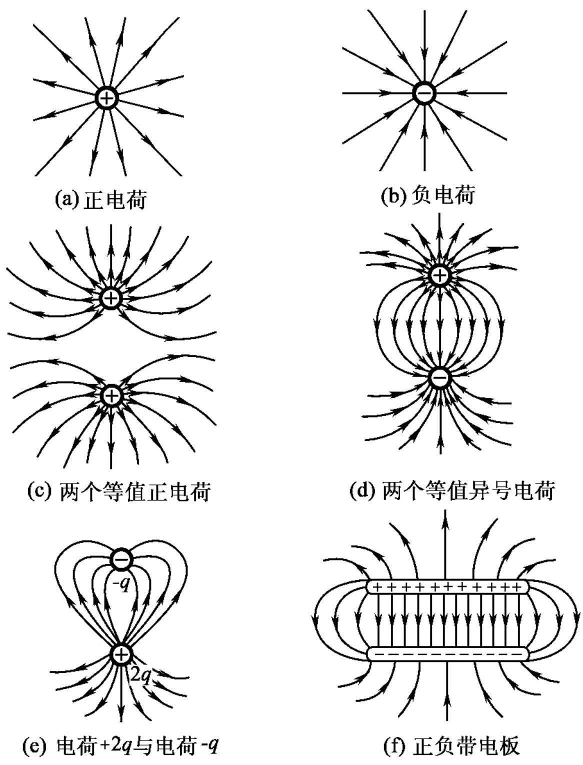


图 12－7　几种常见电场的电场线分布图

理论和实践都表明，按照上述规定画出的静电场的电场线有如下特点：第一，电场线总是起始于正电荷，终止于负电荷，不形成闭合曲线；第二，任何两条电场线都不能相交，这是因为电场中每一点的场强只能有一个确定的方向.

应当指出，电场线是人为地画出来的，并非电场中真有这种线存在. 然而，电

场线虽是假想的，但它可以由实验显示出来. 在玻璃板上撒上一些轻小的花粉或碎头发，在电场的作用下，这些原来杂乱无章的花粉或碎头发就会被极化而首尾相接，大致沿电场方向排列，显示出电场线的分布，这对于分析某些实际问题是很有帮助的.

2. 电通量

通量是描述矢量场的一个重要概念. 这里，借助电场线的图像给电通量下一个定义，即通过电场中任一给定面的电场线数目称为通过该面的电通量，用 Φ_e 表示.

下面分几种情况说明计算电通量的方法.

在均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 中，通过与 $\boldsymbol{E}$ 垂直的平面 S 的电通量，见图 12－8a，可由式(12－14)求得，即

$$\Phi_e = N = ES_{\perp} = ES$$

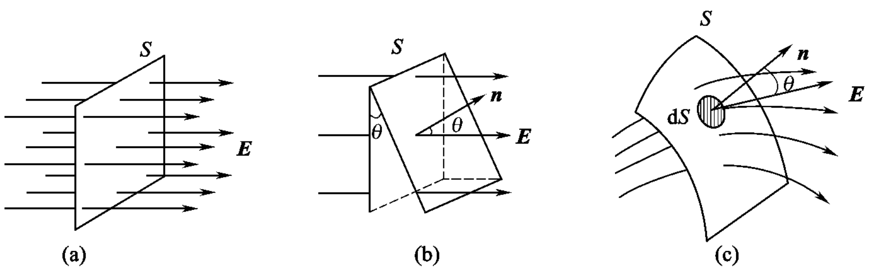


图 12－8　电通量的计算

式中 N 为通过平面 S 的电场线的数目. 若平面 S 的法线 $\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{n}$ 为平面 S 的法线方向的单位矢量）与 $\boldsymbol{E}$ 方向间的夹角为 θ，见图 12－8b，则平面 S 在垂直于 $\boldsymbol{E}$ 方向上的投影面积为 $S_{\perp} = S\cos\theta$，通过平面 S 的电通量等于通过面积 $S_{\perp}$ 的电通量，即

$$\Phi_e = N = ES_{\perp} = ES\cos\theta = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S}$$

其中面积矢量 $\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{n}$.

如果 S 不是平面而是任意曲面，且电场亦不是均匀场，见图 12－8c，这时可将曲面 S 划分为无穷多个面积元，每个面积元都可视为一个小平面. 由于面积元的面积是如此之小，以至于可认为其上的场强 $\boldsymbol{E}$ 处处相等. 现任取一个面积元 $\mathrm{d}S$，令其法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 与其所在处的场强 $\boldsymbol{E}$ 之方向间的夹角为 θ，则依据上面的讨论，通过该面积元的电通量为

$$\mathrm{d}\Phi_e = \mathrm{d}N = E\mathrm{d}S_{\perp} = E\mathrm{d}S\cos\theta = \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

其中面积元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S\boldsymbol{n}$. 通过曲面 S 的总电通量等于曲面 S 上所有面积元电通量的总和,即

$$\Phi_e=\int_0^{\Phi_e}\mathrm{d}\Phi_e=\int_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{12-15}$$

当曲面 S 为闭合曲面时,上式写作

$$\Phi_e=\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{12-16}$$

事实上,从数学的角度,式(12－15)和式(12－16)就是通过任一非闭合曲面和任一闭合曲面的场强矢量 $\boldsymbol{E}$ 通量——电通量的定义式.

必须指出,对非闭合曲面,面积元法线的正方向可以取曲面的任一侧,而对闭合曲面来说,通常规定其上每一面积元的法线正方向需由闭合曲面内指向闭合曲面外.如此,在电场线从曲面之内向外穿出的地方,电通量为正;反之,在电场线从外部穿入曲面的地方,电通量为负.

12.3.2 静电场中的高斯定理

1. 高斯定理

高斯定理是表征静电场性质的一条基本规律,是用电通量表示的电场和场源电荷关系的定理,它给出电场中通过任一闭合面的电通量与闭合面内所包围的电荷间的量值关系.下面利用电通量的概念,并根据库仑定律和场强叠加原理,从特殊到一般来导出这个关系.

首先讨论通过包围一个静止点电荷 q 的同心球面的电通量.

以点电荷 q 所在处为中心,取任意长度 r 为半径做闭合球面 S 包围点电荷 q,如图 12－9a.根据库仑定律,在球面上任一点场强的大小都为 $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$,场强 $\boldsymbol{E}$ 的方向沿半径呈辐射状,即球面上每一点处场强 $\boldsymbol{E}$ 的方向与球面上在该点处的面积元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向一致.由式(12－16),通过该球面的电通量为

$$\Phi_e=\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S E\,\mathrm{d}S=\oint_S\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_S\mathrm{d}S=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

此结果显示,通过闭合球面的电通量与它所包围的电荷的电量成正比,与球面半径 r 无关.这意味着,对以点电荷 q 为中心的任意球面来说,通过它们的电通量都一样,均为 $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$.从电场线图像的角度看,这表明通过各球面的电场线的数目均相等,或者说,从点电荷 q 发出的电场线连续地延伸到无限远处.

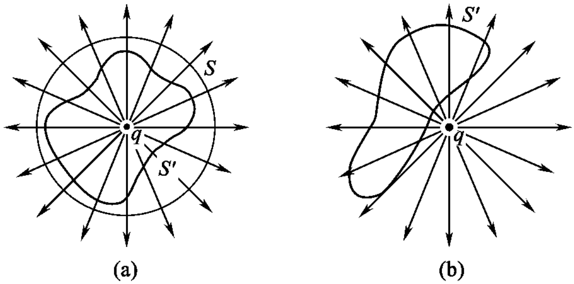


图 12－9　高斯定理说明用图

其次讨论通过包围一个静止点电荷 q 的任意闭合面的电通量.

现在设想另一个任意的闭合曲面 S'，S' 与球面 S 包围同一个点电荷 q，见图 12－9a，由于电场线的连续性，可以得出通过闭合曲面 S' 和球面 S 的电场线数目是一样的. 因此通过任意形状的包围点电荷 q 的闭合曲面的电通量都等于 $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

接下来讨论通过不包围一个静止点电荷 q 的任意闭合面的电通量.

如果闭合曲面不包围点电荷 q，见图 12－9b，则由电场线的连续性可得出，由 S' 面一侧进入 S' 面的电场线条数一定等于从 S' 面的另一侧穿出 S' 面的电场线条数，所以通过 S' 面的电场线的净条数为零，亦即通过 S' 面的电通量为零.

最后讨论通过一个点电荷（或电荷元）系所在空间中任一闭合曲面的电通量.

如果电场是由 n 个点电荷（或电荷元）共同激发，则由场强叠加原理，在场空间中的任一点的场强等于各个点电荷（或电荷元）单独存在时在该点所激发的场强的矢量和，即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i$$

这时通过任意闭合曲面 S 的电通量为

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_S \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \cdots + \oint_S \boldsymbol{E}_n \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \cdots + \Phi_{en}\end{aligned}$$

其中 $\Phi_{e1}, \Phi_{e2}, \cdots, \Phi_{en}$ 为单个点电荷（或电荷元）所激发的电场通过闭合曲面 S 的电通量. 由上面的讨论知，当点电荷（或电荷元）q_i 在闭合曲面 S 内时，$\Phi_{ei} = q_i/\varepsilon_0$；当点电荷（或电荷元）$q_i$ 在闭合曲面 S 外时，$\Phi_{ei} = 0$. 所以上式可写作

$$\Phi_e = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(S内)} q_i \qquad (12-17)$$

式中 $\sum_{(S内)} q_i$ 表示对闭合曲面 S 内的电荷求代数和.

式(12－17)就是真空中静电场的高斯定理，它表明：在真空中，通过静电场空间内任一闭合曲面 S 的电通量 Φ_e 等于包围在该闭合曲面内电荷的代数和 $\sum_{(S内)} q_i$ 的 $\frac{1}{\varepsilon_0}$ 倍，与闭合曲面外的电荷无关. 高斯定理中的闭合曲面有时也叫高斯面. 高斯定理表明静电场是有源场.

必须注意到，高斯定理中的场强 $\boldsymbol{E}$ 是高斯面上各点的场强. 高斯定理说明通过高斯面的电通量只与该面所包围的电荷有关，并没有说明高斯面上任一点的场强仅由高斯面内的电荷所决定. 事实上，高斯面上任一点的场强 $\boldsymbol{E}$ 是由所有场源电荷，即高斯面内和面外电荷共同激发的.

2. 高斯定理的应用

高斯定理除了说明静电场的基本性质外，还可用来方便地求解当静止电荷分布具有某种对称性时的场强分布. 应用高斯定理求解场强的关键在于选取合适的闭合积分曲面——高斯面，以使得积分 $\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 中的矢量 $\boldsymbol{E}$ 能以标量形式从积分号内提出来. 下面举例说明利用高斯定理求解场强的具体方法.

例 12－5 求均匀带电球面的场强分布. 已知球面半径为 R，所带的总电量为 $q(q>0)$.

解 由于球面是均匀带电的，故它在球内外所激发的电场应具有球对称性，即各点场强的方向沿该处的半径方向，与带电球面同心的球面上各点的场强大小相同.

可以这样来说明问题，考虑球面外任一点 P，做 P 点与球心 O 点的连线，并将整个带电球面分成许多与 OP 垂直的圆环，如图 12－10a 所示(为清楚起见，只画上其中的一个圆环)，整个带电球面在 P 点激发的电场可以看成是这些带电圆环所产生的电场的叠加，而均匀带电圆环轴线上一点处的场强的方向是沿着其轴线方向的(见例 12－3)，所以 P 点的总场强方向必定沿着这些圆环的轴线$\overline{OP}$方向. 如果 P 点在球面内，情况也如此. 因此无论 P 点在球面外还是在球面内，其场强方向都是沿 P 点与球心 O 点的联线方向，亦即沿该点半径的方向.

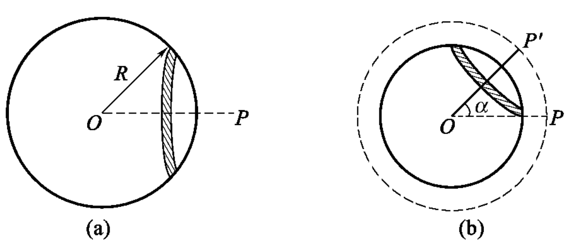


图 12－10 例 12－5 图 1(均匀带电球面的场强分析)

为了说明位于同一个同心球面上各点的场强的大小均相等，考虑另一点 P'，它与 P 点位于同一球面上. 同样连接 O 与 P' 两点，并将带电球面分成许多与 OP' 垂直的带电圆环，如图 12－10b. 设 OP' 与 OP 的夹角为 α，如果将图 12－10a 沿逆时针方向转过 α 角，则 P 点与 P' 重合，图 12－10a 中的圆环将与图 12－10b 中的圆环重合，表明点 P' 和图 12－10b 中各带电圆环的相对关系与点 P 和 12－10a 中各圆环的相对关系完全一样. 由此可见，P' 与 P 两点处场强的大小相等，亦即位于同一球面上的各点的场强的大小是相同的. 明确了电场分布具有球对称性后，可以选取与带电球面同心的球面作为高斯面来计算电场强度.

如果 P 点在带电球面外，设它与球心 O 的距离为 r，即 $r>R$，以 r 为半径作一同心球面，作为高斯面 S. 前已说明，此高斯面上各点处场强 $\boldsymbol{E}$ 的大小均相等，方向均沿半径方向，即与高斯面 S 上各点处面积元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的法线方向一致. 于是，通过此高斯面 S 的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S E\,\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = E4\pi r^2$$

由高斯定理有

$$\Phi_e = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)} q_i = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

故，当 $r>R$ 时，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

方向沿径向；

如果 P 点在带电球面内，仍以 r 表示 P 点与球心 O 的距离，此时 $r<R$. 以 O 为圆心，r 为半径做一高斯面 S. 同上，利用高斯定理有

$$\Phi_e = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)} q_i = 0$$

$$E = 0$$

即当 $r<R$ 时，均匀带电球面内部的场强处处为零.

图 12－11 给出的是均匀带电球面内外场强大小的分布情况.

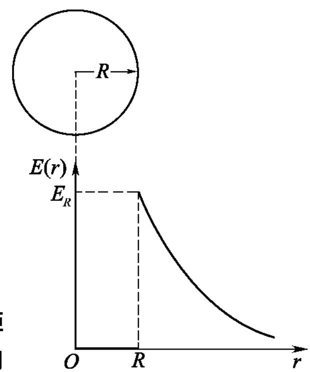
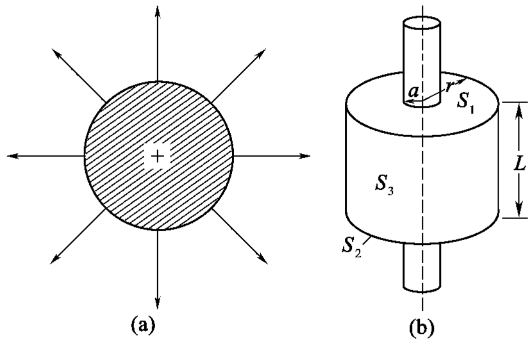


图 12－11　例 12－5 图 2（均匀带电球面的场强的大小 E 随距球心距离 r 的变化情况）

例 12－6　试求一无限长的均匀带电圆柱体内外的场强. 设圆柱体截面半径为 a，体电荷密度为 ρ.

解　由于场源电荷分布具有轴对称性，经分析，可以判断其空间的场强分布亦是轴对称的，即在与圆柱体的轴线垂直距离相等的各点处，场强的大小均相等，方向均与圆柱体的轴线垂直. 图 12－12a 表示圆柱体带正电荷时，在与圆柱体轴线垂直的截面上，场强的方向沿径向向外.

沿均匀带电圆柱体的轴线取一长度为 L，半径为 r 的同轴圆筒形闭合面作为高斯面 S，令此闭合圆筒面的上、下底面分别为 S_1 和 S_2，侧面为 S_3，如图 12－12b 所示. 通过此高斯面



－12　例 12－6 图 1(无限长的均匀带电圆柱体的场强分析)

的电通量可以写成

$$\Phi_e = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S_3} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

在 S_1 和 S_2 面上各点处的面积元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向沿圆柱体轴向，与场强 $\boldsymbol{E}$ 的方向垂直，故有

$$\int_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

而在侧面 S_3 上各点处的面积元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向与其所在点处的场强 $\boldsymbol{E}$ 的方向一致，故有

$$\int_{S_3} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_3} E\mathrm{d}S = E\int_{S_3} \mathrm{d}S = E2\pi rL$$

由此得

$$\Phi_e = E2\pi rL$$

当 $r>a$，即同轴的圆筒状高斯面在均匀带电圆柱体外时，高斯面内所包围的电荷为

$$q=\rho\pi a^2 L$$

由高斯定理，此时场强 E 的大小为

$$E=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}$$

当 $r<a$，即同轴的圆筒状高斯面在均匀带电圆柱体内时，高斯面内所包围的电荷为

$$q=\rho\pi r^2 L$$

此时场强 E 的大小为

$$E=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

方向均与圆柱体的轴线垂直.

图 12－13 给出的是无限长均匀带电圆柱体内外场强大小的分布情况.

例 12－7　试求电荷面密度为 σ 的一无限大均匀带电平面所激发的电场.

解　由对称性分析可知，无限大均匀带电平面所激发的电场具有平面对称性，即在无限大均匀带电平面两侧，与其垂直距离相等的各点处的场强的大小是相等的，方向处处与带电

平面垂直，并指向两侧($\sigma>0$).

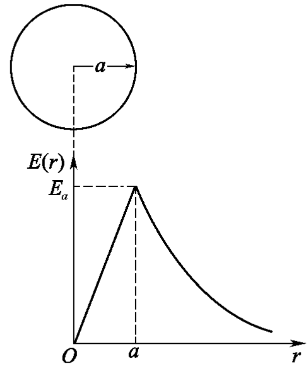


图 12－13　例 12－6 图 2(无限长均匀带电圆柱体场强的大小随距其轴线距离 r 的变化情况)

根据场强分布的特点，可将高斯面 S 取成图 12－14 所示的圆筒面，圆筒面的侧面 S_3 与带电平面垂直，两底面 S_1 和 S_2 与带电平面平行且等距，令 S_1 和 S_2 面的大小均为 ΔS，通过此高斯面的电通量为

$$\Phi_e=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S_1}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S_2}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S_3}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

在侧面 S_3 上的各点处的面积元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向均与其所在点处的场强 $\boldsymbol{E}$ 的方向垂直，因此上式中对 S_3 的曲面积分等于零；在两底面 S_1 和 S_2 上的各点处的面积元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向均与其所在点处的场强 $\boldsymbol{E}$ 的方向平行，考虑到两底面 S_1 和 S_2 到带电平面的距离相等，其上各点处场强的大小处处相等，故有

$$\begin{aligned}\Phi_e&=\int_{S_1}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S_2}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\int_{S_1}E\mathrm{d}S+\int_{S_2}E\mathrm{d}S\\&=E\Delta S+E\Delta S=2E\Delta S\end{aligned}$$

此高斯面内所包围的电荷为 σS，由高斯定理，

$$\Phi_e=2E\Delta S=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

进而

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

方向处处与带电平面垂直，并指向两侧.

从上面的几个例子可以看出，只有当电荷所激发的电场具有球对称、面对称、轴对称时，才能作出适当的高斯面，并利用高斯定理求解场强的分布. 对于不具备特定对称性的电场，其场强的分布是无法由高斯定理求出的.

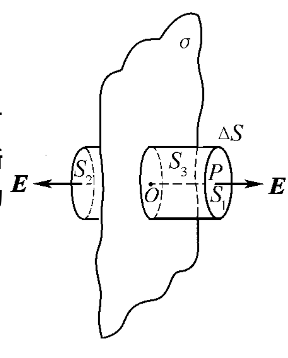


图 12－14　例 12－7 图(无限大均匀带电平面电场的分析)

12.4　静电场力的功　电势

12.4.1　静电场的环路定理

1. 静电场力的功

在前面的讨论中,从静电场对处于场中的电荷有力的作用这一表现出发,研究了静电场的性质,并引入了电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 对电场进行描述. 在本节中,将从静电场力会对在场空间中移动的电荷做功这一表现出发,对静电场的性质做进一步地研究,并引入电势的概念来描述静电场.

在点电荷 q 的静电场中,试验电荷 q_0 沿任意路径 $\overset{\frown}{ab}$ 从 a 移动到 b 时,静电场力将对其做功.

将路径 $\overset{\frown}{ab}$ 划分成无穷多个位移元的集合,任取一个位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$(如图12-15),试验电荷 q_0 在 $\mathrm{d}l$ 受到的静电场力为 $\boldsymbol{F}=q_0\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为点电荷 q 在试验电荷 q_0 所在处的场强,由式(12-6)得

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^3}\boldsymbol{r}'$$

式中 $\boldsymbol{r}'$ 为 q 指向 q_0 的矢径,q 及 q_0 在坐标系中的位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}_q$ 和 $\boldsymbol{r}$,且 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_q+\boldsymbol{r}'$. 显然,在图示坐标系中位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. 由此,静电场力在位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 上对试验电荷 q_0 所做的元功为

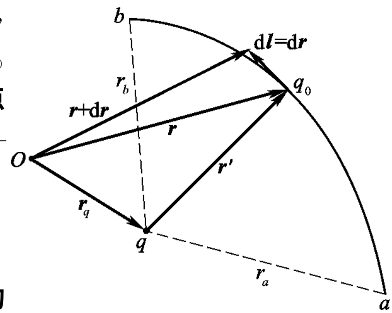


图 12-15 静电场力的功

$$\mathrm{d}A_{ab}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=q_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\boldsymbol{r}'\cdot\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_q+\boldsymbol{r}')$$

$$=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\boldsymbol{r}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\mathrm{d}r'$$

当 q_0 从 a 点移动到 b 点时,静电场力对 q_0 做功为

$$A_{ab}=\int_0^{A_{ab}}\mathrm{d}A_{ab}=\int_{r_a}^{r_b}\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\mathrm{d}r'=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)\qquad(12-18)$$

式中 r_a 和 r_b 分别为 q_0 所经路径的起点 a 和终点 b 到 q 的距离. 由上式知,在静止的点电荷 q 的静电场中,静电场力对试验电荷 q_0 所做的功与路径无关,仅与路径的始、末两点的位置有关.

在一般情况下,电场并非由单个点电荷所激发,但总可以将场源电荷(任意带电体)看成是许多电荷元的集合,每一电荷元都可视作点电荷,总场强 $\boldsymbol{E}$ 是各个点电荷单独存在时所激发的场强的矢量和,即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i$$

在静电场 E 中，试验电荷 q_0 从 a 点沿任意路径 $\overset{\frown}{ab}$ 移动到 b 点时，静电场力对其所做的功为

$$\begin{aligned} A_{ab} &= \int_{\overset{\frown}{ab}} q_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\overset{\frown}{ab}} q_0 (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{E}_n) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= \int_{\overset{\frown}{ab}} q_0 \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{\overset{\frown}{ab}} q_0 \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \cdots + \int_{\overset{\frown}{ab}} q_0 \boldsymbol{E}_n \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{b1}}\right) + \frac{q_0 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b2}}\right) + \cdots + \frac{q_0 q_n}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{an}} - \frac{1}{r_{bn}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ai}} - \frac{1}{r_{bi}}\right) \end{aligned} \tag{12-19}$$

式中 r_{ai} 和 r_{bi} 分别第 i 个点电荷 q_i 到 q_0 所经路径的起点 a 和终点 b 距离. 由于上式右边求和项中的每一项均与路径无关，所以总场强 E 的静电场力做功也与路径无关.

由此得出结论：试验电荷在任何静电场中移动时，静电场力所做的功，只与这试验电荷电量的大小以及所经历路径的起点和终点位置有关，而与路径无关. 这说明，静电场力是保守力，静电场是保守场.

2. 静电场的环路定理

上述结论还可用另一种形式来表达. 设试验电荷在静电场中从某点出发，经过任一闭合回路 L 又回到原来的位置，则由式(12-19)，可知静电场力所做的功为零，亦即

$$q_0 \oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

因为试验电荷 $q_0 \neq 0$，所以上式亦可写作

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{12-20}$$

上式的左边是场强 $\boldsymbol{E}$ 沿闭合路径 L 的对坐标的曲线积分，在数学上称之为场强矢量 $\boldsymbol{E}$ 沿闭合路径 L 的环流. 因此，式(12-20)表示：静电场中，电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 沿任一闭合回路的环流等于零. 这是反映静电场基本特性的又一重要规律，称为静电场环路定理，它是静电场为保守场的数学表述.

12.4.2　电势差与电势

1. 电势能

在力学中，对于任何保守力场都可以引入势能的概念，且保守力所做的功等

于相应的势能增量的负值.从上面的讨论中可知,静电场是保守场,静电场力是保守力,因此亦可引入相应的势能的概念,即认为试验电荷在静电场空间的一定位置上,具有一定的电势能,而静电场力对试验电荷所做的功即等于相应的电势能增量的负值.

若以 W_a 和 W_b 分别表示试验电荷 q_0 在静电场空间中 a 点和 b 点处的电势能,则当试验电荷 q_0 在电场空间中从 a 点沿任意路径移动到 b 点的过程中,静电场力对它所做的功为

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -(W_b - W_a) = W_a - W_b \tag{12-21}$$

与其他形式的势能一样,电势能亦是一个相对量.要决定试验电荷 q_0 在静电场空间某一位置上的电势能的数值,也必须首先选择一个电势能的参考点,并设该点的电势能为零.这一零势能点可根据处理问题的方便任意选取.在式(12-21)中,若选择试验电荷 q_0 在 b 点处时的电势能为零,即选定 $W_b=0$,则试验电荷 q_0 在 a 点处的电势能为

$$W_a = \int_a^b q_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{12-22}$$

即,试验电荷 q_0 在静电场空间中某点处的电势能,在数值上等于将它从该点移至电势能零点的过程中静电场力所做的功.

通常情况下,若场源电荷在有限大小的区域内分布,则规定无穷远处为电势能零点,即 $W_\infty=0$,此时,试验电荷 q_0 在 a 点处的电势能为

$$W_a = \int_a^\infty q_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{12-23}$$

必须指出,与其他任何形式的势能一样,电势能是属于系统的,它为试验电荷和场源电荷所组成的系统所共有.

2. 电势　电势差

由式(12-23)可看出,试验电荷 q_0 在静电场空间中某点 a 处的电势能 W_a 不仅与电场的性质及 a 点的位置有关,而且还与 q_0 有关,W_a 与 q_0 成正比,但它们的比值 $\dfrac{W_a}{q_0}$ 与 q_0 无关,是表征电场性质的一个物理量,称为 a 点的电势,用 U_a 表示,即

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \frac{A_{a\infty}}{q_0} = \int_a^{\infty(\text{电势能零点})} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{12-24}$$

电势与电势能有相同的零点,因此若规定在无穷远处的电势能为零,则在无穷远处的电势亦为零,即

$$U_a=\frac{W_a}{q_0}=\frac{A_{a\infty}}{q_0}=\int_a^{\infty(\text{电势能零点})}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_a^{\infty(\text{电势零点})}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\quad(12-25)$$

从式(12－25)可看出,当 q_0 为单位正电荷时,U_a,W_a 及 $A_{a\infty}$ 三者数值相等,这表明,若规定无穷远处为电势零点,则静电场空间中某点 a 处的电势 U_a 在数值上等于将单位正电荷从该点沿任意路径移到无穷远处的过程中静电场力所做的功,亦等于处在 a 点的单位正电荷所具有的电势能.

电势是一个标量,在国际单位制(SI)中,电势的单位为 J/C,称为伏特,符号为 V.

在静电场中,任意两点 a 和 b 间的电势之差称为 a,b 两点间的电势差,通常也叫做电压,用 U_{ab} 表示.即

$$U_{ab}=U_a-U_b=\int_a^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\int_b^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_a^{b}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\quad(12-26)$$

这表明,静电场中 a,b 两点间的电势差 U_{ab} 在数值上等于将单位正电荷从 a 点沿任意路径移到 b 点的过程中静电场力所做的功.因此,如果知道了 a,b 两点间的电势差 U_{ab} 就可方便地求得将任一电荷 q_0 从 a 点移到 b 点的过程静电场力所做的功 A_{ab},即根据(12－21),有

$$A_{ab}=\int_a^{b}q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0U_{ab}=q_0(U_a-U_b)\quad(12-27)$$

3. 电势叠加原理

(1) 点电荷电场中的电势

在静止的点电荷 q 的电场中,其场强 $\boldsymbol{E}$ 由式(12－6)决定,即

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

根据电势的定义式(12－25),在选取无穷远处为电势零点时,电场空间中与点电荷 q 的距离为 r 的任一点 P 处的电势为

$$U_P=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_P^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

将积分路径取为由 P 点出发沿径向到无穷远处,则 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=r\mathrm{d}r$,故

$$U_P=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\quad(12-28)$$

(2) 点电荷系电场中的电势　电势叠加原理

如果电场是由 n 个静止的点电荷 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 所共同激发,则由场强叠加原理及式(12－7)可得到场空间中任一点 P 处的场强为

$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i$$

若规定 $U_\infty=0$，则 P 点的电势为

$$U_P=\int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_P^\infty\sum_{i=1}^n\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_{i=1}^n\int_P^\infty\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

$$=\sum_{i=1}^n\int_{r_i}^\infty\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\mathrm{d}r_i=\sum_{i=1}^n\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}\tag{12-29}$$

式中 r_i 为 P 点到点电荷 q_i 的距离. 式(12－29)表明，静止的点电荷系所激发的电场中的某一点处的电势，等于各点电荷单独存在时在该点产生电势的代数和. 这一结论称为静电场的电势叠加原理.

(3) 连续分布电荷的电场中的电势

连续分布的电荷可以看成由无穷多个电荷元 $\mathrm{d}q$ 的集合，设 r 为电荷元 $\mathrm{d}q$ 到场空间中某一点 P 的距离，由点电荷电势的表达式(12－28)得电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 P 点的电势为

$$\mathrm{d}U_P=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

根据电势叠加原理，P 点的电势等于所有电荷元在 P 点产生电势的代数和，由于电荷是连续分布的，所以代数和要用积分表示，即

$$U_P=\int_0^{U_P}\mathrm{d}U_P=\int_q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}\tag{12-30}$$

对应于电荷在线、面或体上连续分布，电荷元 $\mathrm{d}q$ 分别为 $\lambda\mathrm{d}l$，$\sigma\mathrm{d}S$ 和 $\rho\mathrm{d}V$，其中 λ，σ 和 ρ 分别为电荷线密度、电荷面密度和电荷体密度，式(12－30)中相应的积分应分别在带电线、带电面或带电体上进行.

必须指出，由式(12－28)、式(12－29)和式(12－30)计算电势，其场源电荷一定要在有限大小的区域内分布，且选取无穷远处为电势零点. 若激发电场的电荷的分布延伸到无限远，则不宜将电势零点选在无穷远处，否则将导致场中任一点的电势值为无限大，这时只能根据具体情况，在场中选取某点为电势零点.

4. 电势的计算

电势的计算方法通常有两种：一种是已知场源电荷的分布，利用点电荷电场的电势公式及电势叠加原理进行电势的求解，如式(12－29)或式(12－30)；另一种是已知场强的分布，利用电势与场强的积分关系，即电势的定义式(12－25)计算电势. 下面举例说明计算电势的方法.

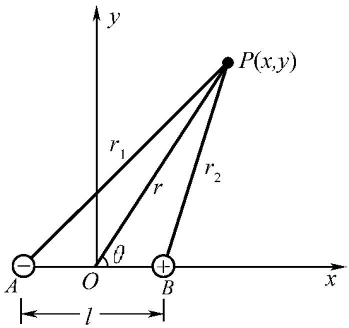
例 12－8 计算电偶极子电场中任一点的电势.

解 如图 12－16，由点电荷电场的电势公式及电势叠加原理，电偶极子电场中任一点 P

处的电势为

$$U_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

式中 r_1 和 r_2 分别为 $-q$ 和 $+q$ 到 P 点的距离.



– 　例 12－8 图(电偶极子电场中任一点的电势)

由图可知

$$r_1=\left[r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2+lr\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}},\qquad r_2=\left[r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2-lr\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

因为 $r\gg l$,所以

$$r_1=r\left[1+\left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta+\left(\frac{l}{2r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\approx r\left[1+\left(\frac{l}{2r}\right)\cos\theta\right]=r+\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$r_2=r\left[1-\left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta+\left(\frac{l}{2r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\approx r\left[1-\left(\frac{l}{2r}\right)\cos\theta\right]=r-\frac{l}{2}\cos\theta$$

即

$$U_P\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2\cos^2\theta}\approx\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例 12－9　一均匀带电细圆环,半径为 R,所带总电量为 q(设 $q>0$),求圆环轴线上与环心相距为 x 处的 P 点的电势.

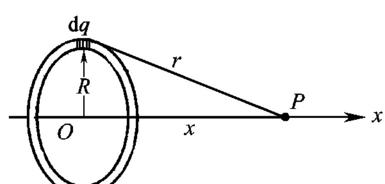


图 12－17　例 12－9 图(均匀带电细圆环轴线上的电势)

解　如图 12－17,在圆环上任取一电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l=\frac{q}{2\pi R}\mathrm{d}l$,$\mathrm{d}l$ 为电荷元 $\mathrm{d}q$ 所在处的线元,电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 P 点的电势为

$$\mathrm{d}U_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\frac{q}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

由式(12－30),有

$$U_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi R}\frac{q}{2\pi R}\frac{1}{r}\mathrm{d}l = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

例 12－10　计算均匀带电圆盘轴线上与盘心 O 相距为 x 的 P 点的电势. 圆盘的半径为 R,电荷面密度为 σ.

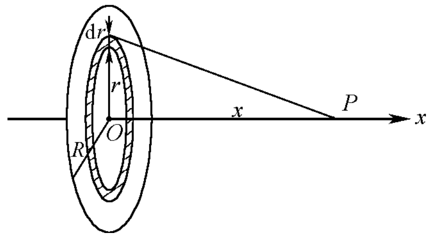


图 12－18　例 12－10 图(均匀带电圆盘轴线上任一点处的电势)

解　如图 12－18,将圆盘划分成许多同心的细圆环,在其上任取一半径为 r,宽为 $\mathrm{d}r$ 的细圆环,此细圆环带电为 $\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$. 根据上例的结果,该带电细圆环上电荷在 P 点产生的电势为

$$\mathrm{d}U_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

对上式求积分,可得带电圆盘在 P 点的电势为

$$U_P = \int_0^{U_P}\mathrm{d}U_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2}-x)$$

例 12－11　求匀带电球面电场中的电势分布. 已知球面半径为 R,所带的总电量为 $q(q>0)$.

解　在例 12－5 中,已求出均匀带电球面在空间激发的电场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}\quad 当\ r>R$$

$$\boldsymbol{E}=0\quad 当\ r<R$$

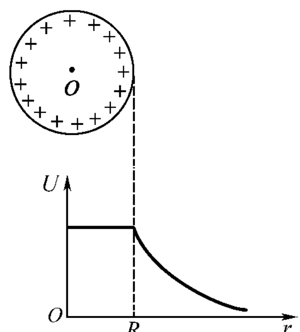
利用电势与场强的积分关系,即电势的定义式(12－25),并选取积分路径沿径向,则与球心距离为 r 的 P 点处的电势为

$$U_P = \int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

当 $r<R$ 时　$U_P = \int_r^R 0\mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

当 $r>R$ 时　$U_P = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

电势 U 随距离 r 的变化关系如图 12－19 所示.



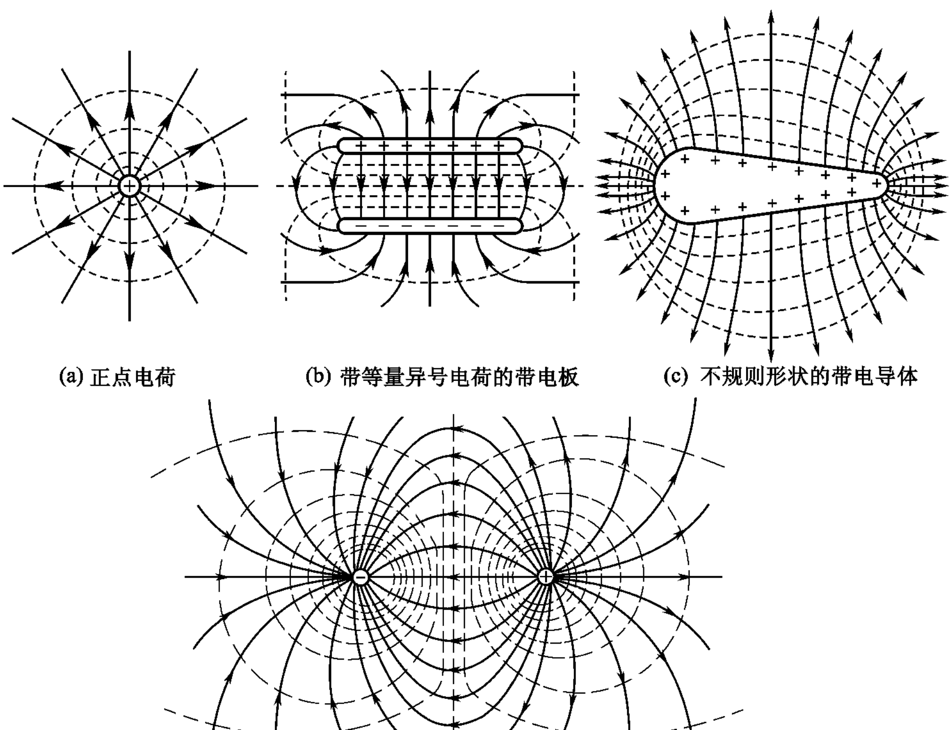
12－19　例 12－11 图(均匀带电球面的电势)

12.5　等势面　电场强度与电势的微分关系

12.5.1　等势面

在对电场强度矢量的研究中，曾用电场线形象地描绘了场强的空间分布. 同样地，在对电势这个标量的研究中，亦可采取图示的方法对其空间分布进行形象地描绘，同时，亦可藉此进一步讨论场强与电势的关系.

一般情况下，通常利用等势面来对电势的空间分布进行几何描述. 在电场空间中电势相等的点所连成的曲面（或平面）叫等势面. 不同的电荷分布具有不同形状的等势面. 对于一个点电荷而言，根据式（12－28），它的等势面应是一系列的以点电荷所在点为球心的同心球面，如图 12－20a 中的虚线所示. 除此之外，图 12－20 还给出了其他几种常见电场的等势面图，图中虚线代表等势面与纸面的交线，实线表示电场线.



(a) 正点电荷　(b) 带等量异号电荷的带电板　(c) 不规则形状的带电导体

(d) 等量异号电荷对

图 12－20　几种电荷分布的电场线和等势面

综合各种等势面图，可以看出静电场中等势面具有如下性质：

（1）在任何静电场中，沿着等势面移动电荷时，静电场力不做功.

证明 当在等势面上移动点电荷 q_0 从 a 点到 b 点的过程中，静电场力所做的功为 $A_{ab}=q_0(U_a-U_b)$，由于 a 点和 b 点在同一等势面上，其电势差 $(U_a-U_b)=0$，所以 $A_{ab}=0$.

（2）在任何静电场中，电场线与等势面处处正交.

证明 如图 12－21，当点电荷 q_0 从等势面上一点 P 沿着等势面有一微小的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 时，静电场力所做的功为 $\mathrm{d}A=q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，由性质(1)，$\mathrm{d}A=0$，由于 $q_0\neq0$，所以 $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，即 $\boldsymbol{E}\perp\mathrm{d}\boldsymbol{l}$. 又因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为等势面在 P 点处的切平面上的任一位移元，所以 $\boldsymbol{E}$ 与等势面在 P 点处的切平面上的任一位移元都垂直，故 $\boldsymbol{E}$ 必与等势面正交，亦电场线与等势面正交.

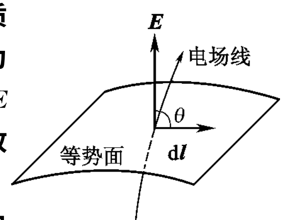


图 12－21 电场线与等势面正交

此外，如果让正的点电荷 q_0 从某一点 P 出发沿着电场线有一微小的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，则静电场力所做的功为

$$\mathrm{d}A=q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0E\mathrm{d}l=q_0[U_P-(U_P+\mathrm{d}U_P)]=-q_0\mathrm{d}U_P>0$$

即 $\mathrm{d}U_P<0$，而 $\mathrm{d}U_P$ 为电势增量，故电场线指向电势降低的方向.

（3）等势面不相交，否则在交点处电势将有两个数值.

为了使等势面能反映出电场的强弱，在画等势面时，规定任意两相邻的等势面间的电势差必须都相同，这样，等势面较密的区域，电场较强；等势面较疏的区域，电场较弱.

12.5.2 电场强度与电势的微分关系

场强和电势均为描述同一静电场空间中各点性质的物理量，两者之间必然有着密切的联系. 式(12－25)给出了两者之间的积分关系，下面介绍它们之间的微分关系.

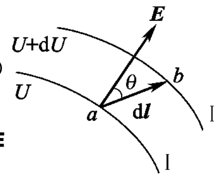
如图 12－22，在任意静电场中，取两个靠得十分近的等势面Ⅰ和Ⅱ，它们的电势分别为 U 和 $U+\mathrm{d}U$，且 $\mathrm{d}U<0$. 在两等势面上分别取 a 点和 b 点，从 a 点到 b 点的位移元为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，将正的点电荷 q_0 从 a 点沿位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 移到 b 点过程中，场强 $\boldsymbol{E}$ 可近似认为不变，则静电场力所做的功为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A&=q_0(U_a-U_b)\\&=q_0[U-(U+\mathrm{d}U)]=-q_0\mathrm{d}U\end{aligned}$$

而 $$\mathrm{d}A=q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0E\cos\theta\mathrm{d}l=q_0E_l\mathrm{d}l$$

其中 $E_l=E\cos\theta$ 为场强 $\boldsymbol{E}$ 在 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向的投影量. 由上面两式有

$$E_l=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} \tag{12-31}$$



－22　场强与电势的关

式中$\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}$是电势 U 沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向对空间的变化率，在数学上称作电势 U 沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数. 式(12－31)说明，静电场中的场强在任一方向的投影等于电势沿该方向的方向导数的负值. 式中的负号表明，场强指向电势降低的方向.

在直角坐标系中，电势为坐标 x,y,z 的函数，若 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向分别取为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，则根据式(12－31)可得，场强 $\boldsymbol{E}$ 在这三个方向上的投影量(此时亦是三个方向上分量)分别为

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x},E_y=-\frac{\partial U}{\partial y},E_z=-\frac{\partial U}{\partial z}$$

场强 $\boldsymbol{E}$ 的矢量表达式为

$$\boldsymbol{E}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \tag{12-32}$$

在数学上，矢量$\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$称为函数 U 的梯度，即电势梯度，用 $\mathrm{grad}U$ 或∇U 表示，所以式(12－32)也可表示为

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}U=-\nabla U \tag{12-33}$$

式(12－33)表明：静电场中任意一点的场强等于该点电势梯度的负值. 这一结论称为电场强度与电势的微分关系.

在国际单位制(SI)中，电势梯度的单位为 $\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，所以场强也常用这一单位.

应当指出，电场强度与电势的微分关系在具体问题的求解中有着重要的应用. 这是因为电势 U 是标量，与场强矢量 $\boldsymbol{E}$ 相比，U 比较容易求得，所以在实际计算中，通常是先求电势 U，然后再利用场强与电势的微分关系，即式(12－33)来求场强矢量 $\boldsymbol{E}$.

例 12－12　利用场强与电势的微分关系，重解例 12－3.

解　在例 12－9 中，已求得均匀带电细圆环轴线上与环心相距为 x 处的 P 点的电势为

$$U_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

由式(12－33)，有 P 点的场强为

$$E_x=-\frac{\partial U_P}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}},E_y=-\frac{\partial U_P}{\partial y}=0,E_z=-\frac{\partial U_P}{\partial z}=0$$

即

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}$$

与例 12－3 结果一致，但求解方法显然比利用场强叠加原理简单.

例 12－13 利用场强与电势的微分关系，重解例 12－4.

解 在例 12－10 中，已求得均匀带电圆盘轴线上与盘心相距为 x 处的 P 点的电势为

$$U_P=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2}-x)$$

由式(12－33)，有 P 点的场强为

$$E_x=-\frac{\partial U_P}{\partial x}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right),E_y=-\frac{\partial U_P}{\partial y}=0,E_z=-\frac{\partial U_P}{\partial z}=0$$

即

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\boldsymbol{i}$$

与例 12－4 结果一致.

思考题

12－1 根据点电荷的电场公式

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

从形式上看，当所考察的点与点电荷的距离 $r\to 0$ 时，场强 $E\to\infty$，这是没有物理意义的. 对此该如何解释.

12－2 $\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}$和 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$ 两公式有什么区别和联系？对前一公式中的 q_0 有何要求？

12－3 判断下列说法是否正确，并说明理由.

(1) 电场中某点场强的方向就是将点电荷放在该点处所受电场力的方向；

(2) 电荷在电场中某点受到的电场力很大，该点的场强 E 一定很大；

(3) 在以点电荷为中心，r 为半径的球面上，场强 E 处处相等.

12－4 点电荷若只受电场力的作用而运动. 电场线是否就是点电荷在电场中运动的轨迹？

12－5 一点电荷 q 位于一立方体的中心，立方体边长为 a，试问通过立方体一面的电通量是多少？如果把这个点电荷移到立方体的一个角上，这时通过立方体每一面的电通量各是多少？

12－6 通过一闭合曲面的电通量为零，是否在此闭合曲面上的场强一定处处为零？若通过一闭合曲面的电通量不为零，是否在此闭合曲面上的场强一定是处处不为零？

12－7　在高斯定理 $\Phi_e=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)}q_i$ 中，是否在任何情况下，式中的 $\boldsymbol{E}$ 均完全由 $\sum_{(S内)}q_i$ 所激发？

12－8　在应用高斯定理计算场强时，高斯面应该怎样选取才合适？利用高斯定理能不能计算任意电场的场强？

12－9　一根有限长的均匀带电直线，其电荷分布及所激发的电场有一定的对称性，能否利用高斯定理求出场强来？

12－10　静电场的环路定理 $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$ 表示静电场具有什么性质？如果有一电场 $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\neq 0$，能否对这种电场引入电势的概念？

12－11　比较下列几种情况下 A，B 两点电势的高低.

（1）正电荷由 A 移到 B 时，外力克服电场力做正功；

（2）正电荷由 A 移到 B 时，电场力做正功；

（3）负电荷由 A 移到 B 时，外力克服电场力做正功；

（4）负电荷由 A 移到 B 时，电场力做正功；

（5）电荷沿着电场线方向由 A 移动到 B；

（6）电荷逆着电场线方向由 A 移动到 B.

12－12　若 A，B 两点电势相同，这是否表示正的试验电荷从 A 移到 B 的过程中不需要做功？是否表示没有力作用在电荷上？

12－13　试举例说明下列问题：

（1）电势为零的点，场强不一定为零；

（2）场强为零的点，电势不一定为零；

（3）在静电场中，正电荷的电势能不一定为正值；

（4）在静电场中，负电荷的电势能不一定为负值.

12－14　已知电场中某点的电势，能否计算出该点的场强？若已知电场中某点附近的电势分布，能否求出该点的场强？

12－15　两个不同电势的等势面是否可以相交？同一等势面是否可以与自身相交？

习题 12

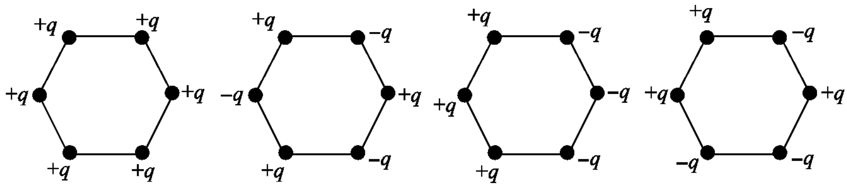
12－1　在边长为 a 的正方形的四角，依次放置点电荷 q，$2q$，$-4q$ 和 $2q$，它的正中放着一个单位正电荷，求这个电荷受力的大小和方向.

12－2　三个电量为 $-q$ 的点电荷各放在边长为 r 的等边三角形的三个顶点上，电荷 Q（$Q>0$）放在三角形的重心上. 为使每个负电荷受力为零，Q 之值应为多大？

12－3　在 x 轴上，有一点电荷 $q_1=20\times10^{-6}\,\mathrm{C}$，位于原点. 另一点电荷 $q_2=50\times10^{-6}\,\mathrm{C}$，

位于 $x=-10$ cm 处. 试求 x 轴上任一点的场强.

12－4　有一边长为 a 的正六角形，六个顶点都放有点电荷. 试计算如图所示的四种情形下，在六角形中点处的场强.



题 12－4 图

12－5　若电量 Q 均匀地分布在长为 L 的细棒上，求证：

(1) 在棒的延长线上，离棒中心为 a 处的场强大小为

$$E=\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{4a^2-L^2}$$

(2) 在棒的垂直平分线上，离棒为 a 处的场强大小为

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a\sqrt{L^2+4a^2}}$$

若棒为无限长时(即 $L\rightarrow\infty$)，将结果与无限长直导线的场强相比较.

12－6　一半径为 R 的半球面，均匀地带有电荷. 电荷面密度为 σ. 求球心处场强的大小.

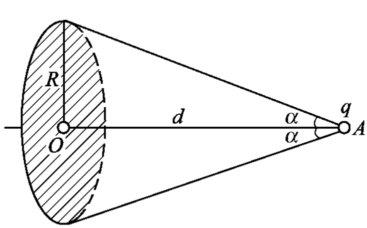
12－7　两条相互平行的无限长均匀带有相反电荷的直导线，相距为 a，电荷线密度为 λ. 求：

(1) 两导线构成的平面上任一点的场强(设这点到其中一线的垂直距离为 x)；

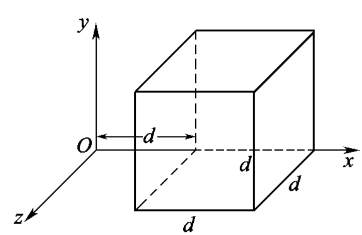
(2) 每一根导线上单位长度导线受到另一根导线上电荷作用的电场力.

12－8　用很细的不导电的塑料棒弯成半径为 50 cm 的圆弧，两端空隙为 2 cm，电荷量为 3.12×10^{-9}C 的正电荷均匀分布在细棒上. 求圆心处场强.

12－9　如图所示，在点电荷 q 的电场中，取半径为 R 的圆形平面. 设 q 在垂直于平面并通过圆心 O 的轴线上 A 点处，A 点与圆心 O 点的距离为 d. 试计算通过此平面的电通量.



题 12－9 图



题 12－10 图

12－10　图中场强为 $\boldsymbol{E}=bx^{1/2}\boldsymbol{i}$ N·C^{-1}，式中 $b=800$ N·C^{-1}·m$^{-1/2}$，设 $d=10$ cm.

试计算：

（1）通过立方体表面的总的电通量；

（2）立方体内总的电荷量.

12－11　一无限大的厚度为 D 的均匀带电平板，电荷体密度为 ρ. 试求其场强分布，并画出 $E-d$ 关系曲线. d 为垂直于板面的坐标，原点在板的中心面上.

12－12　两个均匀带电的同心球面，分别带有净电荷 q_1 和 q_2，其中 q_1 为内球面的电荷. 两球面之间的场强大小为 $3000/r^2\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}$，且方向沿半径向内；外球面外场强的大小为 $2000/r^2\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}$，方向沿半径向外，其中 r 为场点到球心的距离. 试求 q_1 和 q_2 各等于多少？

12－13　在半径分别为 10 cm 和 20 cm 的两层假想同心球面中间，均匀分布着电荷体密度为 $\rho=10^{-9}\mathrm{C\cdot m^{-3}}$ 的正电荷. 求离球心 5 cm，15 cm，50 cm 处的场强.

12－14　一个半径为 R 的球体内，分布着电荷的体密度为 $\rho=kr$，式中 r 为径向距离，k 为常数. 求空间的场强分布，并画出 $E-r$ 关系曲线.

12－15　一无限长的均匀带电薄圆筒，截面半径为 a，电荷面密度为 σ. 试求其场强分布，并画出 $E-r$ 关系曲线，其中 r 为垂直于圆筒中心轴向外的矢径的大小.

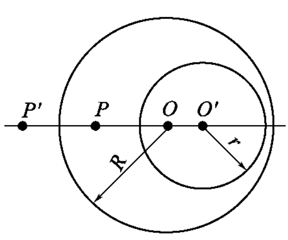
12－16　两个带有等量异号电荷的无限长同轴圆柱面，半径分别为 R_1 和 R_2（$R_2>R_1$），单位长度上的电量为 λ. 求其场强分布.

12－17　设气体放电形成的等离子体在圆柱内的电荷分布可用下式表示

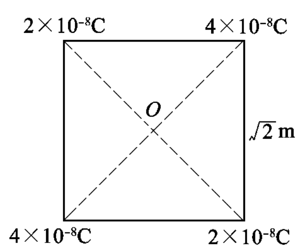
$$\rho(r)=\frac{\rho_0}{\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2}$$

式中 r 是到圆柱轴线的距离，ρ_0 为轴线处的电荷体密度，a 为常量. 试计算其场强分布.

12－18　在半径为 R，电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体内，挖去一个半径为 r 的小球，如图所示. 试求：O,O',P,P' 各点的场强. O,O',P,P' 在一条直线上.



题 12－18 图



题 12－19 图

12－19　四个电荷分别放在一正方形的四个顶点上（如图），试求：

（1）正方形中心 O 点的场强和电势；

（2）从无限远处将一 $q_0=10^{-8}\mathrm{C}$ 的点电荷移至 O 点电场力需做多少功？

（3）该电荷的电势能改变了多少？

12－20　一长为 l 的均匀带电的细直导线，电荷线密度为 λ. 求：

（1）在导线延长线上与导线一端相距 R 处的电势；

（2）导线垂直平分线上与导线中点相距 R 处的电势.

12－21　真空中相距为 5.0×10^{-2}m 的两块大平行平板 A，B，带有等量而异号的电荷，电荷面密度为 3.54×10^{-6} C·m^{-2}. 若带负电的 B 板接地，求：

（1）A 板的电势；

（2）距离 A 板为 1.0×10^{-2} m 处的电势.

12－22　两均匀带电球壳同心放置，半径分别为 R_1 和 R_2（$R_1<R_2$），已知内、外球壳之间的电势差为 U_{12}，求两球壳间的场强分布.

12－23　两个同心球面，半径分别为 10 cm 和 30 cm，小球面均匀带有正电荷 1×10^{-8} C，大球面均匀带有正电荷 1.5×10^{-8}C. 求离球心分别为 20 cm 和 50 cm 两点的电势.

12－24　电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内，试证离球心 r（$r<R$）处的电势为

$$U=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0R^3}$$

12－25　两共轴圆柱面，截面半径分别为 $R_1=3$ cm 和 $R_2=10$ cm，带有等量异号电荷，内、外圆柱面间的电势差为 450 V. 求：

（1）圆柱面单位长度上带电量为多少？

（2）内、外圆柱面间的场强分布.

12－26　一无限长直线，电荷线密度 $\lambda=4.0\times10^{-6}$ C·m^{-1}，如果 B 点离直线的距离是 A 点的两倍，求 A，B 两点间的电势差.

12－27　在静电场空间中，电势分布为

$$U(x,y,z)=\frac{ax}{x^2+y^2}+\frac{b}{(x^2+y^2)^{1/2}}+cz^2$$

式中 a，b，c 为常量. 试求场强分布.

第 13 章　静电场中的导体和电介质

第 12 章讨论了真空中的静电场及其特性，而实际上，在静电场空间中总是有导体或电介质的存在，它们与静电场会发生相互作用，并彼此影响. 本章主要研究将导体、电介质引入静电场后，电场及导体、电介质所发生的变化及其所遵循的基本规律，从而更进一步地认识静电场的特性.

13.1　静电场中的导体

13.1.1　导体的静电平衡及其条件

1. 静电感应　导体的静电平衡

本章讨论的导体均指最为常见的金属导体. 在金属导体中，原于最外层的电子（价电子）受到原子核的束缚较弱，可以摆脱原子核的束缚，在整个导体中自由运动，即为自由电子. 原子中除了价电子以外的其余部分叫做原子实. 自由电子带负电，原子实则带正电. 在固态金属中原子实排列成整齐的点阵，称做晶格或晶体点阵. 当导体本身不带电或者不受外电场影响时，自由电子虽可在晶体点阵间做无规则的热运动，但对整个导体来说，自由电子的负电荷和晶体点阵的正电荷处处相等，所以导体呈现电中性. 在这种情况下，导体中的自由电子只做微观的热运动而没有宏观的定向运动.

若将导体放在方向一定的外电场中，无论导体原来带电与否，其内部的自由电子在电场力的作用下均要相对于晶体点阵做宏观的定向运动，从而引起导体内部电荷的重新分布. 这种在外电场作用下所引起的导体中电荷重新分布而呈现出的带电现象叫做静电感应现象，导体由于静电感应而带的电荷叫感应电荷.

导体内电荷的重新分布反过来将影响电场的分布，这是一个相互影响，相互制约的复杂过程，直至达到某种新的平衡，即电荷的宏观定向运动停止，电荷分布不随时间变化，从而电场分布也不随时间而变化，称这时的导体达到了静电平衡状态. 导体从非平衡状态趋于平衡状态的过程是极为复杂的，在此不做分析，仅讨论导体达到静电平衡的条件.

2. 导体静电平衡的条件

导体达到静电平衡的条件是：导体内部的场强处处为零，导体表面附近处场强的方向处处垂直导体表面.

上述平衡条件很容易论证. 如果导体内部的场强不是处处为零，则在场强不为零的地方，自由电子就会发生移动，则导体还没有达到静电平衡. 此外，若导体表面附近处场强的方向与导体表面不垂直，则场强沿表面有一定的分量，自由电子受到与该场强分量相应的电场力的作用，将沿表面运动，这样就不是静电平衡状态了. 应当指出，这里所说的场强 $\boldsymbol{E}$ 是外加场强 $\boldsymbol{E}_0$ 和感应电荷所产生的附加场强 $\boldsymbol{E}'$ 叠加后的总场强，即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$.

导体的静电平衡条件也可以用电势来表述. 在导体内部任取两点 a 和 b，这两点间的电势差由式(12－26)可得

$$U_{ab}=U_a-U_b=\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

由于在静电平衡时，导体内部的场强处处为零，因此，上式右边的积分等于零. 这表明. 在静电平衡时，导体内任意两点间的电势是相等的，导体为一等势体. 若 a 和 b 为导体表面上的任意两点，这时可将上式右边的积分路径取在导体表面上，由于静电平衡时导体表面处场强的方向处处与导体表面垂直，所以在上式右边对坐标的曲线积分中，场强 $\boldsymbol{E}$ 处处与积分路径上的位移元 $\mathrm{d}l$ 垂直，其积分结果亦等于零，表明在静电平衡时，导体表面任意两点间的电势是相等的，导体表面为一等势面.

13.1.2 静电平衡下导体上电荷的分布

下面讨论处于静电平衡状态下导体上的电荷分布情况.

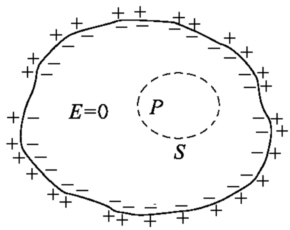
1. 导体内部

处于静电平衡的导体，其内部各点处的净电荷为零，电荷只能分布在其表面.

下面利用高斯定理，分两种情况对上述结论予以说明.

（1）实心导体

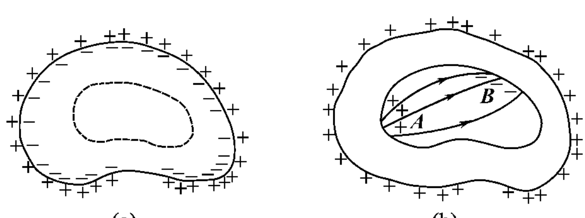
在处于静电平衡的实心导体内包围任一点 P 做一高斯面 S，如图 13－1 中虚线所示，由于闭合的 S 面上各点的场强均为零，故通过 S 面的电通量等于零. 根据高斯定理，可知闭合的 S 面内电荷的代数和为零. 由于所取的高斯面 S 可任意地小，小到仅包围几何点 P，而包围几何点 P 的高斯面 S 内电荷的代数和亦为零，所以 P 点上无净电荷. 又由于 P 点是任意的，因此这一结论对于导体内部任一点都成立. 由此可知，对于实心导体，电荷只能分布在其表面上，内部各点处的净电荷为零.



3－1　实心导体内部无净电荷

（2）空腔导体

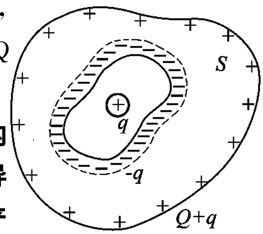
当导体空腔内无电荷时，可在导体内部无限贴近空腔的内表面做一高斯面 S，如图 13－2a 中的虚线所示. 由于 S 面上的 $\boldsymbol{E}$ 处处为零，所以通过 S 面的电通量等于零. 由高斯定理可知闭合的 S 面内电荷的代数和为零. 可能有两种情况，一种为空腔的内表面上无电荷分布，如图 13－2a 所示；另一种为空腔的内表面上带等量异号电荷，有电场线从空腔内表面上的正电荷出发，经空腔内部终止于空腔内表面上的负电荷，如图 13－2b 所示. 这后一种情况显然与静电平衡状态下导体为等势体的结论相矛盾，是不可能存在的. 故腔内无电荷的空腔导体，其电荷只能分布在导体的外表面.



－2　在空腔的内表面没有电荷分布，电荷分布在空腔外表面

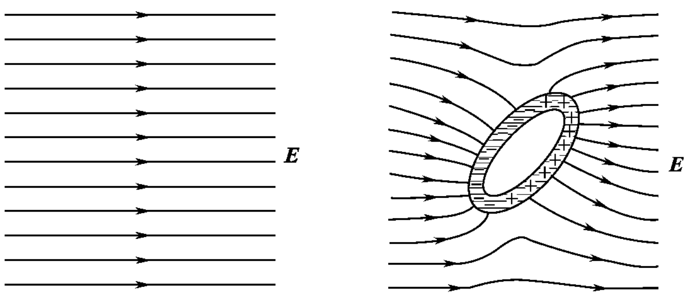
当导体空腔内有电荷时，设其为 q，并假定导体自身带电 Q. 在导体内部做

一高斯面 S，如图 13－3 中的虚线所示. 由于 S 面上的 E 处处为零，所以通过 S 面的电通量等于零. 由高斯定理可知闭合的 S 面内电荷的代数和为零. 因为腔内已有电荷 q，所以空腔的内表面上必定分布有电荷 $-q$，根据电荷守恒定律，导体空腔的外表面上分布的电荷为 $Q+q$.



3－3 在空腔内有电荷时空腔的内表面感应等值异号的电荷

从上面的讨论可知，处在外电场中的导体腔，若腔内无电荷，则腔内的电场为零，这是由于达到静电平衡时，导体腔外的电荷所产生的外电场与导体外表面上的电荷产生的电场，在导体内部与空腔处恰好相互抵消，这一结论与导体外的电荷和电场的分布无关. 从效果上看，导体腔对其空腔起到了屏蔽外电场的作用，这是静电屏蔽的一个方面（见图 13－4）.



(a) 均匀电场的分布　　(b) 在均匀电场中引入导体腔后的电场分布

图 13－4　静电屏蔽原理图 1

当导体腔的腔内有电荷时，由于静电感应，会使空腔内、外表面感应出等量异号的电荷. 导体腔外表面的电荷会对导体腔外电场产生影响，如图 13－5a 所示. 但如果将导体腔接地，则导体腔外表面的电荷会由于与地面电荷中和而消除对导体腔外电场的影响，如图 13－5b 所示. 即接地的导体腔的腔内电荷对导体腔外部不产生任何影响，这是静电屏蔽的又一个方面.

综上所述，一个接地的导体腔可以隔离内、外静电场的相互影响，这就是静电屏蔽的原理，它在实际工作中有着广泛地应用.

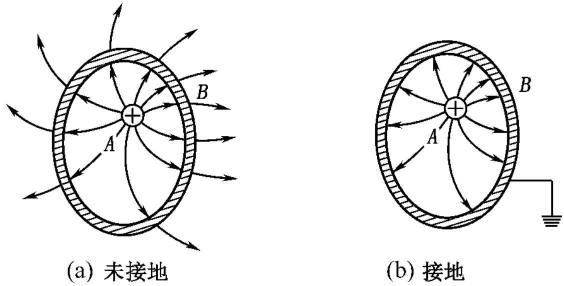
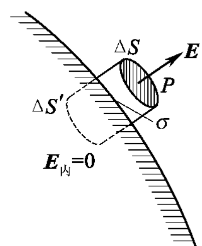


图 13－5　静电屏蔽原理图 2

2. 导体表面

处于静电平衡的导体,其表面各点处的电荷面密度与该处表面附近的场强的大小成正比.

这一结论同样可以用高斯定律予以说明. 如图 13－6 所示,在紧邻导体表面取一点 P,以 $\boldsymbol{E}$ 表示该点处的场强. 过 P 点做一个平行于导体表面的小面积元 ΔS,以 ΔS 为一底面,以过 P 点的导体表面法线为轴做一个闭合的扁平圆柱面,其另一底面 $\Delta S'$ 在导体的内部. 由于静电平衡时导体内部场强处处为零,而导体表面处的场强处处与导体表面垂直,故通过此闭合扁平圆柱面(高斯面)的电通量就是通过 ΔS 面的电通量,即等于 $E\Delta S$,以 σ 表示导体表面 P 点附近的电荷面密度,则扁平圆柱面包围的电荷就是 $\sigma\Delta S$. 根据高斯定理,有



13－6　导体表面电荷与场强的关系

$$E\Delta S=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

由此得

$$\sigma = \varepsilon_0 E \tag{13-1}$$

这说明处于静电平衡的导体表面上各点处的电荷面密度与该处表面附近的场强的大小成正比.

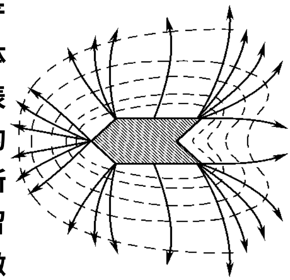
3. 表面曲率的影响

孤立导体处于静电平衡,它表面各点处的电荷面密度与该处表面的曲率有关,曲率越大的地方,电荷面密度越大.

应当指出,关于孤立导体性质的这一结论不能推广到普遍情况. 一般说来,电荷在导体表面上的分布不但和导体自身的形状有关,还和附近其他带电体及

其分布有关.仅仅对于孤立的带电导体而言,电荷在其表面上的分布才全由自身的形状,即表面曲率所决定.

与此同时也应注意到,孤立导体的这一性质在生产技术上有着十分重要的应用.由式(13－1)知,带电导体表面处的场强是和电荷面密度成正比的,因此在导体表面上曲率较大的地方,场强也比较大.对于具有尖端的带电导体,无疑在尖端处的场强特别强,如图13－7所示,当该处的场强达到一定量值时,空气中原有的残留带电粒子(如电子或离子)在这个电场作用下将发生激烈的运动,并获得足够大的动能与空气分子碰撞,并使后者电离,进而产生大量的新的带电粒子,其中与导体尖端处电荷异号的带电粒子,被吸引到尖端上,与导体上的电荷相中和;而与导体尖端处电荷同号的带电粒子,则被排斥而离开尖端做加速运动,这无疑会使得空气易于导电.这种使得空气被“击穿”而产生的放电现象称为尖端放电.避雷针就是根据尖端放电的原理制造的.当雷电发生时,利用尖端放电原理使强大的放电电流从和避雷针连接并接地良好的粗导线中流过,从而避免了建筑物遭受雷击的破坏.



13－7 导体尖端的电场线和等势面的分布

例13－1 在内、外半径分别为R_1和R_2的导体球壳内,有一个半径为R的导体小球,小球与球壳同心,让小球与球壳分别带上电荷量q和Q.试求:

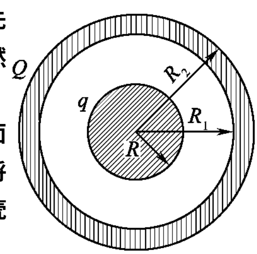
(1) 小球以及球壳内、外表面的电势;

(2) 小球与球壳的电势差;

(3) 若球壳接地,再求小球与球壳的电势差.

解 在计算有导体存在时的静电场的场强和电势分布时,首先要根据静电平衡条件和电荷守恒定律,确定导体上新的电荷分布,然后由新的电荷分布求场强和电势分布.

经分析可以确定,电荷只能分布在导体的表面上,且在小球表面上和球壳内、外表面上的电荷分布是均匀的.小球表面上的电荷q将在球壳的内外表面上感应出$-q$和$+q$的电荷,而Q只能分布在球壳的外表面上,故球壳外表面上的总电荷量为$q+Q$.



3－8 例13－1图(带电球壳包围带电小球)

由于所有的电荷的分布均具有球对称性,所以可利用高斯定理先求场强的分布,再由场强和电势的积分关系求电势分布.

(1) 根据电荷的分布,利用高斯定理可求得场强的分布为

$$E=\begin{cases}0 & 0<r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R<r<R_1\\ 0 & R_1<r<R_2\\ \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_2<r\end{cases}$$

方向沿径向.

同例 12－11,由场强的分布可求得小球内任一点的电势为

$$U_r=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^R 0\mathrm{d}r+\int_R^{R_1}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}0\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)+\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=U_R$$

小球内任一点的电势均等于小球表面的电势,可见导体小球为一等势体.

导体球壳内、外表面的电势分别为

$$U_{R_1}=\int_{R_1}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{R_1}^{R_2}0\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$U_{R_2}=\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{R_2}^{\infty}\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

可见 $U_{R_1}=U_{R_2}$,导体球壳亦为一等势体.

(2) 小球与球壳的电势差为

$$U_{RR_1}=\int_R^{R_1}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_R^{R_1}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)$$

亦可基于(1)问中的结果由 $U_{RR_1}=U_R-U_{R_1}$ 直接求.

(3) 若球壳接地,则除了球壳外表面上的电荷消失外,其他电荷分布不变.此时的场强分布为

$$E=\begin{cases}0 & 0<r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R<r<R_1\\ 0 & R_1<r\end{cases}$$

方向沿径向.

小球与球壳的电势差为

$$U_{RR_1}=\int_R^{R_1}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_R^{R_1}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)$$

与(2)中的结果相同,即无论外球壳接地与否,小球与球壳的电势差恒定不变.

13.2　电容和电容器

13.2.1 电　容

1. 孤立导体的电容

若空间只有一个导体，在其附近没有其他导体或带电体，它们都位于无穷远处，则称这样的导体为孤立导体. 理论和实验表明，孤立导体所带的电量 q 与它的电势 U 成正比，可以写成等式

$$\frac{q}{U}=C \tag{13-2}$$

式中 C 为比例系数，称之孤立导体的电容，它只和导体的尺寸形状有关，而与 q 和 U 无关，反映了导体储存电荷和电能的能力. 其物理意义是：使导体升高单位电势所需的电荷量，对一定的导体，其电容 C 是一定的.

在国际单位制(SI)中，电容的单位为 $\mathrm{C \cdot V^{-1}}$，称为法拉，用符号 F 表示. 在实际应用中，法拉这个单位太大，常用的电容单位是微法拉(μF)或皮法拉(pF)，它们之间的关系为 $1\mathrm{F}=10^{6}\mu\mathrm{F}=10^{12}\mathrm{pF}$.

2. 电容器的电容

当导体 A 附近有其他导体存在时(见图 13-9)，则该导体的电势不仅和它本身所带电量有关，而且与附近其他导体的形状，位置以及其上的带电状态有关. 为了消除周围其他导体的影响，可利用静电屏蔽原理，将导体 A 用一个封闭的导体壳 B 屏蔽起来，这时，尽管导体 A 和导体壳 B 的电势仍会受到外界的影响(若导体壳 B 接地，则外界的影响将消除)，但两者之间的电势差 $U_{AB}=U_A-U_B$ 却与外界无关，且可证明，电势差 $U_{AB}=U_A-U_B$ 和导体 A 所带电量 q 成正比(导体壳 B 的内表面因静电感应而带上的电荷与导体 A 所带电荷等值异号). 通常把导体壳 B 和壳内的导体 A 所组成的导体系称为电容器，组成导体系的两个导体称为电容器的极板. 电容器的电容为

$$C=\frac{q}{U_{AB}}=\frac{q}{U_A-U_B} \tag{13-3}$$

它与两个导体的尺寸、形状及其相对位置有关. 而与 q 和 U_{AB} 无关.

实际上，对电容器的屏蔽并不像图 13-9 那样严格，通常只要求从一个导体(极板)发出的电场线几乎全都终止在另一导体(极板)上即可，这时外界对两个导体之间的电势差的影响可忽略不计. 例如两块形状一样的平面导体板平行放置，并使它们彼此靠得很近，这时电荷将集中在两导体相对的表面上，且所带电荷等值异号，电场线集中在两表面之间的狭窄空间内(见图 13-10)，两导体之

间电势差可近似地认为不受外界影响. 这样的装置就是一种常用的电容器——平行板电容器,简称平板电容器.

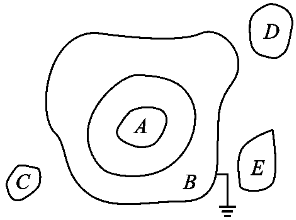


图 13－9　屏蔽的电容器

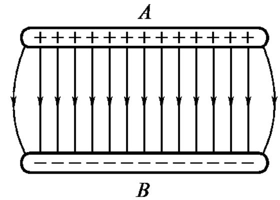


图 13－10　平行板电容器

下面从理论上计算几种电容器的电容. 在计算中认为极板之间是真空或空气.

(1) 平行板电容器

两块彼此靠得很近的平行导体板组成平行板电容器. 设它们的面积为 S,两极板内表面间的距离为 d. 当极板的线度远大于它们之间距离的情况下,除边缘区域外,电荷在两极板内表面上均匀分布,极板间的电场是均匀的(见图 13－10). 设两极板 A 和 B 的带电量分别为 $+q$ 和 $-q$,其电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$,即 $\sigma=q/S$. 由高斯定理可求得极板间的场强的大小为

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

方向垂直于极板由 A 指向 B. 此时,两极板间的电势差为

$$U_{AB}=U_A-U_B=Ed=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

根据式(13－3),可得平行板电容器的电容为

$$C=\frac{q}{U_{AB}}=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{13－4}$$

(2) 圆柱形电容器

电容器由两个同轴柱形导体圆筒(面)A 和 B 组成,设其半径分别为 R_A 和 R_B($R_B>R_A$),长度为 l(图 13－11). 当 $l\gg R_B-R_A$ 时,则可将两端边缘处电场的不均匀性的影响忽略不计(称为忽略边缘效应). 在此条件下可将导体圆筒看成是无限长的,当其带电后,电荷将均匀分布在内、外两导体圆筒面上,两圆筒面间的电场具有轴对称性,并可近似视为不受外界的影响. 设内、外圆筒面 A,B 分别带电 $+q$ 和 $-q$,单位长度圆筒面上的电荷量为 $\lambda=q/l$. 由高斯定理,可得到两圆筒面间距圆筒轴线为 r($R_A<r<R_B$)处的 P 点的场强为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}$$

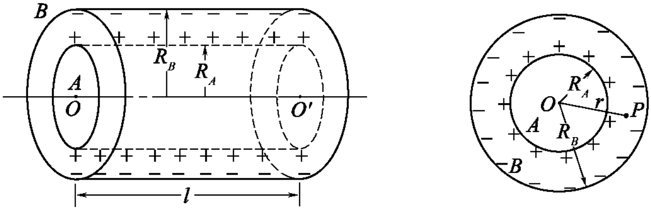


图 13－11　圆柱形电容器

利用式(12－26),并选取积分路径为垂直于圆筒轴线的径向,可得两圆筒面间的电势差为

$$U_{AB}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

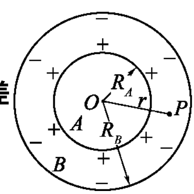
根据式(13－3),可得圆柱形电容器的电容为

$$C=\frac{q}{U_{AB}}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(R_B/R_A)} \tag{13－5}$$

(3) 球形电容器

电容器是由半径分别为 R_A 和 R_B($R_B>R_A$)的两个同心的导体球壳所组成的(图 13－12). 设内、外球壳分别带电 $+q$, $-q$,它们分别均匀地分布在内球壳的外表面和外球壳的内表面上,在两球壳之间具有球对称性的电场. 利用高斯定理,可求得两球壳间距球心为 r($R_A<r<R_B$)处的 P 点场强为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$



3－12　球形电容器

由式(12－26),并选取积分路径为径向,可得两球壳间的电势差为

$$U_{AB}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$=\int_{R_A}^{R_B}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

根据式(13－3),可得球形电容器的电容为

$$C=\frac{q}{U_{AB}}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B-R_A} \tag{13－6}$$

以上所举的例子中,电容器两极板间均为真空或空气. 如果在两极板间充满某种电介质,则电容器的电容要增大. 若用 C_0 表示电容器两极板间为真空或空

气时的电容，C 表示电容器两极板间充满电介质时的电容，则实验证明，

$$\frac{C}{C_0} = \varepsilon_r > 1 \tag{13-7}$$

ε_r 与所充电介质的性质有关，称为电介质的相对电容率，或相对介电常数.

由式(13－7)及式(13－4)、式(13－5)和式(13－6)，可得平行板电容器、圆柱形电容器和球形电容器在充满电介质时的电容分别为

$$C=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}=\frac{\varepsilon S}{d},$$

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\ln(R_B/R_A)}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(R_B/R_A)},$$

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B-R_A}=\frac{4\pi\varepsilon R_A R_B}{R_B-R_A}$$

其中 $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ 叫做电介质的电容率，或介电常数. 由式(13－7)可知，ε_r 是单位为 1 的量，因此电介质的电容率 ε 与真空的电容率 ε_0 的单位相同. 在真空或空气中，$\varepsilon_r=1$，除真空或空气外，所有电介质的 ε_r 都大于 1.

一个电容器的性能指标由两个因素来表示——电容及耐压. 使用中若 U_{AB} 过高，则电容器极板间的场强 $\boldsymbol{E}$ 过大，会使电介质变为导体，称之为电介质的“击穿”. 电容器上标的电压值是该电容器所允许的最高电压，这一点在应用时需要引起足够重视.

13.2.2　电容器串联和并联

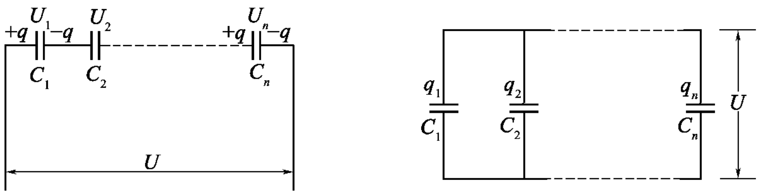
在实际应用中，当遇到单独一个电容器在电容的数值或耐压能力方面不能满足要求时，可以把几个电容器适当地连接起来构成一电容组. 电容器的基本连接方式有两种，下面分别做简要介绍.

1. 电容器的串联

图 13－13a 表示 n 个电容器的串联，设其电容值分别为 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，组合的等效电容值为 C. 当充电后，由于静电感应，每个电容器的两个极板上都带有等量异号的电荷 $+q$ 和 $-q$. 设每个电容器的两个极板间的电势差分别为 U_1，$U_2,\cdots,U_n$，则

$$U_1=\frac{q}{C_1},U_2=\frac{q}{C_2},\cdots,U_n=\frac{q}{C_n}$$

组合电容器的总电势差为



(a) 串联　　(b) 并联

图 13－13　电容器的连接

$$U=U_1+U_2+\cdots+U_n=q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}\right)$$

由电容的定义式(13－3)有

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i} \tag{13-8}$$

即串联电容器的等效电容的倒数等于每个电容器电容的倒数之和.

2. 电容器的并联

图 13－13b 表示 n 个电容器的并联,设其电容值分别为 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,组合的等效电容值为 C. 当充电后，每个电容器的两极板间的电势差都相等,均为 U. 设每个电容器的两个极板所带的电量分别为 $\pm q_1,\pm q_2,\cdots,\pm q_n$,则

$$q_1=C_1U,q_2=C_2U,\cdots,q_n=C_nU$$

组合电容器的总电量为

$$q=q_1+q_2+\cdots+q_n=(C_1+C_2+\cdots+C_n)U$$

由电容的定义式(13－3)可得组合电容器的等效电容为

$$C=qU=C_1+C_2+\cdots+C_n=\sum_{i=1}^{n}C_i \tag{13-9}$$

即并联电容器的等效电容等于每个电容器电容之和.

由上可见,电容器并联时电容增大,但并联电容器组的耐压程度并未改变,仍与每个电容器的耐压能力一样;串联时电容减小,但串联电容器组具有比每个电容器都高的耐压能力. 实用中可根据需要选用并联或串联,对于特殊要求的电路,还可采取更为复杂的连接方法.

13.3 静电场中的电介质

13.3.1 电介质的极化

电介质通常指不能导电的绝缘物质，由于它们能在电场中显示电效应，故称电介质. 在构成电介质的分子中，原于核和电子之间的引力相当大，使得电子和原子核结合得非常紧密，电子处于被束缚状态. 所以，在电介质内几乎不存在自由电子这样一些可自由运动的电荷. 当把电介质放到外电场中时，电介质中的电子等带电粒子，也只能在电场力作用下做微观的相对位移. 当达到静电平衡时，电介质内的场强可不为零. 这些是电介质和导体电性能的主要差别.

电介质中每个分子都是一个复杂的带有正、负电荷的带电系统，它们分布在一个线度为 10^{-10} m 的数量级的体积内，而不是集中在一点. 但在远离分子的地方，分子中正、负电荷所激发的电场，可以近似等效为正、负电荷各自分别集中在一个被称之为正、负电荷“中心”的点所产生的电场. 因此，对于带有等量异号电荷的中性分子，就可将其视作一个由正、负点电荷 $\pm q$ 相隔一定距离 l 所组成的电偶极子，用电偶极矩或电矩 $p_e = ql$ 描述，其中 l 为负电荷“中心”指向正电荷“中心”的矢量. 在讨论电场中的电介质的行为时，可认为电介质是由大量的这种微小的电偶极子所组成的.

按照电介质的分子内部的电结构的不同，可以把电介质分子分为有极分子和无极分子两大类. 对于有极分子，其内部的电荷分布是不对称的，因而其正、负电荷“中心”不重合，这种分子具有固有电矩，即 $p_e \neq 0$. 有极分子电介质可看成是无数的电偶极子的聚集体，在无外场时，虽然每个分子的电偶极矩不为零，但由于分子的无规则热运动，各个分子的电偶极矩的方向是杂乱无章地排列的，所以不论从电介质的整体来看，还是从电介质中的某一小体积（其中包含有大量的分子）来看，其中各个分子电偶极矩的矢量和平均说来等于零，电介质是呈电中性的；对于无极分子，其内部的电荷分布是对称的，因而其正、负电荷“中心”重合，这种分子没有固有电矩，即 $p_e = 0$. 由于每个分子的电偶极矩都等于零，在无外场时电介质整体也是呈电中性的.

下面讨论电介质在静电场中的表现.

当把均匀电介质放到静电场中时，其内的分子将受到静电场力的作用而发生变化，但最终亦会达到一个平衡状态. 如果是有极分子电介质，则其内的分子的固有电矩将受到外电场的力矩作用而沿着外电场方向取向，如图 13－14a 所示. 然而，由于分子的无规则热运动，各分子的固有电矩并不能十分有序地沿外电场方向排列起来. 外电场越强，固有电矩的排列越有序；如果是无极分子电介质，则其内分子原本重合的正、负电荷“中心”将因受静电场力的作用而发生相对位移 l，从而使分子有了电矩，见图 13－14b，这种电矩称为感生电矩. 显然，感生电矩的方向与外电场的方向总是一致的，且外电场越强，感生电矩越大.

虽然两种电介质受外电场的影响所发生的变化的微观机制不同，但其宏观总效果是一样的，即在电介质内部的宏观微小的区域内，正、负电荷的的电量仍相等，因而仍表现为电中性. 但是，在电介质的表面上却出现了只有正电荷或只有负电荷的电荷层，如图 13－14 所示. 这些电荷是和电介质分子连在一起的，由于它们不能靠诸如接地之类的传导方法离开电介质而单独存在，也不能在电介质中自由移动，因而被称之为极化电荷或束缚电荷. 这种在外电场的作用下，在电介质表面出现极化电荷的现象叫做电介质的极化. 显然，外电场越强，电介质表面出现的极化电荷越多.

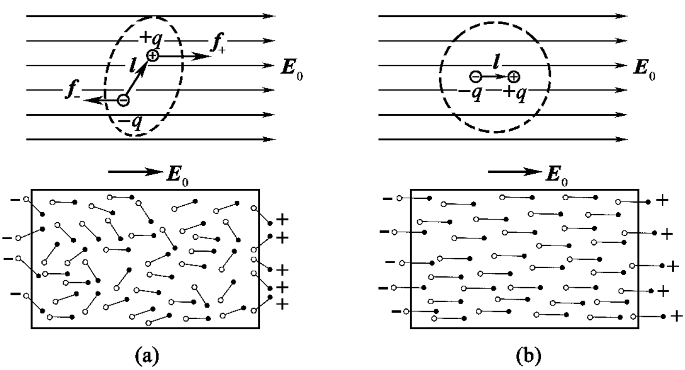


图 13－14　电介质的极化

在上述的有关电介质极化的微观机制的讨论中，有极和无极分子电介质的极化分别称为取向极化和位移极化. 一般说来，分子在取向极化的同时还会产生位移极化. 但是，对有极分子电介质来说，在静电场作用下，取向极化的效应比位移极化的效应强得多，因而其主要的极化机理是取向极化.

以上讨论的是均匀电介质的极化情形，即电介质中分子的密度各处均匀的情形，在此情形下，只产生面极化电荷，而极化电荷体密度等于零. 但对于分子密度不均匀的非均匀电介质，在极化时，不仅在电介质表面上出现面极化电荷，而

且在电介质中还出现体极化电荷. 下面的讨论仅限于均匀电介质.

13.3.2　电极化强度　电介质的极化规律

上面从分子的电结构出发,说明了两类电结构不同的电介质的极化过程. 正如已讨论的那样,这两类电介质极化的微观过程虽然不同,但宏观的效果却是相同的. 因此从宏观上描述电介质的极化现象时,就没必要再将两类电介质分开来讨论.

为了表示电介质中某点的极化程度,可取一包含该点的无限小的体积元 ΔV(体积元中包含有大量的分子),以 $\boldsymbol{p}_e$ 表示 ΔV 中某个分子的电偶极矩(固有的或感生的),则 ΔV 中所有分子的电偶极矩矢量和为 $\sum \boldsymbol{p}_e$,定义

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum \boldsymbol{p}_e}{\Delta V} \tag{13-10}$$

即该点附近单位体积内分子电偶极矩的矢量和为表征该点极化程度的物理量,称其为电极化强度或 $\boldsymbol{P}$ 矢量. 在国际单位制(SI)中,电极化强度的单位为 $\mathrm{C \cdot m^{-2}}$.

实验证明,在各向同性的电介质中的某一点,电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与该点的场强 $\boldsymbol{E}$ 成正比,即

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{13-11}$$

式中 χ_e 是与电介质性质有关的单位为 1 的量,称为电介质的电极化率,可以证明电极化率 χ_e 与相对电容率 ε_r 的关系为 $\chi_e = \varepsilon_r - 1$. 如果是均匀电介质,则电介质中各点的 χ_e 值相同;如果是不均匀电介质,则 χ_e 是电介质中各点位置的函数. 应当指出,式(13-11)中的 $\boldsymbol{E}$ 为外电场与极化电荷所激发电场的矢量和.

这里提到的各向同性的电介质,是指电介质中各点的 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系与 $\boldsymbol{E}$ 的方向无关. 下面的讨论仅限于此种电介质.

13.4　电位移矢量　有电介质时的高斯定理和环路定理

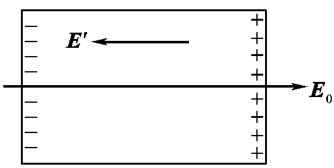
13.4.1　电介质中的电场

由上节的讨论知,当电介质在外电场的作用下极化时,其上会出现极化电

荷. 极化电荷与自由电荷一样也要激发电场,这将使原来的电场发生改变. 如用 $\boldsymbol{E}_0$ 表示自由电荷产生的外电场,用 $\boldsymbol{E}'$ 表示极化电荷产生的电场,按场强叠加原理,电介质极化后的电场的合场强应为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}' \tag{13-12}$$

由图 13-15 可以看出,极化电荷的附加电场 $\boldsymbol{E}'$ 与外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向相反,在电介质中起着削弱电场的作用. 事实上,在电介质的内部,极化电荷的附加电场总是起着削弱电场的作用,从而也削弱电介质本身的极化,因而,这种附加电场也叫做退极化场.



-15 极化电荷的附加电场

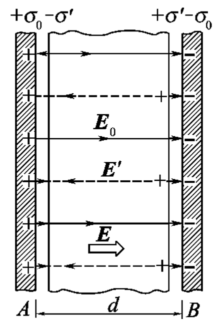


图 13-16 电介质中的电场

为了定量地了解电介质内部场强被削弱的情况,讨论如下特例.

图 13-16 为一平行板电容器,设其两极板分别带有电荷 $\pm q_0$. 当两极板间为真空时,场强为 $\boldsymbol{E}_0$,电势差为 U_{0AB},电容为 C_0;当充满相对电容率为 ε_r 的各向同性的均匀电介质时,场强为 $\boldsymbol{E}$,电势差为 U_{AB},电容为 C. 由电容器的定义

$$C_0 = \frac{q_0}{U_{0AB}} \quad C = \frac{q_0}{U_{AB}}$$

即

$$\frac{C}{C_0} = \frac{U_{0AB}}{U_{AB}}$$

而 $U_{0AB} = E_0 d$,$U_{AB} = Ed$,则上式可写为

$$\frac{C}{C_0} = \frac{E_0}{E}$$

根据式(13-7)

$$\frac{C}{C_0} = \varepsilon_r$$

合并上两式有

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon_r} \tag{13-13}$$

上式表明，在各向同性的均匀电介质充满平行板电容器内的整个电场空间时，电介质中的场强削弱为真空中场强的$\frac{1}{\varepsilon_r}$.

设极板上的自由电荷面密度为$\pm\sigma_0$，电介质表面上的极化电荷面密度为$\pm\sigma'$，则有

$$E_0=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad E'=\frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

电介质中合场强的大小为

$$E=E_0-E'=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}-\frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \tag{13-14}$$

由式(13－13)和式(13－14)可得

$$\sigma'=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0 \tag{13-15}$$

式(13－15)给出了电介质表面上的极化电荷面密度σ'与电容器极板上自由电荷面密度σ_0之间的数量关系.

应当注意，式(13－13)所表示的E与E_0之关系的成立是有条件的，理论上可证明，只有在均匀电介质充满整个电场空间或均匀电介质的表面是等势面的情形下，该式才适用. 由于式(13－15)是从式(13－13)推出的，所以它也只能在此条件下成立.

13.4.2　电位移矢量　有电介质时的高斯定理和环路定理

1. 电位移矢量　电介质中的高斯定理

前面曾介绍过真空中的高斯定理. 当静电场中有电介质时，则在高斯面内不仅含有自由电荷，而且也有可能含有极化电荷，这时的高斯定理在形式上应有别于真空中的高斯定理. 下面仍以极板间充满各向同性的均匀电介质的平行板电容器为例，对电介质中的高斯定理进行讨论.

如图 13－17，设平行板电容器两极板上所带的自由电荷面密度分别为$\pm\sigma_0$，电场引起电介质极化后，在靠近电容器两极板的电介质两表面上产生极化电荷，极化电荷面密度分别为$\pm\sigma'$. 做一扁平的圆筒形高斯面S(图中虚线为高斯面的截面)，高斯面的上下底面S_1和S_2与极板平行，面积的大小均为A，上底面S_1在导体极板内，下底面S_2在电介质中，侧面S_3与极板垂直. 对此高斯面，利用真空

中的高斯定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)}(q_{0i} + q_i{}') = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0 A - \sigma' A) \tag{13-16}$$

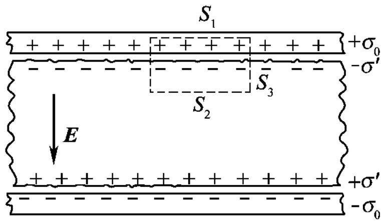


图 13-17 有电介质时的高斯定理

式中 $\sum_{(S内)} q_{0i} = \sigma_0 A$ 和 $\sum_{(S内)} q_i{}' = -\sigma' A$ 分别为高斯面 S 内所包围的自由电荷和极化电荷. 由式(13-15)有

$$\sigma' A = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0 A$$

即

$$\sigma_0 A - \sigma' A = \frac{\sigma_0 A}{\varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_r}\sum_{(S内)} q_{0i}$$

将其代入式(13-16)有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0}\sum_{(S内)} q_{0i}$$

或

$$\oint_S \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{(S内)} q_{0i}$$

定义

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{13-17}$$

为电位移矢量，简称电位移，则有

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{(S内)} q_{0i} \tag{13-18}$$

式(13-18)就是有电介质时的高斯定理，它虽然是从平行板电容器这一特例中推出的，但理论上可严格证明它是普遍适用的，是静电场的基本定理之一.

在国际单位制(SI)中，电位移的单位为 $\mathrm{C \cdot m^{-2}}$，与电荷面密度的单位相同.

引入电位移矢量后，高斯定理的数学表达式(13-18)的右边不出现极化电荷，但这并不能说明电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与极化电荷 q' 无关. 事实上，在一般情况下，

高斯面 S 上任一点处的场强 $\boldsymbol{E}$ 是由高斯面 S 内、外的自由电荷和极化电荷共同决定的，由式(13－17)可知，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 亦应如此. 但是，当自由电荷和电介质的分布都具有一定对称性时，可先利用电介质中的高斯定理(13－18)求出 $\boldsymbol{D}$，在由式(13－17)求 $\boldsymbol{E}$.

应当注意，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 只是一个辅助量，描写电场性质的物理量仍是电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电势 U. 若把一试验电荷 q_0 置入电场，决定它受力的是电场强度 $\boldsymbol{E}$ 而不是电位移矢量 $\boldsymbol{D}$.

正如可以用电场线对电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 进行几何描述一样，这里亦可用电位移线形象地表示电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的空间分布. 在有电介质的静电场中做电位移线，使线上每一点的切线方向和该点电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的方向相同，并规定通过垂直于该点单位面积的电位移线的数目等于该点的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的量值，则通过一任意曲面 S 的电位移线的数目为 $\int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，称为通过该面的电位移通量. 这样，有电介质时的高斯定理，即式(13－18)就可表述为：通过电介质中任一闭合曲面的电位移通量等于该面所包围的自由电荷量的代数和.

由这条定理可看出，电位移线是发自于正的自由电荷，而终止于负的自由电荷. 这与电场线不一样，电场线总是起于一切正电荷而止于一切负电荷，包括自由电荷和极化电荷.

由式(13－11)和式(13－17)有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad (13-18)$$

式(13－18)虽由特殊情况得出，但可以证明，它是一个关于电位移矢量 $\boldsymbol{D}$、电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 和电极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 的一个普适关系式，而式(13－17)仅适用于各向同性的电介质.

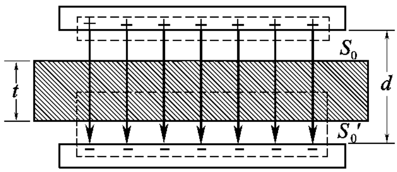
2. 有电介质时的环路定理

在存在电介质的情况下，电场空间中各点处的场强 $\boldsymbol{E}$ 不仅与自由电荷有关，而且还与极化电荷有关，但无论是自由电荷，还是极化电荷，它们所激发的静电场均为保守场，若用 $\boldsymbol{E}$ 表示自由电荷和极化电荷共同产生的合场强，则仍然有

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \qquad (13-19)$$

式(13－19)表明，在有电介质存在的情况下，电场强度沿任一闭合回路的环流均为零，这一结论称为电介质中的环路定理.

例 13－2 一平板电容器的极板面积为 S，二极板间的距离为 d. 平行于极板置入一厚度为 t，相对介电容率为 ε_r 的电介质板（图 13－18）. 若两极板的电势差为 U_0，试求极板间空气和电介质中的场强与电位移，并计算此电容器之电容.



－18 例 13－2 图（部分充以电介质板的平行板电容器）

解 设上、下极板上自由电荷面密度分别为 $\pm\sigma_0$，空气和电介质中的电位移与场强分别为 $\boldsymbol{D}_0$，$\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}$. 如图 13－18 所示，做一上、下底面分别在上极板和空气中的如虚线所示的高斯面 S_0，由于 $\boldsymbol{D}_0$ 线垂直于极板，并考虑到通过封闭面上底面和侧面的电位移通量为零，则根据高斯定理可得

$$\oint_{S_0} \boldsymbol{D}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_0 S = \sigma_0 S$$

即

$$D_0 = \sigma_0$$

由式（13－17），有
$$E_0 = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

又如图所示，做一上、下底面分别在电介质和下极板中的如虚线所示高斯面 S_0'，则同样有

$$\oint_{S_0'} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -DS = -\sigma_0 S$$

即

$$D = \sigma_0 = D_0 \qquad E = \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

上、下极板间的电势差为

$$U_0 = E_0(d-t) + Et = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_r(\mathrm{d}-t)+t}{\varepsilon_r}$$

故

$$D_0 = D = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 U_0}{\varepsilon_r(d-t)+t} \quad E_0 = \frac{\varepsilon_r U_0}{\varepsilon_r(d-t)+t} \quad E = \frac{U_0}{\varepsilon_r(d-t)+t}$$

方向均为垂直于极板由上指向下.

电容器的电容为

$$C = \frac{q_0}{U_0} = \frac{\sigma_0 S}{U_0} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{\varepsilon_r(d-t)+t}$$

式中 $q_0 = \sigma_0 S$ 为电容器极板所带的电量.

例 13－3　设有一圆柱形电容器，其间有两层电介质，电容率分别为 ε_1 和 ε_2，电容器的几何尺寸如图 13－19 所示，其中长为 L. 忽略边缘效应，试求该电容器的电容.

解　设圆柱形电容器的内、外导体极板分别带电 $\pm q_0$，即单位长度导体极板带电为 $\lambda = q_0/L$. 由于导体极板上所带的自由电荷和电介质都具有轴对称性，所以静电场是轴对称分布的，即场的方向沿垂直于轴的径向. 故可先用电介质中高斯定理求出电位移 $\boldsymbol{D}$，然后再求 $\boldsymbol{E}$，并在此基础上利用场强与电势的积分关系计算内、外导体极板间的电势差，最后由电容器电容的公式求电容.

与圆柱形电容器同轴做一高斯面 S，其半径为 r，高为 l. 由于其上、下底面的法线与 $\boldsymbol{D}$ 垂直. 所以穿过上、下底面的电位移通量为零. 则由高斯定理有

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D2\pi rl = \sum_{(S内)} q_{0i} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \lambda l & a < r < c \\ 0 & c < r \end{cases}$$

即

$$D = \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{\lambda}{2\pi r} & a < r < c \\ 0 & c < r \end{cases}$$

而

$$E = D/\varepsilon = \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r} & a < r < b \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r} & b < r < c \\ 0 & c < r \end{cases}$$

$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的方向均沿垂直于轴的径向.

取垂直于轴的径向为积分路径，则内、外导体极板间的电势差为

$$\begin{aligned} U_{ac} &= \int_a^c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_a^c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r}\mathrm{d}r + \int_b^c \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r}\mathrm{d}r \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{b}{a} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{c}{b} \end{aligned}$$

由电容器电容的公式有

$$C = \frac{q_0}{U_{ac}} = \frac{\lambda L}{U_{ac}} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 L}{\varepsilon_2\ln(b/a) + \varepsilon_1\ln(c/b)}$$

即为所求.

13.5　电场的能量

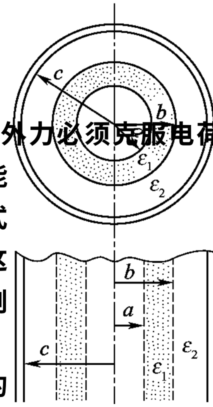


图 13－19　例13－3图（充满两种电介质的圆柱形电容器）

13.5.1　电容器的储能

任何带电过程都是电荷相对移动的过程. 在这个过程中，外力必须克服电荷间的相互作用力而做功. 然而外力做功是要消耗能量的，由能量守恒和转换定律可知，所消耗的能量必定转化为其他形式的能量，在这里具体说来就是转换为带电体所具有的电能，这个电能分布在电场的空间内. 下面以电容器的充电过程为例来进行讨论.

如图 13－20 所示，设在 t 时刻，电容器的正、负极板上的电荷分别为$+q(t)$和$-q(t)$，其电势差 $u_{+-}(t)=q(t)/C$，C 为电容器的电容. 现再将电荷元 $\mathrm{d}q$ 从负极板移到正极板，则外力需做功，设其为 $\mathrm{d}A'$，它等于静电场力功 $\mathrm{d}A$ 的负值，即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A'&=-\mathrm{d}A=-[u_-(t)-u_+(t)]\mathrm{d}q\\&=[u_+(t)-u_-(t)]\mathrm{d}q=u_{+-}(t)\mathrm{d}q=\frac{1}{C}q\,\mathrm{d}q\end{aligned}$$

两极板从不带电到两板分别带$+Q$ 和$-Q$ 电量时，外力做的总功为对上式的积分，即

$$A'=\int_0^Q\frac{1}{C}q\,\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

根据功能原理，此功应等于电容器所储存的能量 W，即

$$W=A'=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

设两板分别带电$+Q$ 和$-Q$ 时，正、负极板间的电势差为 U_{+-}，则由于 $Q=CU_{+-}$，上式亦可写为

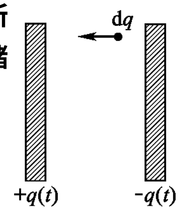
$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU_{+-}{}^2=\frac{1}{2}QU_{+-}\qquad(13-21)$$

式(13－21)对任何电容器都适用.

13.5.2　电场的能量

电容器的充电过程实际上就是电容器内部空间电场建立的过程. 下面将说明电容器储存的能量是分布在整个电场空间中.

假设电容器是平行板电容器，其极板面积为 S，正、负极板间距为 d，其间充



满相对电容率为 ε_r 的电介质，忽略边缘效应，则整个电场空间所占体积为 $V=Sd$. 将式(13－21)应用于平行板电容器，得其所储存的能量为

$$W=\frac{1}{2}CU_{+-}^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}(Ed)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 Sd$$

单位体积电场空间所具有的能量为

$$w=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon_r\varepsilon_0}=\frac{1}{2}DE \qquad (13-22)$$

－20　电容器的充

称为电场的能量密度. 上式虽然是从平行板电容器这个特殊情形得出的，但可以证明它适用于任何电场. 值得注意的是，若在电场中存在各向异性的电介质，则各向异性的电介质中的电场的能量密度应由

$$w=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \qquad (13-23)$$

决定.

由电场的能量密度分布，可由 $W=\int_{\Omega} w\,\mathrm{d}V$ 求出任一电场空间 Ω 中的电场能量 W.

根据上面的讨论，带电电容器所储存的能量可通过两种方式得到，其一为利用公式(13－21)；其二为利用式(13－22)所示的电场的能量密度表达式，在电容器内部全空间进行积分. 从式(13－21)看来，能量是和电荷相联系的，能量似乎是属于电荷的. 从式(13－22)看来，能量是和电场相联系的，能量似乎是属于电场的. 能量究竟是属于电荷还是电场，在静电场情形下是无法判别的，因为在此情形下，电场和电荷是不可分割地联系在一起的. 有电荷就必有电场，有电场就必有电荷，且电荷与电场之间有一一对应关系，因而无法判断能量是属于电荷还是电场. 但对电磁波而言，情况就不同了. 电磁波是变化的电场和变化的磁场的传播过程. 变化的电场可以离开电荷而独立存在，没有电荷也可以有电场，而且场的能量能够以电磁波的形式传播，这一事实证实能量不是属于电荷而是属于电场的. 任何质量都和一定的能量相对应，任何能量也和一定的质量相对应. 所以能量和物质是不可分割的，电场具有能量是电场物质性的一种表现.

例 13－4　如图 13－21 所示的圆柱形电容器，内、外同轴圆筒面为其正、负极板，带电分别为 $\pm Q$，电容器内充满相对电容率为 ε_r 的电介质. 设内、外同轴圆筒面长为 L，忽略边缘效应，求两极板间的电场能量.

解　同例 13－3，可利用电介质中的高斯定理，求得两极板间($R_1<r<R_2$)的场强为

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 rL}$$

由式（13－22），其电场的能量密度为

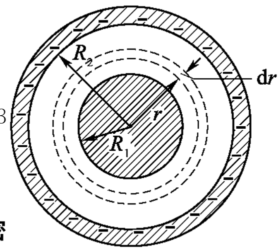
$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0E^2=\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_r\varepsilon_0L^2}\frac{1}{r^2}$$

在圆柱形电容器中，取一半径为 r，厚为 $\mathrm{d}r$，长为 L 的体积元（图 13－21），其体积为

$$\mathrm{d}V=2\pi rL\mathrm{d}r$$

在此体积元中，各处的场强大小可看作处处相等，所以电场能量密度也处处相等. 它具有的电场能量为

$$\mathrm{d}W=w\mathrm{d}V=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0L}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$



3－21　例 13－4 图（圆柱形电容器储能）

整个的电场能量可从对 $\mathrm{d}W$ 求积分得出，即

$$W=\int_0^W\mathrm{d}W=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0L}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

利用式（13－21），还可求得该电容器的电容为

$$C=\frac{Q^2}{2W}=\frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0L}{\ln(R_2/R_1)}$$

与 13.2 节中的结果一致.

思考题

13－1　有人说："在任何情况下，导体都是一个等势体." 这句话对吗？

13－2　一个孤立导体球带有电荷量 Q，其表面附近的场强沿什么方向？当把另一带电体移近这个导体球时，球表面附近的场强将沿什么方向？其上电荷分布是否均匀？其表面是否等电势？电势有没有变化？球体内任一点的场强有无变化？

13－3　若一带电导体表面上某点附近电荷面密度为 σ，这时该点外侧附近的场强大小为 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. 如果将某一导体移近，该场强是否改变？公式 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$是否仍成立？

13－4　使一孤立导体球带正电荷，这孤立导体球的质量是增加、减少还是不变？

13－5　在一孤立导体球壳的中心放一点电荷，球壳内、外表面上的电荷分布是否均匀？如果点电荷偏离球心，则情况如何？

13－6　如何能使导体

（1）净电荷为零而电势不为零；

（2）有过剩的正或负电荷，而其电势为零；

（3）有过剩的负电荷而其电势为正；

（4）有过剩的正电荷而其电势为负.

13－7　将一个带正电的导体 A 移近一不带电的绝缘导体 B 时，导体 B 的电势是升高还是降低？为什么？

13－8　**将一个带正电的导体 A 移近一接地的导体 B 时，导体 B 是否维持零电势？其上是否带电？**

13－9　**把一个带电物体移近一个导体壳，带电体单独在导体壳的腔内产生的电场是否为零？静电屏蔽效应是如何发生的？**

13－10　**离点电荷 q 为 r 的 P 点的场强为 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$，现将点电荷用一金属球壳包围起来，分别讨论 q 在球心或不在球心时 P 点场强是否改变？若改用金属圆筒包围电荷，P 点场强是否改变？（只讨论 P 点在金属球壳及金属圆筒外的情况.）**

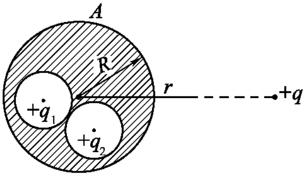
13－11　**一带电导体放在封闭的金属壳内部，**

（1）**若将另一带电导体从外面移近金属壳，壳内的电场是否会改变？金属壳及壳内带电体的电势是否会改变？金属壳和壳内带电体间的电势差是否会改变？**

（2）**若将金属壳内部的带电导体在壳内移动或与壳接触时，壳外部的电场是否会改变？**

（3）**如果壳内有两个带等值异号电荷的带电体，则壳外的电场如何？**

13－12　**如图所示，在金属球 A 内有两个球形空腔，此金属球整体上不带电. 在两空腔中心各放置一点电荷 $+q_1$ 和 $+q_2$. 此外在金属球 A 外很远处（$r\gg R$）放置一点电荷 $+q$，点电荷 $+q$ 不影响金属球 A 上的电荷分布. 试分析作用在 A，$+q_1$，$+q_2$，$+q$ 上的静电场力各为多少？**



思考题 13－12 图

13－13　**有人说："电容是描述电容器储存电荷能力的一个物理量，从公式 $C=Q/U_{+-}$ 来看，若 Q 为零，则 C 也为零，所以不带电的电容器，其电容为零." 试指出此话中的错误.**

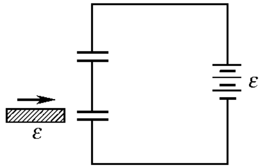
13－14　**把一空气电容器与电源连接，对其充电. 若充电后保持与电源连接，把它浸入煤油中，问电容器的电容、极板间的电场、两极板间的电势差、电容器两极板上的电量和电容器储存的电场能量发生什么变化？**

13－15　**上题中若充电后与电源断开，则情况又如何？**

13－16　**如图所示，将两个完全相同的空气电容器连接起来，并与电源保持连接. 若将一电介质板放进一个电容器的两极板间（假定没有摩擦），试定性地描述各电容器上电量、电容、电势差与所储存的电场能量发生的变化.**

13－17　**电介质的极化现象和导体的静电感应，两者的微观过程和宏观表现各有什么区别？**

13－18　**把两个电容各为 C_1 和 C_2 的电容器串联后进行充电，然后断开电源，把它们改成并联，问它们的电能是增加还是减少？为什么？**



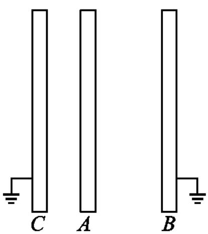
思考题 13－16 图

习题 13

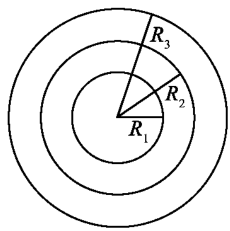
13－1　如图所示，三块平行平板 A，B 和 C，面积均为 $200\ \mathrm{cm}^2$，A，B 相距 $4\ \mathrm{mm}$，A，C 相距 $2\ \mathrm{mm}$. 若 A 板带电 $3\times10^{-7}\ \mathrm{C}$，$B$，$C$ 板均接地，忽略边缘效应，求：

（1）B 和 C 板上感应电荷各为多少？

（2）A 板的电势为多少？



题 13－1 图



题 13－3 图

13－2　一点电荷 $+q$ 置于带电荷为 $-q$ 的金属球壳中心，球壳的内半径为 b，外半径为 c. 试问球壳上的电荷如何分布？并求场强分布.

13－3　如图所示，半径为 R_1 的导体球带有电荷 q，球外有一个内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳，球壳上带有电荷 Q. 求：

（1）球及球壳的电势 U_1 和 U_2；

（2）球和球壳间的电势差 U_{12}；

（3）以导线把球和球壳连接在一起后，U_1，U_2 和 U_{12} 分别为多少？

（4）在情形（1），（2）中，若球壳接地，U_1，U_2 和 U_{12} 分别为多少？

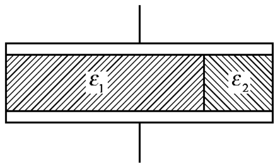
（5）设球壳离地面很远，若内球接地，情况如何？

13－4　一带电导体球半径为 R_1，其外同心地罩以内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的带电导体球壳. 已知导体球的电势为 U_1，球壳上带电为 Q，试求此系统的电势和场强的分布.

13－5　一细的长直导线，电荷线密度为 λ_1，放在一长直厚壁金属圆筒的轴线上，圆筒单位长度所带电荷为 λ_2，圆筒的内半径为 b，外半径为 c. 试求场强分布.

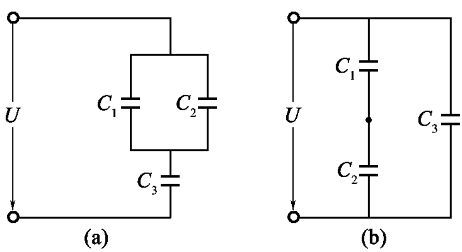
13－6　两块相互平行的大金属板，板面积均为 S，间距为 d，用电源使两板分别维持在电势 U 和零电势. 现将第三块相同面积而厚度可忽略的金属板插在两板的正中间，已知该板上原带有电荷 q，求该板的电势.

13－7　一平行板电容器（极板面积为 S，间距为 d）中充满两种电介质（如图所示），设两种电介质在极板间的面积比 $S_1/S_2=3$，试计算其电容. 如两电介质尺寸相同，电容又如何？



题 13－7 图

13－8　若 $C_1=10\ \mu\text{F}$，$C_2=5\ \mu\text{F}$，$C_3=4\ \mu\text{F}$，$U=100$ V. 求图示电容器组的等效电容和各电容器上的电压.



题 13－8 图

13－9　平行板电容器的极板面积 $S=2.0\times10^{-2}\ \text{m}^2$，极板间充满两层电介质，一层厚度 $d_1=2$ mm，相对电容率 $\varepsilon_{r1}=5$；另一层厚度为 $d_2=3$ mm，相对电容率 $\varepsilon_{r2}=2$. 求：

（1）此电容器的电容；

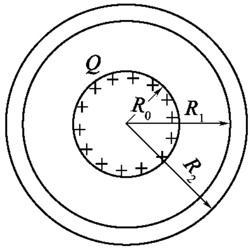
（2）如以 3800 V 的电压加在电容器两极板上，则极板上的电荷面密度、极板间的电位移矢量和电介质内场强的大小分别为多少？

13－10　半径为 R_0 的金属球带有电荷 Q，球外有一层均匀电介质的同心球壳，其内、外半径分别为 R_1 和 R_2，相对电容率为 ε_r（如图所示），求：

（1）电介质内、外的电位移和场强分布；

（2）电介质内、外的电势分布.

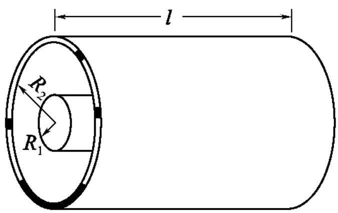
13－11　两个同心的薄金属球壳，半径分别为 $R_1=2$ cm 和 $R_2=6$ cm. 两球壳间充满两层均匀电介质，它们的相对电容率分别为 $\varepsilon_{r1}=6$ 和 $\varepsilon_{r2}=3$. 两层电介质的分界面半径 $R=4$ cm. 设内球壳带电量为 $Q=-6\times10^{-8}$C，求：



题 13－10 图

（1）电位移和场强分布；

（2）两球壳之间的电势差.



题 13－12 图

13－12　圆柱形电容器是由半径为 R_1 的导线和与它同轴的导体圆筒构成，圆筒内半径为 R_2，长为 l，其间充满了相对电容率为 ε_r 的电介质（如图所示），设导线沿轴线单位长度上的电荷为 λ_0，圆筒上单位长度的电荷为 $-\lambda_0$，忽略边缘效应. 求：

（1）电介质中的电位移和场强分布；

（2）此电容器的电容.

13－13　有一平行板空气电容器，每块极板的面积均为 S，两板间距为 d. 今以厚度为 $d'(d'<d)$ 的铜板平行地插入电容器，计算：

（1）此时电容器的电容. 铜板离极板的距离对这一结果有无影响？

（2）现使电容器充电到两极板的电势差为 U_0 后与电源断开，再把铜板从电容器中抽出，外力需做多少功？

（3）如果插入的是一块同样厚度 d' 的，相对电容率为 ε_r 的均匀电介质板，（1），（2）的结果又如何？

13－14　一平行板电容器内有两层介质，相对介电容率分别为 $\varepsilon_{r1}=4$ 和 $\varepsilon_{r2}=2$，厚度分别为 $d_1=2\ \mathrm{mm}$ 和 $d_2=3\ \mathrm{mm}$，极板面积为 $S=50\ \mathrm{cm}^2$，两极板间电压为 200 V. 求：

（1）每层电介质中场强的大小；

（2）每层电介质中的电场能量密度；

（3）每层电介质中的总电场能量；

（4）用电容器的能量公式来计算总能量.

13－15　在电容率为 ε 的无限大的均匀电介质中，有一半径为 R 的导体球带电 Q. 求电场的能量.

13－16　半径为 $R_1=2.0\ \mathrm{cm}$ 的导体球带电 $Q=3.0\times10^{-8}\ \mathrm{C}$，球外套有一内、外半径分别为 $R_2=4.0\ \mathrm{cm}$ 和 $R_3=5.0\ \mathrm{cm}$ 的导体球壳，球与壳之间以及壳外空间均为空气. 求：

（1）整个电场空间中的电场能量；

（2）如果将导体球壳接地，再计算整个电场空间中的电场能量，并由此求其电容.

13－17　两个同轴的圆柱，长度都是 l，半径分别 R_1 和 R_2，这两个圆柱带有等值异号电荷 Q，两圆柱之间充满电容率为 ε 的电介质. 忽略边缘效应，试求：

（1）在半径为 $r(R_1<r<R_2)$ 厚为 $\mathrm{d}r$ 的圆柱壳中任一点的电场能量密度是多少？

（2）这圆柱壳中的总电场能量是多少？

（3）电介质中的总电场能量是多少？

（4）从电介质中的总电场能量求圆柱形电容器的电容.

13－18　圆柱电容器由一长直导线和套在它外面的同轴导体圆筒构成，设导线的半径为 a，圆筒的内半径为 b. 证明：这电容器所储存的电场能量有一半是在半径 $r=\sqrt{ab}$ 的圆柱体内.

13－19　设面积 S 的空气平行板电容器，两极板间的距离为 d，其电容为 C_0. 今在此电容器中平行地插入一相对电容率为 ε_r 的电介质板，这时电容器的电容变为 C. 试证电介质板的厚度为

$$d'=\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r-1}\frac{C-C_0}{C}d$$

13－20　一个平行板电容器面积为 S，板间距离为 y_0，下板在 $y=0$ 处，上板在 $y=y_0$ 处. 充满板间的电介质的相对电容率 ε_r 随 y 而改变，其关系为

$$\varepsilon_r=1+\frac{3}{y_0}y$$

试求此电容器的电容.

第 14 章　稳恒电流与稳恒电场

电荷的定向运动形成电流，电流不随时间变化叫稳恒电流．电流为稳恒电流时，电荷产生的电场叫稳恒电场，稳恒电流与稳恒电场是同时存在的．本章主要讨论电流的描述、稳恒电流的形成及性质、电源、电动势和稳恒电路的基本规律．

14.1　电流　电流密度

电流有金属导体中的电流、半导体中的电流，还有电解质溶液、电离气体中的电流等．它们形成的机制不同，即载流子不同，但描述的方法相同，如规定正电荷的运动方向为电流的方向等．下面以金属导体中的电流为例来说明．

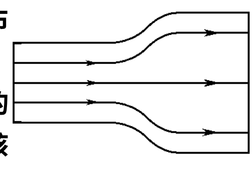
14.1.1　电流强度　电流密度

单位时间通过导体中某截面的电荷量叫做该截面的电流强度（简称电流），用 I 表示．设 $\mathrm{d}t$ 时间通过截面 S 的电荷量为 $\mathrm{d}q$，则

$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{14-1}$$

在国际制中电流的单位是安培（A）．

电流强度表示电流在一个截面上的整体情况，但不能表示电流在该截面上各点的分布．当电流在粗细不匀的导体中流动或在大块导体中流动时，电流的分布一般不是均匀的，就必须考虑电流在导体中各点的分布情况，如图 14－1 所示．为此引入电流密度的概念．



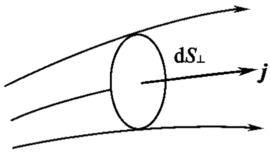
14－1　导体中的电流

导体中某点电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$，其方向沿该点处正电荷的运动方向（该方向单位矢量为 $\boldsymbol{j}_0$），其大小等于通过位于该点的单位垂面（垂直该点处正电荷运动方向的单位面积）的

电流强度,即

$$\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_{\perp}}\boldsymbol{j}_0 \quad j=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_{\perp}} \tag{14-2}$$

$\mathrm{d}I$ 为通过垂直面元 $\mathrm{d}S_{\perp}$ 的电流强度,如图 14－2 所示.



14－2　电流密度矢量

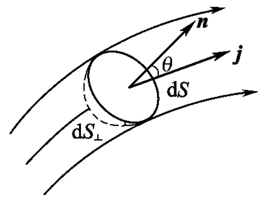


图 14－3　通过面元 dS 的电流

导体中电流的分布还可用电流线形象描述. 电流线是这样的曲线,其上任意一点切线方向为该点处电流密度的方向,这样画出的电流线如图 14－2 所示,图 14－1 实际上已经画出了电流线.

由图 14－3 可知,通过面元 $\mathrm{d}S$ 的电流等于通过垂直面元 $\mathrm{d}S_{\perp}$ 的电流,$\mathrm{d}S_{\perp}$ 是 $\mathrm{d}S$ 在垂直($\mathrm{d}S$ 处的)电流密度的平面上的投影. 设 $\boldsymbol{n}$ 为面元 $\mathrm{d}S$ 的法线单位矢量,与 j 的夹角为 θ,则通过 $\mathrm{d}S$ 的电流

$$\mathrm{d}I=j\mathrm{d}S_{\perp}=j\mathrm{d}S\cos\theta=\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14-3}$$

$\mathrm{d}I$ 有正负,$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时,$\mathrm{d}I>0$,$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时 $\mathrm{d}I<0$.

通过导体中截面 S 的电流

$$I=\iint_S \mathrm{d}I=\iint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14-4}$$

若 S 为导体中的闭合曲面,则

$$I=\oiint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14-5}$$

因流出闭合面的电流为正$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,流入闭合面的电流为负$\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$,所以 I 等于净流出 S 面的电流,即单位时间流出闭合面 S 的正电荷量.

14.1.2　电流的连续性方程　稳恒电流

由电荷守恒定律可知,单位时间从闭合面 S 内流出的正电荷量等于单位时间闭合面 S 内电荷 q 的减少量,即

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{14-6}$$

上式叫电流的连续性方程.

稳恒电流的定义是:电流密度 j 在空间的分布不随时间变化.由稳恒电流的定义可以推得,对于稳恒电流有

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{14-7}$$

用反证法说明上式.若 $\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} > 0$ 即有正电荷从闭合面 S 内流出,因电流稳恒 j 不变,所以单位时间流出 S 面的正电荷量 $\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为恒量,那么闭合面 S 内的电荷量呈负增长,直到负无限大,这是不可能的.反之 $\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} < 0$ 情况相反也不可能,因而只有 $\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$.

式(14-7)是稳恒电流的基本性质,它说明稳恒电流的电流线是闭合的,这要求电路必须是闭合的.

由式(14-6)和式(14-7)得,电流为稳恒电流时

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{14-8}$$

即空间电荷量的分布不随时间变化,这是形成稳恒电流的条件.

14.1.3 稳恒电场

空间电荷量分布不随时间变化时由运动电荷产生的电场叫稳恒电场.由于产生稳恒电场的电荷在空间的分布不随时间变化,所以稳恒电场的基本规律与静电场相同,即高斯定理和环路定理

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\sum\limits_{(S内)} q_i}{\varepsilon_0} \qquad \oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

由环路定理可以引入电势和电势差的概念,这是电路中存在电势和电势差的理论根据.

稳恒电场与静电场有相同处也有区别(1)产生静电场的电荷静止,产生稳恒电场的电荷运动;(2)静电场中的导体达到静电平衡时,导体内部 $E=0$,稳恒电场中的导体其内部 $E\neq0$;(3)维持静电场不消耗能量,维持稳恒电场要消耗能量(电流产生焦耳热消耗电能,需将其他形式的能量转化成电能来补充才能维持稳

恒电场).

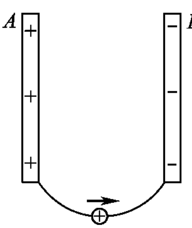
电荷量分布不变产生稳恒电场,在稳恒电场力作用下电荷运动形成稳恒电流,所以稳恒电场是形成稳恒电流的条件. 那么如何形成稳恒电场呢?这就需要电源.

14.2 电源　电动势

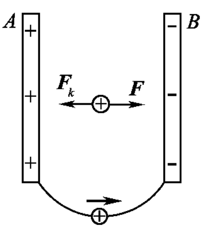
14.2.1 电源　电动势

1. 电　源

先说明只有静电力是不能形成并维持稳恒电流的. 如图 14-4a,设 A,B 为两个带等量异号电荷的导体板,用一根导线连接 A,B,正电荷在静电力的作用下沿导线从 A 板流到 B 板,直到 A,B 两板的电荷中和到零,电流也从无到有再变成零,不是稳恒电流.



(a) 静电力不能形成稳恒电流



(b) 电源内部的非静电力

图 14-4

要维持电流的恒定,必须将流到 B 板的正电荷经两板内部送回到 A 板,这靠静电力是不可能完成的,因正电荷在两板内部受的静电力 $\boldsymbol{F}$ 方向由 A 指向 B. 将正电荷由 B 送回 A 需要非静电力 $\boldsymbol{F}_k$,它的方向由 B 指向 A,如图 14-4b 所示. 当 $\boldsymbol{F}_k=-\boldsymbol{F}$ 时,单位时间经导线由 A 板流到 B 板的正电荷量等于沿 A,B 内部由 B 板流到 A 板的正电荷量,这时 A,B 两板上的电荷分布不变(电场为稳恒电场),电流为稳恒电流. 由上面的分析可以说形成稳恒电流的条件是:需要非静电力,将正电荷从电势低的地方送回电势高的地方. 前面三处提到形成稳恒电

流的条件，最根本的是需要非静电力. 形成稳恒电流的另一个条件是电路闭合.

电源是提供非静电力的装置. 不同电源产生非静电力的机制不同，蓄电池是通过化学作用产生非静电力(化学亲和力)；发电机是通过在磁场中移动导体产生作用在导体内部电子上的非静电力(洛伦兹力). 图 14-4b 中的 A,B 板为电源的正极和负极，当电荷通过其内部时受到非静电力的作用.

从能量转化的观点看，正电荷在非静电力的作用下，经电源内部由负极运动到正极，非静电力做正功，正电荷的电势能增加，当增加的电势能正好等于正电荷沿外电路由正极运动到负极所减少的电势能(转化为焦耳热)时，电流为稳恒电流. 因此电源是将其他形式的能量(化学能、机械能等)转化成电能的装置，表示电源的特征即确定它将其他形式能量转化成电能的本领，即做功的本领.

2. 电动势

电动势是表示电源做功本领大小的物理量，它在数值上等于将单位正电荷经电源内部由负极移到正极非静电力所做的功，用 ε 表示. 即

$$\varepsilon=\frac{\int_{-内}^{+}\boldsymbol{F}_k\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{q}=\int_{-内}^{+}\boldsymbol{E}_k\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{14-9}$$

$\boldsymbol{E}_k=\dfrac{\boldsymbol{F}}{q}$ 为单位正电荷所受的非静电力，也叫非静电性场强. 理想电源的电动势在数值上也等于单位正电荷从负极移到正极增加的电势能或等于从负极到正极电势的增加.

电动势由电源本身决定，对于一定的电源 ε 是一恒量，与外电路无关. 在国际制中电动势的单位为伏特(V). 电动势为标量，但常将非静电力驱动正电荷运动的方向叫做电动势的方向. 电源电动势的方向由负极经电源内部指向正极.

一般情况下整个导体回路各处均有非静电力，电动势等于将单位正电荷沿回路移动一周非静电力所做的功

$$\varepsilon=\oint_L \boldsymbol{E}_k\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{14-10}$$

电动势的方向为非静电力驱动正电荷运动的方向.

14.2.2 欧姆定律的微分形式

导体中各点的电流分布用电流密度矢量 j 表示，而电流是在电场力作用下电荷做定向运动形成的，因此任一点的 j 与该点的场强 E 有密切关系. 下面用

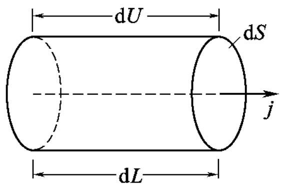
欧姆定律导出 j 与 E 的关系.

在导体中取一长为 $\mathrm{d}L$ 横截面积为 $\mathrm{d}S$ 的柱形导体(如图 14－5 所示),有

$$I=j\mathrm{d}S \quad \mathrm{d}U=E\mathrm{d}L \quad \mathrm{d}R=\rho\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}$$

由欧姆定律 $I=\dfrac{U}{R}$ 得

$$j\mathrm{d}S=\frac{E\mathrm{d}L}{\rho\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}}=\frac{E}{\rho}\mathrm{d}S$$



14－5　欧姆定律微分形式

所以

$$j=\frac{E}{\rho}=\sigma E$$

可以证明 j 与 E 方向相同(通过分析载流子的运动可得),将上式写成矢量式得欧姆定律的微分形式

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{14-11}$$

ρ 为导体的电阻率,σ 为导体的电导率. 在国际制中,电阻率的单位为欧姆·米($\Omega\cdot\mathrm{m}$),电导率的单位为西门子($\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$). 式(14－11)在实际问题中经常用到.

在没有非静电力的导体中,根据稳恒电流的基本性质式(14－7)和欧姆定律的微分形式式(14－11)可得

$$\oiint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oiint_S \sigma\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

设导体均匀即 σ 为常量,则可得

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

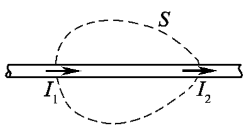
由高斯定理可知,这时闭合面 S 内 $q=0$. 因 S 可任意选取,这说明在稳恒电流条件下,均匀导体内没有净电荷,电荷只能分布在导体的非均匀处或分界面上. 稳恒电场正是由这些电荷产生的.

14.2.3　稳恒电路的基本规律

电路中的电流为稳恒电流时电路叫稳恒电路，下面就稳恒电路的基本规律及其物理原理做简要介绍，应用上不作详细讨论.

1. 无支路电路的电流关系

无支路电路的电流强度相等. 如图 14－6 所示，通过闭合面 S 的电流等于 $I_1+I_2=0$，所以 $I_1=-I_2$，即 $|I_1|=|I_2|$.



14－6　各截面电流相等

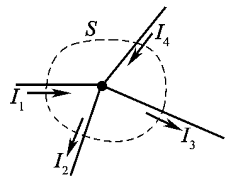


图 14－7　基尔霍夫第一方程

2. 基尔霍夫第一方程

电路中的分叉点叫节点，基尔霍夫第一方程是：流入节点的电流和流出节点的电流的代数和等于零（注意流入电流为负与流出电流为正反号），即

$$\sum_i I_i = 0 \tag{14－12}$$

如果电流取绝对值，则流入节点的电流之和等于流出节点的电流之和. 即

$$\sum_i |I_{i入}| = \sum_j |I_{j出}| \tag{14－13}$$

如图 14－7，通过闭合面 S 的电流等于 $I_1+I_2+I_3+I_4=0$. $I_1+I_4=-(I_2+I_3)$ 因 $I_1<0, I_4<0, I_2>0, I_3>0$，所以 $|I_1|+|I_4|=I_2+I_3$.

3. 基尔霍夫第二方程

由环路定理可得基尔霍夫第二方程：沿回路绕行一周电势降低（或电势升高）的代数和等于零.

即

$$\sum_i(-\Delta U_i) = 0 \tag{14－14a}$$

或

$$\sum_i \Delta U_i = 0 \tag{14－14b}$$

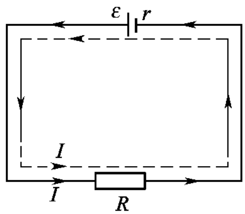
当绕行方向与电源电动势方向相同时，电源上电势升高；当绕行方向与电源电动

势方向相反时，电源上电势降低.

作为一个例子说明全电路的欧姆定律. 如图 14－8 所示，设电流方向如图，沿电流方向绕行一周（绕向 l 与电流方向相同）电势降低的代数和为零，即

$$\sum_i(-\Delta U_i) = IR + Ir - \varepsilon = 0$$

得
$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \tag{14-15}$$



14－8　全电路欧姆定律

因绕向与电动势方向相同，电源上电势升高，电势降低为 $-\varepsilon$. 绕向与电流方向相同，电阻上电势降低，电势降低分别为 IR 和 Ir.

4. 一段含源电路的欧姆定律

举例说明，如图 14－9a，A，B 两点的电势差为

$$U_A - U_B = \varepsilon - Ir - IR$$

AB 方向与电动势方向相反，电源上电势降低，电势降低为 ε，AB 方向与电流方向相反，电阻上电势升高，电势降低为负.

(a) 电源放电　　(b) 电源充电

图 14－9

如图 14－9b 所示，A，B 两点的电势差为

$$U_A - U_B = \varepsilon + Ir + IR$$

AB 方向与电动势方向相反，电源上电势降低，电势降低为 ε，AB 方向与电流方向相同，电阻上电势降低，电势降低为正.

将上面两种情况概括为：一段含源电路两端的电势降低等于这段电路上各电阻电势降低之和减去电路中电源的电动势之和，即

$$U_A - U_B = \sum IR_i - \sum \varepsilon_i \tag{14-16}$$

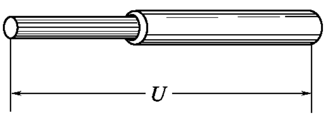
式中约定:由 A 到 B 的电流 I 为正,反之为负. 方向与 AB 相同的电动势 ε_i 为正,反之为负.

思考题

14－1　什么是稳恒电流?什么是稳恒电场?

14－2　实现稳恒电流和稳恒电场的条件是什么?

14－3　两根截面不相同而材料相同的金属导体如图所示串接在一起,两端加一定电压. 问通过这两根导体的电流密度是否相同?两导体内的电场强度是否相同?如果两导体的长度相等,两导体上的电压是否相同?



思考题 14－3 图

14－4　一铜线表面涂以银层,若在导线两端加上给定的电压,此时铜线和银层中的电场强度、电流密度以及电流是否都相同?

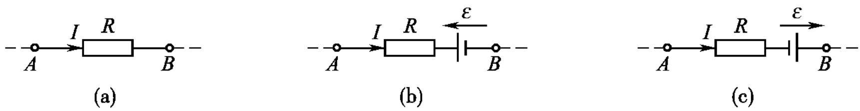
14－5　在导体中,电流密度不为零(即 $j\neq0$)的地方,电荷体密度 ρ 可否等于零?

14－6　既然电子的定向漂移速度很小,为什么开关一接通屋内的电灯立刻就亮了?

14－7　电动势与电势差有何区别?

14－8　一段包含电源的电路,如果它两端有电势差,这段电路中是否一定有电流流过,两端电势差为零是否一定没有电流通过?

14－9　在如图所示的三种情形中,A 点的电势 U_A 是否都大于 B 点电势 U_B?若已知 $U_A>U_B$,电流是否一定从 A 流向 B?



思考题 14－9 图

14－10　能否直接用电压表精确测出电源的电动势?为什么

习题 14

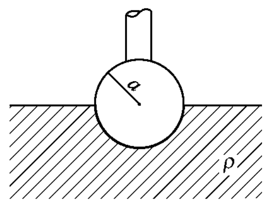
14－1　一铜导线载有 10 A 的电流,在 20 s 内有多少电子流过它的横截面?若导线的截面积 $S=1.0\ \mathrm{mm^2}$,自由电子数密度 $n=8.5\times10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$,问自由电子沿导线漂移 1.0 cm需多长时间?

14－2　一铜棒横截面积为 $20\times80\ \mathrm{mm^2}$,长为 2.0 m,两端的电势差为 50 mV. 已知铜的电导率 $\sigma=5.7\times10^7\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m^{-1}}$,铜内自由电子的电荷体密度为 $1.36\times10^{10}\ \mathrm{C\cdot m^{-3}}$.

求:(1)它的电阻;(2)电流;(3)电流密度;(4)棒内的电场强度;(5)棒内电子的漂移速度.

14－3　一同轴电缆,长 $L=10.0$ m,内半径 $r_1=1.0$ mm,外半径 $r_2=8$ mm,中间充满电阻率 $\rho=1.00\times10^{12}\,\Omega\cdot$m 的物质,若电缆两圆柱面电势差为 $V=600$ V,求其漏电电流.

14－4　将大地看成均匀的导电介质,并设大地的电阻率为 ρ. 将半径为 a 的球形电极的一半埋于地下,如图所示,求该电极的接地电阻.



题 14－4 图

14－5　两根截面积分别为 S_1 及 S_2,长度均为 L,电导率均为 σ 的铜杆串联在一起,其两端的电压为 V,求两杆中的电流密度、电场强度的大小.

14－6　为了节省铜,导线可改用铝线,但铝线不牢固,所以用钢线做芯线,外用多股铝线绕制成"钢芯铝绞线". 设有这种电缆 1000 m,其外径为 6.00 mm,内径为 2.00 mm. 若电缆两端之电压为 10.0 V,求:

(1) 这段电缆的电阻 R(钢的电阻率 $\rho_{钢}=1.5\times10^{-7}\,\Omega\cdot$m,铝的电阻率 $\rho_{铝}=2.5\times10^{-8}\,\Omega\cdot$m);

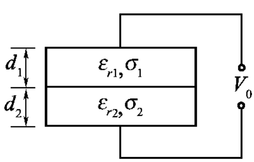
(2) 钢芯线和铝线内的电流密度及电场强度.

14－7　在如图所示的平行板电容器中,充有厚度分别为 d_1,d_2 的两层电介质,其面积均为 S,它们的相对介电常数分别为 ε_{r_1},ε_{r_2},电导率分别为 σ_1,σ_2. 设加在两极板间的电压为 V_0. 求:

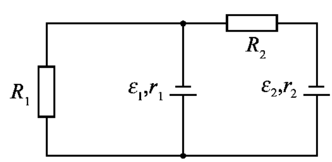
(1) 两种电介质的漏电电流密度;

(2) 两种电介质中的场强和电位移;

(3) 加在每种电介质上的电压.



题 14－7 图



题 14－10 图

14－8　有两个分别带有恒电量 $+q$ 及 $-q$ 的导体 A 与 B,将它们放入相对介电常数为 ε_r,电阻率为 ρ 的无限大各向同性的电介质中. 证明通过包围任一导体的封闭曲面的电流强度 $I=q/\rho\varepsilon_r\varepsilon_0$.

14－9　一蓄电池在充电时,通过的电流为 3 A,此时蓄电池的端电压为 4.25 V,当蓄电池在放电时,流出的电流为 4 A,此时端电压为 3.9 V,求此蓄电池的电动势及内阻.

14－10　如图所示,$\varepsilon_1=3.0$ V,$r_1=0.5\,\Omega$,$\varepsilon_2=6.0V$,$r_2=1.0\,\Omega$,$R_1=2.0\,\Omega$,$R_2=4.0\,\Omega$,求通过 R_1 和 R_2 的电流.

第 15 章　稳恒磁场

前面我们研究了静止电荷周围的电场的性质及其规律. 实验表明,在运动电荷的周围,不仅存在着电场还存在着磁场. 在本章里,主要研究磁场的基本性质和规律. 主要内容有:描述磁场基本特性的物理量——磁感应强度,电流的磁场的基本定律:毕奥-萨伐尔定律,安培环路定理和磁场中的高斯定理,安培定律,磁场对电流和运动电荷的作用及运动电荷在均匀电磁场中的运动.

15.1　磁场　磁感应强度

早在公元前,人们就已经知道了磁现象,11 世纪发明了指南针. 直到 19 世纪,发现了电流的磁场和磁场对电流的作用以后,人们才逐渐认识了电现象与磁现象的本质和联系,扩大了磁学的应用范围. 到 20 世纪初叶,原子结构理论的建立和发展,认识到磁场也是物质一种形式,磁力是运动电荷与运动电荷之间的相互作用.

根据对电场研究,知道静止电荷之间的相互作用是通过电场实现的. 与此相类似的,运动电荷之间的相互作用是通过磁场来实现的. 实验表明,运动电荷在(电流)周围的空间会产生磁场,而磁场又会对其中的另一些运动电荷(电流)产生相互作用,即:

运动电荷(电流)——磁场——运动电荷(电流)

一切磁现象源于电荷运动,那么对于天然磁石的磁性又怎样理解呢?这可以根据安培于 1822 年提出的分子电流假设来解释. 组成磁铁的磁分子等是环形电流,环形电流的形成是电子的轨道运动和自旋运动所至,若这些分子环流定向排列起来,在宏观上显示出磁效应. 这一环形电流,称为分子电流的观点与物质的电结构理论相符合,对于物质磁性的解释也是成功的.

磁感应强度,对于电场,人们引入电场强度来描述电场,并且用单位试验电

荷所受的力来定义电场强度的大小和方向. 与此相似,可以用磁场对运动的电荷的作用来描述磁场.

实验表明:在磁场中放一可自由转动的小磁针,在不同的位置一般有不同的指向. 通常,我们把小磁针在磁场中静止时 N 极所指的方向,规定为小磁针所在处磁场的方向,当电荷沿这一方向运动时,电荷不受力.

运动电荷在磁场中任一点 P 处受力的方向总是垂直于磁场和运动速度的方向所确定的平面. 其大小与运动电荷的电荷量 q,速度 v 与磁场方向的夹角 θ 有关:当电荷运动方向与磁场方向垂直时,它所受的磁力最大,其大小 $F_{\max}$ 与电荷电量 q 和速度 v 的大小的乘积成正比,但是对磁场中某一点来说,其比值 $\dfrac{F_{\max}}{qv}$ 是确定的,对于磁场中不同的点,这个比例一般来说有不同的确定值,把这个比值规定为磁场中 P 点处的磁感应强度的大小,即

$$B = \frac{F_{\max}}{qv} \tag{15-1}$$

由实验知,磁感应强度的方向沿 $\boldsymbol{F}_{\max} \times \boldsymbol{v}$,同此考虑 $\boldsymbol{B}$ 的大小和方向,将 $\boldsymbol{B}$ 写成矢量表示式

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{F}_{\max} \times \boldsymbol{v}}{qv^2} \tag{15-2}$$

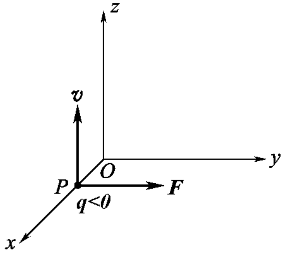
在 SI 中,磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的单位为特斯拉(T),即

$$1\mathrm{T} = \frac{1\mathrm{N}}{1\mathrm{C} \times 1\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$$

$\boldsymbol{B}$ 的单位有时也用高斯 Gauss 表示,两者的关系为

$$1\ \mathrm{G} = 1.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

如果磁场中某一区域内各点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 都相同,即在此一区域内各点 $\boldsymbol{B}$ 的大小相等,方向一致,则称此区域内磁场是均匀的. 地球磁场大小约为 0.5×10^{-4} T,一般永久磁铁磁场约为 10^{-2} T,大型电磁铁能产生磁场约 2 T.

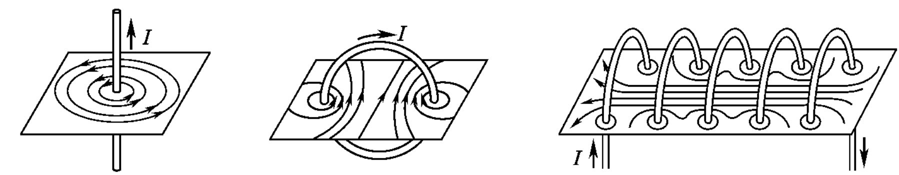


15－1　磁感应强度的定义

15.2 磁通量　磁场中的高斯定理

1. 磁感应线

对于磁场，也可以仿照电场中引入电场线的方法在磁场中引入磁感应线，磁感应线是一些有向曲线，让曲线上任意一点的切向方向代表此点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向，通过垂直于磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的单位面积上的条数正比于该处 $\boldsymbol{B}$ 的大小，磁感应线的分布可以用实验的方法显示出来，例如在磁场中放一块玻璃板，其上撒满铁屑，用手轻轻敲击，铁屑在板上会按磁感应线的形状排列. 图 15－2 为几种典型电流分布情形的磁感应线的分布图.



(a) 长直电流磁感应线　(b) 圆电流磁感应线　(c) 螺旋管磁感应线

图 15－2　几种典型电流分布情形的磁感应线

从以上图示中，我们可以看出磁感应线有以下性质：

① 磁场中磁感应线是闭合曲线，或者从无限远处来，又到无限远处去，没有起点，也没有终点. 磁感应线的这个特性和静电场中的电场线不同. 静电场中的电场线起始于正电荷，终止于负电荷.

② 由于磁场中一点的磁场的方向是确定的，因而磁感应线不会相交.

2. 磁通量　磁场高斯定理

通过磁场中某一曲面的磁感应线数目称为通过此曲面的磁通量，简称磁通，用符号 Φ_m 表示.

如图 15－3 所示，在均匀磁场中取一面积为 S 的平面，其单位法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间夹角为 θ. 由于 S 面在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 方向的投影为 $S_{\perp}=S\cos\theta$，因此，按磁通量的定义，则有

$$\Phi_m=BS\cos\theta$$

当 $\theta=0°$，即平面单位法线 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的方向相同，通过与 S 的磁通是最大，Φ_m

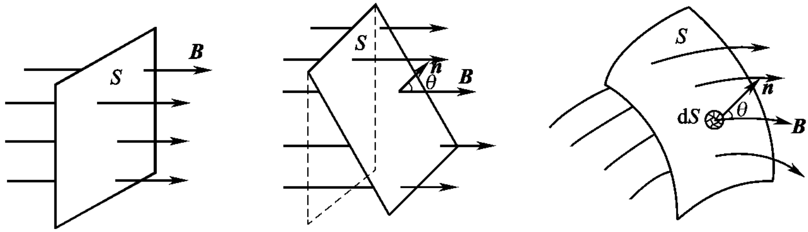


图 15－3　磁通量的计算

$=BS$. 当 $\theta=90°$，即平面单位法线 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 垂直通过 S 的磁通量为零. $\Phi_m=0$

在非均匀磁场中，怎样计算曲面 S 的磁通量呢？在如图 15－3 曲面 S 上取一面积元 $\mathrm{d}S$，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 上的磁感应强度可看成是均匀的，通过此面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi_m = B\mathrm{d}S\cos\theta = \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

通过此 S 面上的磁通量 Φ_m 等于通过这些面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 上磁通量的总和，即

$$\Phi_m = \int_S \mathrm{d}\Phi_m = \int_S B\cos\mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (15-3)$$

我们规定，$\boldsymbol{n}$ 的方向的垂直于曲面指向外为正，当 $\theta<\frac{\pi}{2}$，磁感应线从曲面内穿出，磁通量为正，而当磁感应线从曲面外穿入，磁通量是负的，见图 15－4. 由于磁感应线是闭合的，那么对某一封闭的曲面，穿入的等于穿出的，因此，通过任一闭合曲面的磁通量必为零，即

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad (15-4)$$

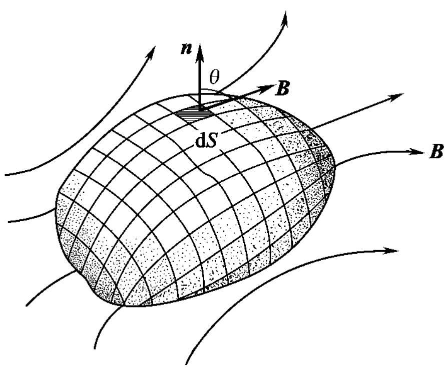


图 15－4　闭合曲面的磁通量

这个结论称为磁场的高斯定律. 它表明磁场的重要性质. 与静电学中的关于静电场的高斯定理 $\left(\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}\right)$ 形式相类似，但反映了磁场和静电场本质上的区别. 通过任意闭合曲面的电场强度通量可以不为零，而通过任意闭合曲面的磁通量必为零，前者说明静电场是有源场，其源是电荷；后者说明磁场是无源的.

在 SI 中，磁通量的单位为韦伯，其代号为韦（Wb）

$$1\ \mathrm{Wb}=1\ \mathrm{T}\times 1\ \mathrm{m}^2$$

15.3 毕奥-萨伐尔定律

15.3.1 毕奥-萨伐尔定律

在讨论任意带电体产生的电场时，曾把带电体分成许多电荷元，与此类似，在讨论任意形状的载流导线所产生的磁场时，我们把它分成许多的电流元，知道了电流元产生的磁场，再根据叠加原理进而求出任意形状的电流所产生的磁场. 但是电流元与点电荷不同，它不能在实验中独立出现. 通过大量的实验事实和理论推断，分析归纳，得出以下毕奥-萨伐尔定律，它给出电流元产生磁场的计算方法.

如图 15－5 所示在导线上取任意电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，它在任意一场点 P 处产生的磁感应强度的大小与电流元的大小 $I\mathrm{d}l$ 成正比，与电流元到 P 点的距离 r 的平方成反比，并且与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 同 $\boldsymbol{r}$ 矢量的夹角的正弦 $\sin\theta$ 成正比（$\boldsymbol{r}$ 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到 P 点的位矢）

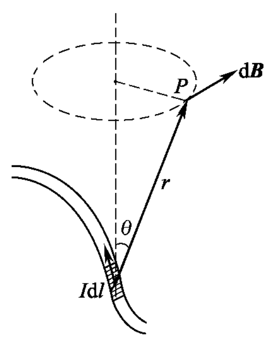
$\mathrm{d}B=k\dfrac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$，方向沿 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}$ 的方向，k 为比例系数，通常在 SI 中 $k=\dfrac{\mu_0}{4\pi}$，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{A}^{-2}$ 称为磁导率

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2} \tag{15-5}$$

通过分析知，$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向总是垂直于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 所确定的平面，并沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}$ 的方向，如图 15－5 所示.

因此，$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 可用以下矢量式表达

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{15-6}$$



15－5 毕奥-萨伐尔定律

根据磁场的叠加原理，可以求得整个载流导线在某点 P 处磁感应强度

$$\boldsymbol{B}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{15-7}$$

这是一个矢量积分式. 对于实际情况，我们应求出任意一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所产生的磁感应强度，进而分析整个载流导线产生的磁场的特征，选取适当的坐标系，把 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 化成标量积分，从而求出载流导线产生的磁感应强度.

15.3.2　毕奥-萨伐尔定律的应用

以上所述的毕奥-萨伐尔定律给出了计算任意载流导线所产生磁场的磁感应强度. 但是,实际上我们仅能对一些比较特殊的载流导线体系,通过计算求得其磁感应强度,下面举几个具有典型意义的例子.

1. 直线电流的磁场

如图 15-6 所示,设有一直导线载电流 I,求离导线为 a 的 P 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.

在直导线上取一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,$\boldsymbol{r}$ 为 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到 P 点的矢径,P 点到直导线的垂足为 O,电流元到 O 的距离为 l,根据式(15-6),$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在 P 处的磁感应强度大小是

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 所确定的平面,指向如图 15-6 所示,沿 z 轴负向. 由于导线上所有电流元在 P 点产生的磁场是同方向的,因此直导线在 P 点产生的 $\boldsymbol{B}$ 的数值是各电流元产生的 $\mathrm{d}B$ 的代数和.

$$B=\int\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

由图知,β 为$\overline{OP}$与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到 P 点连线之夹角.

$$\cos\beta=\sin\alpha$$

$$r=a\sec\beta\quad l=a\tan\beta$$

为 $\mathrm{d}l=a\sec^2\beta\mathrm{d}\beta$

代入上式化简,取积分上下限可得

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta\mathrm{d}\beta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)\qquad(15-8)$$

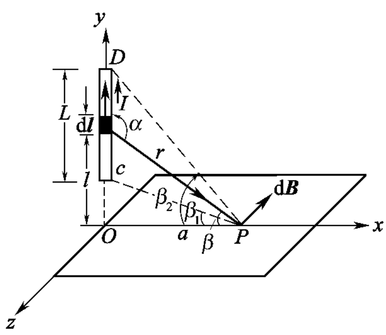


图 15-6　直电流磁场的计算

式中 β_1,β_2 分别是载流导线两端到 P 点的连线与$\overline{OP}$构成的夹角. 当 β 的转向(以$\overline{OP}$为始)与电流流向一致,$\beta>0$,当 β 的转向电流流向相反,$\beta<0$.

由式(15-8),当导线为无限长时

$$\beta_1\to-\frac{\pi}{2},\beta_2\to\frac{\pi}{2}$$

则

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \tag{15-9}$$

2. 圆电流轴线上的磁场

如图 15－7 所示，一电流为 I，半径为 R 的圆电流，其中心轴线上任意一点 P 到圆心 O 的距离为 x，求 P 点的磁感应强度.

电流元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在 P 处所产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 所确定的平面，沿 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}$ 方向，因此圆电流中各电流元在 P 点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 方向不同，它是分布在以 P 为顶点 PO 为轴，如图所示 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 为母线所成的一个圆锥面上. 将 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 分解为平行于轴向的分量 $\mathrm{d}B_{/\!/}$ 和与轴垂直的分量 $\mathrm{d}B_{\perp}$，由于对称性，$\mathrm{d}B_{\perp}$ 相互抵消，即

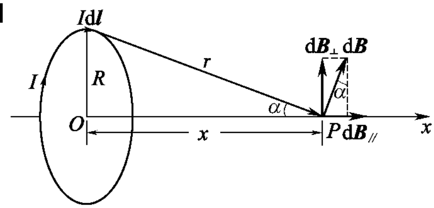


图 15－7 圆电流轴线上的磁场

$$B_{\perp}=\int \mathrm{d}B_{\perp}=0$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}$$

$$\mathrm{d}B_{/\!/}=\mathrm{d}B\sin\varphi=\mathrm{d}B\,\frac{R}{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}\frac{R}{r}$$

有

$$B=\int \mathrm{d}B_{/\!/}=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}\,\frac{R}{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{IR}{r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{2\pi R^2 I}{r^3}=\frac{\mu_0}{2}\,\frac{R^2 I}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{15-10}$$

$\boldsymbol{B}$ 垂直于圆电流，沿 x 轴正向与图中电流构成右手螺旋关系.

(1) 当 $x\to 0$，即为圆心处，其磁感应强度 B 为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R} \tag{15-11}$$

(2) 当距离 $x\gg R$ 圆半径时

$$B\approx\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\pi R^2 I}{x^3}$$

式 $\pi R^2=S$ 为圆面积，记 $\boldsymbol{p}_m=IS\boldsymbol{n}$ 称为线圈的磁矩. 其中 $\boldsymbol{n}$ 与电流 I 成右手螺旋关系. 此处，$\boldsymbol{B}$ 沿 $\boldsymbol{n}$ 方向，故

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}\boldsymbol{n}=\frac{\mu_0\boldsymbol{p}_m}{2\pi x^3} \tag{15-12}$$

与前面静电学中讲到的电偶极子的电场公式相类似.

3. 螺旋管轴线上的磁场

如图 15－8 所示，它是导线均匀绕在圆柱面上螺旋线圈，称螺旋管. 半径为

R，单位长匝数为 n，电流为 I. 线圈每匝看似一圆形电流，在螺旋管上取的一小段 $\mathrm{d}l$，其上共有 $n\mathrm{d}l$ 匝，可以把长度为 $\mathrm{d}l$ 的螺旋管上的小段看成电流强度为 $In\mathrm{d}l$ 的圆电流. 则这 $\mathrm{d}l$ 段在其轴上 P 点的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 R^2 nI}{2(R^2+l^2)^{3/2}}\mathrm{d}l$$

式中 l 是 $n\mathrm{d}l$ 匝线圈到 P 点的距离，由图中几何关系得

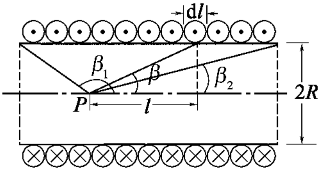


图 15－8　螺旋管轴线磁场计算

$$l=R\cot\beta$$

$$R^2+l^2=R^2\csc^2\beta$$

$$\mathrm{d}l=-R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$$

$$\mathrm{d}B=-\frac{\mu_0}{2}\cdot nI\sin\beta\mathrm{d}\beta$$

因为螺旋管各小段在 P 点产生的感应强度方向相同，因此整个螺旋管在 P 点的总场即为上式积分

$$B=\int\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}(-\sin\beta)\mathrm{d}\beta=\frac{\mu_0}{2}nI(\cos\beta_2-\cos\beta_1) \qquad (15-13)$$

上式 β_1 和 β_2 分别为 P 点到螺旋管两端连线与轴之间的夹角.

（1）无限长螺旋管，$\beta_1\to\pi$，$\beta_2\to0$，

$$B=\mu_0 nI \qquad (15—14)$$

其磁场是均匀的.

（2）在螺旋管一端，$\beta_1\to\frac{\pi}{2}$，$\beta_2\to0$，

则端点处

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI \qquad (15—15)$$

为无限长螺旋管场的一半，即长螺旋管一端的磁感应强度为螺旋管内部中央处磁感应强度的一半.

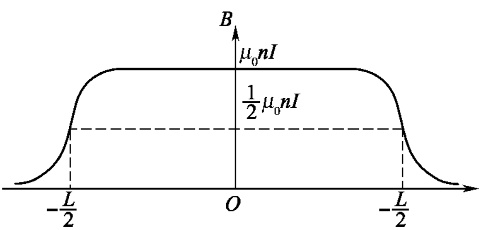


图 15－9　长螺旋管轴线上磁场分布

15.4 安培环路定理

在研究静电场时，发现电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿闭合回路积分即 $\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，它表明静电场是保守力场. 那么对于稳恒电流的磁场，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿闭合回路积分，即 $\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 等于什么呢？本节要讨论这个问题.

15.4.1 安培环路定理

对于稳恒磁场，积分 $\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，即 $\boldsymbol{B}$ 的环流遵从安培环路定理，在真空中的稳恒磁场，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 对闭合回路 L 的积分即 $\boldsymbol{B}$ 的环流等于穿过此回路的所有传导电流的代数和的 μ_0 倍，即

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum I \tag{15-16}$$

上式中，对于 L 内的电流 I 的正负规定是：当穿过回路的电流的方向与回路 L 的绕行方向成右手螺旋关系时，取正，否则取负，如果 I 不穿过回路 L，则对式(15－16)中 $\sum I$ 无贡献.

下面以长直电流的磁场来验证安培环路定理. 设无限长直载流导线载电流 I，它在以电流为轴，半径为 r 的圆周上的磁感应强度大小为 $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，方向沿圆的切线方向，如图 15－10 所示. 如果在垂直于电流的平面内作一任意闭合回路 L，电流穿过 L，计算 $\boldsymbol{B}$ 的环流.

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l = \int_L Br\,\mathrm{d}\varphi = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_L \mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$$

如果积分回路方向与图 15－10 中回路方向相反，则不难得到

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\mu_0 I$$

如果电流在积分回路 L 之外，如图 15－11 所示，我们可以将闭合回路 L 分

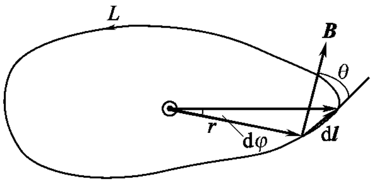


图 15－10　电流在回路内

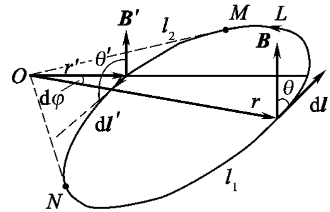


图 15－11　电流在回路外

为 l_1 和 l_2 两部分.

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{l_1}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{l_2}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\int \mathrm{d}\varphi-\int \mathrm{d}\varphi\right]=\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\varphi-\varphi)=0$$

可以证明,无论积分回路形状如何,也不论电流是什么形状,以上所述的安培环路定理都是成立的.

应该指出,上述安培环路定理仅适用于稳恒电流产生的稳恒磁场,而且是闭合的载流导线,对任意设想的一段导线不成立.

静电场的环流为零说明静电场是保守场,由此引入了电势能的概念,而磁场不具备这种性质,不能引入势能的概念,磁场的环流不为零表明磁场是有旋场,磁场通过任意闭合曲面的通量为零表明磁场是无源的,由此,我们常说磁场是无源场,是有旋场.

15.4.2　安培环路定理的应用

对静电场的情况,可以利用静电场的高斯定理方便求出某些具有对称性带电体的电场的分布,在磁场情形,利用安培环路定理同样可以方便求出某些具有对称性的载流导体的磁场分布.

1. 无限长载流圆柱导体内外的磁场

设电流 I 沿半经为 R 的圆柱形导体流动,电流均匀分布在导体的横截面上.且视为无限长,对于 $r>R$ 的体外一点 P,由电流分布的轴对称性可知,在过 P 点到轴距 r 为半径的圆周上,各点 $\boldsymbol{B}$ 的大小相同,而且一定沿圆周的切线方向(可取平行轴向的细长直电流 $\mathrm{d}I$ 和 $\mathrm{d}I'$,大小相等,它们在 P 点产生的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}'$的合成沿圆周切线,整个圆柱电流可分成许多长电流对).作一过 P 点半径为 r 的圆周,如图 15－12 所示,应用安培环路定理

$$\int_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_l B\mathrm{d}l=B\int_l \mathrm{d}l=B2\pi r=\mu_0 I$$

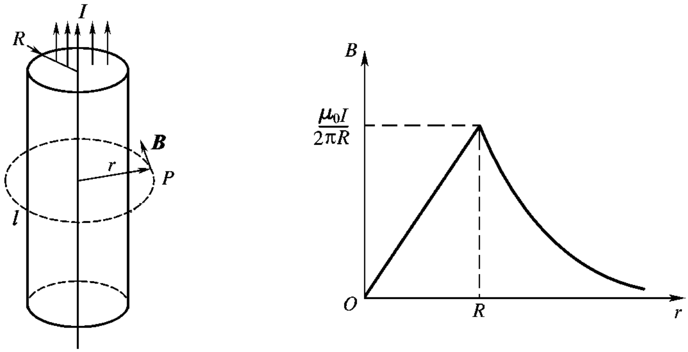


图 15－12　无限长载流圆柱的磁场

故

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad r>R$$

在 $r<R$ 体内的一点，也可作以 r 为半径的一闭合形圆周.

$$\int_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_l B\,\mathrm{d}l=B2\pi r=\mu_0\frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$$

在 $r<R$ 的圆柱体内，可见磁感应强度和离轴距离 r 成正比，$B-r$ 关系见图 15－12所示.

2．螺绕环电流的磁场

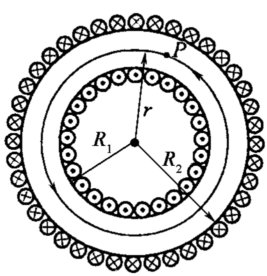
绕在空心圆环上的螺旋形线圈称为螺绕环，设螺绕环总匝数为 N，导线中通过电流为 I，且环半径比截面大很多，见图15－13. 根据对称性，在环内磁感应线是一些同心圆，磁感应强度大小相等，方向沿圆周切向，在螺旋环内取一磁感应线作为闭合回路，则有

$$\int_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\oint \mathrm{d}l=B2\pi r=\mu_0 NI$$

$$B=\mu_0\frac{N}{2\pi r}I$$

$n=\frac{N}{2\pi r}$，代表环上单位长度的线圈匝数

$$B=\mu_0 nI$$



15－13　螺绕环电流的磁场

由此可知螺绕环与无限长螺旋管一样，磁场全集中在管内，计算公式也是相类似的.

3. 无限大平面电流的磁场

设在无限大导体薄板中有均匀电流沿平面流动. 在垂直于电流方向的单位长上流过的电流为 i（电流密度）. 要求此电流产生的磁场，根据电流对称性分析，对于平面上方任意一点 P 处磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 平行于平面指向左. 在对称的 P' 点磁感应强度大小相等，方向相反，作如图 15－14 所示回路 $abcda$.

由安培环路定理有，

$$\int_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_b^c \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_c^d \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_d^a \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

在 bc，da 上 $\boldsymbol{B}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 垂直，ab 与 cd 上积分值相同

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\int_a^b B\,\mathrm{d}l = 2B\,\overline{ab} = \mu_0\,\overline{ab}i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

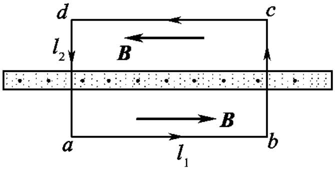


图 15－14　无限大平面电流的磁场

结果说明，无限大平面电流在两侧产生均匀磁场，而且两侧磁感应强度大小相等，方向相反.

由以上几个实例，可以清楚地看到，利用安培环路定理求磁场分布时，首先要根据电流的分布对称性分析磁场分布的对称性，再根据磁场的对称性，选取适当的闭合回路 L，在 L 上 $\boldsymbol{B}$ 的大小和方向具有对称性的特点，以使得 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 中的 $\boldsymbol{B}$ 能以标量的形式从积分号内提出来，然后计算 L 内穿过的电流，建立关于 B 和 I 的代数方程，以使 B 计算出来. 要指出的是，只有电流具有对称性以使磁场具有对称性才能用安培环路求磁场分布，一般来说，不是在任何情况下都能用安培环路定理求解磁场的.

15.5　运动电荷的磁场

电流是由电荷的运动形成的，因此电流所产生的磁场本质上应该是运动电荷产生的磁场的总效果. 一运动速度为 $\boldsymbol{v}$，电荷为 q 的带电粒子在其周围空间产生的磁场可以由毕奥-萨伐尔定律引导出来. 下面就讨论运动电荷的磁场.

设电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的截面为 S，导体内电粒子数密度为 n，单个粒子均带电量 $q>0$，速度 $\boldsymbol{v}$ 与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向一致如图 15－15 所示. 根据电流的定义，通过截面 S 的电流

与电荷运动速度的关系为：

$$I=qnvS$$

代入式(15－6)得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qnSv\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^3}\times\boldsymbol{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(nS\mathrm{d}l)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathrm{d}N\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

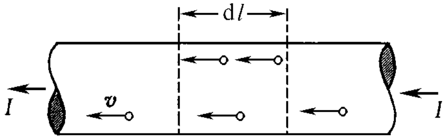


图 15－15　运动电荷与电流

式中 $\mathrm{d}N=nS\mathrm{d}l$ 为电流元内带电粒子数，上式速度为矢量. 因此，每个运动速度为 v，电荷为 q 的电荷产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}N}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\qquad(15-17)$$

当 $q>0$. $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ 方向一致；当 $q<0$，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ 方向相反. 如图 15－16 所示.

图 15－16　运动电荷的磁场

例 15－1　氢原子中的电子，以速度 $v=2.2\times10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 在半径为 $r=0.53\times10^{-10}\ \mathrm{m}$ 的圆周上，做匀速圆周运动. 求：(1)电子在轨道中心所产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$；(2)电子的轨道磁矩 $\boldsymbol{p}_m$.

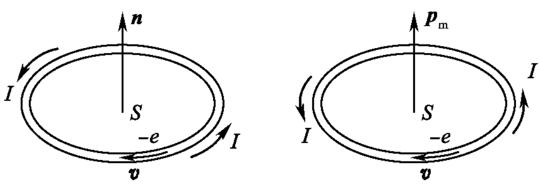


图 15－17　例 15－1 图

解　电子在轨道中心产生磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 大小，可根据运动电荷的磁场关系式(15－17)得

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}=\frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2}$$

求出：
$$B=10^{-7}\times\frac{1.6\times10^{-19}\times2.2\times10^{6}}{(0.53\times10^{-10})^{2}}=13\ \mathrm{T}$$

也可将电子在轨道的运动等效为圆电流来求中心的磁感应强度
$$I=\frac{e}{T}=e\cdot\frac{v}{2\pi r}=\frac{ev}{2\pi r}$$

应用圆电流的磁感应强度公式(15－11)
$$B=\frac{\mu_0 I}{2r}=\frac{\mu_0}{2r}\frac{ev}{2\pi r}=\frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2}$$

两种方法计算结果一样.因而可很方便地求得电子轨道磁矩大小为
$$p_m=IS=\frac{ev}{2\pi r}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}vre=0.93\times10^{-23}\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

按右手关系，$\boldsymbol{p}_m$ 方向垂直于环面.

15.6 磁场对载流导线的作用

15.6.1 安培定律

1. 安培定律

从前面的静电学已经知道，电场对电荷有作用力，与此类似磁场对电流(运动电荷)有作用力. 1820 年，安培经实验和理论研究，总结了一条结论：在磁场中，电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 受到的磁力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 与电流元大小 $I\mathrm{d}l$，电流元所在处的磁感应强度的大小 B，以及与 $\boldsymbol{B}$ 与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 之间的夹角 θ 的正弦成正比，即 $\mathrm{d}F=KI\mathrm{d}lB\sin\theta$；其方向与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 的方向一致，这一结论称为安培定律，在 SI 中比例系数 $K=1$，故
$$\mathrm{d}F=KI\mathrm{d}lB\sin\theta \tag{15-18}$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{15-19}$$

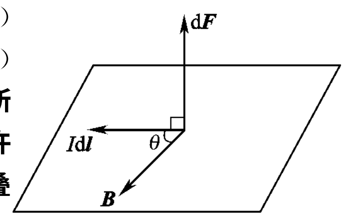
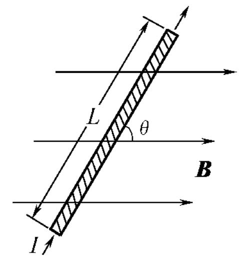


图 15－18　电流元安培力

知道了磁场对电流元的作用力(如图15－18所示)，这个力称为安培力，而载流导线可看成是由许多的电流元所组成. 计算载流导线受作用力，根据叠加原理，并利用积分即可求.
$$\boldsymbol{F}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\int I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{15-20}$$

由于载流导线上连续分布的电流元所受安培力分布于导线各部分，整个导线

受到的安培力是一种分布力，例如，长为 L 的直导线中载流 I，位于磁感应强度为 B 的均匀磁场中，设电流方向与 $\boldsymbol{B}$ 夹角 θ，如图(15－19)，图中各电流元所受磁力方向一致，故可直接积分，因此载流直导线所受的安培力大小为.



15－19　一段载流导线在均匀磁场中受的安培力

$$F=\int_0^l IB\sin\theta \mathrm{d}l = IBl\sin\theta$$

$\boldsymbol{F}$ 的方向垂直纸面向里. 显见当 $\theta=0$，即电流方向与磁场方向平行，受力 $F=0$，当电流方向与磁场方向垂直时，导线受力最大 $F_{\max}=IBl$ 其方向与 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 垂直.

2. 无限长平行载流直导线间的相互作用力　电流单

如图 15－20 所示，是两距离为 a 的平行直导线，其中分别通有同方向的电流 I_1 和 I_2. 现计算它们之间单位长度上所受的磁力. 为此，在导线 2 上取一电流 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$，根据毕奥–萨伐尔定律知，导线 1 在 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 处产生的磁感应强度的大小为

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

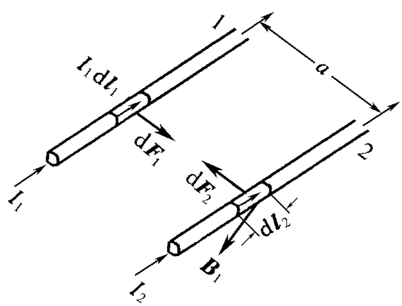


图 15－20　平行载流直导线间的相互作用力

方向如图示，垂直于两导线确定的平面，由安培定律得，电流 $I_2\mathrm{d}l_2$ 受到的力大小为

$$\mathrm{d}F_2=I_2\mathrm{d}l_2B_1=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\mathrm{d}l_2$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2$ 的方向在平行两导线确定的平面内，垂直于导线 2，指向导线 1. 导线 2 单位长度上受的安培力大小为

$$\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}l_2}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \qquad (15-21)$$

同理可得导线 1 单位长度上受的安培力大小为

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}l_1}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

方向指向 2. 因此，我们可以知道当两导线电流同向时，两导线吸引，电流相反时，则相斥.

在国际单位制中，电流强度的基本单位“安培”就是根据式(15－21)规定的. 真空中两根无限长的平行导线相距 1 m，通以大小相同的稳恒电流，当导线每米长度受的作用力为 2×10^{-7} N 时，此时导线中的电流强度大小规定为 1“安培”.

由这一规定可推算 μ_0 值

$$2\times10^{-7}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}=\mu_0\ \frac{1}{2\pi}\frac{1\times1}{1}\ \mathrm{A}^2\cdot\mathrm{m}^{-1}$$

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{A}^{-2}$$

这就是毕奥-萨伐尔定律中所规定的真空磁导率 μ_0 的值.

3. 载流线圈在磁场中受到的磁力矩

我们现在研究载流线圈在均匀磁场中受到的作用力,因为电路一般是闭合的,它有实际意义.

下面以刚性矩形线圈为例,见图 15－21 边长分别为 l_1 和 l_2,电流强度为 I,它可绕垂直于磁场 z 轴自由旋转,当线圈磁矩的方向 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 方向夹角为 θ(线圈平面与磁场成 θ 角)时,由安培定律知,导线 MP 和 NO 受力分别为

$$F_4=BIl_1\sin\varphi$$

$$F_3=BIl_1\sin(\pi-\varphi)=BIl_1\sin\varphi$$

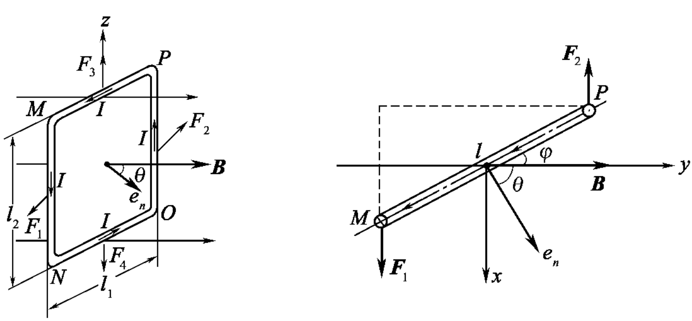


图 15－21　平面截流线圈在均匀磁场中受的力矩

此两力大小相等方向相反,作用在同一直线上,其合力为零,导线 MN 和 OP 与磁场垂直,所受的力分别为

$$F_1=F_2=BIl_2$$

此两力虽大小相等,方向相反,但不在同一直线上,因此合力为零,但组成一个 z 轴的力偶矩,这一力偶矩使线圈向法向方向旋转,力矩的大小为.

$$M=F_1\ \frac{l_1}{2}\cos\varphi+F_2\ \frac{l_1}{2}\cos\varphi=BIl_1l_2\cos\varphi$$

$$=BIS\cos\varphi=BIS\sin\theta=p_mB\sin\theta \qquad (15-22)$$

$S=l_1l_2$ 为线圈面积,$p_m=IS$ 为线圈的磁矩大小,以 $\boldsymbol{p}_m$ 的矢量表示,考虑力偶矩方向,则可用矢量表示

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}_m \times \boldsymbol{B} \tag{15-23}$$

以上结论是由矩形线圈特例导出的,其实适用于任意形状的平面线圈的情形. 下面讨论几种情况:

(1) 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$,此时线圈平面与 $\boldsymbol{B}$ 平行,$\boldsymbol{p}_m$ 与 $\boldsymbol{B}$ 垂直,线圈所受的磁力矩最大,$M_{\max}=BIS$

(2) 当 $\theta=0$ 时,此时线圈平面与 $\boldsymbol{B}$ 垂直,$\boldsymbol{p}_m$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同向,线圈所受磁力矩为零,处在稳定的平衡状态.

(3) $\theta=\pi$,此时线圈平面也与 $\boldsymbol{B}$ 垂直,但 $\boldsymbol{p}_m$ 与 $\boldsymbol{B}$ 反向,线圈所受磁力矩为零,处于平衡位置,但是为非稳定平衡,因为只要线圈受到扰动,在线圈就会偏离这个位置,在线圈受到磁力矩的作用下,使线圈的 $\boldsymbol{p}_m$ 朝向 $\boldsymbol{B}$ 转向,直到 $\boldsymbol{p}_m$ 转到与 $\boldsymbol{B}$ 方向一致为止.

磁场对载流线圈作用的规律是各种电动机和电流计的基本原理.

15.6.2 磁力的功

载流导线或载流线圈在磁场中运动时,所受到的磁力或磁力矩要对它们做功.

1. 载流导线在磁场中运动时磁力的功

我们先研究一段载流直导线在磁场中运动时,安培力做的功. 设一段长为 l 的载流导线 AB 与平行导轨构成闭合回路,电流 I 恒定(见图 15-22),均匀磁场垂直于纸面向外,导线 AB 受一安培力,方向向右,大小为

$$F=BIl$$

当导线 AB 从初始位置向右位移 Δx 距离时,安培力做功为

$$A = F\Delta x = BIl\Delta x = BI\Delta S = I\Delta\Phi \tag{15-24}$$

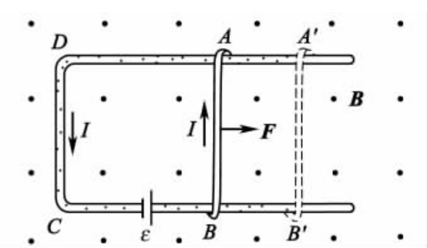


图 15-22 磁力的功

上式说明,当载流导线在磁场中运动时,如果电流保持不变,磁力所做的功等于电流强度与导线所扫过面积的磁通量的乘积.

2. 载流线圈在磁场中转动时磁力矩的功

如图 15-23 所示,一面积为 S,通有电流强度为 I 的线圈,在磁感应强度为

B 的匀强磁场中，线圈在磁场中受的磁力矩大小为

$$M = ISB\sin\varphi$$

当线圈转过微小角度 $d\varphi$ 时，磁力矩做功

$$dA = -BIS\sin\varphi d\varphi$$

式中考虑当 $d\varphi > 0$ 时，$\boldsymbol{M}$ 做负功，因此

$$dA = BISd(\cos\varphi) = Id(BS\cos\varphi) = Id\Phi$$

当上述线圈从 Φ_1 转到 Φ_2 的过程中，且电流 I 保持不变，磁力矩的功是

$$A = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} BIS\sin\varphi d\varphi = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi$$

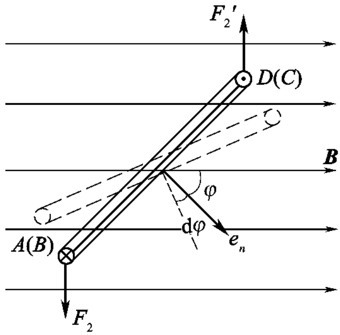


图 15-23　磁力矩的功

式中 Φ_1 和 Φ_2 分别表示线圈在 φ_1 和 φ_2 位置时，通过线圈的磁通量.

上式说明，在电流不变的情况下，磁力矩做的功与线圈中磁通量的增量成正比.

15.7　带电粒子在电场和磁场中的运动

15.7.1　带电粒子在磁场中的运动

1. 带电粒子在均匀磁场中的运动

带电粒子在电场和磁场中运动要受到力的作用，一般情况比较复杂，下面只讨论它们在均匀磁场中的运动的基本规律.

设一电量为 q，质量为 m 的粒子，以速度 $\boldsymbol{v}$ 进入磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的磁场中，在磁场中粒子受洛伦兹力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{15-25}$$

下面分三种情况来分析讨论.

(1) $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行（或反平行），此时 $\boldsymbol{F} = q_0(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0$，故粒子不受力，运动不受影响，粒子做匀速直线运动.

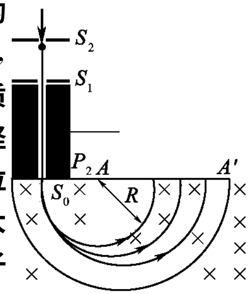
(2) $\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{B}$，此时，带电粒子受到的洛伦兹力 $F = qvB$，方向垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{B}$，粒子速度方向随时间变化，大小保持不变，粒子作匀速圆周运动. 由

$$qvB=\frac{mv^2}{R}$$

求得圆轨道半径

$$R=\frac{mv}{qB} \tag{15-26}$$

从式(15-26)可以看出,当一束电量相同而质量不同的带电粒子以同样的速率在同一位置进入均匀磁场,这些粒子在磁场的作用下沿不同的圆弧轨道运动,见图15-24示. 如果在A,A'处放一感光底片,可显示不同质量的带电粒子弧的轨道半径,从而求出粒子的质量. 当q,v,B为恒定时,R与m成正比. 质量大的粒子,圆半径也大,如果,当一束原子序数相同,但质量不同的原子(称同位素)进入均匀磁场以后,即可在A和A'底片上形成按照质量大小类似于光谱的排列,质谱仪就是根据这个原理制成的. 粒子在圆轨道上环绕一周的时间(即周期)为



5-24 质谱仪原理示意图

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi m}{qB} \tag{15-27}$$

(3) $\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{B}$成θ角. 可以将速度分解为平行$\boldsymbol{B}$的分量$v_{/\!/}$和垂直$\boldsymbol{B}$的分量$v_{\perp}$. $v_{/\!/}=v\cos\theta$,$v_{\perp}=v\sin\theta$,这时带电粒子在垂直于$\boldsymbol{B}$的方向上受到的磁力大小

$$F_{\perp}=qv_{\perp}B=qvB\sin\theta$$

因而在垂直于$\boldsymbol{B}$的平面内做匀速圆周运动,在平行于$\boldsymbol{B}$的方向上受力为零,做匀速直线运动. 带电粒子的轨迹是螺旋线,见图15-25. 其半径为

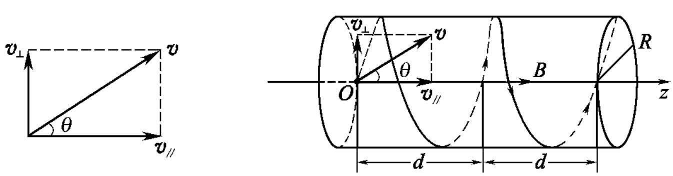


图15-25 带电粒子在磁场中的螺旋线运动

$$R=\frac{mv_{\perp}}{qB}=\frac{mv\sin\theta}{qB} \tag{15-28}$$

$$T=\frac{2\pi R}{v_{\perp}}=\frac{2\pi m}{qB} \tag{15-29}$$

螺旋线螺距

$$d=v_{/\!/}T=\frac{2\pi m}{qB}v\cos\theta \tag{15-30}$$

以上关于带电粒子在均匀磁场中运动的特点和规律在实际中得到应用，如回旋加速器和磁聚焦等.

15.7.2　带电粒子在均匀电场和均匀磁场中的运动

质量为 m，电量为 q 的粒子，在电场强度为 E 的均匀电场和磁感应强度为 B 的均匀磁场共同存在的区域中以速度 v 运动. 此时，粒子受到电场力和磁场力共同作用，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_e+\boldsymbol{F}_m=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{15-31}$$

动力学方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

式(15－31)说明，可以通过电场和磁场控制带电粒子的运动. 这在近代科学技术中有重要的应用. 例如，电子射线示波管、电视显像管、电子显微镜、速度选择器等.

例 15－2　速度选择器，图 15－26 是它的原理图. 让一束速度不同的带电粒子经过电场强度为 E 的均匀电场和磁感应强度为 B 的均匀磁场，且 E 与 B 垂直. 可以通过控制 E 和 B，把具有所需要的速度的带电粒子选出来.

解　设带电粒子电量 $q>0$，在电场中受到方向向下 $F_e=qE$ 力的作用，同时，带电粒子以速度 v 运动，在磁场中，受方向向上的力 $F_m=qvB$ 作用，欲让从 S_1 射入带电粒子在 S_2 射出，则不应该改变粒子的运动方向，粒子做直线运动，故需

$$F_e=F_m$$

即

$$qE=qvB$$

$$v=\frac{E}{B}$$

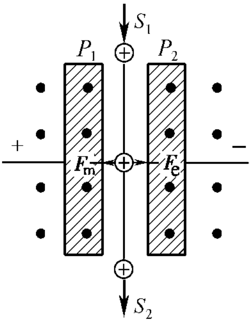


图 15－26　例 15－2 图

因此，只有满足以上速度关系的带电粒子才能不偏转地通过 S_2，达到速度选择的目的，这在近代物理学中有重要的应用.

15.7.3 霍耳效应

在一个通有电流 I 的导体薄片上，若施一垂直于板面的均匀磁场则在导体板的两侧 M 和 N 产生电势差（既垂直于磁场，又垂直于电流的方向上），这一现象是霍耳(E. H. Hall)于 1897 年发现的，称为霍耳效应，电势差 V_M-V_N 称为霍耳电势差. 实验表明，霍耳电势差与通过薄片的电流 I 及磁感应强度 B 的大小成正比，与薄片厚度 d 成反比，即

$$V_M - V_N = R_H \frac{IB}{d} \tag{15-32}$$

式中 R_H 称为霍耳系数.

霍耳效应可用导体中运动的载流子在磁场中受到洛伦兹力来说明. 设导体内的载流子带电量为 q，载流子数密度为 n，载流子做定向运动，速度为 v，它们在磁场中，受到洛伦兹力 qvB 作用，向板的一侧聚集，从而使导体两侧 M，N 出现异号电荷，并由此在板内形成横向电场 E_H（也称霍耳电场），使载流子受到与洛伦兹力反向的电场力 qE_H，直到霍耳电场力与洛伦兹力相等时，达到动态平衡，在 M，N 之间形成一稳定的电势差 V_M-V_N，即产生霍耳效应. 在平衡时，

$$qvB=qE_H$$

$$E_H=\frac{V_M-V_N}{b}$$

式 b 为板的侧向宽度.

$$V_M-V_N=E_Hb=Bvb$$

而 $I=nqvbd \quad v=\dfrac{1}{nqbd}$ 代入求得

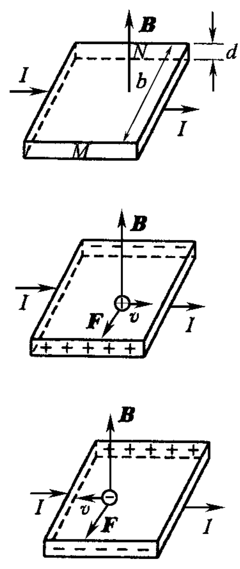


图 15-27 霍耳效应

$$V_M - V_N = \frac{1}{nq}\frac{BI}{d} \tag{15-33}$$

比较(15-32)与(15-33)即得

$$R_H = \frac{1}{nq} \tag{15-34}$$

由式(15-34)知，只要测量出霍耳电势差，确定霍耳系数，就能确定出导体内载流子密度及浓度. 实验测得半导体的霍耳系数比金属导体大许多，因此霍耳效应

为研究半导体载流子的浓度变化提供了重要方法. 还可根据霍耳系数 $R_H=\frac{1}{nq}$ 的正负来判断载流子的正负. 半导体载流子的导电类型就是利用这种方法来判定的. 若 $R_H>0$，说明 $q>0$，即载流子为带正电的（空穴），这种半导体为 p 型半导体；若 $R_H<0$，说明 $q<0$，载流子为电子，这种半导体为 n 型半导体.

根据霍耳效应制作的半导体元件称霍尔元件，它由一个小的长方形半导体片，在四个边上焊四个引线构成，其中一对引线接入电流，另一对引线输出霍尔电势差，将元件放置待测磁场中，使 $\boldsymbol{B}$ 的方向与半导体片平面垂直，通过测量出霍尔电势差就能确定磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的值. 可借标度值直接读出. 霍耳效应和霍耳元件在工业生产和科学技术中有着许多的应用，例如，强电流测量、信号转换、在自动化技术和计算机技术等方面应用也越来越普遍.

思考题

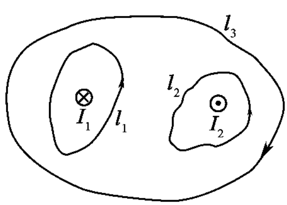
15－1　我们为什么不把作用于运动电荷的磁力的方向定义为磁感应强度的方向？

15－2　(1)在一根给定的磁感应线上，各点处的量值是否恒定？(2)一束质子发生侧向偏转，造成这个偏转的原因，可否是①电场？②磁场？如要是电场在起作用，或者是磁场在起作用，那么怎样确定是电场，或确定是磁场.

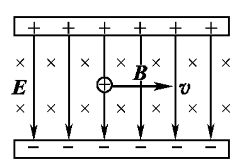
15－3　用安培环路定理能否求一段有限长载流直导线周围的磁场？

15－4　一电流元置于直角坐标系的原点，其方向沿 z 轴正向，则此电流元在 x 轴、y 轴和 z 轴上产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向分别为__________、__________和__________.

15－5　$I_1=I_2=3\ \mathrm{A}$，I_1 由纸面流入，I_2 由纸面流出，则 $\boldsymbol{B}$ 沿 l_1，l_2，l_3 三个回路的环流分别为__________、__________、__________.



思考题 15－5 图



思考题 15－9 图

15－6　无限长载流直导线的磁感应强度为 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$，当 $a\to 0$ 时 $B\to\infty$，而实际上，磁场中任一点磁感应强度都为有限值. 对此，你怎样理解和说明呢？

15－7　在某些电子仪器中，需将电流大小相等、方向相反的导线扭在一起，这是为什么？

15－8　在安培定律的数学表达式 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 中，哪两个矢量始终正交？哪两个矢

量之间可以有任意角？

15－9　如图所示，一正电子从垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方向射入电场和磁场共存区域，其速率 $v>\dfrac{E}{B}$，正电子怎样运动？

习题 15

15－1　一磁场的磁感强度为 $\boldsymbol{B}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$(SI)，则通过一半径为 R，开口向 z 轴正方向的半球壳表面的磁通量的大小为__________ Wb.

15－2　边长为 $2a$ 的等边三角形线圈，通有电流 I，求线圈中心处的磁感强度.

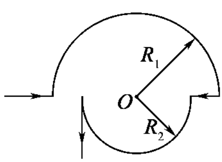
15－3　一弯曲的载流导线在同一平面内，形状如图所示. O 为两半圆的共同圆心，电流从无限远来，到无限远去，求 O 点的磁感应强度的大小.

15－4　求边长为 0.1 m，电流为 0.5 A 的载流正四边形导线框中心磁感应强度的大小.

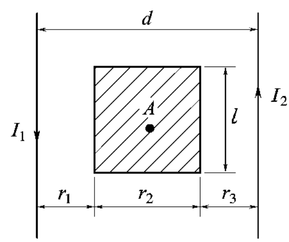
15－5　两平行长直导线相距 $d=40$ cm，每根导线载有 $I_1=I_2=20$ A 如图所示. 求：

(1) 两导线所在平面内与该两导线等距的一点 A 处的磁感应强度；

(2) 通过图中斜线所示面积的磁通量. ($r_1=r_3=10$ cm，$l=25$ cm)

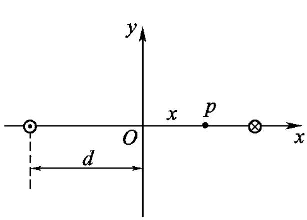


题 15－3 图

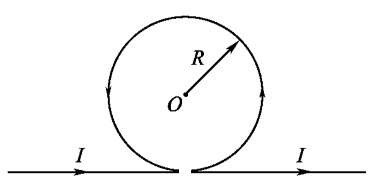


题 15－5 图

15－6　两个长直导线，它们相距 $2d$，通有相等相反方向的电流，电流大小是 I，取如题 15－6 图所示的坐标系，求距原点为 x 的 p 点处的磁感应强度 B，并作 $B-x$ 曲线.



题 15－6 图



题 15－7

15－7　一外层绝缘的长直导线弯成如题 15－7 图所示形状，其中圆的半径为 R，当

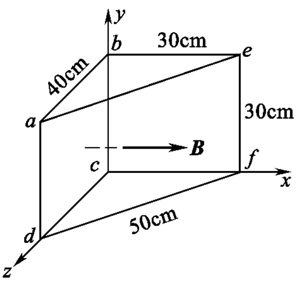
通以电流强度 I 时，计算圆心 O 处的磁感应强度 B.

15－8　已知磁感应强度 $B=2.0\ \mathrm{Wb\cdot m^{-2}}$ 的均匀磁场，方向沿 x 轴正方向，如题 15－8图所示，试求：

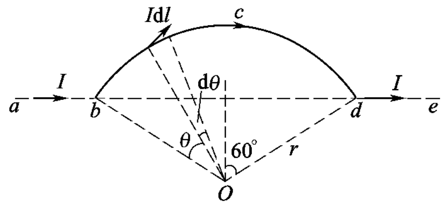
（1）通过 $abcd$ 面的磁通量；

（2）通过图中 $befc$ 面的磁通量；

（3）通过图中 $aefd$ 面的磁通量.



题 15－8 图

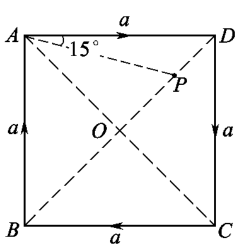


题 15－9 图

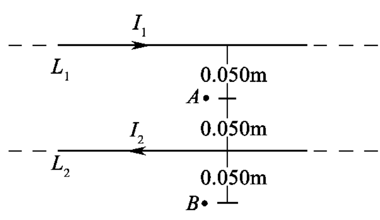
15－9　如题 15－9 图所示，一根无限长直导线，通有电流 I，中部一段弯成圆弧形，求图中 O 点的磁感应强度.

15－10　一正方形 $ABCD$，每边长为 a，通有电流 I，求：

（1）求正方形中心 O 处磁感应强度大小；（2）对角线 BD 上的 P 点处磁感应强度大小（设$\angle DAP=15°$）；（3）正方形轴线上与中心相距为 x 的任一点处磁感应强度的大小.



题 15－10 图

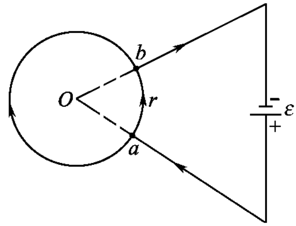


题 15－11

15－11　在真空中，有两根互相平行的无限长直导线 L_1 和 L_2，相距 0.10 m，通有方向相反的电流，$I_1=20$ A，$I_2=10$ A 如题 10－11 图所示. A，B 两点与导线在同一平面内，A，B 与导线 L_2 距离均是 5.0 cm，求 A，B 两点处的磁感应强度，以及磁感应强度为零的位置.

15－12　两根长直导线沿铁环半径方向从远处引于铁环的 a，b 两点，电流方向如图所示，求铁环中心 O 处的磁感应强度.

15－13　电流均匀地流过宽度为 $2a$ 的无限长平面导体薄板，强度为 I_0，通过板的中

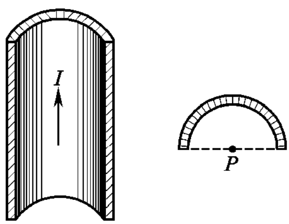


题 15－12 图

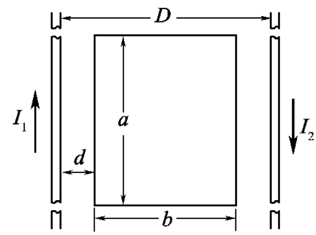
线，并与板垂直的平面上有一点 P，它到板的距离的 x. 求 P 点的磁感应强度大小.

15－14　一无限大导体薄板，其单位宽度的电流为 i，求导体薄板周围的磁感应强度的大小.

15－15　一半径为 $R=1.0\ \mathrm{cm}$ 的无限长半圆柱形金属薄片中，自上而下地有电流 $I=5.0\ \mathrm{A}$ 通过，如题 15－15 图所示，求圆柱轴线任一点 P 处的磁感应强度.



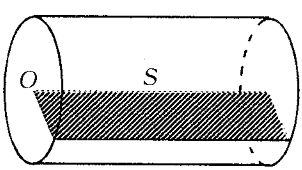
题 15－15 图



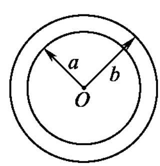
题 15－16 图

15－16　如题 15－16 图所示，两相互平行的长直导线间距 $D=0.4\ \mathrm{m}$，分别载有电流 $I_1=10\ \mathrm{A}$，$I_2=20\ \mathrm{A}$. 在两导线构成的平面里，平行地放置一长 $a=0.3\ \mathrm{m}$，宽 $b=0.25\ \mathrm{m}$ 的矩形线圈，其一边距 I_1 为 $d=0.1\ \mathrm{m}$. 求通过此面的磁通量.

15－17　一根很长的铜导线载有电流 10 A，在导线内部做一平面 S，如题 10－17 图所示，计算通过 S 平面的磁通量（沿导线长度方向取长为 1 m 的一段做计算，铜的 $\mu\approx\mu_0$）



题 15－17 图

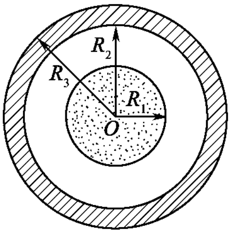


题 15－18 图

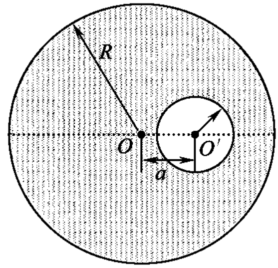
15－18　题 15－18 图所示是一根长直圆管形导体的横截面，内外半径分别为 a，b，导体内载有沿轴线流动的电流 I，且 I 均匀地分布在管的横截面上，设导体的磁导率 $\mu=\mu_0$，试证明导体各点（$a<r<b$）的磁感应强度大小为：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2-a^2)}\frac{r^2-a^2}{r}$$

15－19　**一根很长的同轴电缆，由一导体圆柱（半径为 R_1）和一同轴的导体圆管（内、外半径分别为 R_2，R_3）两导体的电流均为 I，且都均匀分布在横截面上，电流的方向相反，求 $r<R_1$，$R_1<r<R_2$，$R_2<r<R_3$ 及 $r>R_3$ 处 $\boldsymbol{B}$ 的大小，并给出 $B-r$ 曲线图.**



题 15－19 图



题 15－20 图

15－20　**在半径为 R 的长直圆柱形导体内部，与轴线平行地挖成半径为 r 的长直圆柱形空腔，两轴间距离为 a，且 $a>r$，横截面为如题 15－20 图所示，现有电流 I 沿导体管流动，且电流均匀分布在管的横截面上，电流方向与管的轴线平行，求：**

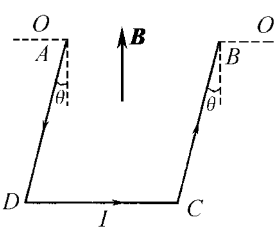
（1）**圆柱轴线上的磁感应强度的大小；**

（2）**空心部分轴线上的磁感应强度的大小.**

15－21　**半径为 R 的均匀的带电细环，单位长度上所带电量为 λ，以每秒 n 转绕通过环心，并与环面垂直的转轴匀速转动. 求：（1）轴上任一点处的磁感应强度值；（2）圆环磁矩的值.**

15－22　**半径为 R 的圆盘上均匀分布着电荷，面密度为 $\sigma>0$，当圆盘以角速度 ω 绕中心垂轴旋转时，求轴线上距圆盘中心 O 为 x 处一点的磁感应强度.**

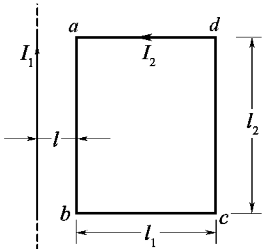
15－23　**横截面积 $S=2.0\ \mathrm{mm^2}$ 的铜线，密度 $\rho=8.9\times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，弯成正方形的三边，可以绕水平轴 OO' 转动，如图所示. 均匀磁场方向竖直向上，当导线中通有电流 $I=10\mathrm{A}$，导线 AD 段和 CB 段与竖直方向夹角 $\theta=15°$ 时处于平衡状态，求磁感应强度的值.**



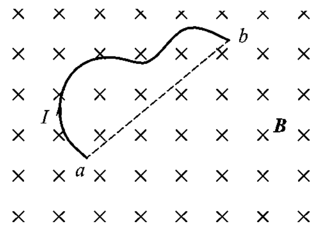
题 15－23 图

15－24　**蟹状星云中电子的动量可达 $10^{-6}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$，星云中心磁场约为 10^{-8} T. 这些电子的回转半径多大？如果这些电子落到星云中心的中心星表面附近，该处磁场约为 10^8 T，它的回转半径又是多大？**

15－25　**如题 15－25 图所示，一长直导线中通有电流 $I_1=20$ A. 其旁有一矩形线圈 $abcd$ 与它共面，线圈的边长 $l_1=9$ cm，$l_2=20$ cm，ab 边与直导线相距 $l=1$ cm；线圈中电流 $I_2=10$ A. 求线圈各边受到的磁力.**



题 15－25 图



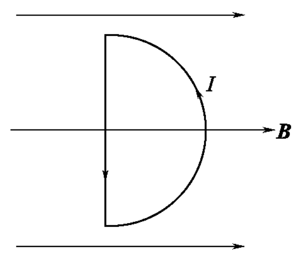
题 15－26 图

15－26　在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，垂直于磁场方向的平面内有一段载流弯曲导线，电流为 I，如题 15－26 图所示. 求其所受的安培力.

15－27　如题 15－27 图所示，将一半径为 $R=0.1$ m，载有恒定电流 $I=10$ A 的半圆形线圈置于 $B=0.5$ T 的均匀磁场中，磁场的方向与线圈平面平行. 求：

(1) 线圈的磁矩及磁力矩；

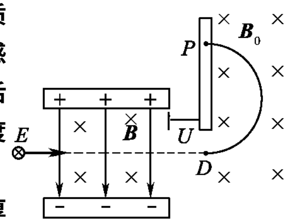
(2) 线圈转过 90°时磁力矩做的功.



题 15－27 图

15－28　一正方形线圈，由细导线做成，边长为 a，共有 N 匝，可以绕通过其相对两边中点的一个竖直轴自由转动，现在线圈中通有电流 I，并把线圈放在均匀的水平外磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，线圈对其转轴的转动惯量为 J，求线圈绕其平衡位置做微小振动的周期 T.

15－29　如题 15－29 图所示，某质谱仪的离子源产生质量相同，电荷为 q 的正离子，进入场强为 $\boldsymbol{E}$ 的均匀电场和磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场组成的速度选择器（速度近似为 0），后经电压 U 加速进入方向垂直纸面的均匀磁场（其磁感应强度为 B_0）中. 若测得 $\overline{DP}=l$，求离子的质量.



题 15－29 图

15－30　在霍耳效应实验中，一宽 1.0 cm，长 4.0 cm，厚 1.0×10^{-3} cm 的导体，沿长度方向载有 3.0 A 的电流，当磁感应强度大小为 $B=1.5$ T 的磁场垂直地通过导体时，产生 1.0×10^{-5} V 的横向电压. 试求：

(1) 载流子的漂移速度；

(2) 载流子的密度.

15－31　一半径为 r 的薄圆盘，放在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中，$\boldsymbol{B}$ 的方向与盘面平行，在圆盘表面上，电荷面密度为 σ. 若圆盘以角速度 ω 绕通过盘心垂直盘面的轴转动，求作用在圆盘上的力矩.

第16章　磁介质

介质与磁场的相互作用使介质磁化.本章讨论介质中的磁场及其规律,主要介绍磁介质的磁化、分类、磁化机理,磁介质中的安培环路定理,铁磁质的磁化规律等.

16.1　介质的磁化

16.1.1　磁介质的分类

前面所讨论的是真空中的磁场性质及其规律.实际的情况往往是磁场存在于实际的物质中,这时磁场对物质产生作用,使物质处于一种特殊的状态,即磁化状态,反过来,磁化的物质对磁场产生影响.称能与磁场产生相互作用的物质为磁介质.本节主要讨论磁介质与磁场相互作用的现象及其规律.

实验表明,不同的物质对磁场的影响不同.设均匀的磁介质处于磁感应强度为 $\boldsymbol{B}_0$ 的真空磁场中,磁介质被磁化,使得介质中的磁场不同于真空中的场,也就是磁化了的磁介质产生了附加的磁场,用 $\boldsymbol{B}'$ 表示,此时,磁介质中的磁场 $\boldsymbol{B}$ 应是真空磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 与附加磁场 $\boldsymbol{B}'$ 的矢量叠加,即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$$

不同的磁介质,$\boldsymbol{B}'$ 的大小和方向有很大的差别.为了便于实际中研究磁介质的性质,引入磁介质的相对磁导率 μ_r,定义是

$$\mu_r=\frac{B}{B_0} \tag{16-1}$$

B 为介质中总磁场的磁感应强度大小,B_0 为真空中磁场大小,μ_r 是一个量纲为 1

的量，μ_r 可用来描述磁介质磁化后对原磁场的影响程度，是描述磁介质特性的物理量. 几种磁介质在常温常压下的相对磁导率见表 16－1. 与电介质介电常数 ε 的定义类似，定义磁介质磁导率

$$\mu = \mu_r\mu_0 \tag{16-2}$$

根据相对磁导率 μ_r 的大小，磁介质分为三类：

（1）顺磁质. $\mu_r>1$. 但与 1 相差不大，这种介质称为顺磁质，如镁、锰、氧等. 这种磁介质磁化后产生的附加磁场与原来磁场方向一致，使得 $B>B_0$，介质中磁场加强.

（2）抗磁质. $\mu_r<1$. 也与 1 相差不大，这种介质称为抗磁质，如汞、铜、氢等. 这种磁介质中磁化后产生的附加磁场与原来的磁场方向相反，使得 $B<B_0$，介质中磁场减弱.

（3）铁磁质. $\mu_r\gg1$. 这类磁介质中的附加磁场同原来的磁场同方向，且 $B'\gg B_0$ 使得总的磁感应强度大小 $B\gg B_0$. 例如镍、铁、钴等.

表 16－1　几种磁介质在常温常压下的相对磁导率 μ_r

顺磁质	μ_r	抗磁质	μ_r	铁磁质	
空　气（标准状态）	$1+30.4\times10^{-5}$	氢（标准状态）	$1-2.49\times10^{-5}$	纯铁	$1.0\times10^{4}\sim2.0\times10^{5}$
氧（标准状态）	$1+19.4\times10^{-5}$	铋	$1-0.17\times10^{-5}$	玻莫合金	$2.5\times10^{3}\sim1.5\times10^{5}$
锰	$1+12.4\times10^{-5}$	铜	$1-0.11\times10^{-5}$	硅钢	$4.5\times10^{2}\sim8.0\times10^{4}$
铬	$1+4.5\times10^{-5}$	银	$1-0.25\times10^{-5}$	铁氧体	1.0×10^{3}

由于顺磁质和抗磁质的 μ_r 与 1 相差较小，磁化场不很显著，因此称为弱磁质，铁磁质的 μ_r 与 1 相差很大，磁化场很显著，因而称为强磁质.

16.1.2　介质磁化的微观机理

在此先讨论顺磁质和抗磁质这类弱磁质的磁化机理，后面再专门讨论铁磁质这类强磁质的磁化机理.

1. 顺磁质的磁化机理

根据物质的电结构理论，分子中的任何一个电子都同时参与两种运动，一种是绕原子核的轨道运动，一种是电子的自旋运动. 两种回路电流，都具有磁矩，产生磁效应，把分子整体对外所产生的磁效应的总和等效成一圆电流的磁效应，这

一等效圆电流称分子电流，这种分子电流的磁矩称为分子磁矩（也称分子固有磁矩），用 p_m 表示.

对于顺磁质，即使没有外磁场的作用，分子中各个电子的磁效应也不互相抵消，因而其顺磁质的分子磁矩 p_m 不为零，但是由于分子的无规则运动，各分子的磁矩混乱取向，宏观上的磁效应相互抵消，对外不显磁性，见图 16－1. 在有外磁场 B_0 的作用下，分子磁矩在磁场中因受到力矩作用将会发生转动，在平衡时，磁矩大致沿外场 B_0 方向排列起来，在客观上呈现出附加磁场，这种附加磁场与外磁场方向相同，故使介质内的磁场增强，这就是顺磁质磁化的微观机理.

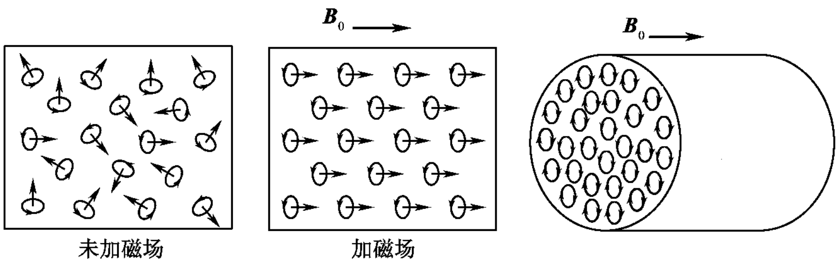


图 16－1　顺磁质的磁化

2. 抗磁质的磁化机理

抗磁质物质的电结构不同于顺磁质，它的分子各电子磁矩叠加后相互抵消使分子的磁矩为零，物质对外不显磁性. 若将其置于外磁场 B_0 中，介质分子中的每个电子的运动相当于一闭合回路，根据楞次定律，在每一闭合回路产生一感应电流，由于原子中电子绕核运动和自旋运动是无阻碍的，相当于无电阻的闭合回路，已经形成的感应电流，即使外场不变，也将继续流动，从而具有感应磁矩. 这些感应磁矩的方向与外磁场 B_0 的方向相反，产生的附加磁场的方向也与外磁场相反，使外磁场被减弱，这就是抗磁质磁化的微观机理. 如图 16－2 所示.

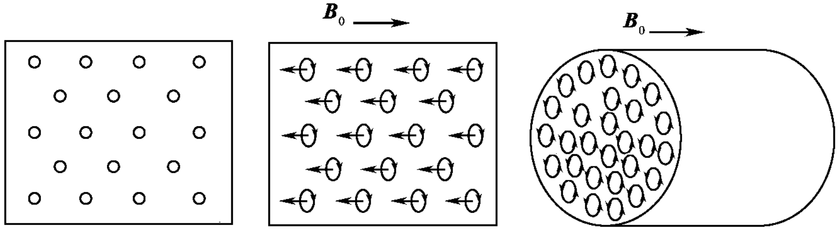


图 16－2　抗磁质的磁化

应该指出，在顺磁质中，也会存在这种感应磁矩，只不过，其磁效应与分子磁矩沿外场方向排列的磁效应相比小得多，可以忽略而已.

16.1.3 介质的磁化

1. 磁化电流

任何一个分子的磁矩可以用一等效的圆电流磁矩来表示，这个圆电流称为分子电流. 对于顺磁质，其分子电流的磁矩就是分子本身固有的分子磁矩，而抗磁质，分子电流的磁矩就是分子的感应磁矩.

图 16－3 是一圆柱形顺磁质棒，沿轴线方向加一外磁场 $\boldsymbol{B}_0$，棒均匀磁化后，其内各分子电流的平面大致在与棒轴垂直的平面内. 其棒内横截面内分子电流分布见图 16－3.

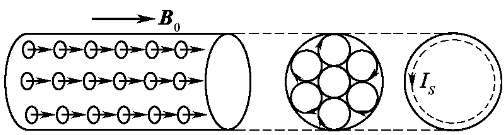


图 16－3　磁介质的磁化电流

在横截面内部，由于相邻的分子电流方向相反，因此互相抵消，只有在截面边缘处，分子电流才未被抵消，形成与边缘重合的圆电流 I_S，对磁介质整体而言，分子电流沿圆柱面垂直于轴线方向流动，称磁化电流（亦称束缚电流）.

2. 磁化强度

与电介质中引入极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 描述电介质的极化程度相似，在讨论磁介质磁化时，引入磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 来描述磁介质的磁化程度.

在介质中某一点处取小体积 ΔV，其内的分子磁矩 $\boldsymbol{p}_m$ 的矢量和为 $\sum \boldsymbol{p}_m$，定义该点的磁化强度为

$$\boldsymbol{M} = \frac{\sum \boldsymbol{p}_m}{\Delta V} \tag{16-3}$$

它是该点处单位体积内分子磁矩的矢量和.

对于顺磁质 $\sum \boldsymbol{p}_m$ 是分子磁矩的矢量和，对于抗磁质，$\sum \boldsymbol{p}_m$ 是分子感应磁矩的矢量和.

由图 16－3 知，磁化电流产生的磁场与螺旋管中产生的磁场相似. 设单位长

度上分子电流为 j_S，棒长为 l，截面为 S，分子电流总的磁矩为 $j_S S l$，所以磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的数值由式(16－3)知

$$M=\frac{j_S S l}{S l}=j_S \tag{16-4}$$

由此可知，磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 在数值上等于单位长度上分子电流的强度.

16.2　磁介质中的安培环路定理

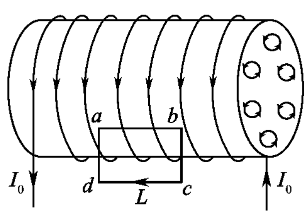
1. 磁介质中的安培环路定理

在有磁介质的情况下，安培环路定理应需推广为

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\left(\sum I+\sum I_S\right) \tag{16-5}$$

L 为磁介质中任意闭合回路，$\sum I$ 和 $\sum I_s$ 分别是 L 所包围的传导电流的代数和与磁化电流的代数和.

由于磁介质磁化，产生磁化电流从而产生附加磁场，使得计算磁介质中的磁场的磁感应强度相当复杂，涉及 I_S. 下面以充满磁介质的螺线管为例消去 I_S.



－4　磁介质中的安培环路定理

取一闭合回路 $abcda$

$$\oint_L \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{ab}\boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{bc}\boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{cd}\boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{da}\boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

在 ab 段，$\boldsymbol{M}$ 平行于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，cd 段在介质外 $\boldsymbol{M}=0$ 在 bc 和 da 段在介质内 $\boldsymbol{M}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 垂直，使 $\boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$ 或在介质外 $\boldsymbol{M}=0$. 因此，上式四项中，只有 $\int_{ab}\boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 不为零，故

$$\oint_L \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{ab}\boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{bc}\boldsymbol{M}\mathrm{d}\boldsymbol{l}=M\cdot\overline{ab}=Ml=j_S l=\sum I_S$$

因此,安培环路定理变为

$$\oint_L = \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 (\sum I + \oint_C \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l})$$

$$\oint_L (\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I$$

与介质中引入位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 相似,在此引入一个新物理量 $\boldsymbol{H}$,称为磁场强度,使得

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{16-6}$$

因此,磁介质中的安培环路定理变成比较简单的形式

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I \tag{16-7}$$

可以证明,由此特殊情形推出的结论,对一般情况也是适用的.式(16-7)即为磁介质中的安培环路定理,磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿任一闭合回路的积分(也称环流)等于此闭合回路所围的传导电流的代数和.

引入了磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 后,磁介质中的安培环路定理不再有磁化电流项,从而为讨论磁介质中的磁场带来方便.但磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 仅是一个描述磁场性质的辅助物理量.在讨论与磁场有关的问题时,多用磁感应强度 $\boldsymbol{B}$,它更能反映磁场的特性和本质.将 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别称为磁场强度和磁感应强度主要是由于物理学发展历史的原因.

2. $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{H}$,$\boldsymbol{M}$ 三者之间的关系

在讨论电介质时知道,电介质极化程度与电场的强弱有关.与此类似,磁介质的磁化程度也与磁场的强弱有关.实验表明,磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 可认为与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 成正比,由于历史原因,我们认为磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 成正比,即

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{16-8}$$

式中 χ_m 是描述磁介质性质的量,称为磁化率,对顺磁质 $\chi_m > 0$,对抗磁质 $\chi_m < 0$,由式(16-8)和式(16-6)得

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \boldsymbol{H}$$

令

$$\mu_r = 1 + \chi_m \tag{16-9}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \tag{16-10}$$

这也是 $\boldsymbol{H}$ 定义,即磁介质中某点处的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 等于该点磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 与介质磁导率 μ 之比.即

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$$

3. 磁介质中的高斯定理

在磁介质中,无论是传导电流还是磁化电流,其电流的实质是一样的,都是电荷运动的结果,它们的产生的磁场的磁感应线都是闭合的.因此,在磁介质中,通过任一封闭曲面 S 的磁通量都等于零,即

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{16-11}$$

这就是磁介质中的高斯定理.由此可见,在磁介质中磁场仍然是无源场.

例 16－1　如图 16－5 所示,一半径为 R_1 的无限长圆柱体(导体,$\mu \approx \mu_0$)中均匀地通有电流 I,在它外面有半径为 R_2 的无限长同轴圆柱面,两者之间充满着磁导率为 μ 的均匀磁介质,在圆柱面上通有相反方向的电流 I.试求:(1)圆柱体外圆柱面内一点的磁场;(2)圆柱体内一点的磁场;(3)圆柱面外一点的磁场.

解　(1) 当两个无限长的同轴圆柱体和圆柱面中有电流通过时,它们所激发的磁场是轴对称分布的,而磁介质亦呈相同的轴对称分布,因而不会改变场的这种对称分布.设圆柱体外圆柱面内一点到轴的垂直距离是 r_1,以 r_1 为半径做一圆(见图),取此圆为积分回路,根据安培环路定理有

$$\oint H \cdot \mathrm{d}l = H\int_0^{2\pi r_1} \mathrm{d}l = H 2\pi r_1 = I$$

$$H = \frac{1}{2\pi r_1}$$

由式(16－1)得

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r_1}$$

(2) 设在圆柱体内一点到轴的垂直距离为 r_2,r_2 为半径做一圆(见图),应用安培环路定理得

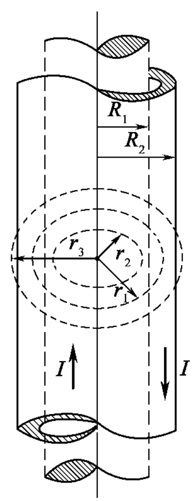
$$\oint H \cdot \mathrm{d}l = H\int_0^{2\pi r_2} \mathrm{d}l = H 2\pi r_2 = I\,\frac{\pi r_2{}^2}{\pi R_1{}^2} = I\,\frac{r_2{}^2}{R_1{}^2}$$

式中 $I\,\frac{\pi r_2{}^2}{\pi R_1{}^2}$ 是该环路所包围部分的电流,由此得

$$H = \frac{I r_2}{2\pi R_1{}^2}$$

由 $B = \mu H$,得

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I r_2}{R_1{}^2}$$



16－5　例 16－1 图

(3) 在圆柱面外取一点,它到轴的垂直距离是 r_3,以 r_3 为半径做一个圆,应用安培环路定律,考虑到该环路中所包围的电流的代数和为零,所以得

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H\int_0^{2\pi r_3} \mathrm{d}l = 0$$

即
$$H=0$$
或
$$B=0$$

16.3 铁磁质

就一般物质而言，无论是顺磁质还是抗磁质，它们对外的场都很微弱，而以铁、钴、镍、钆、镝及其合金或其氧化物等这类材料，对外磁场影响很大，这些材料称为铁磁质. 它的主要特征是：①在外磁场中放入铁磁质可使磁场增大 $10^2\sim10^4$ 倍；②当外磁场撤去以后，铁磁质仍保留一部分磁性.

16.3.1 铁磁质的磁滞曲线

铁磁质的磁滞曲线 图 16－6 是研究 $B-H$ 曲线的实验装置示意图. 铁磁质相对磁导率 μ_r 一般不是常数，因此 B 随 H 的变化关系不是线性的. 图中 T 为螺绕环的铁芯，为铁磁质，G 为冲击电流计（磁通计）用以测量磁通量，K 为换向开关.

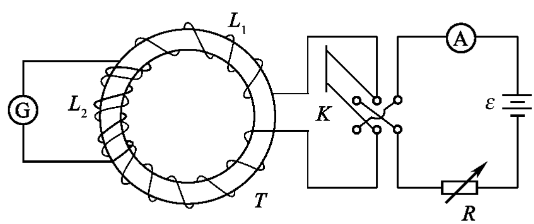


图 16－6 $B-H$ 曲线实验装置示意图

在原线圈 L_1 中通电流 I 时，铁芯内的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 大小为
$$H=nI$$
n 为螺绕环上单位长度的线圈的匝数. 当 L_1 中的电流反向时，引起磁场改变，从而在副线圈 L_2 中产生感应电动势，由此可推算出环内磁感应强度大小. 实验中，根据电流的变化，测得不同的 B，H 值，得 $B-H$ 曲线如图 16－7 所示.

当逐渐增大电流 I 时，H 随之增大，B 亦逐渐增大（oa 段），当 I 再继续增大，H 近似成正比增加，B 值迅速增大后，增大变缓，在到达 C 点后，即使 I 增大使 H 增大，B 不再增大，即达到饱和（bc 段），称 oc 段为起始磁化曲线. 当达到饱

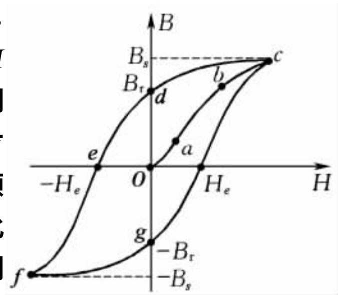


图 16－7　铁磁质的磁滞曲线

和后，如果缓慢地使电流 I 减小以使 H 减小，这时，B 不沿起始曲线 oc 返回，而是沿 cd 变化，并且当 $I=0$，$H=0$ 时，B 并不为零，保留一定的值 B_r，称剩余磁感应强度. 当电流方向改变，并反向增大到 e，才能使 $B=0$，即剩磁消失，e 点对应的 H_c 称为矫顽力. 如反向电流继续增加，以增大反向的 H 值，磁化达反向饱和态，而后反向电流减小到零，得反向剩磁，最后改变方向并增加，从而形成图 16－7 所示的闭合曲线，铁磁质的这种 $B-H$ 曲线称为磁滞回线. 这种 B 的变化落后于 H 变化的现象，叫做磁滞现象，简称磁滞.

实验表明，铁磁质反复磁化要发热，这就表明，铁磁质反复磁化要损耗一部分能量. 这种现象称为磁滞损耗，这种现象对电器设备极有害. 磁理论和实验都表明，磁滞损耗与磁滞回线所包围面积成正比.

当铁磁质加热，使温度达到某一临界值 T_c 时，这时铁磁质失去本身特性而成为顺磁质，这一临界温度称为居里点. 例如铁、钴、镍的居里点分别是 1400 K，1388 K 和 631 K.

16.3.2　铁磁质分类与磁化的微观机理

1. 铁磁质分类与应用

铁磁材料在工程技术上的应用极为普遍. 根据它的磁滞回线形状决定其用途，铁磁质一般分为软磁材料和硬磁材料两类.

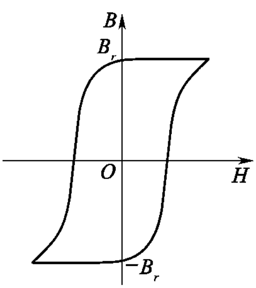


图 16－8　矩磁材料磁滞曲线

（1）软磁类材料的特点是磁导率大，矫顽力小，磁滞回线窄，这种材料容易磁化，也容易退磁，可用来制造变压器、电机、电磁铁等. 软磁材料有金属和非金属两种. 像铁氧体就是非金属材料，它是由几种金属氧化物的粉末混合压制成型再烧结而成，有电阻率很高、高频损耗小的特点，被广泛用于线圈磁芯材料.

（2）硬磁材料的特点剩余磁感强度大，矫顽力也大，磁滞回线很宽. 这种材料充磁后保留很强的剩磁，且不易消除，适合于制造永久磁铁、电磁式仪表、永磁扬声器，小型直流电机的永久磁铁采用这种材料.

有些铁氧体的磁滞回线呈矩形(称矩磁材料,见图 16－8).其特征是矫顽力小,且剩余的 B_r 接近饱和值,当它被磁化后,当外磁场趋于零时,总是处在 B_r 或 $-B_r$ 的两种剩磁状态.通常计算机中采用两进制只有"0"和"1"两个数码.因此可以用矩磁材料的两种剩磁状态代表这两个数码,起到"记忆"和"储存"的作用.最常用的铁氧材料有锰-镁和锂-锰铁氧体.

2. 铁磁质磁化的微观机理

近代科学实验指出,铁磁质的磁性主要来源于电子的自旋磁矩.在无外场时,铁磁质中电子的自旋磁矩可以在小范围内自发地沿与铁磁质内部晶体结构有关的几个方向整齐排列,形成小的"自发磁化区",称磁畴.磁畴的体积约为 $10^{-10} \sim 10^{-8}\ \mathrm{m}^3$,用实验方法可以观察到.下面从磁畴的观点来说明铁磁质的磁化机理.

在没有外磁场时,各个磁畴磁化方向的排列取向是不同的,磁矩恰好抵消,对外不显磁性,见图 16－9a.在有外磁场的作用下,并且磁场较弱,则其中的自发磁化方向与外磁场方向成小角度的磁畴的体积逐渐扩张,而自发磁化方向与外磁场成较大角度的磁畴的体积逐渐缩小,见图 16－9b,这相当于磁化曲线的 oa 段,这一段过程是近似可逆的.如果外磁场继续增强,则自发、磁化取向与外磁场方向成较大角度的磁畴将全部消失,见图 16－9c,这相当于磁化曲线的 ab 段.当磁场达到某一数值时,磁矩的自发磁化方向发生突然的跳跃偏转,见图 16－9d,介质中的磁场便突然剧增.随后,再增加外磁场,则尚存的磁将向外场方向旋转,使得所有磁畴都取外场方向,使磁化达到饱和(见图 16－9e).

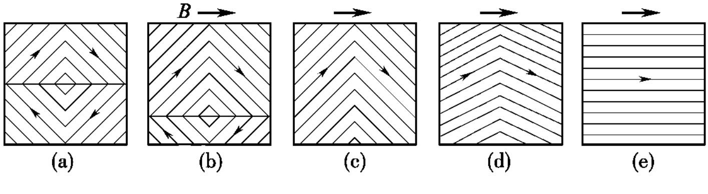
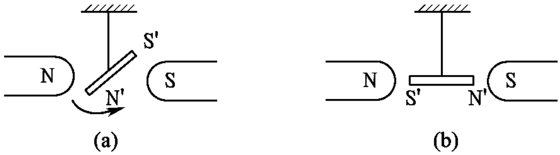


图 16－9 铁磁质的磁化

由于磁化过程的不可逆性,使得铁磁质磁化后再退磁时,不能回到原来状态,因此出现了磁滞现象与剩余磁化.当铁磁质加热到居里点时,磁畴就会因为分子的剧烈运动瓦解.这时铁磁质失去自己特性,转变为普通的顺磁质了.

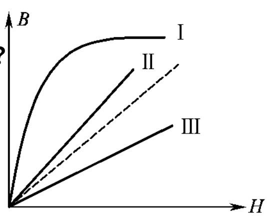
思考题

16－1　两种不同磁性材料做成的小棒，放在磁铁的两个磁极之间，小棒被磁化后在磁极间处于不同的方位，如题图所示．试指出哪一个是由顺磁质材料做的，哪一个是由抗磁质材料做成的？



思考题 16－1 图

16－2　图中的三条线表示三种不同磁介质的 $B-H$ 关系曲线，虚线是 $B=\mu_0 H$ 关系的曲线，试指出哪一条表示顺磁质？哪一条表示抗磁质？哪一条表示铁磁质？



思考题 16－2 图

16－3　试说明在磁介质中，下列公式各在什么条件下成立（$\boldsymbol{B}_0$ 是传导电流产生的磁场）．

（1）$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M}$

（2）$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$

（3）$\boldsymbol{B}=\mu_r\boldsymbol{B}_0$

习题 16

16－1　螺绕环的导线内通有电流 20 A，利用冲击电流计测得环内磁感应强度的大小是 $1.0\ \mathrm{Wb\cdot m^{-2}}$．已知环的平均周长是 40 cm，绕有导线 400 匝，试算：

（1）磁场强度；

（2）磁化强度；

（3）磁化率；

（4）相对磁导率．

16－2　将半径为 R，相对磁导率为 μ_{r_1} 的无限长直导线（其传导电流为 I），置于相对磁导率为 μ_{r_2} 的无限大均匀磁介质中．求导线内外磁感应强度的分布．

第 17 章　电磁感应

电磁感应现象的发现,表明了变化的磁场能够产生电场这一事实.电磁感应规律的研究,揭示了电与磁之间的内在联系,使人们对于电磁现象的本质有了更进一步的了解,从而为现代的电工和无线电工业奠定了基础.

本章首先介绍电磁感应的基本规律.在此基础之上,再讨论电磁感应的几种类型,包括自感与互感.最后介绍磁场的能量.

17.1　电磁感应定律

17.1.1　法拉第电磁感应定律

1. 电磁感应现象

自从奥斯特在 1820 年发现电流的磁效应之后,其逆现象磁的电效应自然就成为许多科学家研究的重要课题.英国物理学家法拉第通过近 10 年的实验研究,终于在 1831 年发现了电磁感应现象及其基本规律.

从法拉第做过的一系列实验中可以归纳出以下事实:在磁场中放置任一导体闭合回路,当穿过该闭合回路所包围面积的磁通量发生变化时,在回路中就会产生电流.这种现象称为电磁感应现象.回路中的电流通常称为感应电流,并将形成该电流的电动势称为感应电动势.

进一步分析磁场中穿过闭合回路所围面积磁通量变化的原因时可以知道,一类情况是磁场静止不随时间变化,磁通量的变化仅仅是由于导线闭合回路或闭合回路中的一部分在磁场中运动所引起的.这样感应出来的电流称为动生电流,相应的电动势称为动生电动势;另一类情况是闭合回路静止不动,磁通量的

变化仅仅是由于磁场变化而引起的. 这样感应出来的电流和相应的电动势就分别称为感生电流和感生电动势. 在实际的电磁感应现象中,如果这两类情况都存在,则总的感应电动势就等于动生电动势与感生电动势的代数和.

2. 法拉第电磁感应定律

法拉第在大量实验的基础上进行定量研究,总结得出:无论何种原因使通过回路面积的磁通量发生变化时,回路中产生的感应电动势都与磁通量对时间的变化率成正比. 这一结论称为法拉第电磁感应定律,其数学表达式为

$$\varepsilon=-k\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{17-1}$$

式中 k 为正的比例系数,在 SI 制中 $k=1$,则

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{17-2}$$

式中的负号反应电动势在回路中的方向. 在闭合回路上任意规定一个正绕向作为感应电动势(电流)的正方向,并确定该正方向与回路包围面积的正法向 $\boldsymbol{n}$ 成右手螺旋关系,如图 17－1 所示. 如果穿过回路包围面积的磁力线与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$,则磁通量 Φ 为正值. 若此时磁通量在增大,即 $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}>0$,则 $\varepsilon<0$ 表示感应电动势的方向与其规定的正方向相反,见图 17－1a 所示. 反之磁通量在减小,即 $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}<0$,则 $\varepsilon>0$ 表示感应电动势的方向与其规定的正方向相同,见图 17－1b 所示;如果穿过回路包围面积的磁力线与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角大于 $\frac{\pi}{2}$,则磁通量为负值. 若此时磁通量在增大,即 $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}>0$,则 $\varepsilon<0$ 表示感应电动势的方向与其规定的正方向相反,如图 17－1c 所示. 反之磁通量在减小,即 $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}<0$,则 $\varepsilon>0$ 表示感应电动势的方向与其规定的正方向相同,如图 17－1d 所示.

通过上面对磁通各种变化情况时感应电动势方向的分析我们可以看到,在确定了闭合回路所包围面积正法向 $\boldsymbol{n}$ 的条件下,应用式(17－2)计算出 ε:若 $\varepsilon>0$,则表示感应电动势的方向与 $\boldsymbol{n}$ 成右手螺旋关系;若 $\varepsilon<0$,则表示感应电动势的方向与 $\boldsymbol{n}$ 成左手螺旋关系. 在图 17－1 中还可以这样判断感应电动势的方向:用左手姆指指向 $\Delta\Phi$ 的方向,则左手余下四个指头的回转方向就表示 ε 的方向. 即式(17－2)中的负号表示感应电动势的方向与变化率的绝对值 $\left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|$ 增加的方向形成左手螺旋关系.

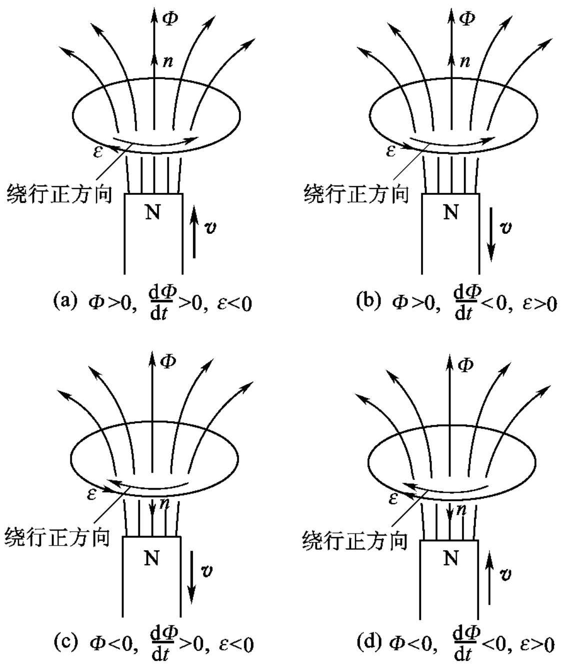


图 17－1 用 $\varepsilon=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 判定感应电动势方向

上面讨论的都是由导线组成的单匝闭合回路. 如果闭合回路不是单匝,而是由 N 匝线圈串联而成,那么在磁通量变化时,每匝中都会产生感应电动势,闭合回路的总电动势则为每匝中电动势的代数和. 如果每匝中通过磁通量的变化率都相同,则总电动势为

$$\varepsilon=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{17-3}$$

式中 $\Psi=N\Phi$ 称为磁通链.

如果在闭合回路中只有电阻 R,则回路中的感应电流为

$$I=\frac{\varepsilon}{R}=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{17-4}$$

而从 t_1 到 t_2 这段时间内通过导线中任一截面的感应电量为

$$q=\left|\int_{t_1}^{t_2}I\mathrm{d}t\right|=\frac{1}{R}\left|\int_{\Psi_1}^{\Psi_2}\mathrm{d}\Psi\right|=\frac{1}{R}\left|\Psi_2-\Psi_1\right| \tag{17-5}$$

式中 Ψ_1,Ψ_2 分别是 t_1,t_2 时刻通过回路的磁通链. 上式表明,在一段时间内通过导线中任一截面的感应电量与这段时间内磁通链增量的绝对值成正比,而与磁

通链的具体变化过程无关. 如果测出感应电量, 而回路中的电阻又为已知, 就可以计算磁通链的增量, 进而可知磁感应强度了. 常用的磁通计(又称高斯计)就是按照这个原理制成的.

17.1.2　楞次定律

1833 年, 楞次在总结电磁感应实验结果的基础上, 得出如下结论: 闭合回路中感应电流的方向, 总是使得感应电流所产生的通过回路面积的磁通量去反抗或者补偿引起感应电流的磁通量的变化. 这一结论称为楞次定律.

楞次定律可以用来直接判断感应电流和感应电动势的方向. 一般先分析引起感应电流的磁通是如何变化的, 再按定律确定感应电流所产生通过回路面积的磁通(磁感应强度)的方向, 最后由电流方向与磁感应强度方向之间形成右手螺旋关系来确定感应电流(感应电动势)的方向. 例如图 17－2 所示的金属框放在垂直于纸面向里的匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 中, 框的一边 ab 可在框上紧密接触地自由滑动. 当 ab 向右滑动时, 通过金属框这个闭合回路的磁通量增加. 由此引起的感应电流所产生的磁场则是要使通过回路面积的磁通量去反抗原磁通量的增加, 因此感应电流激发的磁场(磁感)方向为垂直于纸面向外, 故感应电流的方向对着纸面看是逆时针的.

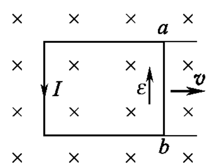


图 17－2　楞次定律的应用

显然, 用楞次定律确定出的感应电动势方向和利用法拉第电磁感应定律确定的方向完全一致, 因此式(17－2)中的负号就是楞次定律的数学表示. 但通常在实际问题中, 直接用楞次定律来判断感应电动势的方向要简便一些.

楞次定律还可以更简单地表述为: 感应电流的效果, 总是反抗引起感应电流的原因. 如上面例中当 ab 向右滑动时分析导线 ab 所受安培力的方向: 因为引起感应电流的原因是 ab 向右滑动, 所以感应电流的效果应当是在导线 ab 上施一阻力来反抗 ab 向右滑动. 这一阻力就是导线 ab 所受的安培力, 向左的阻力方向就是安培力的方向. 由此可以看出, 在不需要具体确定感应电流的方向时就直接得出结论. 因此, 在解决诸如此类问题时采用楞次定律的后一种表述也十分方便.

从本质说, 楞次定律是能量转换与守恒定律在电磁感应现象中的具体表现形式. 比如上例中无论导线 ab 朝右边或左边运动, 都要受到安培力的阻碍. 因此在 ab 运动的过程中外力必须克服安培力做功, 这时外界供给的能量就转换为感应电流的电能, 最后转化为电路中的焦耳热.

例 17－1 如图 17－3 所示，面积为 S 的密绕 N 匝平面矩形线圈置于随时间变化的均匀磁场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\sin\omega t$ 中，若该线圈以匀角速度 ω 绕位于线圈平面内且垂直于磁场方向的固定轴 OO' 旋转，且 $t=0$ 时线圈平面与磁场方向垂直. 求线圈中的感应电动势.

解 设 $t=0$ 时线圈平面的正法向 $\boldsymbol{n}$ 向里与磁场方向平行，则任意 t 时刻 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角为

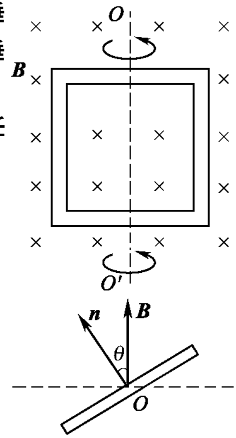
$$\theta=\omega t$$

t 时刻通过 N 匝线圈的磁通链为

$$\Psi = N\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = NBS\cos\theta = NB_0\sin\omega t S\cos\omega t$$
$$= \frac{1}{2}NB_0S\sin 2\omega t$$

线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=-NB_0S\omega\cos 2\omega t$$



7－3 例 17－1 图(线圈旋转时的感应电动势)

由结果可知，ε 是随时间做周期性变化的. 当 $\cos 2\omega t>0$ 时，$\varepsilon<0$，这时表示感应电动势方向与 $\boldsymbol{n}$ 成左手螺旋关系；当 $\cos 2\omega t<0$ 时，$\varepsilon>0$，这时表示感应电动势方向与 $\boldsymbol{n}$ 成右手螺旋关系. 显然此例中的感应电动势既含有由线圈在磁场中转动引起的动生电动势，又含有由 $\boldsymbol{B}$ 随时间变化引起的感生电动势. 如果 $\boldsymbol{B}$ 是不随时间变化的稳恒磁场时，此例表示的就是交流发电机的工作原理了.

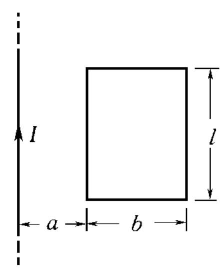
例 17－2 一根无限长直导线载有交变电流 $I=I_0\cos\omega t$，旁边有一共面 N 匝矩形线圈，各有关尺寸如图 17－4 所示. 线圈的总电阻为 R，求线圈中的感应电动势和感应电流.

解 设 t 时刻电流向上，取线圈所包围面积的正法向 $\boldsymbol{n}$ 垂直于纸面向里，则磁通量为

$$\Phi=\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

磁通链为

$$\Psi=N\Phi=\frac{\mu_0 NIl}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}=\frac{\mu_0 NlI_0\cos\omega t}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$



17－4 例 17－2 图(N 匝矩形线圈中的电动势)

线圈中感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 Nl\omega I_0\sin\omega t}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

感应电流为
$$I_i=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\mu_0 Nl\omega I_0\sin\omega t}{2\pi R}\ln\frac{a+b}{a}$$

由以上结果可见，ε 与 I_i 也是随时间做周期性变化的. $\varepsilon>0$ 表示感应电动势的方向与 $\boldsymbol{n}$ 成右手螺旋关系，即沿顺时针方向；$\varepsilon<0$ 表示感应电动势的方向与 $\boldsymbol{n}$ 成左手螺旋关系，即沿逆时针方向. 感应电流始终与感应电动势同方向.

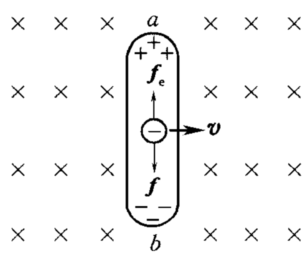
17.2　动生电动势与感生电动势

17.2.1　动生电动势

前面已经讲过，当磁场静止不随时间变化时，仅是由于导线回路或其一部分在磁场中运动时产生的感应电动势称为动生电动势. 那么产生动生电动势的非静电力是什么力呢？下面就结合图 17－2 来进行分析.

设导线框中的 ab 段在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的稳恒磁场中向右以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，见图17－5所示. 这时导线中的自由电子也以相同的速度 $\boldsymbol{v}$ 在磁场中向右运动，因此受到一个向下的洛伦兹力

$$\boldsymbol{f}=(-e)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$



7－5　洛伦兹力产生动生电动势

如果导线框开路即只有 ab 段，在洛伦兹力的作用下，自由电子向下运动聚集到 b 端，使 b 端积累负电荷，a 端则出现过剩的正电荷. 于是在导线内产生了一个静电场，电子又会受到一个和 $\boldsymbol{f}$ 方向相反的电场力 $\boldsymbol{f}_e$. 当两者达到平衡时，ab 间的电势差就达到稳定值，a 端的电势比 b 端的电势高. 这时如果导线 ab 与导线框形成如图 17－2 所示的闭合回路，在回路中就会出现感应电流，而 a，b 两端因电流而减少的电荷会在失去平衡后的洛伦兹力作用下不断地得到补充. 由此可见，运动的导线 ab 段相当于一个电源，在其内部能够分离正负电荷. 把正电荷从电势较低点送到电势较高点的非静电力是洛伦兹力，亦即产生动生电动势的非静电力就是洛伦兹力. 因此相应的非静电场场强为

$$\boldsymbol{E}_k=\frac{\boldsymbol{f}}{-e}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

则动生电动势为

$$\varepsilon=\int_{-}^{+}\boldsymbol{E}_k\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{b}^{a}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (17-6)$$

如果由上式计算出的 $\varepsilon>0$，则表示动生电动势的方向与积分方向一致. 即积分的起点电势低，终点电势高. 反之 $\varepsilon<0$，则表示动生电动势的方向与积分方向相反. 也就是积分的起点电势高，终点电势低.

必须指出，上式不仅适用于直导线，也适用于任意形状的导线在任意稳恒磁场中运动时动生电动势的计算. 特别当导线形成闭合回路，且整个回路都有运动时，就应该对整个闭合回路积分. 即

$$\varepsilon=\oint \boldsymbol{E}_k\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{17-7}$$

由式(17－6)和式(17－7)知道，动生电动势的量值反映了单位正电荷通过运动导线段(电源)时洛伦兹力所做的功. 但又由 $\boldsymbol{f}=(-e)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 知道，驱动导线中自由电子运动的洛伦兹力与导线的运动速度总是垂直的. 既然如此，那外界给出的能量是如何转变为回路中的电能呢？为了说明这个问题，我们再看图17－2所示的情况. 设有一恒定外力拉导线 ab 段由静止开始向右滑动，这时导线 ab 中产生动生电动势，在回路中出现感应电流. 其中 ab 上的感应电流受到磁场 $\boldsymbol{B}$ 向左作用的安培力而阻止 ab 段的滑动. 随着导线 ab 运动速度的增大，安培力也逐渐增大. 当增大到与外力相等时，导线 ab 开始以匀速 v 运动，而整个回路中的感应电流也趋于稳定值达到平衡状态. 这时导线 ab 中的自由电子不但具有随同 ab 段向右运动的速度 $\boldsymbol{v}$，而且如图 17－6 中所示还具有相对于导线向下的定向运动速度 $\boldsymbol{u}$. 于是自由电子的合速度为 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，所受到的总洛伦兹力为

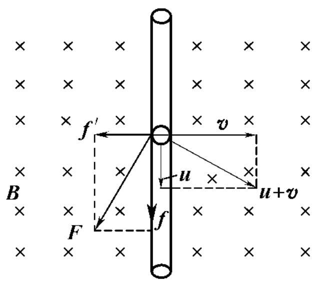


图 17－6　总洛伦兹力不做功

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=-e(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{B}\\&=-e\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{f}'+\boldsymbol{f}\end{aligned}$$

洛伦兹力的总功率为

$$P=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{f}'+\boldsymbol{f})\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}'\cdot\boldsymbol{v}=evBu-euBv=0$$

由上式可知，$\boldsymbol{F}\perp\boldsymbol{V}$，即总洛伦兹力的总功率为零. 但当恒定外力向右拉动 ab 段做正功提供机械能时，分力 $f'=-e\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ 做负功，在宏观上就表现为安培力做负功接收了外界提供的机械能. 与此同时洛伦兹力的另一个分力 $\boldsymbol{f}=-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 对电子的定向运动做正功，在宏观上就体现为动生电动势在回路中做正功又以电能的形式输出了这个份额的能量. 由此可见，尽管总洛伦兹力不做功，但在机械能向电能转换的过程中它起到了传递能量的作用. 实质上，上述过程就是发电机的工作原理.

例 17－3　如图 17－7 所示，在垂直于匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 的平面内有一长为 L 的刚性直导线以角速度 ω 绕其一端 O 逆时针转动. 求：(1)直导线中的动生电动势；(2)在同一平面内分别以 O,A 为两端的任意弯曲的刚性导线 ODA 以同样的角速度 ω 绕 O 端逆时针转动时，该导线上的动生电动势.

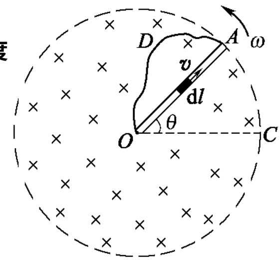


图 17－7　例 17－3 图（刚性直导线与任意弯曲导线在匀强磁场中转动时的动生电动势）

解　(1)方法一:用式(17－6)求解.

在 OA 上距 O 为 l 处取一小线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,方向由 O 指向 A,其速度 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$ 且($\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$)与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 反向,所以小线元上的电动势为

$$\mathrm{d}\varepsilon=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=vB\mathrm{d}l\cos\pi=-vB\mathrm{d}l$$

直导线 OA 上的总电动势为

$$\varepsilon_{OA}=\int_O^A\mathrm{d}\varepsilon=-\int_O^L vB\mathrm{d}l=-\int_O^L\omega lB\mathrm{d}l=-\frac{1}{2}\omega BL^2$$

结果中 $\varepsilon_{OA}<0$ 表明动生电动势的方向是由 A 指向 O.

方法二:用式(17－2)求解.

对于非闭合导线,为了便于应用 $\varepsilon=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 求解,可以作一些辅助导线,让其与实际导线组成闭合回路. 由于所做辅助导线在磁场中静止不动,即不会产生动生电动势,所以该闭回路的电动势就是运动导线的动生电动势. 于是本题中做辅助线 OCA,形成扇形闭合回路,其包围的面积为

$$S=\frac{1}{2}L^2\theta$$

取回路面积的正法线方向 $\boldsymbol{n}$ 垂直于纸面向里,则穿过 S 的磁通为

$$\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}BL^2\theta$$

动生电动势为

$$\varepsilon_{OA}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}BL^2\omega$$

$\varepsilon<0$ 表明动生电动势的真实方向与 $\boldsymbol{n}$ 成左手关系,即沿回路的逆时针方向. 该电动势是运动导线 OA 上产生的,所以具体到导线 OA 上 ε 的方向是由 A 指向 O.

应用方法二时注意到在感应电动势的大小 $|\varepsilon|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|$ 中,单位时间内磁通量增量的绝对值 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|$ 实际上是表示运动导线在单位时间内扫过(切割)的磁感应线的条数,所以可以设导线 OA 在 $\mathrm{d}t$ 时间内转动了 $\mathrm{d}\theta$ 角,则 OA 在 $\mathrm{d}t$ 时间内扫过的面积为 $\mathrm{d}S=\dfrac{1}{2}L^2\mathrm{d}\theta$,扫过的磁感应线数为

$$|\mathrm{d}\Phi|=B\mathrm{d}S=\frac{1}{2}BL^2\mathrm{d}\theta$$

所以动生电动势的大小为

$$|\varepsilon_{OA}|=\left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{1}{2}BL^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}BL^2\omega$$

电动势方向可由楞次定律确定.

(2) 因为由刚性的直导线 OA 和弯曲导线 ODA 组成的闭合回路 $OADO$ 在匀强磁场中以

角速度 ω 转动时，穿过回路的磁通不变，所以整个回路的动生电动势

$$\varepsilon_{OADO}=\varepsilon_{OA}+\varepsilon_{ADO}=0$$

故
$$\varepsilon_{ADO}=-\varepsilon_{OA}=-(-\frac{1}{2}wBL^2)=\frac{1}{2}wBL^2$$

电动势的实际方向由 A 端沿弯曲导线指向 O 端.

例 17－4 如图 17－8 所示，一长直导线通有稳恒电流 I，一长为 L 的导体棒 AC 与之共面，A 端与长直导线相距为 a，AC 与水平方向的夹角为 θ. 当棒以速度 v 竖直向上运动时，求棒两端的感应电动势，并指出哪端电势高.

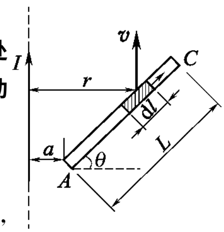


图 17－8 例 17－4 图（直导线在非匀强磁场中平动时的动生电动势）

解 在 AC 上任取一线元 $\mathrm{d}l$，方向从 A 指向 C. $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的 $\boldsymbol{v}$ 垂直于该处的 $\boldsymbol{B}$，且 $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 的方向与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向间的夹角为 $(\pi-\theta)$，则该线元上的电动势为

$$\mathrm{d}\varepsilon=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=vB\mathrm{d}l\cos(\pi-\theta)=-vB\mathrm{d}l\cos\theta$$

线元到长直导线的距离如图所示用 r 表示，则有 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，且 $\mathrm{d}l\cos\theta=\mathrm{d}r$，代入上式，得

$$\mathrm{d}\varepsilon=-\frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

棒 AC 上的总电动势为

$$\varepsilon_{AC}=\int_A^C\mathrm{d}\varepsilon=\int_a^{a+L\cos\theta}-\frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}\mathrm{d}r=-\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{a+L\cos\theta}{a}$$

$\varepsilon<0$ 表明电动势的方向由 C 指向 A，所以 A 端的电势高.

例 17－5 一半径为 R 的半圆形导线在垂直于匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 的平面内平动，平动速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直于直径方向如图 17－9 所示. 求半圆形导线上的动生电动势.

解 在半圆形导线上取一小线元 $\mathrm{d}l$，则 $\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$. $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的速度垂直于该处的磁感 $\boldsymbol{B}$，且 $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 的方向与 $\mathrm{d}l$ 方向间的夹角为 θ，所以半圆形导线上的动生电动势为

$$\varepsilon=\int_C^A(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}vBR\cos\theta\mathrm{d}\theta=2vBR$$

$\varepsilon>0$ 表明电动势的方向由 C 点沿半圆弧指向 A 点. 而直径 CA 上的电动势

$$\varepsilon_{CA}=\int_C^A(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^{2R}vB\mathrm{d}l=2vBR$$

电动势的方向由 C 点沿直径指向 A 点. 由以上结果可知，半圆形导线上的电动势与直径上的电动势大小相等，方向相对于同一闭合回路绕向而言相反. 实际上，对于任意形状弯曲导线在匀强磁场中平动时，如果用一直导线连接弯曲导线的两端，则由于形成闭合回路的磁通在平动中不会改变，使闭合回路的总电动势为零，因此弯曲导线上的电动势与直导线上的电动势

总是大小相等方向相反.

17.2.2　感生电动势

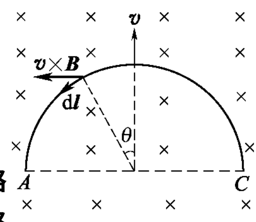


图 17－9　例 17－5 图(半圆导线在匀强磁场中平动时的动生电动势)

下面讨论电磁感应现象中的第二类情况,即导体回路静止,由于磁场的变化而在导体中产生感生电动势,在回路中出现感生电流的情形.

尽管磁场发生变化的原因是多种多样的,可以是产生磁场的载流导线、线圈或永磁铁的位置变化,也可以是电流强度或电流的分布情况产生变化,但不管属于哪一种原因,在静止的导体中都会出现感应电动势. 显然在这类情况下产生的感应电动势与前面所述的动生电动势有所区别,用洛伦兹力是解释不了的. 麦克斯韦于 1861 年提出了假说,变化的磁场在其周围空间激发一种电场. 这种电场不同于静电场,它不是由电荷激发,而是由磁场的变化引起的,称感生电场;感生电场对电荷有作用力,其作用规律与静电场相同. 这就是说,若用 E_r 表示感生电场的电场强度,则电荷 q 所受感生电场的力可表示为 $f_r=q\boldsymbol{E}_r$;麦克斯韦还认为,感生电场的产生与空间有无导体无关. 这里我们要注意到,法拉第电磁感应定律是对导体组成的回路而言的,而麦克斯韦的假说则无论有无导体,无论是真空或介质都是适用的. 如果是导体回路,感生电场的作用便驱使导体中的自由电荷运动,显示出感生电流. 如果不是导体,就没有感生电流,但变化磁场所激发的感生电场仍客观存在. 这一假说已被近代的科学实验所证实,如利用变化磁场激发的电场来加速电子的电子感应加速器就是一个令人信服的证据. 在理论上,麦克斯韦的这一“感生电场”的假说与他的另一个后面要讲到的关于“位移电流”的假说已成为现代电磁理论的基础.

综上所述,在静止导体中产生感生电动势的非静电力是感生电场对电荷的作用力. 设有一段导线 ab 静止处在感生电场中,则其上产生的感生电动势为

$$\varepsilon=\int_a^b \boldsymbol{E}_r\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{17-8}$$

而感生电场中的任一导线闭合回路 L 上的感生电动势则为

$$\varepsilon=\oint_L \boldsymbol{E}_r\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{17-9}$$

把上式代入法拉第电磁感应定律(17－2)式,得

$$\oint_L \boldsymbol{E}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{17-10}$$

式中 Φ 是穿过闭合回路 L 所围面积 S 的磁通量，即

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

于是

$$\oint_L \boldsymbol{E}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

当回路固定不动，磁通量的变化完全由磁场的变化引起，上式变为

$$\oint_L \boldsymbol{E}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{17-11}$$

由此说明，感生电场的场强 $\boldsymbol{E}_r$ 沿任一闭合回路的线积分一般不等于零，所以感生电场不是保守场. 描述感生电场的电场线是闭合线、无头无尾像旋涡一样. 因此感生电场也称为涡旋电场(有旋场). 式(17－11)是关于涡旋电场和变化磁场联系的数学式. 式(17－11)中的负号表明涡旋电场与变化磁场在方向上形成左手螺旋关系，常说成变化的磁场产生一个左旋电场. 再具体一点，就是用左手螺旋前进的方向表示$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$的方向，则左手螺旋转动的方向就是 $\boldsymbol{E}_r$ 线的转向，如图 17－10 所示.

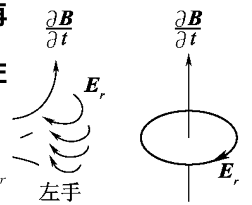


图 17－10 $\boldsymbol{E}_r$ 和$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$成左手螺旋关系

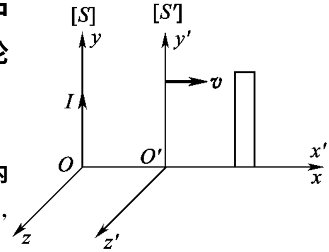
另外，由于感生电场的电力线是闭合曲线，所以场强 $\boldsymbol{E}_r$ 对任一闭合曲面 S 的通量恒为零，即

$$\oint_S \boldsymbol{E}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{17-12}$$

这一结论其实起初也是由麦克斯韦作为假设提出的，通过实验已证明了这个结论是正确的. 它表明感生电场是无源场，其电力线不像静电场电力线那样起于正电荷而止于负电荷. 我们已经知道静电场是有源无旋场，与之相比感生电场则是无源有旋场.

必须指出，在前面讨论中把电动势分为动生和感生两类，实际上这种区分具有相对性，与参考系的选择有关. 例如在图 17－11 中，一导体棒固定其中的参考系 S'以速度为v 相对于参考系 S 沿 x 轴正向运动. 在 S 系中 y 轴上固定一长直电流 I，则在 S 系中的观察者看来导体棒中产生的是动生电动势. 而在 S'系中的观察者来看，因为长直电流随同 S 系一起相对于 S'系沿 x'轴负方向运动，导致 S'系中磁场随时间变化，所以导体棒中产生的是感生电动势. 如果另有一观察者以速度 $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ 相对于 S 系 x 轴正向运动，则此观察者认为在导体棒中既有动生电动势，又有感生电动势. 以上各种情况，只要长直电流与导体棒的相对运动相同且各参考系间的相对速度比光速小得多时，其计算结果就完全相同. 若各参考

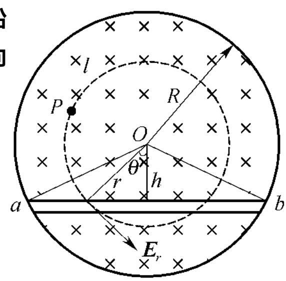
系间的相对速度不是比光速小得多，则在各参考系中观察导体棒上电动势的值之间满足电磁场的相对论变换关系.



－11　动生和感生电动势的相对

例 17－6　如图 17－12 所示，半径为 R 的圆柱形空间内分布有沿圆柱轴线方向的均匀磁场，磁场方向垂直纸面向里，变化率$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$为常数. 有一长为 L 的直导线 ab 放在磁场中，a 和 b 两端正好在圆上. 求：(1) 圆柱形内、外空间涡旋电场 $\boldsymbol{E}_r$ 的分布；(2) 当$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$ 时直导线 ab 上的感生电动势.

解　(1) 由磁场分布的轴对称性可知涡旋电场也应具有轴对称性，又因为涡旋电场的电力线为闭合曲线，所以所求空间涡旋电场的电力线必是围绕圆柱轴线且在圆柱截面上的一系列同心圆. 选取过空间任一点 P 半径为 r 的同心圆作为闭合回路 L，则在该回路上各点处 $\boldsymbol{E}_r$ 的大小相等. 取回路 L 包围面积的正法向与 $\boldsymbol{B}$ 同向，即取图中沿 L 顺时针方向为感应电动势的正方向，亦即沿 L 顺时针切线方向为 $\boldsymbol{E}_r$ 的正方向. 则由式(17－10)，左边为



17－12　例 17－6 图(直导线上的感生电动势)

$$\oint_L \boldsymbol{E}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L E_r \mathrm{d}l = E_r 2\pi r$$

当 $r<R$ 时，右边为

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\pi r^2) = -\pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

于是
$$E_r 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

所以
$$E_r = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

当 $r>R$ 时，式(17－10)右边为

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\pi R^2) = -\pi R^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

同理
$$E_r = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

当$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$ 时，$E_r<0$ 表示 $\boldsymbol{E}_r$ 沿 L 的逆时针切线方向. 反之 $E_r>0$ 表示 $\boldsymbol{E}_r$ 沿 L 的顺时针切线方向.

由以上结果可知，在圆柱形磁场区域内涡旋电场的场强大小与空间点离开轴线距离 r 成正比. 在磁场区域外涡旋电场的场强大小并不为零，而是与 r 成反比.

(2) 方法一：先求出 $\boldsymbol{E}_r$ 的分布，再由 $\varepsilon = \int_a^b \boldsymbol{E}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 计算 ε.

由(1)中结论知，在 $r<R$ 的区域，且当$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$ 时，$\boldsymbol{E}_r$ 的大小为$\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$，方向为沿 L 的逆时

针切线方向. 于是在直导线 ab 上任取小线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,方向从 a 指向 b,其上的电动势为

$$\mathrm{d}\varepsilon=\boldsymbol{E}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=E_r\mathrm{d}l\cos\theta=\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l\cos\theta$$

因为 $$r\cos\theta=h$$

所以 $$\mathrm{d}\varepsilon=\frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l$$

$$\varepsilon_{ab}=\int_a^b\mathrm{d}\varepsilon=\frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_0^L\mathrm{d}l=\frac{h}{2}L\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{2}\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

当 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$ 时,$\varepsilon_{ab}>0$ 表示 ε_{ab} 的方向与积分方向相同,即沿直导线从 a 指向 b.

方法二:由 $\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 计算 ε_{ab}.

因为法拉第电磁感应定律是对闭合回路而言的,所以做辅助线 Oa 与 bO 使之与导线 ab 构成闭合回路 $OabO$,设其所围面积法线正向 $\boldsymbol{n}$ 垂直纸面向外与 $\boldsymbol{B}$ 相反,因此回路上的感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S})=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B\frac{1}{2}Lh\cos\pi\right)=\frac{L}{2}\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

由于所做辅助线 Oa,bO 沿径向,其上各点的 $\boldsymbol{E}_r$ 均与径向垂直,所以有

$$\varepsilon_{Oa}=\int_O^a\boldsymbol{E}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0,\ \varepsilon_{bO}=\int_b^O\boldsymbol{E}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

于是上面求出闭合回路上的电动势 ε 就是直导线 ab 上的感生电动势 ε_{ab},即

$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon=\frac{L}{2}\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

当 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$ 时,$\varepsilon>0$ 表示回路上电动势的实际方向与 $\boldsymbol{n}$ 成右手螺旋关系,即沿图中闭合回路的逆时针方向,具体到导线 ab 上是由 a 端指向 b 端. ε_{ab} 的方向也可以直接由楞次定律来确定.

17.3 电子感应加速器 涡电流

17.3.1 电子感应加速器

电子感应加速器是利用变化磁场激发涡旋电场来对电子进行加速的装置,其主要结构如图 17-13a 所示. 图中画斜线的部分是圆柱形电磁铁的两极,在两磁极间放置一个环形真空电子轨道室. 电磁铁在频率约每秒数十周的强大交变

电流的激励下，在环形真空室区域产生交变磁场，这交变磁场又在环形真空室内产生很强的涡旋电场. 电子由电子枪注入环形真空室后，既受到磁场施予的洛伦兹力 f 的作用在环形真空室内作圆周运动，又在涡旋电场力 f_r 的作用下沿轨道切线方向得到加速.

由于磁场和涡旋电场都是交变的，所以在交变电流的一个周期内只有当涡旋电场的方向与电子绕行方向相反时，电子才能得到加速. 电场方向一变，电子就要受到减速，而且电子所受的洛伦兹力也非总是指向环形真空室的轨道圆心. 因此每次注入的电子束一定要在其所受洛伦兹力指向轨道圆心的阶段内得到加速，并且必须在此条件改变之前被引出使用. 如果磁场随电流按正弦规律变化，则由表示相应一个周期内涡旋电场方向和电子所受洛伦兹力方向的图 17－13b 中可以看到，只有在第一个四分之一周期内电子才处于正常的加速阶段. 这个时间虽短，但由于电子束注入真空环形室时的初速度已相当大，所以在短暂的四分之一周期时间内已在真空室内加速环行了几十万甚至数百万圈，并由此获得了相当高的能量.

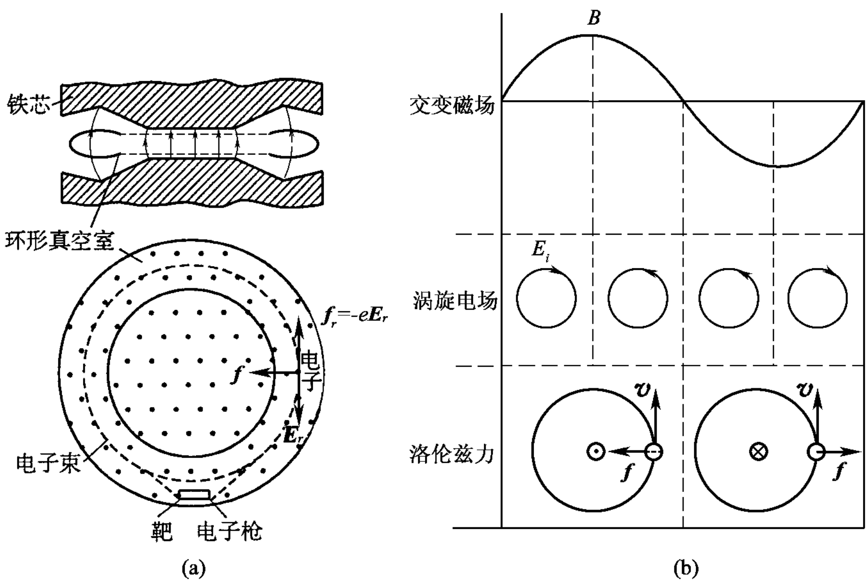


图 17－13　电子感应加速器工作原理

由上述原理可知，经电子感应加速器加速后输出的电子束是脉冲式的. 与其他各类加速器相比，电子感应加速器的结构比较简单，因此成本较低. 目前一般小型电子感应加速器可把电子加速到 0.1 MeV～1 MeV，用其产生出的 X 射线

和人工 γ 射线供给医学上诊疗或工业上探伤使用.大型的加速器可把电子加速到数百 MeV,主要是用于科学研究,特别是核物理的研究.

17.3.2 涡电流

当块状金属处在变化的磁场中或相对于磁场运动时,在金属内部也会产生感应电流.这种电流在金属块内部自成闭合回路,所以称为涡电流或傅科电流,简称涡流.

如图 17－14 所示,在一圆柱形金属上绕有线圈.当线圈中通有交变电流时,金属就处在交变的磁场中,该变化磁场又在周围空间激发涡旋电场,因此处在涡旋电场中金属内部的自由电子就在电场力的作用下运动而形成电流.由于大块金属的电阻很小,所以涡流的强度会很大,结果产生大量的焦耳热使金属的温度升高.因为感生电动势与磁通量的变化率成正比,磁通量变化率又与外加交变电流的频率成正比,所以涡电流的强度与外加电流的频率成正比.而涡电流产生的焦耳热是与涡电流强度的平方成正比的,因此涡电流产生的焦耳热与外加电流频率的平方成正比.当使用频率高达几百赫兹甚至几千赫兹的交变电流时,金属内会因涡电流放出巨大的热量,这种感应加热的方法在工业上经常被利用.例如在冶金工业中已广泛应用于冶炼难熔或易氧化的金属以及特种合金材料,又如在真空技术上对于一些要求高真空度的器件如显像管、示波管、激光管等的制造中常采用感应加热的方法,隔着玻璃管使其内部的金属部分升温,以驱逐金属表面上吸附的残存气体由真空泵抽出,然后封口.

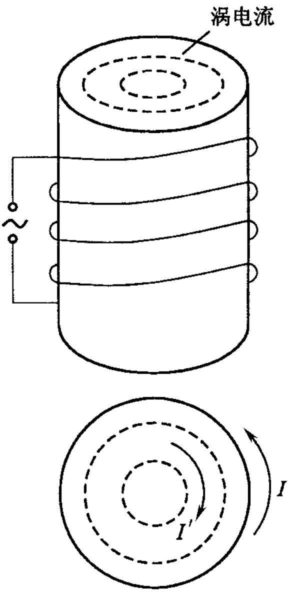


图 17－14　涡电流

涡电流产生的热效应虽然有着广泛的应用,但在有些情况下也有很大的危害.例如在变压器、电机等设备中都具有铁芯,常常因涡电流产生无用的热量.不仅造成称为涡流损耗的能量损失,而且还会因铁芯严重发热导致不能正常工作甚至损坏设备.为了减少这种损失,一种办法是选用电阻率高的材料做铁芯,像硅钢、铁氧体等就是既有高的电阻率,又有同纯铁接近的高磁导率的材料.另一种办法是用彼此绝缘的硅钢片叠合起来代替整块铁芯,减小电流的截面以增大电阻,变压器和电机中的铁芯就

是采用的这种方法. 在高频情况下,更有效的是用粉末状的铁氧体压成铁芯,各粉末微粒间彼此绝缘.

块状金属在磁场中运动时会产生涡流,此涡流在磁场中又会受到安培力的作用阻止金属运动,利用这种效应可以制成电磁阻尼装置. 如图 17－15 中所示的一对电磁铁两磁极之间有一金属片制成的摆. 当电磁铁的线圈中不通电时两极之间无磁场,这时金属片在摆动过程中只受到空气阻尼和转轴处摩擦力的作用,摆动要经过很长时间才会停下来. 但电磁铁的线圈中通有电流时,两极间便存在磁场,当金属片进入磁场时就产生了涡电流. 按照楞次定律,感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因,而在这里引起了感应电流的原因就是摆和磁场的相对运动,所以金属片会受到阻尼力的作用使摆动迅速停止下来. 这种阻尼起源于电磁感应,因此称之为电磁阻尼. 这一原理在各式仪表中已被广泛的应用,例如许多电磁仪表进行测量时是用可以旋转的指针指示被测量的,由于惯性指针转动到表示被测量示值的平衡位置附近会来回摆动. 为了使指针能快速稳定下来,一般在指针的转轴上装一块金属片作为阻尼器以达到目的. 因为指针经常是用很细的游丝制成,所以阻尼器还可以在仪表运输途中遭遇剧烈振动时保护指针避免损坏. 另外,电气火车和电车中所用的电磁制动装置也是根据电磁阻尼的原理制成的.

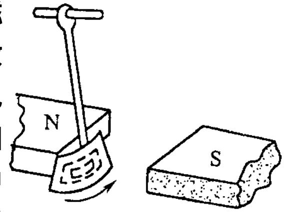


图 17－15　阻尼摆

涡电流除上述的两种效应外,还有一种趋肤效应:对于直流电路,一段柱状均匀导体横截面内的电流密度基本上是均匀的. 但是当交流电流通过柱状导体时,变化的电流在导体内部产生围绕电流的变化磁场,变化的磁场又在导体内产生涡电流. 定量分析证明,在柱状导体中心轴附近的涡电流与原先的电流几乎总是反向,而在导体表面处又几乎总是同向. 于是电流在导体的横截面上不再均匀分布,而是越靠近导体柱表面处电流密度就越大,这种交变电流只在导体表面层中流动的现象称为趋肤效应. 它使导线的有效截面变小,特别是在高频电流的情况下,导线电阻明显地随着频率的增高而增大. 为了改善这种情况,用于高频电路中的导线常在其表面上镀银以减小电阻,或用多股漆包线代替单一粗导线、用空心导线代替实心导线等方法来增加导线的表面积以达到增大导线载流的有效截面.

17.4 自感应与互感应

17.4.1 自感应

由法拉第电磁感应定律知道，不管什么情况只要通过闭合回路所包围面积的磁通量发生变化时，在回路中就会产生感应电动势. 那么当回路中通有电流时，就有这一电流产生的磁通量穿过回路本身包围的面积. 如果回路中的电流强度、回路的大小或形状、回路周围的磁介质发生变化，则通过回路自身围成面积的磁通量也将随之变化，从而在自身回路中激起感应电动势. 这种由于回路中电流产生的磁通量发生变化，而在自己回路中激起感应电动势的现象称为自感现象，相应的感应电动势称为自感电动势.

设由 N 匝线圈组成的回路中通有电流，而且在回路周围空间没有铁磁性物质，那么根据毕奥–萨伐尔定律可知，空间任一点磁感应强度的大小都与回路中的电流 I 成正比，因此通过线圈回路的磁通链 Ψ 也与 I 成正比，即

$$\Psi = LI \tag{17-3}$$

式中比例系数 L 称为该线圈的自感系数，简称自感，又称电感. 在国际单位制中，自感系数的单位为亨利，用符号 H 表示，$1\ \mathrm{H}=1\ \mathrm{Wb}\cdot\mathrm{A}^{-1}$. 实用上还有 mH，$\mu$H.

引入自感系数以后回路中的自感电动势可以表示为

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \tag{17-14}$$

式中右边第一项表示由回路中电流随时间变化产生的自感电动势；第二项表示自感随时间变化产生的自感电动势.

由式(17－13)容易知道，无铁磁质时一个线圈的自感系数 L 与电流 I 无关，只取决于线圈的大小、形状、匝数以及周围磁介质的磁导率和分布情况，当这些有关的因素都保持不变时，L 为一常量，亦即 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=0$，因此式(17－14)就写成

$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{17-15}$$

由上式可知，自感电动势的大小为 $|\varepsilon_L|=L\left|\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|$ 与电流的变化率成正比，而方向则由式中的负号表明. 当 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}>0$ 时 $\varepsilon_L<0$，表明回路中电流增加时自感电动势方向与电流方向相反；当 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}<0$ 时 $\varepsilon_L>0$，表明回路中电流减小时自感电动势方向与电流方向相同. 由此可见，要使任何回路中的电流发生改变，就必然引起自感电动势来反抗电流的改变. 而回路的自感越大，回路中的电流就越不易改变. 也就是说，回路中的自感有使回路电流保持不变的性质. 这一性质与力学中物体的惯性有些相似，通常称之为电磁惯性. 而自感就是回路电磁惯性的量度. 一般线圈的自感不易计算，实际中多采用实验的方法测量得到.

自感现象在电工和无线电技术中有广泛的用途. 例如利用线圈的自感具有阻碍电流变化的能力，可以稳定电路里的电流. 又如在电子线路中利用线圈的自感把它和电容器组合构成谐振电路或滤波器等. 但另一方面在某些情况下自感现象又是非常有害的. 例如在供电系统中切断载有大电流的电路时，由于电路中自感元件的作用，开关触头处会出现强烈的电弧，容易危及设备与人身安全. 为了避免这类情况的发生，在上述场合通常使用带有灭弧结构的特殊开关.

例 17－7　设有一均匀密绕长直螺线管，长为 l，截面积为 S，总匝数为 N，管中介质的磁导率为 μ，求此螺线管的自感系数.

解　设螺线管通有电流 I，当忽略边缘效应时，管内任一点的磁感应强度的大小为 $B=\mu\frac{N}{l}I$，穿过螺线管每匝的磁通量为 $\Phi=BS=\mu\frac{N}{l}SI$. 穿过螺线管的磁通链为

$$\Psi=N\Phi=\mu\frac{N^2}{l}SI$$

因此所求螺线管的自感系数为

$$L=\frac{\Psi}{I}=\mu\frac{N^2}{l}S=\mu n^2V$$

式中 $n=\frac{N}{l}$ 为螺线管单位长度上的匝数，$V=Sl$ 为螺线管的体积.

17.4.2　互感应

如图 17－16 所示，两个邻近线圈回路 1 和 2，分别通有电流 I_1 和 I_2，其中任一回路中电流产生的磁场中的部分磁感应线将穿过另一个回路所包围的面积. 如果任一回路的电流发生变化，或两回路的大小、形状、匝数、相对位置以及周围

磁介质的磁导率和分布情况这些因素中的任一因素产生变化，都将引起通过另一回路所包围面积中由前一回路电流产生的磁通链发生变化，从而在另一回路中激起感应电动势. 这种由于一个回路中的电流在另一个回路所包围面积中产生的磁通链发生变化，而在另一个回路中激起感应电动势的现象称为互感应现象，相应的电动势称为互感电动势. 互感现象与自感现象一样，都是由电流产生的磁通链变化而引起的电磁感应现象. 不同的只是自感现象中穿过线圈回路面积的磁通链是由自身线圈中的电流产生的，而在互感现象中，通过线圈回路面积的磁通链是由邻近另一线圈中的电流所产生，所以可以用讨论自感现象类似的方法来研究互感现象.

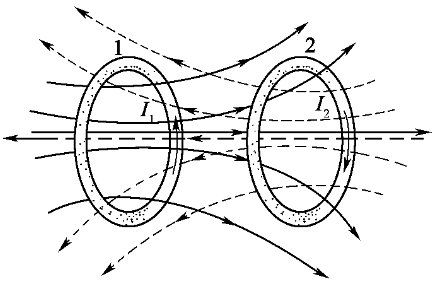


图 17－16　互感现象

设线圈 1 中电流 I_1 产生的通过线圈 2 回路面积的磁通链为 Ψ_{21}，线圈 2 中电流 I_2 产生的通过线圈 1 回路面积的磁通链为 Ψ_{12}. 并设在两线圈回路周围空间没有铁磁性介质，则根据毕奥–萨伐尔定律可知，由电流 I_1 产生的空间各点磁感应强度 $\boldsymbol{B}_1$ 的大小均与 I_1 成正比，因此 $\boldsymbol{B}_1$ 穿过另一线圈 2 的磁通链 Ψ_{21} 也与电流 I_1 成正比，即

$$\Psi_{21}=M_{21}I_1$$

同理

$$\Psi_{12}=M_{12}I_2$$

以上两式中 M_{21} 与 M_{12} 是两个比例系数，理论与实验都证明 $M_{21}=M_{12}$，可统一用 M 表示，称为两线圈的互感系数，也简称为互感. 于是以上两式可分别写为

$$\Psi_{21}=MI_1,\Psi_{12}=MI_2$$

或写成

$$M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\frac{\Psi_{12}}{I_2} \tag{17-16}$$

互感系数的单位和自感系数的单位相同，也为亨利，用符号 H 表示. 互感系数也不易计算，一般也常用实验的方法测量得到.

根据法拉第电磁感应定律，当 Ψ_{21} 变化时在线圈 2 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{21}=-\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(MI_1)}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}-I_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{17-17}$$

当 Ψ_{12} 变化时在线圈 1 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{12}=-\frac{\mathrm{d}\Psi_{12}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(MI_2)}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}-I_2\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{17-18}$$

以上两式右边的第一项表示由对方线圈中电流变化引起的互感电动势，第二项表示由互感随时间变化产生的互感电动势.

由式(17－16)容易知道，在磁场中无铁磁性物质时，互感系数与电流无关，它的量值决定于两线圈回路的大小、形状、匝数、相对位置以及周围磁介质的磁导率和分布情况. 当这些有关的因素都保持不变时，M 为一常量，即 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=0$，这时式(17－17)、式(17－18)就分别变成了

$$\varepsilon_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{17-19}$$

$$\varepsilon_{12}=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{17-20}$$

以上两式表示了因两个载流线圈中的电流变化而相互在对方线圈中激起感应电动势的现象，这在实际问题中是常见的，因此经常就把这种现象称为互感应现象. 相应的互感电动势的大小分别取以上两式的绝对值，方向可由楞次定律判断.

互感现象在电工和无线电技术中应用非常广泛，通过互感线圈可方便地把能量或信号由一个线圈传递到另一个线圈. 如各种变压器、互感器以及一些测量仪器就是利用互感现象制成的. 但在有些情况下互感现象又是有害的，不必要的互感往往使一些电子仪器和设备无法正常工作. 如两路电话之间由于互感而串音，收音机各回路之间的互感带来噪音等. 在这种情况下就需要采取各种措施以尽量减小回路间的相互影响.

例 17－8　在图 17－17 中，一长为 L，截面积为 S 的长直螺线管. 管内磁介质的磁导率为 μ，管上均匀密绕着两组线圈，匝数分别为 N_1，N_2. 求这两个线圈的互感系数.

解　设线圈 1 中通有 I_1 的电流，则管内磁感应强度的大小为 $B=\mu\frac{N_1}{L}I_1$. 线圈 2 的磁通链为

$$\Psi_{21}=N_2BS=\mu\frac{N_1N_2}{L}I_1S$$

所以

$$M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\mu\frac{N_1N_2}{L}S$$

由例 17－7 可知，两个线圈的自感分别为

$$L_1=\mu\frac{N_1{}^2}{L}S,\ L_2=\mu\frac{N_2{}^2}{L}S$$

因此在本例中有　$M=\sqrt{L_1L_2}$

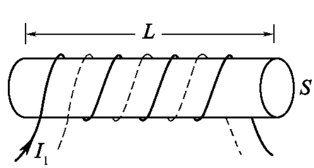


图 17－17　例 17－8 图（两个线圈完全耦合时的互感电动势）

当两个载流线圈邻近放置使之发生互感应时称为磁耦合.

如果对两个线圈而言,每个线圈自身的磁通链全部通过另一个线圈,则称为完全耦合,也称为无漏磁,本例中就是这种情况.而存在漏磁时的一般情况下有

$$M=k\sqrt{L_1L_2}$$

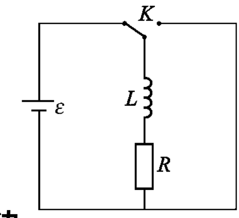
式中 k 称为耦合系数,其值取决于两线圈的相对位置.如果把无漏磁的情况包括在内,则取值范围为 $0\leqslant k\leqslant 1$.

17.5 磁场的能量

17.5.1 自感磁能

当一个电路通有稳定电流时,在其周围空间就建成了一个稳恒的磁场.而磁场与电场一样,是一种特殊的物质,也应该有一定的能量,那么已建成稳恒磁场的能量是从何而来的呢?下面就以一个具有自感的简单电路为例来讨论这个问题.

如图 17-18 所示,将一自感为 L,电阻为 R 的线圈与电动势为 ε 的直流电源相连,当开关合向左边时,电源接通,回路中的电流 i 由零逐渐增至稳定值 I.在这一过程中的任意时刻,线圈上都存在一与电流反方向的自感电动势 ε_L 阻碍着电流的增大.根据有源电路的欧姆定律,有



17-18 自感磁能

$$\varepsilon+\varepsilon_L=iR$$

即

$$\varepsilon=iR-\varepsilon_L$$

两边同时乘上 $i\mathrm{d}t$ 就得到在 $\mathrm{d}t$ 时间内的能量转换关系

$$\varepsilon i\mathrm{d}t=i^2R\mathrm{d}t-\varepsilon_L i\,\mathrm{d}t$$

显然,上式左边表示的是电源在 $\mathrm{d}t$ 时间内做的功,右边第一项表示的是 $\mathrm{d}t$ 时间内电源做功的一部分转变为消耗在线圈电阻上的焦耳热.而右边第二项表示的则是在电流增加的过程中,$\mathrm{d}t$ 时间内电源克服线圈中自感电动势所做的功,它转变为载流线圈的能量.由于 $\varepsilon_L=-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$,所以这部分能量为 $-\varepsilon_L i\,\mathrm{d}t=Li\mathrm{d}i$.在开关未接通 $t=0$ 时,$i=0$,这能量为零.以后随着电流的增大,这能量也增大.当电流 i 达到稳定值 I 时,载流线圈的能量就达到

$$\int_0^I Li\,\mathrm{d}i=\frac{1}{2}LI^2$$

上面能量从场的观点来看，就是电源产生的电场力在电流增加时，克服变化磁场激发的涡旋电场的电场力所做的功. 当线圈中的电流从零增至 I，在周围空间逐渐建立起一定强度磁场的过程中，这功就转化成了磁场的能量，也就是载流线圈的磁场能量，通常称为自感磁能，用 W_m 表示. 即

$$W_m = \int_0^I Li\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2 \tag{17-21}$$

上式适用于任意线圈. 在 L 的单位用亨利，I 的单位用安培时，W_m 的单位为焦耳.

当图 17－18 中的开关合向右边时，电源断开，流过线圈电阻 R 上的电流 i 从 I 减少至零. 在这一过程中的任意时刻，线圈上的自感电动势 ε_L 都与电流同方向阻碍着电流变小. 根据欧姆定律，有 $\varepsilon_L = iR$. 由此得到在 $\mathrm{d}t$ 时间内相应的能量转换关系为

$$\varepsilon_L i\,\mathrm{d}t = i^2 R\,\mathrm{d}t$$

上式表示在电流减少的过程中，自感电动势在 $\mathrm{d}t$ 时间内所做的功转变为对应时间内电阻 R 上产生的焦耳热. 当电流由 I 减小到零时，电阻 R 上产生的全部焦耳热为

$$\int i^2 R\,\mathrm{d}t = \int \varepsilon_L i\,\mathrm{d}t = -\int_I^0 Li\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2$$

结果表明，具有自感为 L 的线圈通有电流 I 时确实储存了磁能 $\frac{1}{2}LI^2$，在电源断开以后储存的磁能就通过自感电动势做功全部转化成了焦耳热.

17.5.2　磁场能量

由上面分析我们看到，具有自感 L 的线圈在电源接通充电建立电流 I 的整个过程中，伴随着由电流激发的磁场逐渐形成，载流线圈也相应地储存了 $\frac{1}{2}LI^2$ 的磁能. 在电源断开放电的过程中，这磁能随着线圈磁场的消失而逐渐转化成了焦耳热. 下面通过直接用描述磁场本身的量 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$ 来表示 $\frac{1}{2}LI^2$，将进一步可以看到线圈的磁能是储存在线圈的磁场中的.

为简单起见，以管内充满磁导率为 μ 的均匀磁介质的长直螺线管为例. 当通过螺线管的电流为 I 时，忽略边缘效应，且把磁场看作全部集中在管内体积 V 中，则螺线管内的磁感应强度 $B = \mu nI$，螺线管的自感系数 $L = \mu n^2 V$，于是螺线管的磁能可以表示为

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 V(\frac{B}{\mu n})^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V$$

结果表明这能量正是定域在磁场所在的空间体积 V 中.

磁场中单位体积的能量称为磁场能量密度,简称磁能密度,用 w_m 表示

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}BH \qquad (17-22)$$

上式虽然是从长直螺线管内均匀磁场的特例导出,但可以证明,它对各向同性非铁磁性介质中的任何磁场都是普遍适用的. 由此知道,在这样的任何磁场中,某点的磁场能量只与该点磁感应强度的大小和介质的性质有关(对各向异性非铁磁质的磁场,$w_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$). 这就充分说明了磁能储存在磁场中,磁场是能量载体的客观事实.

由式(17-22)可知,在匀强磁场中,能量分布也是均匀的,因而磁场能量为磁能密度与磁场占据的空间体积相乘. 在非匀强磁场中,随着空间各点的 B,H 不同,各点的磁能密度也不相同,这时可将磁场所占据的空间划分为无数体积元 $\mathrm{d}V$,在 $\mathrm{d}V$ 内磁场可以看成是均匀的,因此 $\mathrm{d}V$ 内的磁场能量为

$$\mathrm{d}W_m = w_m \mathrm{d}V = \frac{1}{2}BH\,\mathrm{d}V \qquad (17-23)$$

总的磁场能量为

$$W_m = \int_V \mathrm{d}W_m = \int_V \frac{1}{2}BH\,\mathrm{d}V \qquad (17-23)$$

式中积分应遍及整个磁场空间 V.

如果已知载流线圈的磁场能量,则依据 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$,可用 $L = \frac{2W_m}{I^2}$ 来计算该线圈的自感系数,这种计算自感系数的方法称为磁场能量法.

例 17-9 无限长同轴电缆由半径为 R_1 的内圆筒和半径为 R_2 的外圆筒组成,稳定电流 I 由内圆筒表面流出,经外圆筒表面返回形成闭合回路,两筒间充满磁导率为 μ 的介质. 求(1)电缆 l 长度内所储存的磁场能量;(2)同轴电缆单位长度的自感系数.

解 (1) 由安培环路定理可知,在 $r<R_1$ 和 $r>R_2$ 的区域 $H=0$. 在 $R_1<r<R_2$ 的区域内 $H=\frac{I}{2\pi r}$,因此磁能密度为

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} \qquad (R_1<r<R_2)$$

在距轴线为 r 处取一厚度为 $\mathrm{d}r$ 长为 l 的同轴圆柱形簿壳为体积元,则该体积元的体积为

$$\mathrm{d}V = 2\pi r l \mathrm{d}r$$

该体积元中的磁场能量为

$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu I^2 l}{4\pi r} dr$$

所求的磁场能量为

$$W_m = \int_V dW_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2 l}{4\pi r} dr = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(2) 由磁场能量法，长为 l 的一段电缆的自感系数为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的自感系数为

$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

例 17－10　用磁场能量方法推证两个线圈的互感系数相等，即 $M_{12} = M_{21}$.

证　设两线圈最初都是断路无电流状态. 先接通线圈 1，使其中的电流由零增加到 I_1，这时线圈 1 有磁能 $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$. 然后再接通线圈 2，使线圈 2 的电流由零增加到 I_2，则线圈 2 也有磁能 $\frac{1}{2} L_2 I_2^2$. 由于线圈 2 中的电流 i_2 由零增加到 I_2 的过程中会在线圈 1 中感应出电动势 ε_{12}，并设 i_2 产生的磁场通过线圈 1 的磁通是加强了 I_1 的原磁通，则 ε_{12} 使 I_1 有减小的趋势. 为了保持线圈 1 中电流 I_1 不变，电源就必须克服互感电动势而额外做功，这额外提供的能量应等于互感电动势 ε_{12} 做的负功，即

$$\int -\varepsilon_{12} I_1 dt = \int M_{12} \frac{di_2}{dt} I_1 dt = \int_0^{I_2} M_{12} I_1 di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

所以两线圈组成的系统总的磁能为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

同理，也可以先在线圈 2 中建立电流 I_2，再在线圈 1 中建立电流 I_1，这时将得到系统的总磁能为

$$W_m' = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

因为系统的能量不应该与电流形成的先后次序有关，所以有 $W_m = W_m'$，由此可知

$$M_{12} = M_{21} = M$$

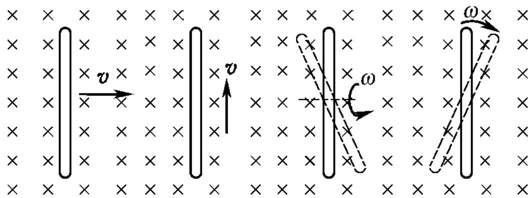
于是当两线圈中的电流激发的磁通相互加强时，系统的总磁能就表示成

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \tag{17-25}$$

式中前两项分别为两个线圈的自感磁能，最后一项 $MI_1 I_2$ 是两个线圈的相互作用能，称为互感磁能.

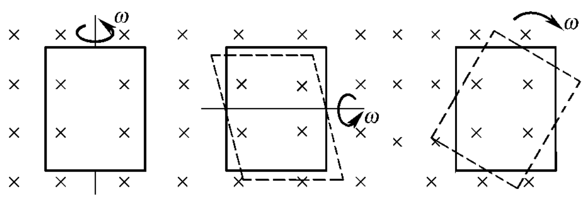
思考题

17－1　一段导线在均匀磁场中做运动如图所示. 试问在图中哪种情况下有感应电动势？感应电动势的方向如何？



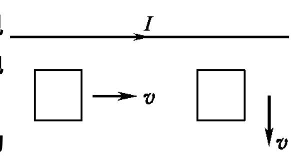
思考题 17－1 图

17－2　一线圈在均匀磁场中做转动，如图所示. 试问在图中哪种情况下线圈中有感应电动势？感应电动势的方向如何？



思考题 17－2 图

17－3　一线圈在长直载流导线所产生的磁场中运动（见图）. 试问图中哪一种情况下，线圈中有感应电动势？感应电动势的方向如何？



思考题 17－3 图

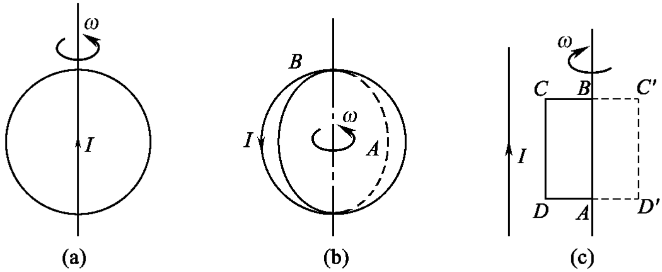
17－4　在下列几种情况中，线圈内是否产生感应电动势？若产生感应电动势，其方向如何确定？

（1）一根无限长的载流直导线穿过圆形导线，并通过圆心如图（a）所示. 若直导线与圆形导线绝缘，圆环绕直导线为轴做转动；

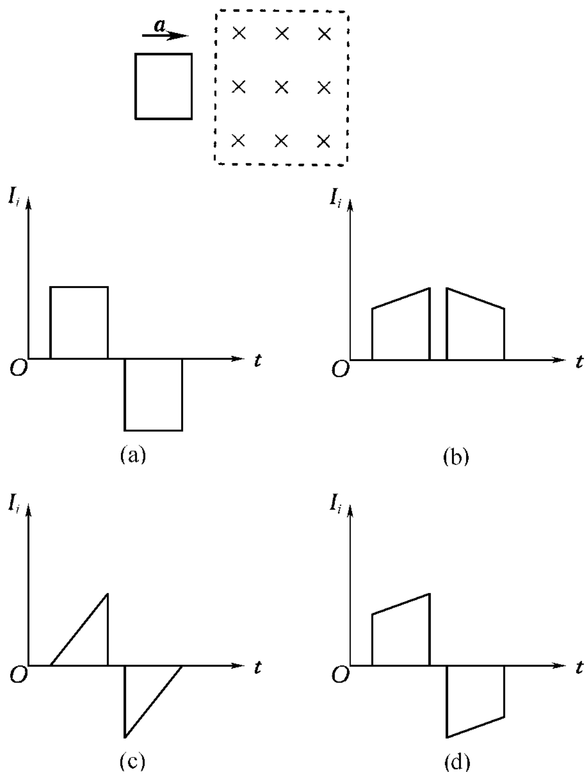
（2）A，B 两个环形导线，开始时环面互相垂直，如图（b）所示，B 环固定并通过有电流 I，A 环则从垂直于 B 环的位置转到相互平行的位置；

（3）矩形金属框 $ABCD$ 在长直电流 I 的磁场中，以 AB 边为轴，按图（c）中所示的方向转过 $180°$.

17－5　假定一矩形框以匀加速度 a，自磁场外进入均匀磁场又穿出该磁场，如图所示，问哪个图最适合表示感应电流 I_i 随时间 t 的变化关系，I_i 的正负规定：逆时针为正，顺时针为负.



思考题 17－4 图



思考题 17－5 图

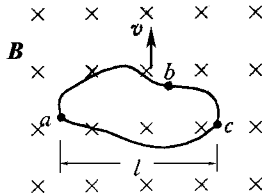
17－6 **将磁铁插入闭合电路线圈，一次是迅速地插入，另一次是缓慢地插入. 问：**

(1) **两次插入线圈，线圈中感应电量是否相同？**

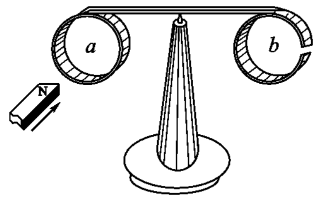
(2) **两次插入线圈时，手推磁铁之力（反抗电磁力）所做之功是否相同？**

17－7 **线圈 $abca$ 在匀强磁场中以速度 v 运动，磁感应强度 B 与 v 垂直，如图所示.**

问:(1)线圈中的感应电动势多大?(2)a,b 两点的非静电场强多大、方向如何?(3)在 a,b 两点处沿导线取一相同的长度元 $\mathrm{d}l$,它们产生的元电动势 $\mathrm{d}\varepsilon_a$,$\mathrm{d}\varepsilon_b$ 各为多少?(4)a,c 两点间的电势差多大?



思考题 17-7 图



思考题 17-9 图

17-8　有一铜环和木环,二环尺寸全同,今以相同磁铁从同样的高度、相同的速度沿环中心轴线插入. 问:(1)在同一时刻,通过这两环的磁通量是否相同?(2)两环中感生电动势是否相同?(3)两环中涡旋电场 $E_{涡}$ 的分布是否相同?为什么?

17-9　如图所示,左边 a 为闭合导体圆环,右边 b 为有缺口的导体圆环. 两环用细杆联接并支于 O 点,细杆可绕 O 点在水平面内自由转动. 用足够强的磁铁的任何一极插入圆环 a 时,可观察到 a 环向后退;插入 b 环时,b 环不动. 试解释所观察到现象.

17-10　一条形磁铁,沿一根很长的竖直放置的铜管自由落下,若不计空气阻力,磁铁的速率将如何变化?下列结论中哪一个是正确的?

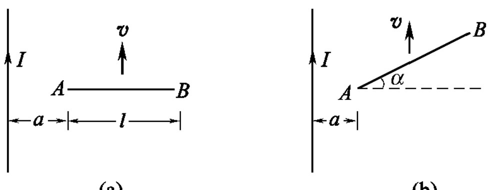
(1)速率越来越大;(2)速率越来越小;(3)速率越来越大,经一定时间后,速率越来越小;(4)速率越来越大,经一定时间后,以恒速率运动.

17-11　一根长为 l 的导线,通过电流 I,问在下述的哪一种情况中,磁场能量较大?

(1)把导线拉成直线后通以电流;(2)把导线卷成螺线管后通以电流.

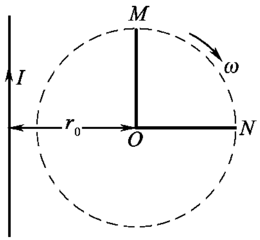
习题 17

17-1　一长直导线通有电流 I,有一长为 l 的金属棒 AB 与长直导线在同一平面内,棒的左端与长直导线的距离为 a,现棒以速度 v 向上平动,如图所示. 求:(a)棒与直导线垂直时,(b)棒与水平线夹角为 α 时,棒中的动生电动势的大小和方向.

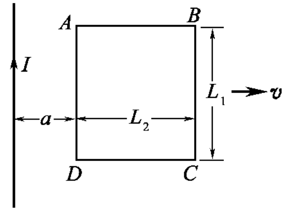


题 17-1 图

17－2　**一长直导线通以电流 $I=5.0$ A，有一金属棒和长直导线在同一平面内，并绕棒的一端 O 以角速度 ω 做顺时针转动，见图. 若棒长 l，O 点与长直导线距离为 r_0，试求：(1)当棒转至与长直导线平行时(OM)，(2)与长直导线垂直时(ON)，棒内的动生电动势的大小和方向.**



题 17－2 **图**



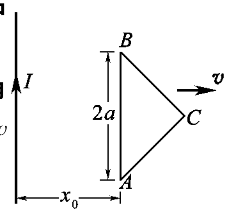
题 17－3 **图**

17－3　**如图所示，一长直导线载有电流 $I=5.0$ A，旁边有一矩形线圈 $ABCD$(与长直导线共面)，长 $L_1=0.20$ m，宽 $L_2=0.10$ m，线圈共 1000 匝，令线圈以速度 $v=3.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 水平向右平动，求线圈的 AD 边与长直导线的距离 $a=0.10$ m 时线圈中的动生电动势.**

17－4　**如图，一长直导线电流为 I，旁边有一共面的等腰直角三角形导线框 ABC，其中 AB 边与长直导线平行，整个线框以速度 v 向右平动，求：**

(1) **线框运动到图中所示的位置时线框中的动生电动势；**

(2) **线框从图中所示位置移动无穷远时，整个过程中线框通过的感应电量是多少(设线框的电阻为 R)？**

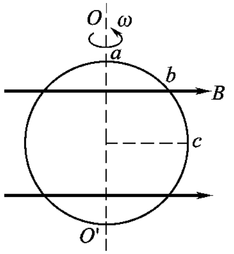


题 17－4 **图**

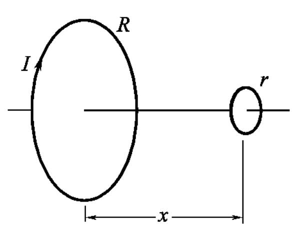
17－5　**一圆形均匀刚性线圈，其总电阻为 R，半径为 r_0，在匀强磁场 B 中以匀角速 ω 绕轴 OO' 转动，见图. 转轴垂直于 B(自感忽略)，求当线圈平面转至与 B 平行时：**

(1) ε_{ab}，ε_{ac} **各等于多少？**(b **点是孤** ac **的中点.**)

(2) a，c **两点中哪点电势高**，a，b **两点中哪点电势高？**



题 17－5 **图**



题 17－6 **图**

17－6　**如图，两个半径分别为 R 和 r 的同轴圆形线圈，相距为 x，$x\gg R$，若大线圈中**

通有电流 I，而小线圈以速率 v 向右运动，试求：

（1）当 $x=NR$ 时小线圈中的动生电动势；

（2）若 $v>0$，小线圈中感应电流的方向.

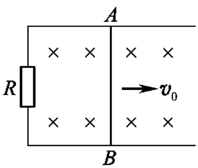
17－7　如题图所示，一平行导轨上放置一质量为 m，长 L 金属杆 AB，导轨的一端连接电阻 R，均匀磁场 B 垂直穿过导轨平面，当杆以初速度 v_0 向右滑动时，求：

（1）金属杆滑动的最大距离；

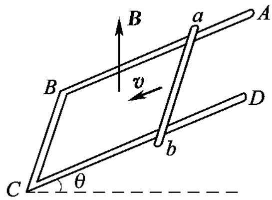
（2）在这过程中电阻 R 的焦尔热；

（3）试用能量守恒定律讨论上述结果.

（忽略金属杆的电阻及与导轨的摩擦，自感不计.）



题 17－7 图

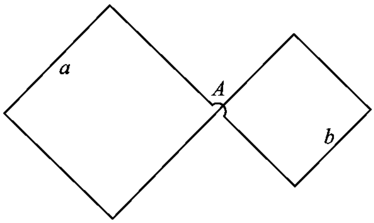


题 17－8 图

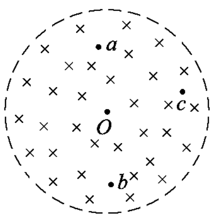
17－8　(1)如图，质量为 m，长 L 的金属杆 ab 从静止开始沿倾斜的绝缘框架下滑，设磁场 B 竖直向上，求杆内的电动势与时间的关系，假定摩擦可以忽略不计.(2)如果框架是导体作成，且和金属杆形成的闭合回路总电阻为 R（可视为常量），则杆在下滑中的电动势又如何变化？

17－9　若在题 17－3 中矩形线圈不动（AD 边与长直导线距离为 $a=0.10$ m)，而在长直导线中通以交变电流 $I=10\ \sin(100\pi t)$ A，则线圈中的感应电动势如何？

17－10 如图，由两个正方形线圈构成的平面线圈在 A 点处交叉但互相绝缘，已知 $a=20$ cm，$b=10$ cm，今有按 $B=B_0\sin\omega t$ 规律变化的磁场垂直于纸面，$B_0=1.0\times10^{-2}$ T，$\omega=100$ rad・s^{-1}，线圈单位长度的电阻为 $5.0\times10^{-2}\,\Omega\cdot$m^{-1}，求线圈中感应电流的最大值.



题 17－10 图

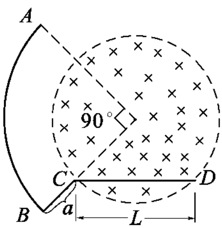


题 17－11 图

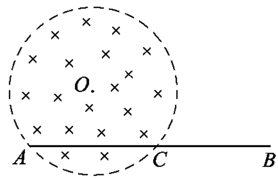
17－11　在半径为 R 的圆形区域内，有垂直纸面的匀强磁场 B，见图. B 以 $1.0\times$

10^{-2} T·s^{-1}的速率减小，a,b,c 三点离轴线的距离均为 $r=5.0$ cm，试问电子在各点处可获得多大的加速度？加速度的方向如何？

17－12　如图，半径为 R 的圆形区域内有一均匀磁场 B 垂直纸面，且 B 以均匀速率 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$增大，求图中导线 $ABCD$ 的感生电动势.



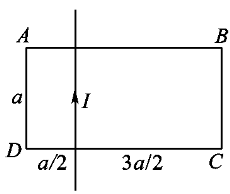
题 17－12 图



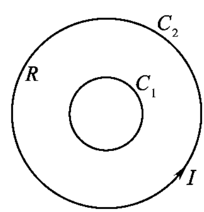
题 17－13 图

17－13　如图，半径为 10 cm 的圆柱形空间的匀强磁场 B，B 以恒定速率$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=3.0\times 10^{-3}$ Wb·m^{-2}·s^{-1}增加. 有一长为 20 cm 的导线放在图中所示位置，长度的一半在磁场中，另一半在外边，求其感生电动势.

17－14　如图，一长直导线电流 $I=I_0\sin\omega t$，矩形线圈 $ABCD$ 与之共面，试求：



题 17－14 图



题 17

－15 图

（1）直导线与线圈的互感系数；

（2）线圈的互感电动势.

17－15　如图，一圆形线圈 C_1 由 50 匝表面绝缘的细导线绕成，圆面积 $S=4.0$ cm^2，将它放在另一半径 $R=20$ cm 的圆形大线圈 C_2 的中心处，两者共面，大线圈共 100 匝. 求：

（1）两线圈的互感系数 M；

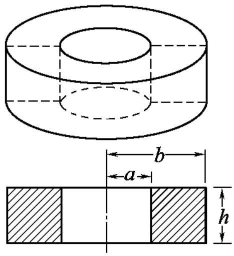
（2）当大圆线圈中的电流以 50 A·s^{-1}的速率变化时，小圆线圈中的感生电动势.

17－16　两根平行长圆柱形直导线，横截面的半径均为 a，两轴线间距离为 d，属于同一回路，设两导线内部的磁通量都可忽略，证明这一对导线长为 l 的一段的自感为

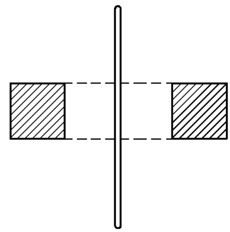
$$L=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

17－17　**一截面为矩形的螺绕环（共 N 匝）其尺寸如图，证明其自感为**

$$L=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$



题 17－17 图



题 17－18 图

17－18　**上题中，若在螺绕环轴线上有一长直导线，求长直导线与螺绕环之间的互感，若长直导线偏离了轴线，互感系数 M 有无变化.**

17－19　**两共轴直螺线管，外管半径 r_1，内管半径 r_2，线圈匝数分别为 N_1，N_2 试证它们的互感系数为**

$$M=k\sqrt{L_1L_2}$$

式中 L_1 与 L_2 分别是两直螺线管的自感系数，$k=\frac{r_2}{r_1}\leqslant 1$ 称为两螺线管的耦合系数.

17－20　**两个相同的线圈并联，若它们的自感系数为 L_0，则并联后的总自感是多少？（忽略两线圈的互感.）**

17－21　**一根长直导线电流为 I，I 均匀分布在它的横截面上，证明导线内部单位长度的磁场能量为$\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$.**

第 18 章　电磁场和电磁波

本章首先介绍位移电流的概念，在此基础之上归纳出麦克斯韦方程组. 再简单介绍电磁波的产生与性质，电磁波的范围与应用，这其中包括振荡电偶极子与电磁波，平面电磁波，振荡电路以及赫兹实验，电磁波谱等.

18.1　位移电流　麦克斯韦方程组

18.1.1　位移电流　全电流定律

1. 位移电流

我们曾经在稳恒电流的磁场条件下得出安培环路定理，如果把它用在非稳恒电流的情形下会出现什么问题呢？为简单起见，以一个接有电容器的简单电路为例来进行分析.

在图 18 - 1 中电容器充电时导线上的任何截面在同一时刻都流过相等的随时间变化的电流 I，而在电容器两极板之间的真空或电介质中没有电流流过，因而对整个电路来说，传导电流是不连续的. 在这种情况下，如果在电容器一个极板附近任取一环绕导线的闭合曲线 L，并以该曲线为边界做一平面 S_1，则穿过这个平面的传导电流为 I，根据安培环路定理，有

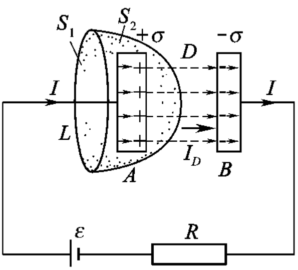


图 18 - 1　位移电流

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$$

但若以 L 为边界做一伸展到电容器两极板之间而不与导线相交的曲面 S_2，则穿过 S_2 的传导电流为零，根据安培环路定理，有

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

上边两个式子左边是同一时刻的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿同一闭合路径 L 的线积分，应该具有相同的值，但两等式的右边却不相等. 显然，之所以出现这样的问题，是因为电流在电容器两极板之间中断了. 如果能够在两极板之间找出某一物理量，使其大小始终与电流 I 相同，那么把该量看作电流时，中断的电流就被接续上，安培环路定理也因此可以适用于非稳恒电流的情况了.

麦克斯韦通过对上述过程进行全面分析后，注意到当极板面积为 S 的电容器充电或放电时，极板上的电量 q 和电荷面密度 σ 随时间变化引起两极板间的电位移 $\boldsymbol{D}$ 和通过电容器整个截面的电位移通量 $\Phi_0 = DS$ 也都随时间变化. 因为对于平板电容器有 $D=\sigma$，所以极板上的电量与电容器截面上的电位移通量存在关系

$$q=\sigma S=DS=\Phi_D$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}S = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}S = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} \tag{18-1}$$

由电流强度的定义可知，等式最左边$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$为极板上的电流，也是电路导线中的传导电流. 而等式最右边$\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$的值无论充电或放电都始终与导线中的传导电流相等，因此可以等效为电流，麦克斯韦将它称为位移电流，记作 I_D，即

$$I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} \tag{18-2}$$

由电流密度的定义可知，式(18－1)次左边项中的$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$为电流均匀分布的极板上的电流密度大小. 在充电或放电过程中都与其相等的式(18－1)次右边项中的$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$自然也可以等效为电流密度的大小. 而且当电容器充电时，D 值增加，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}$与 $\boldsymbol{D}$ 同向，也与导体中传导电流方向一致；当电容器放电时，D 值减小，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}$与 $\boldsymbol{D}$ 反向，但仍与导体中传导电流方向一致. 由此可见$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}$具有电流密度矢量的性质，麦克斯

韦把它叫作位移电流密度,以 j_D 代表,即

$$\boldsymbol{j}_D = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t} \tag{18-3}$$

(18－2)式与(18－3)式分别说明,通过电场中某截面的位移电流 I_D 等于通过该截面的电位移通量对时间的变化率.通过电场中某点的位移电流密度 j_D 等于该点的电位移对时间的变化率.

由上面分析以及(18－1)式中$\dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}S$ 可知,在均匀电场中,通过任一与场强方向垂直的截面(截面的正法向与位移电流的方向相同)S 上的位移电流就等于位移电流密度的大小与面积 S 相乘,即

$$I_D = j_D S \tag{18-4}$$

而在任意电场中,因为通过任意曲面 S 的电位移通量为

$$\Phi_D = \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

所以通过该曲面的位移电流为

$$I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由于曲面 S 不随时间变化,因此在上式中可把对时间的求导和对曲面 S 的积分这两个运算顺序进行交换.为了表示只有 $\boldsymbol{D}$ 随时间变化,用偏导数符号$\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$来代替$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}$,于是

$$I_D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{j}_D \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{18-5}$$

2. 全电流定律

引入位移电流的概念后,在电容器极板处中断的传导电流被位移电流接替.由于两者相等,因此对于前面图 18－1 中的情况,无论是取 S_1 面还是取 S_2 面,在同一闭合回路 L 上的 $\boldsymbol{H}$ 环流总相等,这样就不会产生前述那种问题了.由此可见,安培环路定理在非稳恒电流情形下应用时出现的矛盾能够得到解决,关键是电路中的电流借助于其中断处电场的变化,可以视为连续的.

实际上对于运动的带电体也有类似情况.通常将带电物体的机械运动所形成的电流称为运流电流.随着带电体的运动,其周围的电场也在变化,所以在运动着的带电体周围空间也分布有位移电流.同样运流电流与位移电流之和仍然构成了连续的闭合电流.因此麦克斯韦又引入了全电流的概念,他指出在一般情

形下，传导电流、运流电流和位移电流可能同时通过某一截面，它们的代数和就称为通过该截面的全电流. 全电流永远是连续的闭合电流，而安培环路定理可推广为

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I + I_D \tag{18-6}$$

式中 $\sum I$ 表示闭合曲线 L 所包围的所有传导电流与运流电流的代数和，I_D 为同一曲线所包围的位移电流. 将式(18－6)写成更一般的形式，有

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{18-7}$$

式中 j 为传导电流与运流电流的电流密度，$\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$为位移电流密度. 式(18－6)或式(18－7)称为全电流定律，它表明在一般情况下，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿任一闭合回路 L 的线积分等于穿过以该回路为边界的任意曲面的全电流.

通常情况下，电介质中的全电流主要是位移电流，传导电流几乎为零；导体中的全电流主要是传导电流，位移电流可以忽略不计. 但在高频的情况下，导体内的传导电流与位移电流都起作用，这时就不能忽略其中的任何一个了.

如果所涉及的问题中 $\sum I = 0$ 则全电流定律写成

$$\oint_L \boldsymbol{H}_D \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_D = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{18-8}$$

这时磁场 $\boldsymbol{H}_D$ 仅由位移电流产生，它说明了位移电流与传导电流一样，都是激发磁场的源，并且两者激发磁场的规律相同. 但是位移电流与传导电流毕竟是两个不同的概念，它们仅仅在激发磁场方面等效，所以都称为电流，而在其他方面两者存在根本的区别. 首先在本质上位移电流是电位移通量的变化率，无论在导体、电介质还是真空中，只要有电场的变化就会有相应的位移电流出现. 而传导电流则是自由电荷定向运动形成的，一般只能在导体中流动；其次是传导电流在通过导体时产生焦耳热，而位移电流在导体与真空中都没有这种热效应. 在电介质中，从 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 可知 $\boldsymbol{j}_D=\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$. 式中右边第一项对应电场的变化，与电荷的运动无关，不产生热效应. 右边第二项与电介质中极化电荷的微观运动有关，有热效应，特别是在高频电场作用下介质的反复极化会产生大量热，但这与传导电流在导体中产生的焦耳热不同，遵循完全不同的规律.

式(18－8)是关于涡旋磁场与变化电场联系的数学表达式，它表明麦克斯韦关于位移电流的假说实质上是揭示了变化的电场激发涡旋磁场这一内在关系. 将式(18－8)与感生电场的环流定律

$$\oint_L \boldsymbol{E}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

比较,可以看到两方程反映了自然现象的对称性.感生电场的假说说明变化的磁场能激发左旋电场,位移电流的假说说明变化的电场能激发右旋磁场.两种变化的场永远互相联系着,它们之间互相依存,互相转化,形成了统一的电磁场,这就是麦克斯韦在电磁场理论方面的杰出贡献.

应该指出,麦克斯韦的位移电流概念,全电流概念和全电流定律都是先作为假设提出,其正确性经过大量实践检验后就上升成了理论.

例 18－1　一平行板电容器由半径为 R 的两块导体圆板构成,现以缓变电流对电容器充电使两极板间电场的变化率 $\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}>0$.求:(1)两极板间的位移电流和位移电流密度的大小;(2)位移电流激发的磁感应强度的分布.

解　对于缓变电流充电,任一时刻电容器两极板上的电荷可看作均匀分布,两极板间的电场在忽略边缘效应时仍可看作是匀强的,因此两极板间任一截面上各点的电流密度的大小也都相同.

(1) 所求位移电流按定义可得

$$I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(DS)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\varepsilon_0 E \pi R^2)}{\mathrm{d}t} = \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

位移电流密度的大小为

$$j_D = |\boldsymbol{j}_D| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\right| = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

(2) 以电容器两极板中心连线为轴,由电场分布的轴对称性可知磁场分布也应具有轴对称性.因此,所求空间的磁感应线必是围绕两极板中心连线的一系列同心圆,磁感应线回转方向和位移电流方向之间为右手螺旋关系,同一条磁感应线上各点处 $\boldsymbol{B}_r$ 的大小相等,方向沿磁感应线的圆周切向.

由以上分析,选取任一根半径为 r 的磁感应线为积分回路 L,积分方向沿磁感应线回转方向.该积分回路所包围的位移电流取以对应的磁力线为边界的平面来计算,平面的正法向与位移电流的方向相同,则根据全电流定律

当 $r<R$ 时

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = j_D \pi r^2$$

即

$$H 2\pi r = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \pi r^2$$

所以

$$H = \frac{\varepsilon_0 r}{2} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

$$B_r = \mu_0 H = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 r}{2} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

当 $r \geqslant R$ 时
$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = j_D \pi R^2$$

即
$$H 2\pi r = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \pi R^2$$

所以
$$B_r = \mu_0 H = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2}{2r} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

18.1.2 麦克斯韦方程组

前面已经系统地研究了静电场与稳恒磁场的基本规律，又介绍了麦克斯韦揭示的变化磁场产生涡旋电场和变化电场产生涡旋磁场的规律. 下面就简要介绍麦克斯韦在这些已有规律的基础上进行的归纳总结.

静止电荷在其周围空间激发静电场，相应的场量记作 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_1$. 变化的磁场激发涡旋电场，相应的场量表示为 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$. 一般情况下，空间任一点的电场由静电场和涡旋电场叠加而成，所以有

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2$$

静电场的基本规律有高斯定理和环路定理，即

$$\oint_S \boldsymbol{D}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q = \int_V \rho \mathrm{d}V \quad \text{和} \quad \oint_L \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

变化磁场产生的涡旋电场中也有相应规律

$$\oint_S \boldsymbol{D}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \quad \text{和} \quad \oint_L \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

因此有
$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{18-9}$$

和
$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{18-10}$$

式(18－9)表明了在任何电场中，通过任意封闭曲面的电位移通量等于该封闭曲面所包围的自由电荷的代数和. 式(18－10)揭示了变化磁场与电场的关系. 它表明在任何电场中，电场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过以该曲线为边界的任意曲面的磁通量对时间变化率的负值.

磁场可以由传导电流或运流电流激发，其磁感应线是闭合的. 也可以由变化电场激发，相应磁感应线也是闭合的. 因此，在任何磁场中，通过任意闭合曲面的磁通量恒等于零，即

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{18-11}$$

磁场的环路由全电流定律，有

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{18-12}$$

上式既表示了在一般情况中磁场由传导电流、运流电流和位移电流共同产生，又揭示了变化电场与磁场的关系. 它表明在任何磁场中，磁场强度沿任意闭合曲线的线积分等于穿过以该曲线为边界的任意曲面的全电流.

式(18－9)到式(18－12)是麦克斯韦以数学形式概括的描述电磁场普遍规律的方程组，通常称为麦克斯韦方程组的积分形式.

方程组中各场量间关系并不是彼此独立的. 在有介质存在时，它们还与介质的性质有关，还需再补充描述介质性质的方程. 对于各向同性的介质，有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{18-13}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \tag{18-14}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{18-15}$$

上面三式中的 ε,μ,σ 分别是介质的介电常数、磁导率和电导率.

一般情况下，电磁场的场量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{H},\rho,\boldsymbol{j}$ 等都是点的矢量函数，而麦克斯韦方程组的积分形式描述的是电磁场量在某选定区域内的相互关系. 在实际应用中，更重要的是要知道场中某些点的场量以及某些点上各电磁场量间的相互联系. 为此，还需把方程组的积分形式变换为相应的微分形式.

将数学上的高斯定理应用于电位移矢量 $\boldsymbol{D}$，有

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla\cdot \boldsymbol{D})\mathrm{d}V$$

把上式与式(18－9)比较，可得

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{18-16}$$

将数学上的斯托克斯定理应用于电场强度 $\boldsymbol{E}$，有

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times \boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

将上式与式(18－10)比较，可得

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{18-17}$$

同理把上述两数学定理依次分别用于磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$，就可以分别得到式(18－11)和式(18－12)的微分形式为

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{18-18}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{18-19}$$

式(18－16)到式(18－19)通常称为麦克斯韦方程组的微分形式. 该微分形

式的方程组连同式(18－13)到式(18－15)并结合实际问题的边界条件和初始条件,原则上可以解决各种宏观电磁学中的问题,因此,麦克期韦方程组的微分形式是进一步研究电磁场理论的基础和出发点.

由宏观电磁现象总结出来的麦克斯韦方程组在电磁理论中的基础地位如同力学中牛顿运动定律的基础地位一样.它的正确性经受了实践的检验,并在许多技术领域中发挥指导作用和产生深远的影响.麦克斯韦电磁理论中最辉煌的成就就是预言了变化的电磁场以波的形式,按一定的速度在空间传播.这个预言在1888年被赫兹用实验所证实.

18.2 电磁波

18.2.1 振荡电偶极子与电磁波

变化的磁场激发电场,变化的电场又激发磁场.这种由于二者相互激发,起初局限于空间某区域的电磁场以有限速度向四周传播的过程称为电磁波.

任何能使磁场或电场随时间变化的装置都称为电磁波波源,其基本单元为振荡电偶极子.所谓振荡电偶极子是指其电矩的大小随时间做周期性变化的电偶极子,即

$$p = ql = q_0 l\cos\omega t = p_0\cos\omega t \tag{18-20}$$

式中 $p_0 = q_0 l$ 是电矩的振幅,ω 是振荡电偶极子的圆频率.

当一根导线的长度 l 与横向尺寸都比电磁波的波长小得多,其上通有随时间作正弦变化的振荡电流 $i = -I_0\sin\omega t$ 时,导线端累积的电荷为

$$q = \int i\mathrm{d}t = \frac{I_0}{\omega}\cos\omega t = q_0\cos\omega t$$

导线一端为正电荷时,另一端则为负电荷,这样由相距为 l 的正负电荷就组成了上述的振荡电偶极子 $p = ql = q_0 l\cos\omega t$.因为电荷与电流都是随时间非线性变化的,所以振荡电偶极子将在其邻近区域产生变化的电场和磁场,这变化的电场和磁场又在较远的区域引起新的变化的磁场和电场,并在更远的区域引起新的变化电场和磁场.这样继续下去,变化的电场和磁场连续激发,由近及远,以有限的速度在空间传播就形成了电磁波.由此可见,振荡电偶极子是电磁波波源,它向外辐射电

磁波．在无线电通讯中，实际的天线可以看作由许多振荡电偶极子串联而成，而天线所发射的电磁波可看作这些振荡电偶极子辐射的电磁波的叠加．

另一方面，我们也可设想一对正负电荷 $+q_0$ 与 $-q_0$ 在原点附近做相对运动，它们的电量不变，而它们之间的距离为 $l\cos\omega t$ 随时间而变化，那么这对电荷的电矩为 $p=q_0 l\cos\omega t$，也与式(18－20)一样．这种模型在原子物理上比较适用，分子、原子中带电粒子的运动就可以看作是振荡电偶极子．由此可知，分子或原子的电矩随时间变化时也会发射电磁波．

一个振荡电偶极子周围的电磁场可以根据麦克斯韦方程组严格计算出来．在各向同性介质中，以电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的大小与时间的关系为 $p=p_0\cos\omega t$ 的振荡电偶极子为坐标原点，则在远离振荡电偶极子的空间，位置矢量为 $\boldsymbol{r}$ 的任意点 P 处，t 时刻的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的大小分别为

$$E(r,t)=\frac{\omega^2 p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon u^2 r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{u}\right) \tag{18-21}$$

$$H(r,t)=\frac{\omega^2 p_0\sin\theta}{4\pi u r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{u}\right) \tag{18-22}$$

参看图 18－2，以上两式描述了以矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小 r 为半径，经过 P 点所做球面上空间各点的电磁场量的大小．式中 θ 为矢径 $\boldsymbol{r}$ 与电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 之间的夹角，$u=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$为电磁波在介质中的传播速度．由式中可以看出，电磁波 E，H 之间存在关系式$\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H$．并且 E，H 的振幅与空间点离波源的距离 r 成反比，与频率 ω 的平方成正比，还与方向因子 $\sin\theta$ 有关．在相同 r 的地方，所有满足 $\sin\theta=1$ 处的电磁波最强，满足 $\sin\theta=0$ 处的电磁场为零．在图 18－2 中还可以看到任一点 P 处的电场沿球面上子午线方向，磁场沿球面上纬线方向，两者相互垂直，并且都与电磁波在该点的传播方向垂直．

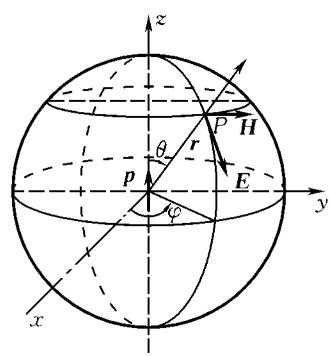


图 18－2　振荡电偶极子辐射的电磁波

18.2.2　平面电磁波

在远离振荡电偶极子的地方，只观察波面上一小部分的电磁波时，式(18－21)与式(18－22)中的 θ 和 r 的变化很小，E 与 H 振幅的值可以看作不变．上两式可分别写成

$$E = E_0 \cos\omega(t - \frac{r}{u}) \tag{18-23}$$

$$H = H_0 \cos\omega(t - \frac{r}{u}) \tag{18-24}$$

此为平面简谐波. 这就是说，在远离波源的自由空间($\rho=0, j=0$)小区域里，电磁波可以看作是平面电磁波. 由前面讨论并结合图 18－2，可得到关于平面电磁波的基本性质：

(1) 电场 $\boldsymbol{E}$ 与磁场 $\boldsymbol{H}$ 的振动方向相互垂直，且均与电磁波的传播方向垂直，这说明电磁波是横波.

(2) 沿给定方向传播的电磁波，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别在各自的平面上振动，这种特性称为偏振性，说明电磁波是偏振波.

(3) $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 同相位地变化，这表明 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的量值同地同时达到最大，同地同时减到最小，且同地任一时刻都有关系$\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H$.

(4) 电磁波传播速度 $\boldsymbol{u}$ 的方向与 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 的方向相同，$\boldsymbol{u}$ 的大小为 $u=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$，由介质的介电常数 ε 和磁导率 μ 所决定. 在真空中

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.9979\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = c \tag{18-25}$$

这一结果与真空中光速的实验值相符，表明光波的本质就是电磁波.

18.2.3 振荡电路　赫兹实验

产生电磁振荡的电路称为振荡电路，最基本的振荡电路由一个电容量为 C 的电容器和一个电感量为 L 的线圈所组成如图 18－3 所示，称作 LC 振荡电路. 在电路中电阻为零的理想无阻尼情况下，设 $t=0$ 时刻电容器开始通过线圈放电. 放电前电路中没有电流，磁场能量为零. 电容器上下两极板分别带有电量 Q 和 $-Q$，这时整个电路的能量都集中在电容器两极板之间的电场中，电场能量为 $W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$. 在放电后的任意 t 时刻，电路中通过的电流为 $i(t)$，电容器上的电量为 $q(t)$，电容器两极板间的电势差为 $U(t)$. 这时对于电容器有 $U=\frac{q}{C}$，对于线圈有 $\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$，对于整个电路由欧姆定律有 $U=\varepsilon_L$，即

$$\frac{q}{C} = -L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$$

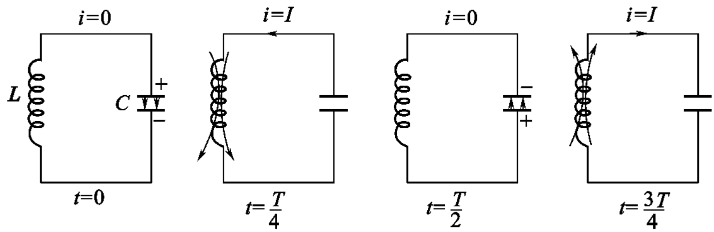


图 18－3　振荡电路的电磁振荡过程

就是

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{LC}q=0$$

令 $\omega^2=\frac{1}{LC}$，可得上式的解为

$$q=q_0\cos(\omega t+\varphi)$$

再对时间 t 求导，得

$$i=-\omega q_0\sin(\omega t+\varphi)=\omega q_0\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

由初始条件 $t=0$ 时，$q=Q$，$i=0$ 可求得 $q_0=Q$，$\varphi=0$，代入上两式，得到

$$q=Q\cos\omega t \tag{18－26}$$

$$i=\omega Q\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})=I\cos(\omega t+\frac{\pi}{2}) \tag{18－27}$$

式中 $I=\omega Q$ 为电流的幅值．由以上两式可知，开始放电后随着时间的增加，电容器极板上的电量 q 逐渐减小，与此同时流过线圈的电流 i 逐渐增大，在线圈的周围空间逐渐建立起磁场．相应地电容器中储存的电场能量逐渐减少，减少的部分转换为线圈储存的磁场能量．当 $t=\frac{T}{4}$时，电容器极板上的电量为零，流经线圈的电流达到最大值 I．这时电容器两极板间的电场能量全部转换为线圈储存的磁场能量 $W_m=\frac{1}{2}LI^2$．

由于线圈中存在由电流随时间变化而引起的自感电动势，所以当电容器两极板上的电荷消失时，电路中的电流并不停止，而是沿原来方向继续流动，对电容器进行反向充电．其后电路中的电流从 I 逐渐减小，同时电容器两极板上电量逐渐增大，线圈中的磁能又逐渐返还成电容器中的电能．到 $t=\frac{T}{2}$时，电路中电流 $i=0$，电容器极板上电量达到最大值，只是此时下极板带电量为 Q，上极板带电量为 $-Q$，与 $t=0$ 时极板上电荷的极性正好相反．此时线圈中的磁能又全部转

换成电容器中的电场能量. 紧接着电容器经线圈再放电,到 $t=\frac{3T}{4}$时,电路中反向电流增加到最大值 I,电容器极板上电荷又全部消失. 此后电路中电流逐渐减小,对电容器极板又正向充电,到 $t=T$ 时重新恢复到 $t=0$ 时刻的起始状态,到此振荡电路完成了一个完整的电磁振荡过程. 以后上述过程将以一个确定的振荡频率不断持续重复,在无阻尼自由振荡时这个振荡频率为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{18-28}$$

上式表明振荡频率是由振荡电路本身的元件参数决定的,电感量 L 与电容量 C 越小,则振荡频率越高.

上面讨论的是理想情况,实际电路中总存在电阻 R,因此在 LC 振荡电路中总有一部分电磁能量转变为消耗在电阻 R 上的焦耳热. 同时还由于电路中的电场、磁场也不是绝对地分别集中在电容器和线圈的内部而向四周发散,所以还有一部分电磁能量以电磁波的形式向周围空间辐射出去. 这样,随着振荡过程的延续,电量和电流的幅值随时间不断减小,直至停止振荡.

为了维持振荡过程能持续地进行下去,需要给上述电路外加电源,它能输出一个随时间作周期性变化的电动势,不断提供能量以补偿上述的能量损耗,使振荡电路的振幅维持不变. 这种在周期性电动势作用下的电磁振荡称为受迫振荡. 当外加周期性电动势的变化频率等于振荡电路的频率时,振荡的振幅最大,这种情形称为电磁共振.

LC 振荡电路外加了能随时补充耗散能量的电源后,原则上可作为辐射电磁波的波源. 但为了使其能有效地把振荡电路中的电磁能发射出去,还必须对电路的结构加以改进. 因为电磁波的辐射能流正比于其频率的四次方,所以振荡电路的频率越高,发射电磁波就越有效. 由式(18－28)容易看出,提高振荡频率的途径可以通过减小 L 和 C 的值来实现. 另外,由于 LC 振荡电路是集中性元件的电路,电场和电能基本上都集中在电容器中,磁场和磁能基本上都集中在自感线圈中,为了使随时间变化的电场和磁场有效地向周围空间发散,振荡电路必须对外开放. 基于上述思路,对 LC 振荡电路进行改造,其过程如图 18－4 所示. 由图中按(a),(b),(c),(d)的顺序逐步改进中可以看到,通过拉大电容器两极板间距离,减小两极板的面积,一方面可以减小 C 值,另一方面有利于电场向周围发射;与此同时,通过减少线圈匝数使之逐渐演变为一直线,既可以减小 L 值,又有利于磁场向周围发射. 图 18－4d 中的直导线是 LC 振荡电路演变的最后结果,称之为天线,此时电磁场完全开放于空间. 由于直导线的 L,C 值很小,因而

振荡频率大为提高,可达 10^9 Hz,这极大地增加了电磁波的辐射功率.

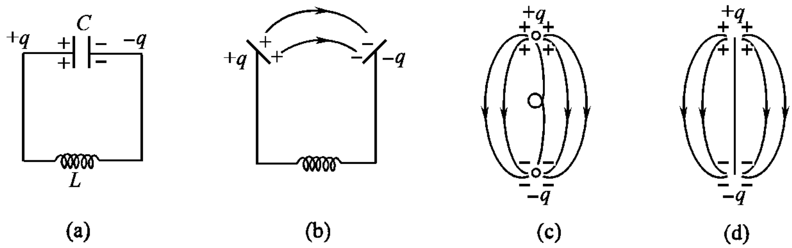


图 18－4　从 LC 振荡电路演变成振荡电偶极子

如果天线是长度 l 很小的细直导线,则在其中往复振荡的电流的振幅 I 可看作不变,而在天线两端出现的是正负交替变化的等量异号电荷 $q=Q\cos\omega t$,于是有 $p=ql=Ql\cos\omega t$. 由此可见,LC 振荡电路可最终演变成一个振荡电偶极子,电台和电视台发射电磁波的实际天线就是这种振荡电偶极子的组合.

麦克期韦于 1865 年在理论上预言了电磁波的存在. 经过 23 年后,1888 年赫兹应用类似上述的振荡电偶极子产生电磁波,在实验上证实了电磁波的存在. 在图 18－5 中两根共轴铜杆 A,B 是赫兹用以产生电磁波的振荡电偶极子. A,B 分别被接到感应圈 C 的两个电极上,感应圈能够周期性地在 A,B 两个极上产生很高的电势差. 电偶极子 A,B 之间留有空气间隙,当 A,B 被充电到一定程度时,空气间隙被电场击穿,电流往返地通过空隙而产生火花,这时形成的振荡电偶极子,正在进行高频振荡而向外辐射电磁波. 因为感应圈是间歇性供电的,所以偶极子每次充电后,放电时由于能量不断损失所作的是一次减幅振荡. 因此,由赫兹实验装置辐射的电磁波是间断性的减幅高频振荡的电磁波.

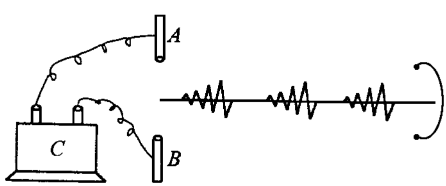


图 18－5　赫兹实验

为了探测由振荡偶极子发射的电磁波,可采用图 18－5 右边部分所示的谐振器. 它是留有一段间隙的铜环,开口处安装铜球,铜球间的距离可用螺旋进行调节. 谐振器也相当于一个偶极子,将其放置在 AB 附近适当距离的地方. 由于 AB 发射电磁波的作用,谐振器这一偶极子就会产生受迫振荡,调节两铜球的距离,可使其产生共振,共振时铜球空隙也有火花产生.

赫兹不仅用上述装置首次在实验室中观察到了电磁波在空间的传播，而且还利用该装置通过许多实验证明了电磁波与光波一样，具有反射、折射、干涉、衍射和偏振等一切波动所共有的特性，确定了电磁波以光速传播，这说明了光波本质上也是电磁波.

18.2.4 电磁波谱

自从赫兹用实验证实了电磁波的存在，人们认识到光波也是电磁波以后，又陆续发现和认识到 X 射线，γ 射线等都是电磁波. 将电磁波按频率或波长排列成谱，就称为电磁波谱，如图 18－6 所示.

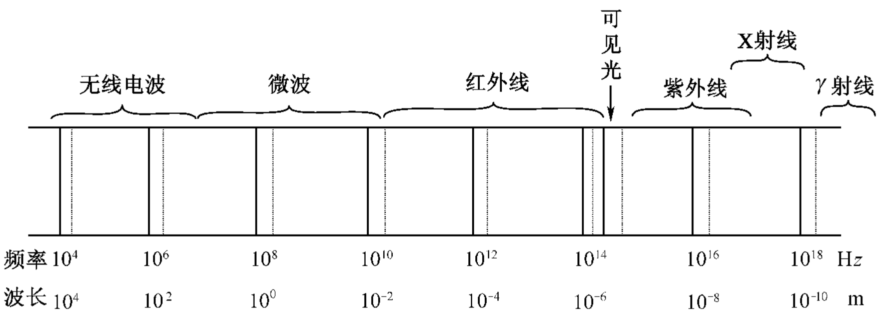


图 18－6 电磁波谱

电磁波在本质上相同，但不同波长范围电磁波的产生方法各不相同. ①无线电波是利用电磁振荡电路通过天线发射的，波长在 10^4 m～10^{-2} m 范围内（包括微波在内）. 对无线电波进行更细地波段划分及各波段的主要用途见表 18－1. ②炽热的物体、气体放电等是原子中外层电子的跃迁所发射的电磁波. 其中波长在 0.4×10^{-6} m～0.76×10^{-6} m 范围内，能引起人眼视觉的电磁波，称为可见光；波长在 0.76×10^{-6} m～0.4×10^{-4} m 范围内的电磁波称为红外线，不引起视觉，但热效应特别显著；波长在 5.0×10^{-9} m～0.4×10^{-6} m 范围内的电磁波称为紫外线. 不引起视觉，但容易产生强烈的化学反应和生理作用（杀菌）等. ③当快速电子射到金属靶时，会引起原子中内层电子的跃迁而产生 X 射线，其波长在 0.4×10^{-10} m～5.0×10^{-9} m 范围内. 它的穿透力强，工业上用于金属探伤和晶体结构分析，医疗上用于透视、拍片等. ④当原子核内部状态改变时会辐射出 γ 射线，其波长在 10^{-10} m 以下，穿透本领比 X 射线更强，用于金属探伤，原子核结构分析以及放射性治疗等.

表 18-1 各种无线电波的波段划分及主要用途

波段	波长(m)	频率(kHz)	主要用途
长波	30000～3000	$10\sim10^2$	电报通讯
中波	3000～200	$10^2\sim1.5\times10^3$	无线电广播
中短波	200～50	$1.5\times10^3\sim6\times10^3$	电报通讯、无线电广播
短波	50～10	$6\times10^3\sim3\times10^4$	电报通讯、无线电广播
超短波(米波)	10～1.0	$3\times10^4\sim3\times10^5$	无线电广播电视、导航
分米波	1～0.1	$3\times10^5\sim3\times10^6$	电视、雷达、导航
微波(厘米波)	0.1～0.01	$3\times10^6\sim3\times10^7$	电视、雷达、导航
毫米波	0.01～0.001	$3\times10^7\sim3\times10^8$	雷达、导航、其他专门用途

思考题

18-1 什么是位移电流？什么叫全电流？怎样建立位移电流和位移电流密度的表示式？

18-2 试按下述几个方面比较传导电流和位移电流：(1)由什么变化所引起？(2)所产生磁场 B 的计算；(3)可以在真空中通过？或在哪些物质中通过？(4)两者是否都能引起热效应？

18-3 静电场中的高斯定理 $\oint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V$ 和恒稳电流磁场中的高斯定理 $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，它们分别与麦克斯韦方程组中的 $\oint_S \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V$ 和 $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$ 在形式上相同，但理解上述两式时却有什么不同？

18-4 平面电磁波具有哪些基本性质？

18-5 为什么直线的振荡电路比一般振荡电路(有线圈和电容器)能更好地辐射电磁波？

习题 18

18-1 圆柱形电容器内、外导体截面半径分别为 R_1 和 $R_2(R_1<R_2)$，中间充满介电常数为 ε 的电介质. 当两极板间的电压随时间的变化为 $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=k$ 时(k 为常数)，求介质内距圆柱轴线为 r 处的位移电流密度.

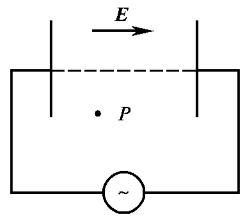
18-2 试证：平行板电容器的位移电流可写成 $I_d=C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$. 式中 C 为电容器的电容，

U 是电容器两极板的电势差. 如果不是平板电容器,以上关系还适用吗?

18－3　如题 18－3 图所示,设平行板电容器内各点的交变电场强度 $E=720\sin 10^5\pi t\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$,正方向规定如图所示. 试求:

(1) 电容器中的位移电流密度;

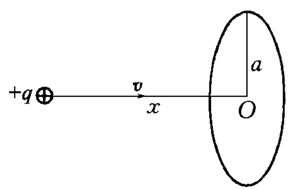
(2) 电容器内距中心联线 $r=10^{-2}\ \mathrm{m}$ 的一点 P,当 $t=0$ 和 $t=\frac{1}{2}\times 10^{-5}\ \mathrm{s}$ 时磁场强度的大小及方向(不考虑传导电流产生的磁场).



题 18－3 图

18－4　半径为 $R=0.10\ \mathrm{m}$ 的两块圆板构成平行板电容器,放在真空中. 今对电容器匀速充电,使两极板间的电场的变化率为 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=1.0\times 10^{13}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}}$. 求两极板间的位移电流,并计算电容器内离两圆板中心联线 $r(r<R)$ 处的磁感应强度 B_r 以及 $r=R$ 处的磁感应强度 B_R.

18－5　如题 18－5 图所示,电荷 $+q$ 以速度 v 向 O 点运动,$+q$ 到 O 点的距离为 x,在 O 点处做半径为 a 的圆平面,圆平面与 v 垂直. 求:通过此圆的位移电流.



题 18－5 图

18－6　在真空中,一平面电磁波的电场由下式给出

$$E_x=0,E_y=60\times 10^{-2}\cos\left[2\pi\times 10^3\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\ \mathrm{V\cdot m^{-1}},E_z=0$$

求:(1)波长和频率;(2)传播方向;(3)磁场的大小和方向.

第五篇 波动光学

第 19 章 光的干涉

光的干涉、衍射和偏振特性是光的波动性的主要特征，它们是光学仪器设计和光学测量技术的基础. 本章以光的波动理论为基础，论述光波的干涉现象以及相干光波所满足的条件，讨论了杨氏双缝干涉、薄膜干涉、劈尖干涉、牛顿环和迈克尔孙干涉仪等典型干涉装置，最后分析了光波的时间相干性和空间相干性.

19.1 光波的一般知识 光波的叠加

19.1.1 光是一种电磁波

1. 光的波动方程

麦克斯韦理论指出，人们眼睛通常所能感知的光其实是一种电磁波. 电磁波是横波，由两个相互垂直的振动矢量即电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁场矢量 $\boldsymbol{H}$ 来表示. 对于沿 x 轴正向传播的平面电磁波，其波动方程为

$$E = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \tag{19-1}$$

$$H = H_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \tag{19-2}$$

在光波中，对人的眼睛和感光仪器产生作用的是电场矢量 $\boldsymbol{E}$，因此我们常常将其称为光矢量，$\boldsymbol{E}$ 的振动又常称为光振动. 在下面的讨论中，我们将主要讨论 $\boldsymbol{E}$ 振动.

在电磁波谱中，通常把波长在 400～760 nm 之间的电磁波称为可见光，波长在 400 nm 附近的为紫光，比 400 nm 小（不小于 10 nm）的电磁波称为紫外线；波长在 760 nm 附近的为红光，比 760 nm 大（不大于 1 mm）的电磁波称为红外线，整个可见光的光谱如图 19－1 所示.

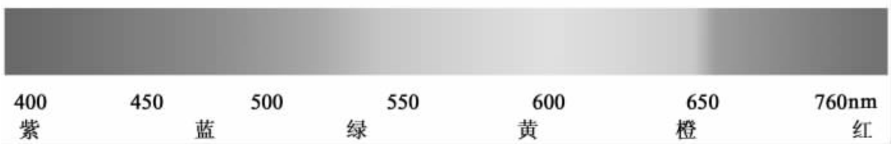


图 19－1　可见光谱

2. 光速、光的波长和频率

光波的传播速度（相速度）决定于介质的性质. 在真空中，光速为

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2.998\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \tag{19-3}$$

在介质中光速为

$$u=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \tag{19-4}$$

我们定义，该介质的折射率为

$$n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \tag{19-5}$$

则介质中光速又可表为

$$u=\frac{c}{n} \tag{19-6}$$

由于一般有 $n>1$，因此通常情况下光在介质中的传播速度要小于在真空中的传播速度. 在两种介质中，我们定义介质 2 相对于介质 1 的折射率为

$$n_{21}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{u_1}{u_2} \tag{19-7}$$

n_{21} 又称为相对折射率.

当发光物体和观察者相对于介质静止时，光波的频率仅仅取决于发光物体，与介质无关；而光的波长不仅决定于发光物体，还决定于介质的折射率，因此同一光源发出的光在不同介质中传播时，具有相同的频率，但是具有不同的波长. 在真空中，有 $c=\lambda v$，而在介质中，有 $u=\lambda_n v$，因此光在介质的波长为

$$\lambda_n=\frac{\lambda}{n} \tag{19-8}$$

上式说明，光在介质中的波长是它在真空中波长的 n 分之一.

19.1.2 光　源

1. 光源的发光机理

我们把发光的物体统称为光源. 按照光的激发方式的不同，我们把普通光源分为热光源和冷光源两大类. 利用热能激发的光源称为热光源，例如白炽灯、太阳等；利用化学能、电能或光能激发的称为冷光源，例如磷的发光就是一种化学发光现象，日光灯中的稀薄气体在电场作用下所发出的辉光，是一种电至发光，某些碱土金属的氧化物在光的照射下能够被激发而发出荧光或者是磷光，是一种光至发光现象. 除普通光源外，还有受激辐射的激光光源.

不同光源的激发方式不同，其发光机理也不相同. 以热光源为例，其发光机理是处于热激发态的原子（或者是分子）的自发辐射，即大量的低能级原子（或者是分子）在热能的激发下跃迁至高能级激发态，这些激发态是不稳定的，原子在激发态上的平均寿命只有大约 10^{-10} s，因此原子就会自发地向低能级或者是基态能级跃迁. 在跃迁过程中，每个原子向外发射一个电磁辐射. 原子发光的时间极短. 仅仅只有 10^{-8} s，因此每一个电磁辐射持续时间很短，在空间上则为一有限长度的波列，如图 19－2 所示. 由于各原子（或者是分子）发光彼此独立，互不相关，因此在同一时刻不同原子（或者是分子）所发出的电磁波列具有不同的振动方向，不同的频率和不同的相位. 另外原子发光具有间歇性，因此即使是同一原子在不同时刻所发的电磁波列的频率，振动方向和相位也不尽相同. 我们通常所见到的光波就是大量的电磁波列彼此叠加之后的结果. 由此可见，普通光源所发出的光一般是复合光，具有不同的频率成分，另外光矢量没有确定的振动方向和确定的相位关系.

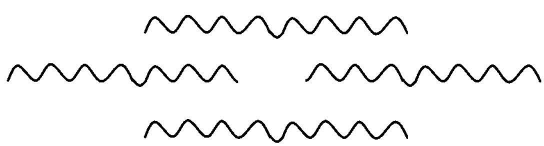


图 19－2　普通光源各原子所发出的波列
（波列长度为 $L=c\tau$，各波列彼此独立）

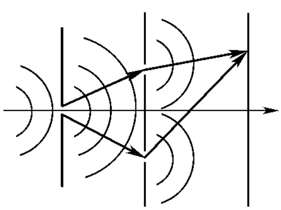
2. 相干光源

干涉现象是波动的最基本的特征之一. 波动理论已经指出，振动方向相同、频率相同、相位相同或者是相位差保持恒定的两个波源是相干波源，它们所发出

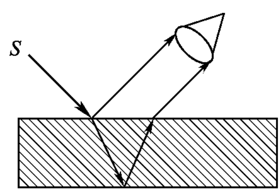
的是相干波，在两束相干波相遇的区域，有些点的振动始终加强，而有些点的振动始终减弱，形成稳定的振幅分布，这就是干涉现象．光波当然也能产生干涉．我们把能产生相干光波的光源称为相干光源．根据前面所述光源的发光机理，我们知道两个独立的普通光源所发出的光不可能是相干光，即使是同一普通光源的不同部分发光也是非相干的，这是由原子（或分子）发光的随机性和独立性所决定的．

3．获得相干光源的方法

那么，如何才能获得相干光源呢？一种方法是使用激光，由于激光产生于原子（或分子）的受激跃迁，因此激光具有很好的单色性和相干性．另外一种方法是利用普通光源，设想把一个普通光源同一点所发出的光分开，分别经过两条不同的路径再会聚到一起，这样，每一个波列都分成了两个振动方向相同、频率相同、相位差恒定的两个波列，因此这两个波列是相干波，在相遇区域就能产生干涉现象．根据分开波列的方式不同，我们把光的干涉分为两大类，一类叫分波阵面法干涉，另一类叫分振幅法干涉．分波阵面法是把一个光源发出的同一波阵面的不同部分上分离出两束光，通过两束光的会聚产生干涉，著名的杨氏双缝干涉就属于分波阵面法干涉（如图 19－3a），属于分波阵面法干涉的还有菲涅尔双镜和洛埃镜等．分振幅法干涉是利用光在透明介质表面的反射和折射而把光分为两束（如图 19－3b），后面要介绍的薄膜干涉，劈尖干涉和牛顿环等都属于此类．



(a) 分波阵面法干涉



(b) 分振幅法干涉

图 19－3　分波阵面法干涉和分振幅法干涉

19.1.3　光波的叠加

光波也满足波的独立传播和叠加原理．设两个同频率的单色光在空中某一点相遇，在相遇点两光矢量的大小分别为

$$E_1 = E_{10}\cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$E_2=E_{20}\cos(\omega t+\varphi_{20})$$

叠加后合成光矢量为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$，如果两光矢量的振动方向相同，则合成光矢量的振幅满足

$$E_0{}^2=E_{10}{}^2+E_{20}{}^2+2E_{10}E_{20}\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

由于光强（光波的能流密度）I 正比于振幅的平方 $I\propto E^2$，故合光强可以表示为

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10}) \tag{19-9}$$

原子（或分子）发光时间极短，人眼和感光仪器所感觉到的光强应该是瞬时光强在一个较长时间内的平均值，即

$$\begin{aligned}\bar{I}&=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\left[I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})\right]\mathrm{d}t\\&=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\,\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{19-10}$$

对于上式我们分两种情形加以讨论.

1. 光的非相干叠加

如果这两束单色光是分别来自两个独立的普通光源，由于原子（或分子）发光的独立性和随机性，这两个光波列的相位差 $\varphi_{20}-\varphi_{10}$ 也将随机变化，并且等概率地取 $0\sim2\pi$ 之间的一切值. 因此，在所观测的时间里，有

$$\int_0^\tau\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})\mathrm{d}t=0$$

从而

$$I=I_1+I_2$$

上式说明来自两个独立光源的两束光，或者是同一光源的两个不同部位所发出的光，叠加后的合光强等于两束光分别照射时的光强之和，这时候观察不到光的干涉现象，我们把这种情况称为光的非相干叠加.

2. 光的相干叠加

按照分波阵面法或者是分振幅法，我们可以把同一光源的同一部分所发出的光分为两束，显然这两束光的振动方向相同，频率相同，相位差也为恒定值，因此式(19－10)可写为

$$\bar{I}=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

上式说明相遇点 P 的合光强不随时间变化，在两光波相遇区域的不同位置，其合光强的大小由这些位置的相位差决定，我们把式中的 $2\sqrt{I_1I_2}\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})$ 称为干涉项，将这种情况称为光的相干叠加.

当光产生相干叠加时，其合光强不仅取决于两束光的光强 I_1 和 I_2，还取决于两束光之间的相位差 $\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}$. 在相遇区域的不同位置，相位差具有不同的值，因此有些地方的光振动始终加强，有些地方的光振动始终减弱，形成光强在空间的稳定分布，即干涉条纹. 当 $\Delta\varphi=2k\pi$ 时，干涉项取最大值，此时有最大光强 $I_{\max}=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}$，称为干涉相长（或干涉加强）；当 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi$ 时，干涉项取最小值，此时有最小光强 $I_{\min}=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2}$，称为干涉相消（或干涉减弱）. 特别地，当 $I_1=I_2$ 时，有 $I_{\max}=4I_1$，$I_{\min}=0$

在第 9 章机械波中，已经知道相位差可以写为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)+(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

由于两相干波来自于同一光源的同一部分，因此其初相差为零，$\varphi_{20}-\varphi_{10}=0$，故有

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta r \tag{19-11}$$

式中 $\Delta r=r_1-r_2$ 为两束光所经过的路程差. 因此当两束光路程差 $\Delta r=k\lambda$ 时，在相遇点是干涉相长；而 $\Delta r=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$时，在相遇点是干涉相消.

19.1.4 光程和光程差

1. 光程　光程差

当光波传播一个波长的距离，其相位改变为 2π. 若光在传播过程中经过若干不同介质时，由于光在不同介质中其波长是不同的，因此在利用式(19－11)计算相位差时需要按照不同介质分段进行，这给计算带来了很大的不便. 为了方便讨论光经过不同介质相遇时的干涉现象，我们可以引入光程的概念.

如图 19－4，设同初相的两相干光源 S_1 和 S_2 发出两相干光，分别在折射率为 n_1 和 n_2 的两介质中传播，在交界面上 P 点相遇，经过距离分别为 r_1 和 r_2，则由式(19－11)，在 P 点两束光的相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda_1}r_1-\frac{2\pi}{\lambda_2}r_2$$

式中 λ_1 和 λ_2 分别为光在两种介质中的波长.

由式(19－8)，有 $\lambda_1=\dfrac{\lambda}{n_1}$以及 $\lambda_1=\dfrac{\lambda}{n_2}$，代入上式，得

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_1r_1-n_2r_2) \qquad (19-12)$$

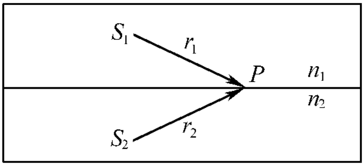


图 19－4　两束光在不同介质中传播时的相位差

式中 λ 为光在真空中的波长. 上式表明,当两束光经过不同介质时,其相位差不仅与光的几何路程 r_1 和 r_2 有关,还与所经过介质的折射率 n_1 和 n_2 有关. 定义光在介质中经过的几何路程 r 与该介质的折射率 n 的乘积 nr 为光程,即

$$\text{光程}=nr \qquad (19-13)$$

若光束经过几种不同介质时,

$$\text{光程}=\sum_i n_i r_i \qquad (19-14)$$

用 δ 来表示两束光的光程差,即

$$\delta=n_1r_1-n_2r_2 \qquad (19-15)$$

则式(19－12)为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta \qquad (19-16)$$

上式即为相位差与光程差的关系,由此可以得到两相干光干涉相长或者干涉相消时光程差所满足的条件

$$\delta=\begin{cases}\pm k\lambda & k=0,1,2,\cdots \quad \text{干涉相长}\\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & k=0,1,2,\cdots \quad \text{干涉相消}\end{cases} \qquad (19-17)$$

值得注意的是,在用式(19－16)计算相位差时,不论光波在何种介质中传播,式中的 λ 均为该光波的真空波长.

由光程的定义,在均匀介质中,有 $nr=\frac{c}{u}r=ct$,可见光程应该等于在相同时间内,光在真空中所通过的路程,而光在真空中的几何路程也就是光在真空中的光程. 这就意味着,不论是在真空中还是在任何介质中,光波经过相同的光程所需要的时间是一样的,因此可以把光程理解为在相位改变相同或者传播时间相同的前提下,把光在介质中传播的路程折合成光在真空中的传播路程,即光程是光在介质中传播的等效真空路程.

2. 透镜不引起附加光程差

在干涉和衍射装置中,经常要用到各种透镜. 从透镜成像的实验当中我们知道,当一束平行光向凸透镜入射时,经过透镜后将会聚于透镜焦平面上的一点 P,形成亮点(如图 19－5),这说明平行光中的各光线在 P 点是同相位的,由于

平行光的波阵面是垂直于光线的平面，所以从入射平行光中任一波阵面算起，直到会聚点 P，各光线所经过的光程都相等，这就意味着，透镜虽然可以改变光线的传播方向，但是不引起附加的光程差，可称之为透镜的等光程性.

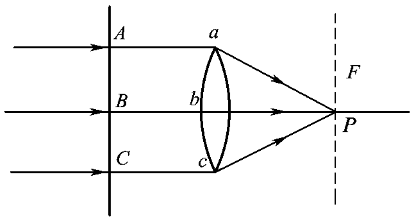


图 19－5　透镜不引起附加的光程差

对透镜的等光程性可以做如下解释. 如图 19－5 所示，A，B，C 为垂直于入射光束同一平面上的三个点，其振动相位相同，对于三条光线 AaP，BbP 和 CcP，在光线 AaP 和 CcP 中，在空气中所经过的路径较长而在透镜中传播的路径较短；而光线 BbP 正好相反，在空气中传播的路径较短而在透镜中传播的路径较长. 由于玻璃透镜的折射率大于空气的折射率，所以折算成光程，各光线到达 P 点的光程相等，在 P 点引起的光振动仍然是同相的. 要注意的是，透镜的等光程性并不是说透镜不改变各光线的光程，事实上在光路中放上透镜之后各光线的光程都增大，只是各光线的光程增加是相同的，各光线之间没有产生附加的光程差，这才是透镜等光程性的真实含义.

19.2　分波阵面干涉

19.2.1　杨氏双缝干涉

英国医生兼物理学家托马斯・杨在 1801 年首次用分波阵面方法获得了相干光，并观察到光的干涉现象，此即著名的杨氏双缝干涉实验.

杨氏双缝干涉实验的装置如图 19－6 所示，S 为缝光源，其长度方向垂直于纸面，发出波长为 λ 的单色光，向彼此平行的双缝 S_1 和 S_2 入射，缝的长度方向也垂直于纸面，双缝到光源 S 的距离相等，则当入射光通过双缝时，就可以在缝后

的观察屏上形成一系列平行于双缝的明暗相间的干涉条纹. 杨氏双缝干涉所依据的是惠更斯原理,双缝将入射波面分为两部分,这两部分可以看作是两个子波源 S_1 和 S_2,由于这两个子波源都来自于同一缝光源的同一部分,因此可以把它们看作是相干光源,它们所发出的子波是相干光波,从而在两相干光波相遇区域形成干涉条纹.

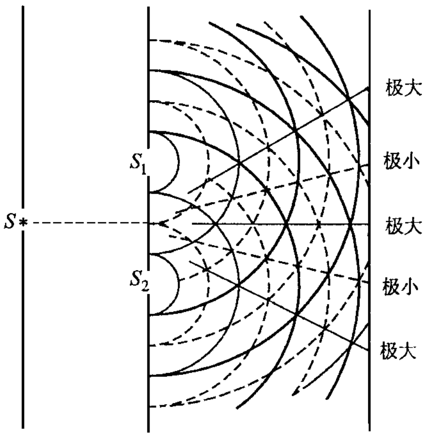


图 19－6　杨氏双缝干涉实验

1. 双缝干涉条纹的位置

如图 19－7,设双缝 S_1,S_2 相距为 d,双缝到观察屏的距离为 D,并且有 $d \ll D$,一般说来,双缝间距应小于 1 mm,缝到屏的距离应大于 1 m. AO 为双缝的垂直平分线,与屏的交点为 O,对于屏上 O 点附近的一点 P,到屏中央 O 点距离为 x,P 点离 S_1 和 S_2 的距离分别为 r_1 和 r_2,为了方便计算两光波到达 P 点时的光程差,我们在 PS_2 上截取 $PB=PS_1$,由于 $d \ll D$,同时在一般实验条件下有 $x \ll D$,则由图中的几何关系,有 $\angle PAO \approx \angle BS_1S_2=\theta$,因此由 S_1,S_2 发出的两光波到达 P 点的光程差为

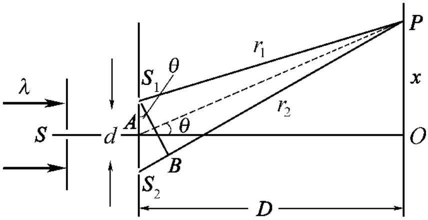


图 19－7　杨氏双缝干涉实验的计算

$$\delta=r_2-r_1 \approx d\sin\theta \quad (19-18)$$

当 $x \ll D$ 时,θ 值很小,所以有 $\sin\theta \approx \tan\theta=\dfrac{x}{D}$,代入上式,则

$$\delta = d \cdot \frac{x}{D} \tag{19-19}$$

由式(19－17)可知，当 $\delta=\frac{dx}{D}=\pm k\lambda$ 时，即在

$$x = \pm \frac{D}{d} k\lambda \qquad (k = 0,1,2,3,\cdots) \tag{19-20}$$

处，两光波干涉加强，呈现亮条纹. 而在

$$x = \pm \frac{D}{d}(2k+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (k = 0,1,2,3,\cdots) \tag{19-21}$$

处，两光波干涉减弱，呈现暗条纹.

其中 k 称为干涉条纹的级次，$k=0$ 的明条纹称为零级明纹或中央明纹，$k=1,2,3,\cdots$分别称为第一级、第二级……明纹，依此类推.

2. 双缝干涉条纹的特点

现对双缝干涉条纹的特点做如下讨论：

（1）条纹分布　条纹对称地分布于中央明纹两侧且平行于狭缝方向，明暗条纹交替排列.

（2）条纹间隔　由式(19－20)可以计算任意两相邻明纹的中心之间的距离（明纹间隔）为

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{D}{d}\lambda \tag{19-22}$$

同理可以计算暗纹间隔也为式(19－22). 上式表明，条纹间隔与缝到屏的距离成正比，与所使用的入射光的波长成正比，与双缝之间的距离成反比，与条纹的级次 k 无关，相邻明纹和相邻暗纹的间隔都相等，各条纹等间隔地排列.

（3）若将整个装置放置于折射率为 n 的介质中，则式(19－18)应为 $\delta=n(r_2-r_1)\approx d\sin\theta$ 相应条纹间隔为 $\Delta x=x_{n+1}-x_n=\frac{D}{nd}\lambda$，可见在介质中条纹间隔变小，条纹变密.

（4）如果用白光作为光源，则各种波长的零级明纹在 $x=0$ 处重叠，形成中央白色条纹. 在中央明纹两侧，各种波长同级次的明纹的位置不同，波长小的紫色条纹最靠近屏中央而波长大的红色条纹离屏中央最远，形成有规则的彩色条纹，而且级次越大，这种分离越大，导致不同级次的各色光发生重叠，条纹逐渐模糊，最后消失.

例 19－1　如图 19－8，在杨氏双缝干涉装置中，在 S_2 缝上覆盖厚度为 h 的介质片，设入

射光的波长为 λ. 则原来的零级条纹移至何处？若移至原来的第 k 级明条纹处，求介质片的折射率 n 为多少？

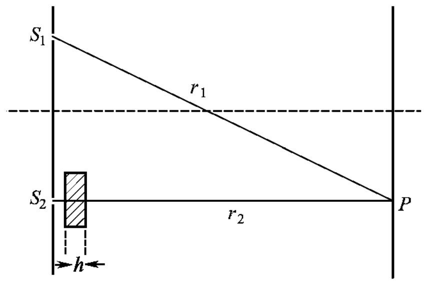


图 19－8　例 19－1 图

解　(1) 从 S_1 和 S_2 发出的相干光到达屏上 P 点所对应的光程差为

$$\delta=(r_2-h+nh)-r_1$$

对于零级明纹，有

$$\delta=0$$

因此有

$$r_2-r_1=-(n-1)h<0$$

说明原来的零级明纹至屏中央向下移动.

(2) 对于原来第 k 级明纹，有

$$r_2-r_1=k\lambda$$

当插入介质片时，原来的零级明纹移到 k 级处，因此应当满足

$$r_2-r_1=-(n-1)h=k\lambda$$

最后得

$$n=1-\frac{k\lambda}{h}$$

要注意由于零级在屏中央以下，所以式中的 k 应取负值.

19.2.2　其他分波阵面干涉

在杨氏双缝干涉实验中，要求双缝的宽度很小，这样就使得通过双缝的光很弱，同时衍射现象比较显著，干涉条纹不够清晰，因此后来菲涅耳等人又通过大量实验设计出了其他几种分波阵面干涉装置.

1. 菲涅尔双面镜

如图 19－9 所示，M_1 和 M_2 是两个紧挨在一起的平面反射镜，两镜面之间有一个很小的夹角，狭缝光源 S 平行于 M_1 和 M_2 的交线，光栏 E 是为了防止 S 发出的光直接射到屏上. S 光源发出的光的波阵面被 M_1 和 M_2 分为两部分，经反射后形成两相干光，在屏上两相干光相遇区域就可以看到等间隔的干涉条纹.

到达观察屏的是通过 M_1 和 M_2 两镜面反射的两束相干光，它们可以看作是分别从 S 光源在 M_1 和 M_2 中的虚像 S_1 和 S_2 直接发出，也就是说，虚像 S_1 和 S_2 相当于杨氏干涉装置中的双缝，因此只要计算出两虚像之间的距离以及虚像到屏的距离，就可以利用杨氏双缝干涉的公式来计算菲涅尔双面镜干涉条纹的位置以及条纹间隔.

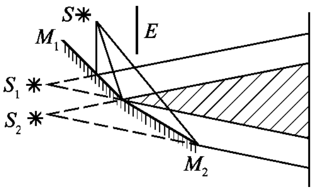


图 19－9　菲涅耳双面镜实验

实验

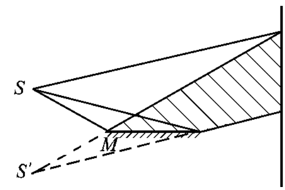


图 19－10　洛埃镜

2. 洛埃镜

洛埃镜实验的装置更简单，如图 19－10 所示，一个平面反射镜 M 水平放置，狭缝光源 S 到镜面的垂直距离很小，使光源 S 所发出的一部分光以接近 $90°$ 入射角向平面镜入射并被平面镜反射后到达观察屏，而光源 S 所发出的另一部分光不经过 M 直接到达观察屏，显然这两部分光来自于同一波阵面的同一部分，因此它们是相干光，在观察屏上就可以看到明暗相间的干涉条纹. 由于经过 M 镜的反射光可以看作是光源 S 在镜中虚像 S' 直接发出的，因此可以把 S 和 S' 当作两相干光源，利用杨氏双缝干涉公式进行处理.

在洛埃镜实验中，如果把观察屏向 M 镜靠近，直到屏与镜的边缘接触时，这时在接触点观察到的是暗纹而不是明纹，这说明两相干光在接触点的相位是相反的，由于直射光和反射光到达接触点所经过的波程是相等的，而直射光的相位不会有别的变化，因此可以认为是反射光在反射点产生了数值为 π 的相位突变（电磁学理论的严格证明也是如此），这相当于反射光的光程减少了（或增加了）半个波长，我们把这种现象称为半波损失. 因此上述的 S 和 S' 是两个反相的相干光源，而在杨氏干涉中的双缝是两个同相的相干光源，所以杨氏双缝干涉的明纹处对应于洛埃镜是暗纹，而杨氏双缝干涉的暗纹处对应于洛埃镜则是明纹.

更加严格的理论可以证明，当光波从光疏介质（折射率较小的介质）向光密介质（折射率较大的介质）入射时，在反射过程中，反射光中会产生半波损失，而在折射光中没有半波损失. 另外，如果光波是从光密介质向光疏介质入射，则不论是折射光还是反射光中都不会产生半波损失. 有关半波损失的问题我们在以下的讨论中还会经常遇到.

19.3　薄膜干涉

薄膜干涉是一种分振幅干涉. 人们在日常生活中会经常见到薄膜干涉现象,如阳光下五彩缤纷的肥皂泡,雨后马路边水面上油膜的彩色条纹,经过高温处理后的金属表面所呈现美丽的蓝色,这些都是薄膜干涉现象. 下面将用光程和光程差的概念对该现象进行讨论.

19.3.1　薄膜干涉

如图 19－11 所示,在折射率为 n_1 的均匀介质中,有一折射率为 n_2 的厚度均匀透明薄膜,其厚度为 e,在薄膜附近有一单色面光源 S 发出光线 a,以入射角 i 入射到薄膜上表面 A 点.

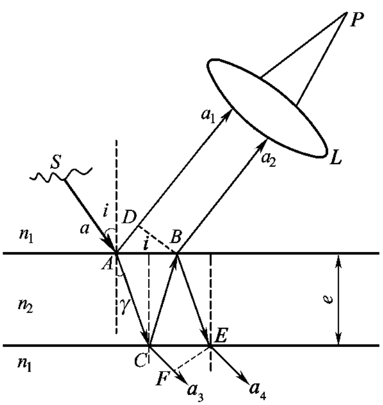


图 19－11　薄膜干涉光路图

入射光一部分经 A 点反射形成光线 a_1,另一部分折向薄膜下表面的 C 点,经 C 点反射到上表面 B 点,然后折射形成光线 a_2. 显然光线 a_1 和 a_2 彼此平行,经过透镜 L 将会聚在屏上 P 点,由于光线 a_1 和 a_2 都是来自于入射光 a,只是经历了不同的路径而有恒定的光程差,因此是相干光,在 P 点可以观察到干涉条纹,我们称为反射光的干涉. 同时在 C 点还有一部分光从下表面折射形成光线 a_3,而向 B 点入射的一部分光反射到下表面经 E 点折射,形成光线 a_4,显然 a_3 和

a_4 也彼此平行，并且是相干光，经过透镜会聚后也可以产生干涉现象，我们称之为透射光的干涉.

现在我们来计算反射光 a_1 和 a_2 的光程差. 过 B 做 a_1 的垂线，垂足为 D，则在 BD 之后为平行光，没有光程差（透镜不产生附加光程差），光程差产生在 A 点和 BD 之间，显然有

$$\delta' = n_2(AC + CB) - n_1 AD$$

而 $AC = CB = \dfrac{e}{\cos\gamma}$，$AD = AB\sin i = 2e\tan\gamma\sin i$，将两式代入，得

$$\delta' = \frac{2e}{\cos\gamma}(n_2 - n_1\sin\gamma\sin i)$$

根据折射定律 $n_1\sin i = n_2\sin\gamma$，上式可写为

$$\delta' = \frac{2e}{\cos\gamma}n_2(1 - \sin^2\gamma) = 2n_2 e\cos\gamma \qquad (19-23)$$

此外，还必须要考虑在各反射点反射光中是否存在半波损失. 我们分两种情况讨论：

（1）若 $n_1 < n_2$，则在 A 点的反射光 a_1 中存在半波损失，而 a_2 中不存在半波损失.

（2）若 $n_1 > n_2$，则在 C 点的反射光中存在半波损失，也即光线 a_2 中存在半波损失，而这时光线 a_1 中没有半波损失.

综合以上两点可以看出，不论两种介质的折射率大小如何，反射光线 a_1 和 a_2 中有且只有一条存在半波损失，因此在两光线的光程差式（19－23）中需要加上（或者是减去）半个波长的光程差，因此反射光的实际光程差为

$$\delta = 2n_2 e\cos\gamma + \frac{\lambda}{2} \qquad (19-24)$$

上式习惯上用入射角 i 表示

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^{\,2} - n_1^{\,2}\sin i} + \frac{\lambda}{2} \qquad (19-25)$$

于是干涉条件为

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^{\,2} - n_1^{\,2}\sin i} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & k = 1,2,3,\cdots \quad \text{干涉加强} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & k = 0,1,2,\cdots \quad \text{干涉减弱} \end{cases} \qquad (19-26)$$

特别地，当垂直照射时，$i=0$，有

$$\delta = 2n_2 e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & k = 1,2,3,\cdots \quad \text{干涉加强} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & k = 0,1,2,\cdots \quad \text{干涉减弱} \end{cases} \qquad (19-27)$$

对于透射光 a_3 和 a_4，同理可以求得其光程差为

$$\delta_{透} = 2e\sqrt{n_2{}^2 - n_1{}^2 \sin i} \qquad (19-28)$$

要注意这时在透射光中不存在 $\frac{\lambda}{2}$ 的附加光程差，所以对于同样的入射光，当反射干涉加强时，透射光是干涉减弱的.

式(19－25)表明，扩展光源 S 上任一点发出的入射角 i 相同的光线，经薄膜上下两个表面反射后产生的两束相干光的光程差是相等的，形成同一级干涉条纹，即同一级干涉条纹对应的光线入射角相同，因此这种干涉称为等倾干涉，相应的干涉条纹称为等倾干涉条纹.

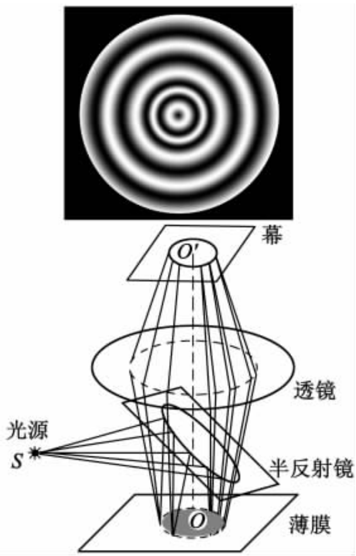


图 19－12　等倾干涉实验装置

等倾干涉条纹定域在无限远，通常用透镜聚焦在观察屏上进行观察. 观察等倾干涉条纹的实验装置如图 19－12 所示，S 为扩展光源，光线经过与薄膜成 45°夹角的半反射镜，反射至薄膜上面，从薄膜上下两个表面反射的平行相干光，通过半反射镜，由透镜会聚于观察屏. 具有相同倾角的反射光，在屏上形成一个圆环，不同倾角的反射光就形成半径不同的圆形条纹，因此，等倾干涉图样是一组明暗相间，内疏外密的同心圆环. 由式(19－25)可知，当薄膜厚度 e 一定时，入射角 i 越小，光程差 δ 越大，这说明越靠近干涉图样中央(环半径越小)的条纹，其级次 k 越高.

例 19－2　空气中肥皂膜水平放置，其厚度为 0.3 μm，折射率为 1.33，如果用白光垂直照射，问肥皂膜的正面和反面呈现什么颜色？

解　当白光垂直照射时，经肥皂膜上下表面的反射光的光程差为 $\delta_{反} = 2n_2 e + \frac{\lambda}{2}$，肥皂膜正面所呈现的颜色应该是相互干涉加强的反射光的颜色，所以有

$$2n_2 e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \qquad k=1,2,3,\cdots$$

求得

$$\lambda = \frac{4n_2 e}{2k-1} \qquad k=1,2,3,\cdots$$

将 $n_2 = 1.33$，$e = 0.3$ μm 代入上式，得到干涉加强的光波波长

$$k=1 \quad \lambda_1 = 4n_2 e = 1596 \text{ nm}$$

$$k=2 \quad \lambda_2 = \frac{4n_2 e}{3} = 532 \text{ nm}$$

$$k=3 \quad \lambda_3=\frac{4n_2e}{5}=319.2\ \text{nm}$$

其中 $\lambda_2=532$ nm 的绿光是在可见光范围之内，所以肥皂膜的正面呈现绿色.

而肥皂膜反面所呈现的是透射光干涉加强的颜色，有

$$\delta_{透}=2n_2e=k\lambda \qquad k=1,2,3,\cdots$$

则

$$k=1 \quad \lambda_1=2n_2e=798\ \text{nm}$$

$$k=2 \quad \lambda_2=n_2e=399\ \text{nm}$$

其中 λ_2 为紫色，所以肥皂膜反面呈现紫色.

例 19－3 在空气中用白光垂直照射到厚度为 e 的肥皂膜上，在反射光中观察到 $\lambda_1=6300$ Å 的干涉极大，$\lambda_2=5250$ Å 的干涉极小，并且在它们之间没有另外的干涉极大或极小，已知肥皂膜折射率 $n=1.33$，求肥皂膜的厚度？

解 对 λ_1 反射光干涉加强，而对 λ_2 反射光干涉减弱，因此有

$$2ne+\frac{\lambda_1}{2}=k\lambda_1$$

因在 λ_1 和 λ_2 之间没有另外的干涉极大和干涉极小，故干涉级 k 相同，有

$$2ne+\frac{\lambda_2}{2}=(2k+1)\frac{\lambda_2}{2}$$

两式联立可以解得 $k=\dfrac{\lambda_1}{2(\lambda_1-\lambda_2)}=3$ 则 $e=\dfrac{k\lambda_2}{2n}=5921$ Å

19.3.2 薄膜干涉的应用 增透膜与增反膜

利用薄膜干涉可以测定薄膜的厚度、折射率以及入射光的波长，除此之外，还可以用来提高光学仪器的透射率或反射率. 我们把增加透射率的薄膜称为增透膜，把增加反射率的薄膜称为增反膜.

1. 增透膜

当入射光通过一个透镜表面时要产生反射，会损失部分能量，当正入射时，反射光强约占入射光强的 4%，因此损失的能量占入射能量的极少部分. 而一般的光学仪器需要许多的透镜和透光元件，例如一架普通的单镜头反光式照相机有 6 个透镜，12 个反射面，透射光只占入射光的 60%左右，而一架潜望镜的反光面更是多达 30～40 个，光能的损失高达 70%～80%，加上由于漫反射所产生的杂散光的干扰，使得图像变的既暗又模糊不清，严重影响了仪器的成像质量. 为了减少有害的反射，可以在透光元件的表面镀一层折射率小于基层折射率的透

明介质薄膜，使入射光在薄膜的上下两个表面的反射光干涉减弱，这样就可以使反射光能减少，透射光能增大，这就是增透膜的工作原理.

通常我们采用真空镀膜的方法，在透镜（光学玻璃的折射率为 1.50）的表面镀一层氟化镁（MgF_2，折射率为1.38）的透明介质薄膜，并设计适合的膜厚度，使入射光在介质上下表面的反射光干涉相消，如图 19－13 所示. 对于人眼和感光胶片来说，白光中波长为 5500 Å 的黄绿光是最敏感的，我们以该波长为例来计算膜的厚度.

当光线垂直入射时，反射光 1，2 的光程差为

$$\delta=2ne$$

上式由于光线 1，2 当中都存在半波损失，因此没有 $\lambda/2$ 的附加光程差.

根据干涉相消的条件，有

$$2n_2e=(2k+1)\frac{\lambda}{2}\quad k=0,1,2,3,\cdots$$

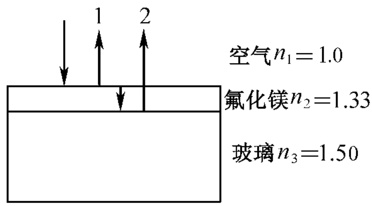


图 19－13　增透膜

由此可得氟化镁薄膜的厚度为

$$e=\frac{(2k+1)\lambda}{4n_2}=\frac{(2k+1)\times5500\times10^{-10}}{4\times1.38}\approx(2k+1)\times10^{-7}\ \text{m}$$

取 $k=0$，得氟化镁薄膜的最小厚度为 $e\approx100$ nm. 这种厚度的薄膜只能减弱黄绿光的反射，而白光中的紫光和红光，因为不满足干涉减弱的条件，所以有较高的反射，因此涂敷有增透膜的照相机镜头在日光下呈现紫蓝色或是红色，就是这个道理.

在薄膜光学中，通常把 n_2e 称为薄膜的光学厚度. 因此增透膜的光学厚度应为 $\lambda/4,3\lambda/4,\cdots$，理论计算表明，光学厚度越小，则对邻近波长的反射率也越小，因此为了减小其他色光的反射，应采用比较薄的增透膜.

2. 增反膜

在有些实际应用中，我们需要光学元件的表面有很高的反射率. 例如氦氖激光器光学谐振腔中的反射镜，要求对波长 $\lambda=632.8$ nm 的光的反射率要在 99% 以上，为此可以采用镀增反膜的方法. 通常是在基层上镀一层折射率比基层折射率大的透明介质薄膜，例如在玻璃表面镀一层硫化锌（ZnS，折射率为 2.35）的透明介质薄膜，使 632.8 nm 的激光在薄膜上下两个表面的反射光干涉加强，则薄膜的厚度应当满足

$$2n_2e+\frac{\lambda}{2}=k\lambda\qquad k=1,2,3,\cdots$$

即

$$n_2e=\frac{(2k-1)\lambda}{4}$$

所以增反膜的光学厚度为 $\lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \cdots$

为了进一步提高反射率，可以采用多层镀膜的方法，即在玻璃基板上交替镀上增透膜和增反膜，例如氟化镁和硫化锌，每层膜的光学厚度都为 $\lambda/4$，一般要镀 13 层或者 15 层，这样可以使反射率达到 99%以上，宇航员的头盔面罩就镀有对红外线具有高反射率的多层膜，以屏蔽太空中极强的红外线对宇航员的伤害.

19.4 劈尖干涉　牛顿环

上一节讨论的薄膜是厚度均匀的，下面我们来讨论光线入射在厚度不均匀的薄膜上所产生的干涉现象，此类干涉称为等厚干涉，它也是分振幅干涉其中的一种，主要分为劈尖干涉和牛顿环干涉两种.

19.4.1 劈尖干涉

如图 19－14a 所示，两块平板玻璃左端紧密接触，另一端夹一薄片使上玻璃板稍稍抬起，则在两玻璃板之间形成了一个劈尖形状的空气薄层，我们称之为空气劈尖，两玻璃板之间的夹角 θ 称为劈尖角，通常劈尖角很小，大约 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ rad.

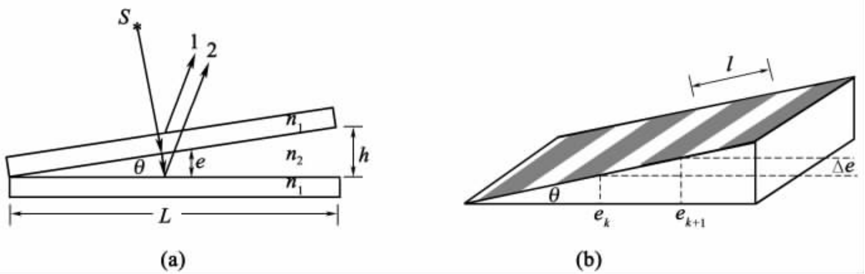


图 19－14　劈尖干涉

当平行单色光向上玻璃板入射时，在上玻璃板的下表面形成反射光线 1，入射光的另一部分通过上玻璃板，在下玻璃板的上表面形成反射光线 2，显然两反射光是相干光，它们在上玻璃板上方相遇产生干涉，因此可以用显微镜观察到明暗相间的干涉条纹.

当垂直入射时，在劈尖厚度为 e 处相干光 1，2 的光程差为

$$\delta=2n_2e+\frac{\lambda}{2}$$

对于空气劈尖，有 $n_2=1$，因此可以得到明纹条件

$$2e+\frac{\lambda}{2}=k\lambda \qquad k=1,2,3,\cdots \tag{19-29}$$

以及暗纹条件

$$2e+\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2} \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{19-30}$$

式(19－30)中 $k=0$ 对应于两玻璃板相交处的棱边，此处虽然 $e=0$，但是由于在光线 2 中存在半波损失，因此此处为暗纹.

由上两式可以看出，同级条纹所对应的劈尖厚度均相同，也就是说，劈尖中所有厚度相等的点的轨迹形成同一干涉条纹，因此我们把劈尖干涉称为等厚干涉，劈尖干涉条纹称为等厚干涉条纹.

由式(19－29)，可得两个相邻的明纹所对应的劈尖厚度差为

$$\Delta e=e_{k+1}-e_k=\frac{\lambda}{2} \tag{19-31}$$

也就是说，相邻明纹所对应的劈尖厚度差为光在空气中波长的一半. 同理，相邻暗纹所对应的劈尖厚度差也为 $\lambda/2$，所以劈尖干涉条纹沿棱边彼此平行，等间隔明暗相间地排列着，如图 19－14b 所示.

由此还可以得到相邻明纹间隔 l 为

$$l=\frac{\Delta e}{\sin\theta}=\frac{\lambda}{2\sin\theta} \tag{19-32}$$

由于 θ 很小，$\sin\theta=\theta$，所以上式可写为

$$l=\frac{\lambda}{2\theta} \tag{19-33}$$

可见 l 与 θ 成反比，当劈尖角 θ 越大时，条纹间隔 l 越小，条纹越来越稠密，甚至于无法分辨，因此为了观察到比较清晰的干涉条纹，劈尖角不能太大，对于可见光干涉，通常取 $10^{-4}\sim10^{-5}$ rad. 如果不是空气劈尖，而是折射率为 n 的其他透明介质，则式(19－31)和式(19－33)分别为

$$\Delta e=e_{k+1}-e_k=\frac{\lambda}{2n}$$

$$l=\frac{\lambda}{2n\theta}$$

要注意式中的波长为真空中的波长而不是介质中的波长.

劈尖干涉在精密测量中有重要应用，常用来测量细薄物体的直径或厚度，物

体长度的细小变化，以及检测工件表面的平整度等. 由于干涉条纹及其变化与光波波长相关联，一根头发丝粗细的变化就相当于成千上万个光波波长，因此可以根据干涉条纹的位置和形状的变化来精确测定一些与长度及其变化相关的物理量.

19.4.2　牛顿环

将一曲率半径很大的平凸透镜 A 放在一平板玻璃 B 上，如图 19－15a 所示，则在透镜与平板玻璃之间形成了一个上表面为球面，下表面为平面的空气薄

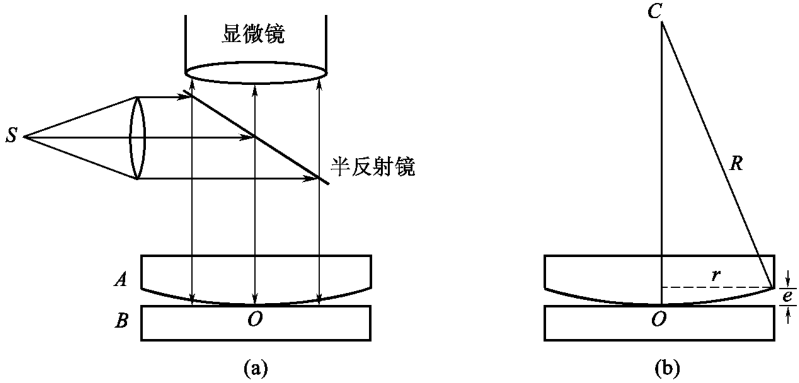
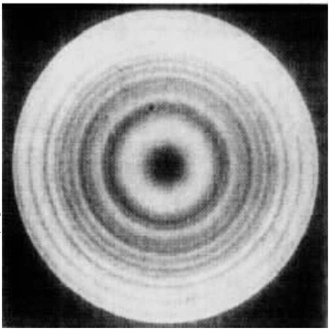


图 19－15　牛顿环

层. 点光源 S 经透镜形成的平行光入射到与牛顿环成 $45°$ 夹角的半反射镜上，经反射后向平凸透镜表面垂直入射，入射光在空气薄层的上下两个表面产生反射，两束反射光能够产生干涉，因此在牛顿环的上方可以通过显微镜观察到以接触点 O 为中心的，明暗相间的圆环形干涉条纹，称其为牛顿环. 如果所使用的入射光为白光，则可以观察到彩色的牛顿环，如图 19－16 所示.



19－16　白光牛顿环干涉照片

牛顿环也属于等厚干涉的例子，下面我们来计算牛顿环明环和暗环的半径. 如图 19－15b，设半径为 r 的牛顿环处空气薄层的厚度为 e，则上下两个表面反射光的相干条件为

$$2e+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}k\lambda & k=1,2,3,\cdots \quad \text{明纹}\\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & k=0,1,2,\cdots \quad \text{暗纹}\end{cases} \tag{19-34}$$

由图 19－15b 可得

$$(R-e)^2+r^2=R^2$$

即为

$$r^2=2Re-e^2$$

因为 $R\gg e$ 上式中可忽略 e^2 项，于是

$$e=\frac{r^2}{2R}$$

代入式(19－33)，可得明暗环的半径分别为

$$r=\begin{cases}\sqrt{(k-\dfrac{1}{2})R\lambda} & k=1,2,3,\cdots \quad \text{明环}\\ \sqrt{kR\lambda} & k=0,1,2,\cdots \quad \text{暗环}\end{cases} \tag{19－35}$$

为方便起见，计算两个相邻暗环的半径差：

$$\Delta r=r_{k+1}-r_k=\sqrt{(k+1)R\lambda}-\sqrt{kR\lambda}=\frac{R\lambda}{\sqrt{(k+1)R\lambda}+\sqrt{kR\lambda}}$$

可见，随着半径增大，级次 k 越来越大，而相邻暗环的半径差 Δr 越来越小，这说明条纹变得越来越密，当半径足够大时，条纹就变得无法分辨了.

在透镜和平面镜接触的 O 点，$e=0$，而光程差为 $\delta=\dfrac{\lambda}{2}$，所以 O 点即牛顿环的中心为一个暗斑，在实验中可以观察到这一现象如图 19－16 所示，这又一次证明了当光波从光疏介质向光密介质入射时，反射光中存在半波损失.

当然，在图 19－15a 中也可以把显微镜放置在平板玻璃 B 的下面，观察透射光所形成的牛顿环干涉图样，它与反射光所形成的牛顿环干涉图样是“互补”的，例如在 O 点处将形成一个亮斑而不是暗斑. 不过，透射光形成的牛顿环图样比反射光的牛顿环图样对比度低得多.

在实验室中，常用牛顿环来测定光波的波长或平凸透镜的曲率半径. 在工业上则利用牛顿环来检测透镜的加工质量.

例 19－4　干涉膨胀仪　测量固体线膨胀系数的干涉膨胀仪如图 19－17 所示，AB 和 $A'B'$ 为平板玻璃，C 为膨胀系数极小的空心石英圆柱，W 为待测样品，其上表面与 AB 形成空气劈尖. 温度为 t_0 时待测样品的长度为 l_0. 以波长为 λ 的单色平行光垂直照射 AB，就会形成劈尖干涉. 使 W 的温度缓慢上升，条纹就会向右边移动，在温度从 t_0 上升到 t 的过程中，观察到有 N 条明条纹从某一刻度经过，求被测样品的线膨胀系数.

解　由于石英的膨胀系数极小，故石英圆柱的膨胀可以忽略不计. 每当有一个明条纹经过该刻度时，说明该处两束反射光的光程差就增加一个波长，相应地，待测样品就“长高”半个波长，因此当有 N 个条纹通过该处时，W 的伸长量为

$$\Delta l = N \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{N\lambda}{2}$$

根据线膨胀系数的定义，有

$$\beta = \frac{\Delta l}{l_0(t-t_0)} = \frac{N\lambda}{2l_0(t-t_0)}$$

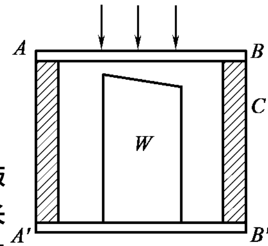


图 19－17　例 19－4 图（干涉膨胀仪）

例 19－5　劈尖干涉检测工件表面平整度，将标准平面玻璃板 A 放在待测工件 B 表面上，在两者之间形成一个空气劈尖. 用波长 λ 的单色光垂直入射，观察反射光干涉条纹如图 19－18 所示，问工件表面缺陷是凸还是凹，已知条纹间隔为 a，条纹最突起处突出高度为 b，则缺陷的尺寸如何？

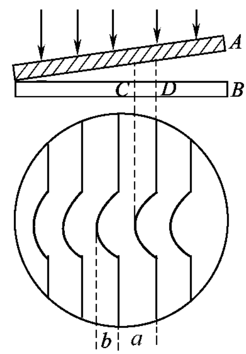
解　劈尖干涉是一种等厚干涉，每一条干涉条纹对应的是劈尖中那些厚度相等的点的轨迹. 在图 19－18 中，条纹的直线部分所对应的劈尖厚度如 D 处所示，而条纹的突起处所对应的劈尖厚度如 C 处应小于 D 处厚度，根据等厚干涉原理，干涉条纹显示 C 处膜厚与 D 处实际相等，说明在 C 处有一凹槽，另外根据干涉条纹突起部分的分布，可知此凹槽的长度方向垂直于棱边.

设凹槽的深度为 h，由于相邻明纹所对应劈尖的厚度差为 $\lambda/2$，由几何关系可知

$$\frac{h}{b} = \frac{\lambda/2}{a}$$

解得深度为

$$h = \frac{\lambda b}{2a}$$



－18　例 19－5 图（检测工
表面平整度）

例 19－6　用钠光灯作光源观察牛顿环时，测得某一级明纹的半径为 3.20 mm，它外面的第五级明环半径为 4.60 mm，已知钠黄光波长为 5893 Å，求所用平凸透镜的曲率半径 R 为多少？

解　设半径为 3.00 mm 的明环为第 k 级，由式 19－35 有

$$r_k{}^2 = \left(k-\frac{1}{2}\right)R\lambda \qquad r_{k+5}{}^2 = \left(k+5-\frac{1}{2}\right)R\lambda$$

两式相减，得

$$r_{k+5}{}^2 - r_k{}^2 = 5R\lambda$$

求得曲率半径为

$$R = \frac{r_{k+5}{}^2 - r_k{}^2}{5\lambda} = \frac{(4.60\times10^{-3})^2-(3.20\times10^{-3})^2}{5\times5893\times10^{-10}} = 3.71\ \text{m}$$

19.5　迈克尔孙干涉仪

从前面的讨论已经知道，不论是等倾干涉还是等厚干涉，当两相干光的光程差有一微小变化，哪怕是这种变化只有波长的十分之一，在视场中都会观察到干涉条纹的明显移动. 迈克尔孙干涉仪是产生光干涉的典型干涉仪器，利用它既可观察等倾干涉，也可观察等厚干涉.

迈克尔孙干涉仪的光路如图 19－19 所示. M_1 和 M_2 为两块平面反射镜，其中 M_1 是固定的，M_2 可以凭借一个精密螺杆在水平方向左右移动. G_1 和 G_2 为两块厚度和折射率都相同的平面玻璃板，它们沿与 M_1 和 M_2 成 $45°$ 夹角平行地放置，在 G_1 的背面镀有一层半反射膜，称为分光板；G_2 表面没有镀膜，称为补偿板.

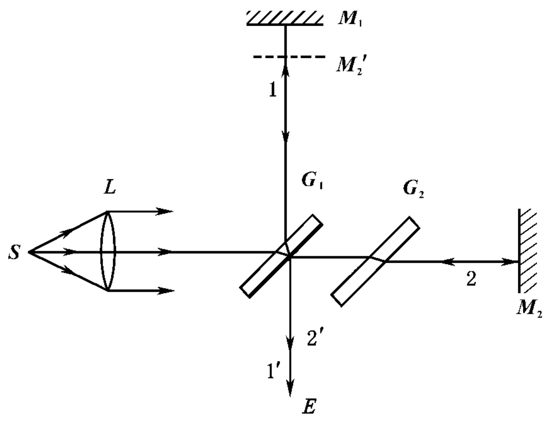


图 19－19　迈克尔孙干涉仪

经透镜 L 出射的单色平行光在 G_1 的半反射膜上被分为光强几乎相等的两束，一束为反射光 1，另一束为透射光 2. 反射光 1 垂直地射向 M_1，经反射沿原路返回，再透过半反射膜形成光线 $1'$；透射光 2 垂直地射向 M_2，经 M_2 反射后沿原路返回，再经半反射膜反射后形成光线 $2'$. 显然光线 $1'$ 和光线 $2'$ 是相干光，因此在 E 处可以观察到干涉条纹. G_2 的作用是为了使光线 2 和光线 1 一样，都是三次穿过玻璃板，这样就使由于两光线在玻璃中的光程不等得到补偿.

根据反射镜的成像原理，M_2 在 G_1 反射镜面中的像为 M_2'，从光程来看图中的光线 $2'$ 可以看作是 M_2' 所直接发出，因此在 M_1 和 M_2' 之间就构成了一个空气

薄膜，光线 $1'$和光线 $2'$的干涉就可以看作是空气薄膜上下两个表面反射光的干涉，这里分为两种情况：

若 M_1和 M_2严格垂直，则 M_1和 $M_2{}'$严格平行，M_1和 $M_2{}'$之间形成一个厚度均匀的空气膜. 此时在 E 处将看到同心圆形状的等倾干涉条纹.

若 M_1和 M_2不垂直，则 M_1和 $M_2{}'$不平行，M_1和 $M_2{}'$之间形成一个空气劈尖. 此时在 E 处将看到彼此平行直线状的等厚干涉条纹.

当移动 M_2时，就相当于改变了 M_1和 $M_2{}'$之间的厚度，厚度每改变 $\lambda/2$，便有一个条纹从视场 E 中移过，也就表明了 M_2移动的距离是 $\lambda/2$. 在 M_2的移动过程中，数出视场中条纹移过的数目 N，就能计算 M_2移动的距离为

$$d = N\frac{\lambda}{2} \tag{19-35}$$

迈克尔孙干涉仪中两束相干光在空间上是完全分开的，我们可以通过移动 M_2镜，或是在光路中加入另外的介质的方法，很方便地改变两光束的光程差，这就使干涉仪在科学技术和生产实践中具有很广泛的用途，如精密地测量长度，测定介质的折射率和光的波长，检查光学元件的质量等等. 1892 年迈克尔孙用镉(Cd)红光作光源，用他自己干涉仪测量了巴黎计量局的标准米原尺的长度，它相当于 1553163.5 个镉红光波长，他的工作为以后用波长作为长度的基准奠定了基础.

*19.6 时间相干性和空间相干性

19.6.1 光的时间相干性

在用迈克尔孙干涉仪做实验时，当 M_1和 $M_2{}'$之间的距离超过一定的限度后，就观察不到干涉现象了，这是为什么呢？我们知道，原子发光的时间极短，每一个原子发射的是一个有限长度的波列. 设在迈克尔孙干涉仪中，光源先后发出两个波列 a 和 b，每个波列被分光板 G_1分为两个波列，分别为 a_1，a_2和 b_1，b_2. 当两光路 1，2 的光程差不太大时，如图 19－20a 所示，则同一波列分离出来的两个波列 a_1和 a_2以及 b_1和 b_2在 E 处可以相遇，这是能够产生干涉. 如果两光路的光程差相差太大，如图 19－20b 所示，则 a_1和 a_2以及 b_1和 b_2在 E 处不能相遇，相遇的是 b_1和 a_2，由于它们是不同原子发光，所以是非相干的，这时就观察不到干涉现象. 这就是说要产生干涉，则两束光的光程差不能超过波列的长度 L_c，我们把这一极限长度 L_c称为该光

源所发光的相干长度，显然，两光束能够产生干涉的最大光程差 $\delta_{\max}$ 应当等于波列的长度 L_c，即 $\delta_{\max}=L_c$，因此通常我们也把相干长度用 $\delta_{\max}$ 表示. 与相干长度对应的还有相干时间 τ，即光波通过相干长度这段光程所需要的时间，即有

$$\tau=\frac{L_c}{c} \tag{19-37}$$

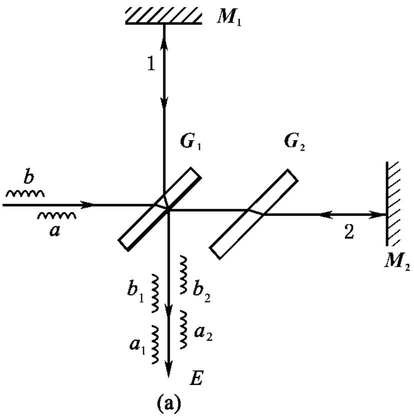


图 19－20　光波的相干长度

相干时间意味着两相干波列先后到达某处能产生干涉，其时间差的上限，我们将这类相干性称为时间相干性. 光源的时间相干性可以用相干长度或相干时间来描述，相干长度或相干时间越大，则光源的时间相干性越好，用该光源产生的干涉图样就越清晰. 普通的单色光源，如低压汞灯，钠光灯等，其相干长度一般为几厘米到几十厘米，而激光光源的相干长度可以达到几百米甚至几千米.

时间相干性与光源的单色性有着紧密地联系. 通常实际单色光源所发出的并不是只有单一波长的理想单色光，而是有一定的波长范围和频率范围，这种光称为准单色光. 如图19－21是一个普通光源所发出的准单色光的谱线强度随波长变化的曲线，通常把光强下降到 $I_0/2$ 所对应的波长范围称为该谱线的宽度，用 $\Delta\lambda$ 表示，在谱线宽度内最小波长为 $(\lambda-\Delta\lambda/2)$，最大波长为 $(\lambda+\Delta\lambda/2)$. 显然谱线宽度越小，谱线越尖锐，光源的单色行就越好. 普通单色光源的谱线宽度的数量级为 $10^{-9}\sim10^{-12}\,\mathrm{m}$，而激光的谱线宽度大约只有 $10^{-18}\,\mathrm{m}$.

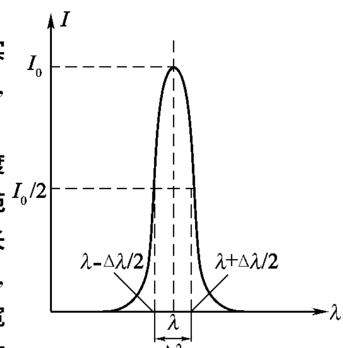


图 19－21　谱线及其宽度

用准单色光入射干涉装置之后，每一种波长成分都会产生自己的一套干涉条纹，除了零级条纹（$x=0$ 处），其他同级次的明暗条纹在位置上略有差异，图 19－22 显示的是波长在 $(\lambda-\Delta\lambda/2)$ 到 $(\lambda+\Delta\lambda/2)$ 之间的所有光波干涉光强的分布曲线，我们实际所看到的干涉条纹应该是各波长的干涉条纹的非相干叠加. 由图可见，叠加之后在 $x=0$ 附近的明暗条纹的光

强差别较大，条纹宽度较小，条纹比较清晰，随着 x 的增加，明暗条纹的光强差别逐渐减小而条纹宽度逐渐增加. 也就是说，随着光程差的增大，条纹变得越来越不清晰，当光程差达到一定限度时，明暗条纹消失，这就是为什么难以看到清晰的高级次干涉条纹的原因. 对于谱线宽度为 $\Delta\lambda$ 的准单色光，干涉条纹消失的位置应当是波长为 $(\lambda+\Delta\lambda/2)$ 的第 k 级明纹与波长为 $(\lambda-\Delta\lambda/2)$ 的第 $k+1$ 级明纹相重叠，如图 19－22 中的 A 点所示，

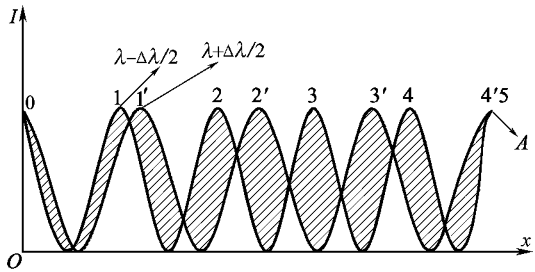


图 19－22　各种波长的光干涉条纹的叠加

由于两种波长成分在 x 处具有相同的光程差，此即为能观察到干涉条纹所满足的最大光程差 $\delta_{\max}$，显然有

$$\delta_{\max}=k(\lambda+\frac{\Delta\lambda}{2})=(k+1)(\lambda-\frac{\Delta\lambda}{2})$$

由上式解得

$$k\Delta\lambda=\lambda-\frac{\Delta\lambda}{2}$$

由于 $\Delta\lambda\ll\lambda$，故上式中可以忽略 $\Delta\lambda$，于是得

$$k=\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{19-38}$$

代入得最大光程差

$$\delta_{\max}=k(\lambda+\frac{\Delta\lambda}{2})=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}(\lambda+\frac{\Delta\lambda}{2})=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}+\frac{\lambda}{2}\approx\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{19-39}$$

上式说明，光的单色性越好，即 $\Delta\lambda$ 越小，则最大光程差越大，能够观察到干涉条纹的级次就越大，条纹越清晰，这就是光源的单色性对干涉条纹的影响.

对准单色光进行傅里叶积分变换，在频域中我们可以证明其谱线的频率宽度 $\Delta\nu$ 与波列的持续时间 τ 之间关系为 $\Delta\nu=1/\tau$，式中 τ 即为该光波的相干时间，由式(19－37)，可知相干长度为

$$L_c=c\tau=\frac{c}{\Delta\nu}$$

再由波长和频率的关系 $\nu=c/\lambda$，两边求增量的大小，有 $\Delta\nu=c\Delta\lambda/\lambda^2$，代入上式，即得

$$L_c=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{19-40}$$

上式说明，相干长度与准单色光的谱线宽度成反比，谱线宽度越小，光源的单色性越好，则所

发出的波列就越长，光源的时间相干性就越好.

将式(19－40)与式(19－39)比较可知，相干长度应等于能产生干涉条纹的最大光程差. 也就是说波列的长度 L_c 至少要等于最大光程差 $\delta_{\max}$，才能观察到 $\lambda/\Delta\lambda$ 级次以下的干涉条纹.

19.6.2　光的空间相干性

实际的光源都不是理想的线光源，而是有一定的宽度，这对条纹的清晰度有很大的影响. 例如在杨氏双缝干涉中，如图 19－23 所示，将缝光源 S 的宽度 a 逐渐增大，我们会发现屏上的干涉条纹会逐渐变模糊，直到最后完全消失. 为什么会有这种现象呢？下面我们就以双缝干涉为例，对这一问题做一简要地分析.

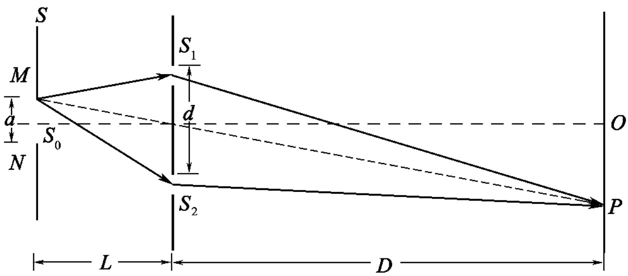


图 19－23　双缝干涉的空间相干性

在图 19－23 中，将缝光源 S 可以看作是许多非相干的线光源所组成，这些线光源彼此平行，沿缝的宽度方向依次排列，每一个线光源所发出的光通过双缝都能形成一组干涉条纹. 由于各线光源的位置不同，所以在屏上形成的同级次条纹的位置也不相同，而在屏上实际所看到的是各线光源产生干涉条纹的非相干叠加，其结果使得明、暗纹的对比度变小，条纹模糊不清. 例如，从光源中心 S_0 处发出的光线，经过双缝在屏中央 O 产生中央明纹，而在 S_0 上面的线光源所产生的中央明纹应该在 O 点的下方，如果最上面的线光源 M 所产生的中央明纹刚好在 S_0 的第一级暗纹 P 处，并且不同的线光源所产生的干涉条纹的间隔相同，这就意味着 M 所产生的一组干涉条纹整体相对于 S_0 的干涉条纹向下移动了半个明纹间隔，此时 M 的明纹占据了 S_0 的暗纹所在的位置. 同理，下面的线光源 N 所产生的干涉条纹也将整体地向上移动半个明纹距离，其明纹也刚好占据了 S_0 的暗纹所在位置，因此屏上的光强经过叠加之后将趋于均匀分布，也就不再出现干涉现象，我们把此时缝光源的宽度可以看作是能够产生干涉条纹的光源的极限宽度，显然有

$$\frac{OP}{D}=\frac{a/2}{L}$$

OP 为双缝干涉第一级暗纹到 O 点的距离，由式(19－21)有 $OP=\frac{D\lambda}{2d}$，代入上式得

$$a=\frac{L\lambda}{d} \tag{19－41}$$

上式表明，要观察到干涉条纹，光源的宽度必须小于 $L\lambda/d$，将式(19－41)所限定的宽度称为光源的极限宽度，光源宽度必须小于极限宽度才能够产生干涉现象，我们将这一性质称为光源的空间相干性. 我们可以大致估计此极限宽度的数量级为 $a\approx\frac{10^0\times10^{-7}}{10^{-3}}=10^{-4}$ m，在杨氏干涉中要求 S 为一很窄的狭缝光源，就是为了提高干涉条纹的清晰度.

思考题

19－1 在白光的杨氏双缝干涉实验中，如果在一条缝后放一红色滤光片，在另一缝后放一蓝色滤光片，此时能观察到干涉条纹吗？为什么？

19－2 在水波干涉图样中，平静水面上形成的曲线是双曲线，为什么？

19－3 在杨氏双缝干涉实验中，如果做如下调整，问屏幕上的干涉条纹如何变化？

(1) 增大两缝距离.

(2) 缝光源平行于双缝移动.

(3) 缝光源向着双缝移动.

(4) 观察屏向着双缝移动.

(5) 整个装置全部置于水中.

(6) 增大双缝的宽度.

(7) 使用白光入射.

19－4 在吹肥皂泡的过程当中，刚刚开始时，肥皂泡看不见什么颜色，随着肥皂泡逐渐增大，将会看到有彩色图样出现，并且这些图样的色彩随着肥皂泡的增大而改变，当彩色图样消失呈现黑色时，肥皂泡即刻破裂了，为什么？试解释这一现象.

19－5 隐形飞机很难被雷达发现，这是因为在隐形飞机的机身上涂有一层吸波材料，从而使雷达波反射很弱，试从波的干涉角度说明吸波材料是如何减小反射波的.

19－6 在劈尖干涉实验中，当把上玻璃板向上平移时，干涉条纹将如何变化？又如果转动上玻璃板以增大劈尖角，则干涉条纹又将如何变化？

19－7 在空气劈尖中，充入折射率为 n 的某种液体，则干涉条纹将如何变化？

19－8 为什么牛顿环干涉中相邻条纹的间隔不相等？如果要产生等间隔牛顿环干涉条纹，则应当使用什么形状的透镜？

19－9 当将牛顿环装置中的平凸透镜向上移动时，干涉图样有何变化？

19－10 在迈克尔孙干涉仪实验中，

(1) 补偿板 G_2 起什么作用？如果不加补偿板，会对观测产生什么样的影响？

(2) 若两反射镜 M_1 和 M_2 不严格垂直，当平行光照射时，将观察到什么样的干涉图样？两反射镜严格垂直时，干涉图样又如何？

(3) 如果 M_1 和 M_2' 之间的距离超过一定范围，则观察不到干涉现象，为什么？

19－11　窗户玻璃在日光照射下为什么看不到干涉现象？

习题 19

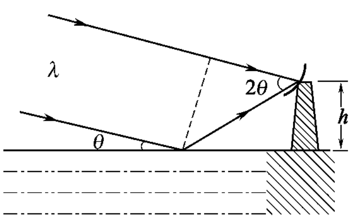
19－1　杨氏双缝干涉实验中，两缝中心距离为 0.60 mm，紧靠双缝的凸透镜焦距为 2.5 m，焦平面处有一观察屏.（1）用单色光垂直照射双缝，测得屏上条纹间距为 2.3 mm，求入射光波长.（2）当用波长为 480 nm 和 600 nm 的两种光照射时，它们的第三级明纹相距多远？

19－2　在双缝干涉实验中，波长 $\lambda=550$ nm 的单色平行光垂直入射到间距 $d=2\times10^{-4}$ m 的双缝上，屏到双缝的距离 $D=2$ m. 求（1）中央明纹两侧的两条第 10 级明纹中心的间距.（2）用一厚度为 $e=6.6\times10^{-6}$ m、折射率为 $n=1.58$ 的玻璃片覆盖一缝后，零级明纹将移到原来的第几级明纹处？

19－3　在杨氏双缝干涉实验中，若用折射率为 1.5 和 1.7 的两个厚度相同透明薄膜分别覆盖双缝，则观察到第 7 级明纹移动到了中央明纹处，已知入射光波长为 500 nm，求薄膜的厚度.

19－4　白色平行光垂直入射到间距为 $a=0.25$ mm 的双缝上，距离 50 cm 处放置屏幕，分别求第一级和第五级明纹彩色带的宽度.（设白光的波长范围是 400 nm 到 760 nm，这里说的“彩色带宽度”指两个极端波长的同级明纹中心之间的距离.）

19－5　一射电望远镜的天线架设湖岸上，距离湖面高度为 h，对岸地平线上方有一恒星正在升起，恒星所发出光波为 λ. 试求当天线测得第一次干涉极大时，恒星所在的最小角位置.（提示：做洛埃镜干涉分析）



题 19－5 图

19－6　用白光垂直照射置于空气中厚度为 0.50 μm 的玻璃片，玻璃片的折射率为 1.50，在可见光范围内（400 nm～760 nm）哪些波长的反射光有最大限度的增强？

19－7　白光垂直照射到空气中厚度为 380 nm 的肥皂膜上，肥皂膜的折射率为 1.33，试求该膜正面呈什么颜色？反面呈什么颜色？

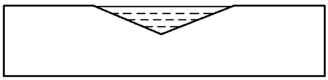
19－8　平板玻璃上有一厚度均匀的肥皂膜，在阳光垂直照射下，反射光在波长 700 nm 处有一干涉极大，在 600 nm 处有一干涉极小，而在这两个极大和极小之间没有出现其他的极大或者是极小. 已知肥皂膜折射率为 1.33，玻璃折射率为 1.5. 求肥皂膜的厚度.

19－9　在照相机镜头表面镀一层折射率为 1.38 的增透膜，使阳光中波长为 550 nm 的绿光透射增强，已知镜头玻璃折射率为 1.52. 求增透膜的最小厚度是多少？

19－10　在很薄劈形玻璃板上，垂直入射波长为 589.3 nm 的钠光，测得相邻暗纹中心之间的距离为 5.0 mm，玻璃折射率为 1.52. 求此劈形玻璃板的劈尖角.

19－11　折射率为 1.60 的两块标准平面玻璃板之间形成一个劈尖（劈尖角 θ 很小），用波长 600 nm 的单色光垂直入射，产生等厚干涉条纹. 假如在劈尖内充满折射率为 1.40 的液体，此时相邻明纹间距比劈尖内是空气时的明纹间距缩小 0.5 mm. 求劈尖角 θ 为多少弧度？

19－12　如图所示，在折射率为 1.50 的平晶玻璃上刻有截面为等腰三角形的浅槽，其中装有折射率为 1.33 的肥皂液，当用波长为 600 nm 的黄光垂直照射时，从反射光中观察到液面上共有 15 条暗纹. (1)试问液面上所见条纹是什么形状？(2)试求液体最深处的厚度？

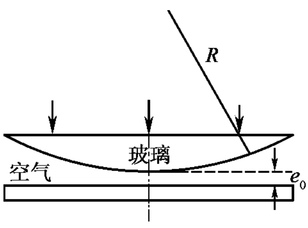


题 19－12 图

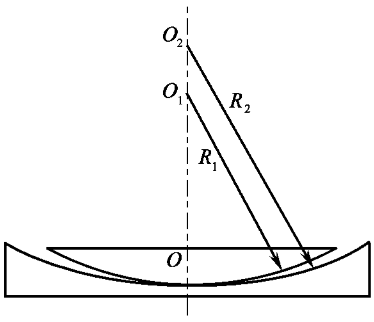
19－13　检查一玻璃平晶两表面的平行度时，用波长 632.8 nm 的氦氖激光垂直照射，观察到 20 条干涉明纹，且两端都是明纹中心，玻璃的折射率为 1.50，求平晶两端的厚度差.

19－14　当牛顿环装置中透镜和平板玻璃之间空间充满某种液体时，第 10 个亮环直径由原来的 1.40×10^{-2} m 变为 1.27×10^{-2} m，试求该液体的折射率.

19－15　如图所示，牛顿环装置的平凸透镜与平板玻璃有一高度为 e_0 的间隙，现用波长为 λ 的单色光垂直照射，已知平凸透镜的曲率半径为 R，试求反射光形成的牛顿环各暗环半径为多少？



题 19－15 图

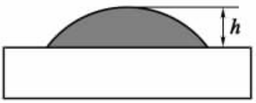


题 19－16 图

19－16　利用牛顿环的干涉条纹可以测定平凹透镜的凹球面的曲率半径. 方法是将已知半径 R_1 的平凸透镜的凸球面放置在待测的凹球面上，在两球面间形成空气薄层，如图所示. 用波长为 λ 的平行单色光垂直照射，观察反射光形成的干涉条纹，设在中心 O 点两透镜刚好接触，测得第 k 个暗环的半径为 r_k，试求凹球面半径 R_2？

19－17　如图所示，在玻璃板上放一油滴，逐渐展开成为油膜，在波长为 600 nm 的单色光垂直照射下，从反射光中可以观察到 5 条干涉明条纹. 已知油的折射率为 1.20，玻

璃的折射率为 1.50. 试求(1)油膜的中心厚度 h 是多少?(2)每条明纹中心处油膜的厚度是多少?(3)当油膜逐渐展开时,条纹将如何变化?



题 19－17 图

19－18　将迈克尔孙干涉仪中的反射镜 M_1 移动 0.322 mm 时,观察到有 1024 个条纹从视场中移过,求所用单色光的波长.

第 20 章　光的衍射

本章将讨论光的波动性的另一特征——衍射. 首先简要介绍光的衍射现象以及解决衍射问题的理论基础——惠更斯-菲涅耳原理,然后分别讨论单缝和光栅的夫琅禾费衍射,最后分别讨论圆孔夫琅禾费衍射、光学仪器的分辨率以及 X 射线的衍射.

20.1　光的衍射现象　惠更斯-菲涅耳原理

20.1.1　光的衍射现象及其分类

光经过障碍物时,能绕过障碍物传播的现象,称为光的衍射. 通常当障碍物的尺寸与波长接近时,才发生明显的衍射现象,而光波的波长要比障碍物的尺寸小得多,因此人们在日常生活中所见的光波一般是沿直线传播,看不到衍射现象. 在实验室观察光的衍射现象的装置如图 20－1 所示,让一束平行单色光通过狭缝 A,在缝后的屏上形成光斑. 当缝宽比波长大得多时,屏上光斑的大小形状和狭缝完全一致,表明光是沿直线传播,遵守几何光学的规律. 若缩小缝宽直到可以与波长相比较,则屏幕上的光斑反而变大,并且出现明暗相间的条纹,说明光能绕过狭缝的边缘向其他方向传播,这就是光的衍射现象.

观察光的衍射现象的实验装置主要包括三个部分:光源、衍射屏(即障碍物)和观察屏. 按照这三者之间的位置的不同,可以把光的衍射分为两大类. 一类是光源和观察屏(或两者之一)到衍射屏的距离为有限远,这类衍射称为菲涅耳衍射,如图 20－2a 所示;另一类是光源和观察屏到衍射屏的距离都为无穷远,如图 20－2b 所示,这相当于入射光和衍射光都为平行光的情形,这类衍射称为夫琅禾费衍射,在

实验室可以通过放置两个聚焦透镜来实现这类衍射，如图20－2c所示.

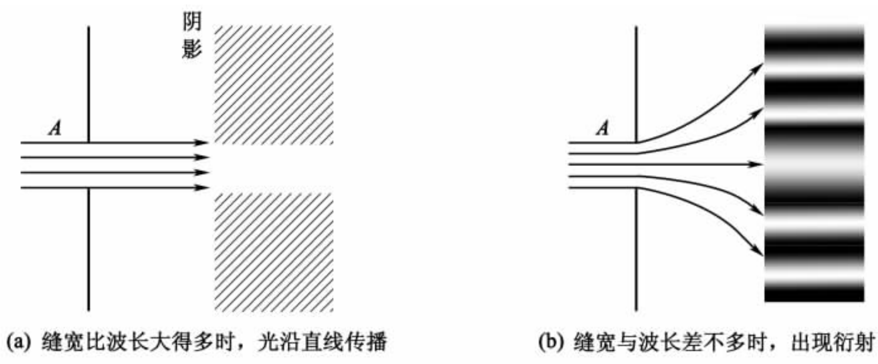


图 20－1　光的衍射

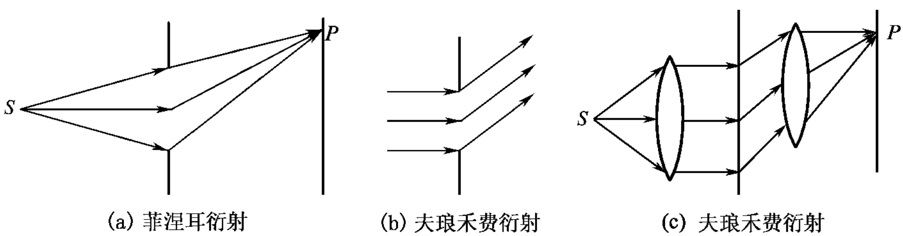


图 20－2　菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射

20.1.2　惠更斯-菲涅耳原理

在机械波部分讨论了惠更斯原理：光在传播过程中任一波阵面上的各点都可以看作是子波源，这些子波源发出子波，在下一时刻所有子波的轨迹就是这时刻该波新的波阵面. 运用惠更斯原理通过做图的方法可以确定下一时刻波阵面的形状，波的传播方向，但是惠更斯原理不能确定下一时刻波阵面上各点的振幅大小，因此也就无法解释衍射后为什么会形成明暗条纹分布. 菲涅耳在研究了光的干涉问题后，用光的干涉理论对惠更斯原理做了补充. 他指出：波阵面上的各子波源所发出的子波之间能够产生干涉叠加，而空间任一点 P 的光振动是该波阵面上所有子波源发出的子波在该点的相干叠加，这就是惠更斯-菲涅耳原理.

为了定量地计算 P 点地光强，菲涅耳还进一步做了如下假定（如图 20－3 所示）.

（1）由于波阵面为等相位面，因此各子波的初相都相同，为方便起见，不妨

设初相等于零.

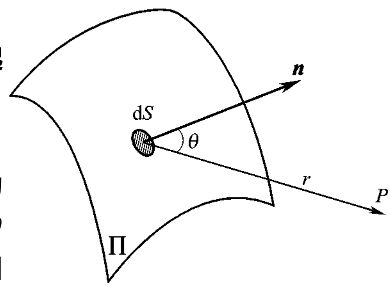


图 20－3　惠更斯–菲涅耳原理

(2) 子波都是球面波，因此子波在 P 点引起的光振动振幅与子波源到 P 点的距离 r 成反比，与子波源的面积 $\mathrm{d}S$ 成正比.

(3) $\mathrm{d}S$ 发出的子波在 P 点产生的光振动振幅还与矢径 $\boldsymbol{r}$ 和面元的法向 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角 θ 有关，即与函数 $f(\theta)$ 成正比，$f(\theta)$ 称为倾斜因子，它是关于 θ 的单调递减函数，且假定当 $\theta \geqslant \pi/2$ 时，$f(\theta)=0$，这意味着所有子波都不能向后传播.

根据以上假设，我们可以写出波阵面 Π 上的任意子波源 $\mathrm{d}S$ 在空间 P 点产生的光振动为

$$\mathrm{d}E = Cf(\theta)\frac{\mathrm{d}S}{r}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right) \tag{20-1}$$

式中 C 为比例系数. P 点的合振动应当等于 Π 上所有子波源发出子波在 P 点引起光振动的相干叠加，故有

$$E(P) = \iint_{\Pi} Cf(\theta)\ \frac{1}{r}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)\mathrm{d}S \tag{20-2}$$

这就是惠更斯–菲涅耳原理的数学表达式. 应用式(20－2)原则上可以定量地计算光通过各种衍射物时所产生的衍射现象，但是对于一般的衍射问题特别是菲涅耳衍射，积分计算十分复杂，一般得不到解析解. 而对于夫琅禾费衍射，当衍射物为简单几何形状，具有某种对称性时，例如狭缝、圆孔等等，我们可以用半波带方法或振幅矢量叠加法来处理，这样就避免了复杂的数学计算，同时也使得物理图像更加清晰直观.

20.2　单缝夫琅禾费衍射

20.2.1　单缝夫琅禾费衍射的实验装置

如图 20－4 所示，线光源 S 位于透镜 L_1 的主焦平面上，因此从 L_1 出来的是

一束平行光，这束平行光垂直地照射在带有单狭缝的衍射屏 K 上，一部分光穿过单缝，再经过透镜 L_2 会聚，在 L_2 的焦平面上就可以观察到明暗相间的平行直线条纹.

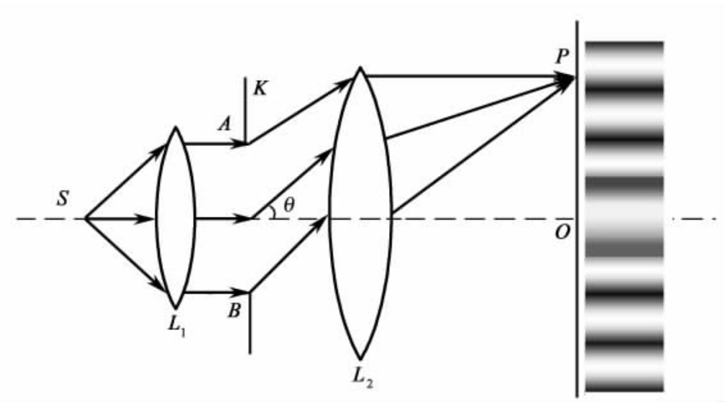


图 20－4　单缝夫琅禾费衍射实验装置

由于是平行光垂直入射，因此单缝 AB 处于入射波的波阵面上，该波阵面上各子波源向各个方向发射子波我们称为衍射光，衍射光与衍射屏法线的夹角 θ 称为衍射角. 衍射角都为 θ 的各子波彼此平行，经过透镜 L_2 后将在观察屏上 P 点会聚，产生相干叠加，P 点的光强就取决于该组平行光中各光线到达 P 点的光程差. 下面我们用菲涅耳半波带方法来分析屏上的明纹和暗纹位置.

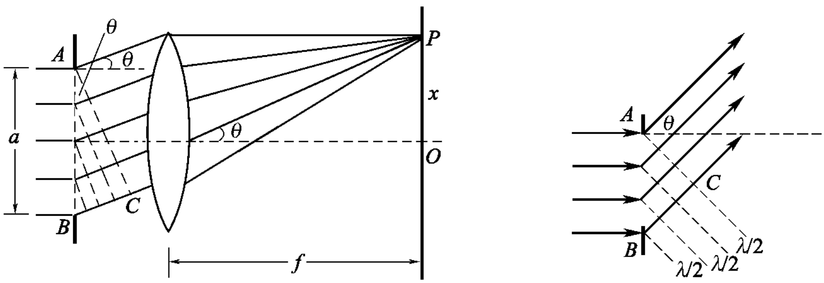
20.2.2　菲涅耳半波带方法

如图 20－5a 所示，设单缝的宽度为 a，一束平行光向单缝 AB 垂直入射，对于衍射角为 θ 的一组衍射光，各条光线到达屏上 P 点的光程是不相同的. 过 A 点做该组光线的垂线，与最下边缘的一条光线相交于 C 点，显然上下边缘两条光线之间的光程差为 $BC=a\sin\theta$，这也是该组衍射光各光线之间的最大光程差，记为

$$\delta=BC=a\sin\theta \tag{20-3}$$

菲涅耳提出，可以将最大光程差 BC 分为半波长 $\lambda/2$ 的若干等份，从 C 点开始，过每一个等份点做与衍射光垂直的平面，则这一系列彼此平行等间隔的平面就将单缝所在处的 AB 波面分割为若干宽度相等的窄带，称之为半波带. 相邻半波带对应位置（例如各半波带的最上端）上的两个子波源所发出的衍射光，到达 AC 波面的光程差均为半个波长 $\lambda/2$，而在 AC 之后各衍射光之间没有光程差，

另外由于各半波带面积相等，所以各半波带所发出的衍射光强也相同，因此两个相邻的半波带在屏上 P 点所引起的光振动干涉抵消。



(a) 偶数个半波带　　(b) 奇数个半波带

图 20－5　菲涅耳半波带法

至于屏上 P 点的合光强，则取决 AB 波面上半波带的数目。我们分以下几种情况：

(1) 对于某一衍射角 θ，若最大光称差 BC 恰好被分为半波长的 $(2k+1)$ 倍，则同时 AB 波面也被分为 $(2k+1)$ 个半波带（奇数个半波带），如图 20－5b 所示，前 $2k$ 个半波带两两干涉相消，最后还剩一个半波带未被抵消，这个半波带所发出的衍射光将直接到达观察屏，形成明纹。因此屏上出现明纹的条件为

$$a\sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}\qquad k=1,2,3,\cdots \tag{20-4}$$

(2) 对于某个衍射角 θ，若最大光称差 BC 恰好被分为半波长的 $2k$ 倍，则同时 AB 波面也被分为 $2k$ 个半波带（偶数个半波带），如图 20－5a 所示，则所有半波带两两干涉抵消，P 点为暗纹。因此屏上出现暗纹的条件为

$$a\sin\theta=\pm 2k\frac{\lambda}{2}\qquad k=1,2,3,\cdots \tag{20-5}$$

(3) 当 $\theta=0$ 时，所有衍射角为零的衍射光到达屏中央的 O 点，各光线之间无光程差，相互干涉加强，因此该处为明纹，称之为中央明纹，O 点即为中央明纹的中心。

(4) 对于某个衍射角 θ，若 AB 波面不能被分为整数等份，则屏上 P 点的光强介于明、暗之间。

以上即为菲涅耳半波带法处理单缝夫琅禾费衍射的一般思路。在式(20－4)中第 k 级明纹对应半波带的个数为 $(2k+1)$，显然级次越高，则对应半波带个数就越多，每一个半波带的面积就越小，到达观察屏的光强就越小，因此单缝衍射条纹的亮度是逐级递减的，中央明纹最亮，随着条纹级次的增大，条纹中心的光强迅速减弱。

20.2.3　单缝夫琅禾费衍射的条纹分布

1. 条纹位置

下面我们来计算屏上明暗纹的坐标. P 点的坐标为

$$x=f\tan\theta$$

式中 f 为透镜的焦距. 通常 θ 很小，有近似表达式 $\tan\theta\approx\sin\theta\approx\theta$，由式(20－4)和式(20－5)可得明纹中心坐标为

$$x=\pm(2k+1)\frac{f\lambda}{2a}\qquad k=1,2,3,\cdots \tag{20-6}$$

以及暗纹中心坐标

$$x=\pm 2k\frac{f\lambda}{2a}\qquad k=1,2,3,\cdots \tag{20-7}$$

2. 条纹宽度

在 $x=0$ 处，为中央明纹的中心. 我们把与中央明纹相邻的两个第一级暗纹中心之间的距离定义为中央明纹的宽度. 在式(20－7)中，取 $k=1$，则得两个第一级暗纹中心坐标

$$x_1=\pm\frac{f\lambda}{a}$$

所以中央明纹宽度为

$$l_0=\frac{2\lambda}{a}f \tag{20-8}$$

也可以用角度表示，即两个第一级暗纹对透镜中心的张角

$$2\theta_1=\frac{2\lambda}{a} \tag{20-9}$$

把 $2\theta_1$ 称为中央明纹的角宽度，θ_1 称为中央明纹的半角宽度.

其他明纹的宽度也可定义为与之相邻的两个暗纹中心的距离. 对于第 $k+1$ 级和第 k 级暗纹

$$l=x_{k+1}-x_k=\frac{\lambda}{a}f \tag{20-10}$$

上式说明，其他各级明纹为等间隔分布，而中央明纹的宽度是其他明纹宽度的两倍.

3. 白光入射时的衍射条纹

当缝宽 a 一定时，对于同级次条纹，波长越大，则衍射角越大. 因此，当用白

光入射时，除了在中央明纹区形成白色条纹之外，在两侧将出现一系列由紫到红的彩色条纹，称之为衍射光谱.

4. 缝宽 a 对衍射条纹的影响

由式(20－4)和式(20－5)，对于波长一定的单色光，当缝宽 a 变小时，相应各级次条纹的衍射角增大，衍射现象越显著；当 a 增大时，各级条纹的衍射角变小，都向中央明纹聚集，此时各级条纹的间隔变小而逐渐不能分辨，这时衍射现象就不明显，当 $a \gg \lambda$ 时，各级条纹在中央明纹附近重叠，形成一个单一的亮带，即单缝在透镜中的像，此时可认为光沿直线传播，遵从几何光学的规律. 由此可见，几何光学是波动光学在 $a \gg \lambda$ 时的极限情形.

菲涅耳半波带法只能近似说明衍射图样的分布情况，要定量地给出衍射图样的光强分布，需要对 AB 波面各子波源上所发出的子波进行干涉叠加. 应用振幅矢量叠加法，求得的单缝夫琅禾费衍射的光强为

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \tag{20-11}$$

式中 I_0 为中央明纹中心处的光强，$u = \pi a \sin\theta / \lambda$.

根据式(20－11)可以得到单缝夫琅禾费衍射的相对光强分布曲线，如图20－6所示. 与式(20－4)和式(20－5)比较，可以看出中央明纹和暗纹的位置完全一致，其它明纹的位置朝中央明纹方向稍有小的偏离.

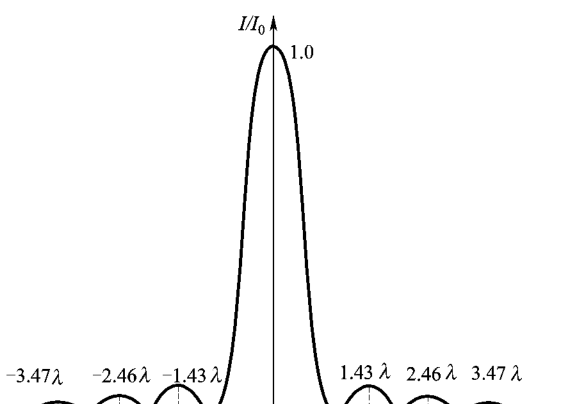


图 20－6 单缝夫琅禾费衍射的相对光强分布

例 20－1 一单色平行光垂直入射一单缝，其衍射第三级明纹恰与波长为 600 nm 的单

色光垂直入射该单缝时衍射第二级明纹重合，试求该单色光的波长.

解　由明纹条件 20－4 式，对波长分别为 λ_1 和 λ_2 的单色光，有

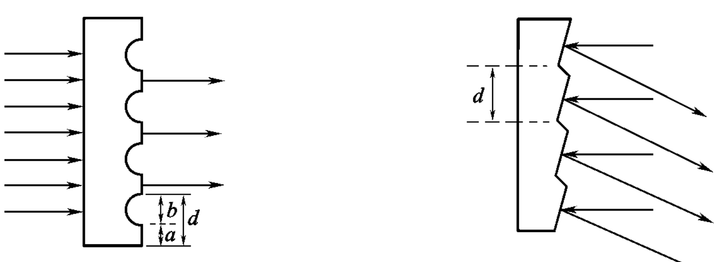
$$a\sin\theta=\pm(2k_1+1)\frac{\lambda_1}{2} \qquad a\sin\theta=\pm(2k_2+1)\frac{\lambda_2}{2}$$

当 k_1 和 k_2 两明条纹重合时，有 $(2k_1+1)\lambda_1=(2k_2+1)\lambda_2$，$\lambda_1=600\ \text{nm}$，$k_1=2$，$k_2=3$，代入上式，即得 $\lambda_2=428.6\ \text{nm}$.

20.3　光栅衍射

20.3.1　衍射光栅

由大量等宽度等间隔的平行狭缝所组成的光学元件称为光栅. 光栅的形式有多种，在一块平玻璃板上刻上一系列的等宽度等间隔的平行凹槽，如图 20－7a 所示，凹槽处因为漫反射而不透光，未刻处相当于透光的缝，这样就构成了一个透射式光栅. 光栅中每条凹槽的宽度为 b，透光缝的宽度为 a，把这两部分宽度之和 $a+b$ 称为该光栅的光栅常数，记为 d，即 $d=a+b$. 在很平整的不透光材料（例如金属）表面刻出一系列等间隔的平行刻槽，则入射光将在这些刻槽处反射，这种光栅称为反射式光栅，如图 20－7b 所示.



(a) 透射式光栅　　(b) 反射式光栅

图 20－7　衍射光栅

通常光栅上每厘米内刻有几千条甚至上万条刻痕，若每厘米刻有 5000 条刻痕，即 $N_0=5000\ \text{cm}^{-1}$ 则该光栅的光栅常数为

$$d=\frac{1}{N_0}=\frac{10^{-2}}{5000}=2\times10^{-6}\ \text{m}$$

可见衍射光栅是一种非常精密的光学元件.原刻光栅是非常昂贵的,我们通常使用的大都是原刻光栅的复制品.

20.3.2 光栅衍射条纹

1. 光栅衍射

如图 20-8 所示,单色平行光垂直照射在透射光栅上,一部分光透过光栅经透镜会聚,在位于透镜焦平面的观察屏上就可以看到一系列相互平行的,又细又亮的光栅衍射条纹,这与单缝衍射图样有很大的区别(参照图 20-4).为什么光栅衍射和单缝衍射图样有这么大的差异呢?这是因为在光栅衍射中,每一条狭缝都产生衍射,如果有 N 条狭缝,则一共有 N 个单缝衍射图样,由于缝宽相同,因此它们的形状相同,又对于傍轴衍射光来说,这 N 个单缝衍射图样的位置也完全一样.如果这 N 束衍射光是不相干的,那么在屏上呈现的仍然是单缝衍射图样,只是各处的光强都增加了 N 倍.但是,这 N 束衍射光是相干光,屏上 P 点光强应该是这 N 束衍射光干涉叠加的结果,由于衍射角都为 θ 的衍射光到达屏上 P 点经过的光程是不同的,在衍射极大的区域内有些地方干涉加强,有些地方干涉减弱,分裂出若干等宽度、等间隔、明暗相间的干涉条纹,形成与单缝衍射图样完全不同的光强分布.在讨论光栅衍射时,即要考虑单缝的衍射作用,也要考虑各缝间的多光束干涉作用,因此,光栅衍射图样是单缝的衍射和各缝间的光束干涉作用的综合效应.

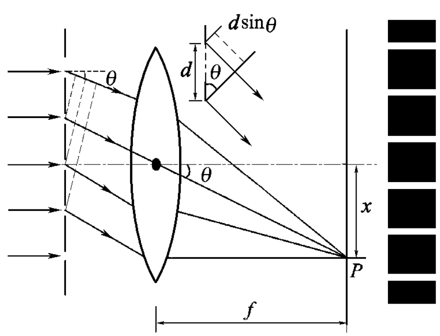


图 20-8 光栅衍射

2. 光栅方程

我们先来讨论多光束干涉的影响.如图 20-8 所示,衍射角为 θ 的一组衍射

光经过透镜会聚到屏上的 P 点，任意相邻两缝衍射光到达 P 点时的光程差为 $d\sin\theta$，若此光程差等于波长的整数倍，则各衍射光在 P 点引起的光振动是同相位的，P 点的光振动因为干涉叠加而得到加强，形成明条纹. 因此，光栅衍射的明条纹应该满足条件

$$d\sin\theta = \pm k\lambda \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{20-12}$$

上式称为光栅方程，它是研究光栅衍射的基本公式之一.

满足光栅方程的明条纹称为光栅衍射的主极大，又称为光谱线，k 称为主极大的级次. 当 $k=0$ 时称为中央明纹，$k=1,2,3,\cdots$ 相应称为第一级、第二级……主极大，式中正负号表示主极大对称地分布于中央明纹两边. 另外，由 $\sin\theta \leqslant 1$，可知主极大的最高级次为小于 d/λ 的整数.

若光栅有 N 条狭缝，则衍射角满足式(20－12)的 N 束衍射光到达 P 点时是同相位的，P 点的合振动等于来自一条缝光振动的 N 倍，而 P 点的光强等于一条缝衍射光强的 N^2 倍. 可见，光栅的缝数越多，则条纹越明亮.

当入射光以 β 角斜入射时，则到达相邻两缝的入射光有光程差 $d\sin\beta$，再考虑到衍射光的光程差 $d\sin\theta$，所以此时的光栅方程为

$$d(\sin\theta + \sin\beta) = \pm k\lambda \qquad k=1,2,3,\cdots \tag{20-13}$$

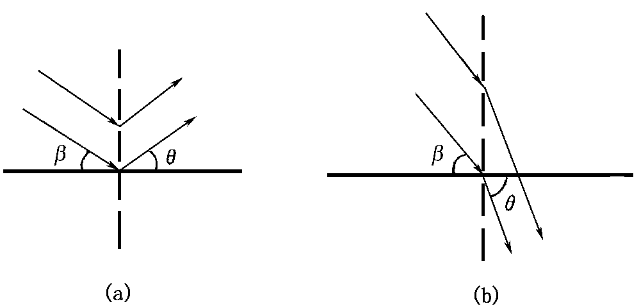


图 20－9　斜入射时光栅方程

式中的角度 θ，β 的符号做如下规定：当夹角在光栅平面法线的上方时，取正号；当夹角在法线的下方时，取负号.

3. 暗纹条件

在光栅衍射的两个相邻主极大之间，当衍射角不满足光栅方程时，这 N 束衍射光的相位就不再相同，当它们干涉叠加之后合振动为零时，就在该处形成暗条纹. 下面我们用振幅矢量叠加法来计算这些暗纹的位置.

设每个缝所发出衍射角为 θ 的衍射光振幅矢量分别为 A_1，A_2，A_3，$\cdots$，A_N，

则 P 点合振动的振幅矢量 A 应该是这 N 个振幅矢量的和. 由矢量合成的多边形法则,将各振幅矢量首尾依次相连,则合振幅矢量 A 为从 A_1 的头指向 A_N 的尾的有向线段,如图 20－10 所示. 由于各缝的宽度相同,故各振幅矢量的模相等. 又因为相邻各衍射光的光程差为 $d\sin\theta$,相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta \qquad (20-14)$$

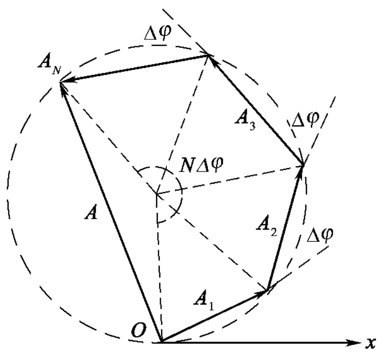


图 20－10　N 个振幅矢量的叠加

显然 $\Delta\varphi$ 就是各振幅矢量之间的夹角.

若 $A=0$,则 P 点得光强为零,形成暗纹,此时这 N 个矢量构成一个封闭的正 N 边形,由此可以得到形成暗纹的条件

$$N\Delta\varphi=\pm m2\pi \qquad (m\text{ 为整数})$$

由于 $\Delta\varphi=2k\pi$ 对应是主极大,因此上式中 m 不能取 N 以及 N 的倍数. 将上式代入式(20－12)得暗纹条件

$$d\sin\theta=\pm\frac{m}{N}\lambda \qquad (20-15)$$

式中 m 取值如下

$$m=\{1,2,\cdots,(N-1)\},\{(N+1),(N+2),\cdots,(2N-1)\},\{(2N+1),(2N+2),\cdots,(3N-1)\},\cdots$$

上式每对{}中的为相邻两个主极大之间的暗纹的级次,显然在相邻两个主极大之间都有$(N-1)$个暗条纹.

在相邻两个暗纹之间还存在光强不为零的地方,这相当于图 20－10 中 N 个振幅矢量没有形成闭合正多边形的情况,合振幅矢量不为零. 我们把这些地方称为光栅衍射的次级大. 显然,两个相邻主极大之间有$(N-2)$个次极大. 次级大的光强很小,通常用肉眼无法分辨,相邻两个主极大之间实际上形成一片暗的背景.

4. 单缝衍射的影响

我们再来讨论单缝衍射的影响. 事实上衍射角不同的单缝衍射光,其光强是不同的,光栅衍射的主极大来源于不同强度的衍射光的干涉叠加. 当衍射角较小时,单缝衍射光强较大,由此所产生的多光束干涉主极大光强就越大,随着衍射角的增大,单缝衍射光强变小,由此所产生的多光束干涉主极大光强就变小. 这就是说,多光束干涉的明条纹经过单缝衍射光强的调制,最后才形成光栅衍射的主极大. 图 20－11 为一个缝数 $N=4$,光栅常数 $d=4a$ 的光栅衍射光强分布. 图 20－11a 为每一个单缝衍射的光强分布,图 20－11b 为 4 光束干涉的光强分布,图 20－11c为经过单缝衍射光强调制后的 4 光束干涉的光强分布,也就是我们实际所见到的光栅衍射光强分布. 从图中可以看出在单缝衍射中央明纹范围内有光栅衍射的 7 个主极大,两个相邻主极大之间有 3 个暗纹和 2 个次极大.

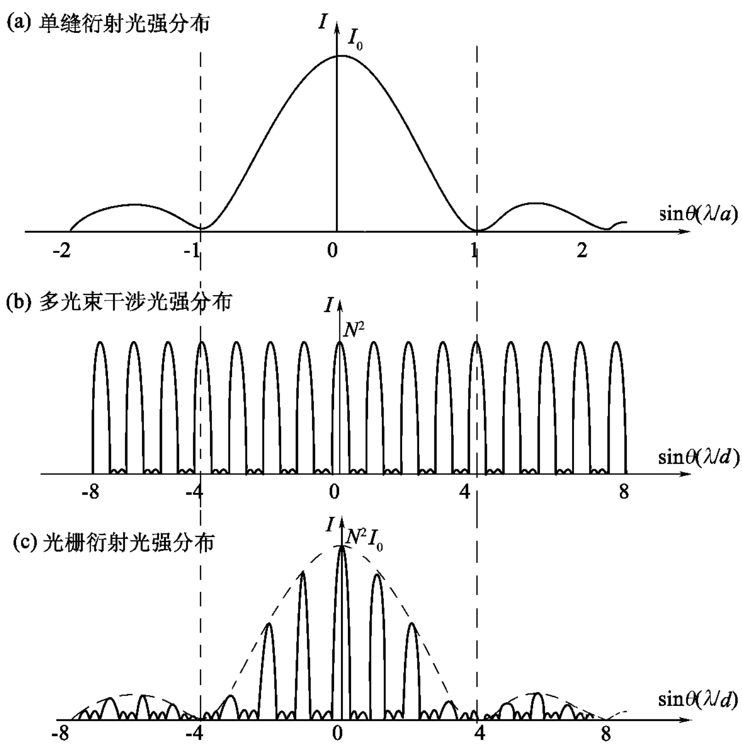


图 20－11　光栅衍射的光强分布($N=4$,$d=4a$)

值得注意的是,图 20－11c 中光栅衍射的第 4 级主极大不存在,缺失了. 这是为什么呢？下面我们来分析一下. 第 4 级主极大应当满足光栅方程 $d\sin\theta=$

4λ，由于 $d=4a$，代入得 $a\sin\theta=\lambda$，此为单缝衍射第 1 级暗纹所满足的条件，在该衍射角方向衍射光强等于零，因此这 4 条衍射光束的干涉加强所形成的主极大实际上是不存在的. 一般地，在多光束干涉极大的方向上同时满足单缝衍射极小，则该方向的主极大就会缺失，把这种现象称为缺级现象. 显然，缺级时必须同时满足

$$\begin{cases} d\sin\theta=k\lambda \\ a\sin\theta=k'\lambda \end{cases}$$

因此所缺失的主极大级次 k 和单缝衍射暗纹级次 k' 之间有关系

$$k=\frac{d}{a}k' \qquad k'=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots \tag{20-16}$$

例如当 $d=4a$ 时，$k=4k'=\pm4,\pm8,\pm12,\cdots$，级次为 4 的倍数的这些主极大缺级.

5. 光栅光谱

由光栅方程式(20－12)，对于给定光栅常数的衍射光栅，除中央明纹外，不同波长的同级衍射主极大位置是不同的，波长越短，衍射角就越小，条纹就越靠近中央. 若入射光是具有连续谱的复合光，则同一级条纹将形成按波长排列的彩色光带，紫光靠近中央，红光在最远端，称之为光栅光谱. 在较高的级次处，相邻的衍射光谱线会发生重叠，级次越高，重叠越严重. 各种元素和它们的化合物都有自己特定的光谱线，测定光谱中各谱线的波长和相对强度，就可以确定该物质的成分及其含量，这种分析的方法叫做光谱分析，它在科学研究和工程技术当中都有广泛的应用.

例 20－2 $\lambda=0.5\ \mu m$ 的单色光垂直入射到光栅上，测得第三级主极大的衍射角为 $30°$，且第一个缺级出现在第 4 级主极大. 求：(1)光栅常数 d；(2)透光缝宽度 a；(3)对上述 a，d 屏幕上可能出现的谱线数目是多少？

解 (1) 由光栅方程 $d\sin\theta=k\lambda$，式中 $\theta=30°$，$k=3$，$\lambda=0.5\ \mu m$，代入得光栅常数 $d=3\ \mu m$

(2) 根据式(20－16)，依题意，有

$$\frac{d}{a}=\frac{k}{k'}=4$$

所以缝宽 $a=d/4=0.75\ \mu m$

(3) $k=d\sin\theta/\lambda\leqslant d/\lambda$，即 $k\leqslant6$

其中 ±4 级缺级，±6 级出现在衍射角为 $90°$ 处，实际上是看不到的. 因此在屏幕上出现的谱线为 $0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm5$ 共 9 条.

例 20－3 白光垂直入射到每厘米有 4000 条缝的光栅上，问用此光栅能产生多少级完

整光谱？能产生多少级不重叠光谱？

解　光栅常数 $d=10^{-2}/4000=2.5\times10^{-6}$ m

(1) 完整光谱是指在同一级中所有可见光波长的主极大都出现，由于红光谱线离中心最远，在该级中出现红光则其他波长谱线也一定会出现，所以我们取红光波长进行计算.

由光栅方程

$$d\sin\theta=k\lambda\leqslant d$$

式中

$$\lambda=7600\ \text{Å}=7.6\times10^{-7}\ \text{m}$$

则 $k\leqslant d/\lambda=2.5\times10^{-6}/7.6\times10^{-6}=3.3$，取 $k=3$，则可以看到 3 级完整光谱.

(2) 不重叠光谱要求某一级次红光的衍射角不大于高一级次紫光的衍射角，即满足

$$k\lambda_1\leqslant(k+1)\lambda_2$$

式中 $\lambda_1=7600$ Å，$\lambda_2=4000$ Å，解得 $k\leqslant\lambda_2/(\lambda_1-\lambda_2)=1.1$，取 $k=1$，即只能看到 1 级不重叠光谱.

20.4　圆孔衍射　光学仪器的分辨率

20.4.1　圆孔夫琅禾费衍射

在单缝夫琅禾费衍射实验装置中，用一个直径不到 1 mm 的小圆孔代替单缝，在观察屏上也可见到衍射条纹. 如图 20－12，单色平行光垂直照射直径为 D 的小圆孔 K，在透镜 L 的焦平面处的观察屏上可以观察到一组明暗相间的圆形条纹，即圆孔夫琅禾费衍射图样. 图样中央为一个明亮的圆斑，这就是圆孔衍射的中央明纹，称为爱里斑，爱里斑的外围是一组同心的暗环和明环，由内向外明环的光强逐渐减弱.

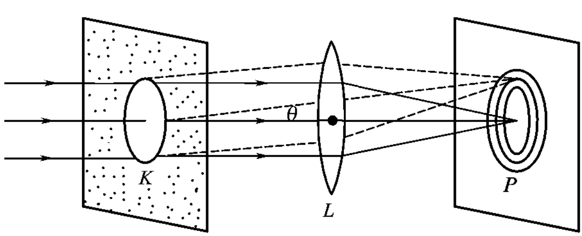


图 20－12　圆孔夫琅禾费衍射

圆孔夫琅禾费衍射的光强分布如图 20－13 所示，理论计算表明，大约 84%

的入射光能量集中在爱里斑中，而周围明环大约集中了入射光能量的 16%. 第一级暗环（爱里斑的边缘）对应的衍射角满足

$$D\sin\theta = 1.22\lambda \tag{20-17}$$

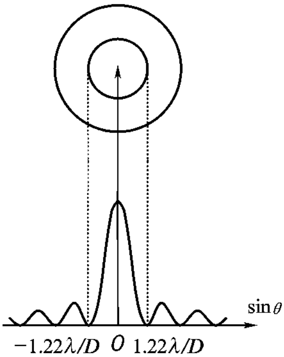


图 20－13　圆孔衍射光强分布

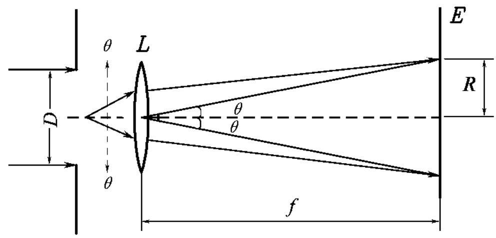


图 20－14　计算爱里斑半径

与单缝夫琅禾费衍射第一级暗纹公式比较，其衍射形态完全相同，仅仅多了一个形状因子 1.22. 将 θ 称为爱里斑的半角宽度，而 2θ 称为爱里斑的角宽度，从图 20－14 中可以看出，2θ 也相当于透镜光心对第一级暗环直径所张的角. 当 θ 很小时，可以计算出爱里斑的半径为

$$r = f\tan\theta \approx f\sin\theta = 1.22\frac{f\lambda}{D} \tag{20-18}$$

上式说明，当波长 λ 越大或者是圆孔直径 D 越小时，衍射现象就越显著；当 $\lambda/D \ll 1$ 时，衍射现象可以忽略，光线沿直线传播，遵守几何光学规律.

20.4.2　光学仪器的分辨本领

在几何光学中，点光源通过透镜所成的像依然是一个点，因此理想的光学仪器成像时，只要有足够大的放大率，就可以把物体的任何细微部分放大到清晰可见的程度. 但是实际诸如显微镜、望远镜等光学仪器中的透镜，相当于透光的小孔，当光线经过透镜时不可避免的会发生圆孔衍射，因此一个点光源通过透镜所成像就不再是一个点，而是一个有一定大小的衍射光斑. 这样就产生了一个问题，当两个物点距离很近时，例如两颗距离很近的恒星 S_1，S_2（如图 20－15），当用望远镜观察时，两束星光通过望远镜透镜成像形成了两个衍射光斑，如果光斑重叠的部分太多了，人的眼睛就无法分辨光斑是一个还是两个，也就无法分辨是

一颗星还是两颗距离很近的双星. 那么,衍射光斑重叠到什么程度才叫无法分辨呢？这需要一个公认的标准.

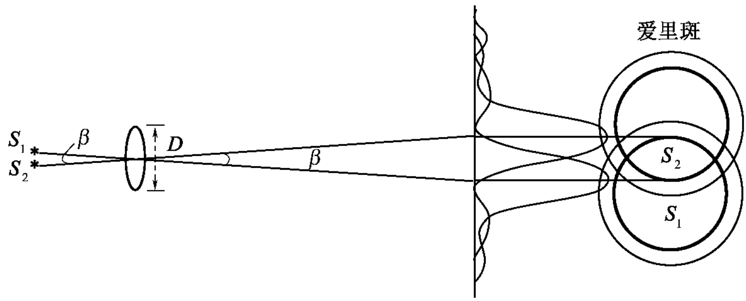


图 20－15　透镜最小分辨角

如图 20－15 所示,设两物点 S_1 和 S_2 对透镜光心所张的角为 β,由于透镜的衍射效应,S_1 和 S_2 所发出的光经透镜成像各自形成以爱里斑为中心的分布,显然,两个爱里斑中心 S_1' 和 S_2' 对透镜光心所张的角也为 β. 这里可以分为三种情况:

（1）若 $\beta=\theta$,即 β 等于爱里斑的半角宽度,则 S_1' 和 S_2' 之间距离刚好等于爱里斑的半径,这说明一个爱里斑的中心刚好落在另一个爱里斑的边缘上,此时两个爱里斑光强叠加后刚好形成两个最亮点,因此刚好能够分辨两个光斑,如图 20－16a 所示.

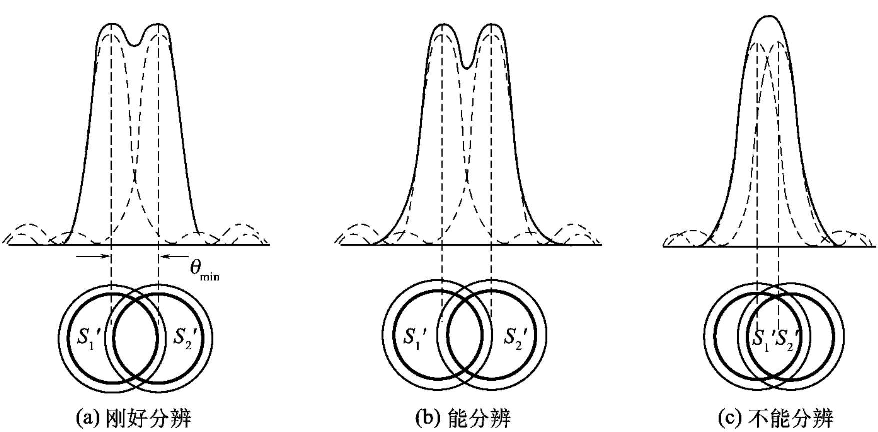


图 20－16　瑞利判据

（2）若 $\beta>\theta$,即 β 大于爱里斑的半角宽度,则 S_1' 和 S_2' 之间距离大于爱里斑

的半径,一个爱里斑的中心落在另一个爱里斑的外面,此时两个爱里斑光强叠加后形成两个最亮点,因此能够分辨两个光斑,如图 20－16b 所示.

(3) 若 $\beta<\theta$,即 β 小于爱里斑的半角宽度,则 $S_1{}'$和 $S_2{}'$之间距离小于爱里斑的半径,一个爱里斑的中心落在另一个爱里斑的外面,此时两爱里斑光强叠加后只有一个最亮点,因此不能够分辨两个光斑,如图 20－16c 所示.

综上所述,当两个物点对透镜光心所张的角度 β 刚好等于爱里斑的半角宽度时,就恰能分辨这两个物点,将这种判断能否分辨两个物点的标准叫做瑞利判据,将满足瑞利判据的两物点对透镜光心所张的角称为最小分辨角,记为 $\theta_{\min}$.由式(20－17)显然有

$$\theta_{\min}=1.22\frac{\lambda}{D} \tag{20-19}$$

把最小分辨角的倒数称为光学仪器的分辨本领 R(分辨率),即

$$R=\frac{1}{\theta_{\min}}=\frac{0.82D}{\lambda} \tag{20-20}$$

可见,提高光学仪器的分辨本领有两条途径:一是增大透镜的直径 D,一般天文望远镜的口径做得很大,一方面是为了增大入射光能量,另一方面就是为了提高分辨本领;另一途径是减少入射光波长,显微镜用紫光工作就比用红光工作分辨本领大,而电子的波长仅仅不到一个埃,所以电子显微镜的分辨本领比光学显微镜要高出几万倍.

例 20－4 在通常亮度情况下,人眼瞳孔的直径约为 3 mm,求人眼的最小分辨角?如果在黑板上画两根相距 1cm 的平行直线,问在距离黑板多远处恰好能够分辨这两根直线?

解 (1) 由式(20－18),$D=3$ mm,在可见光中,人眼对 5500 Å 的黄绿光最敏感,将该波长值代入,得

$$\theta_{\min}=1.22\frac{\lambda}{D}=1.22\frac{5.5\times10^{-7}}{3\times10^{-3}}=2.2\times10^{-4}\ \text{rad}$$

(2) 设平行线间距为 l,人到黑板距离为 x,两平行线对人眼所张角为 β,$\beta=l/x$,若刚好分辨,则有 $\beta=\theta_{\min}$,所以

$$x=\frac{l}{\theta_{\min}}=\frac{1\times10^{-2}}{2.2\times10\ -4}=45.5\ \text{m}$$

20.5 X 射线的衍射

X 射线是伦琴在 1895 年首次发现的,故又称为伦琴射线.图 20－17 所示为

一个 X 射线管的结构示意图. 抽成真空的玻璃容器内有两个电极,一个是发射电子的热阴极,一个是阳极,两电极间加数万伏的高压,则热阴极发射的电子在强电场作用下加速向阳极运动,当高速电子撞击阳极时,就从阳极发出 X 射线.

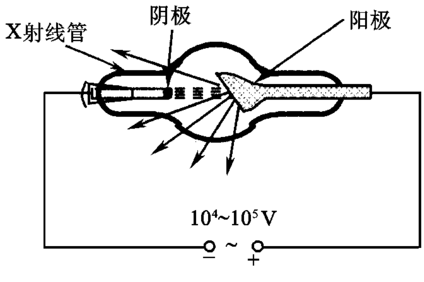


图 20－17　X 射线管

X 射线是一种波长很短的电磁波,其波长范围在 0.01 nm～10 nm 之间. 如此短的波长用普通的光学光栅是无法产生 X 射线衍射光谱的. 例如,设 X 射线波长 $\lambda=0.1$ nm,所用光栅的光栅常数为 $d=10^{-5}$ m,则可得第一级主极大的衍射角为 $\theta_1=\lambda/d=1.0\times10^{-5}$ rad,这么小的角度实际上根本无法观察到.

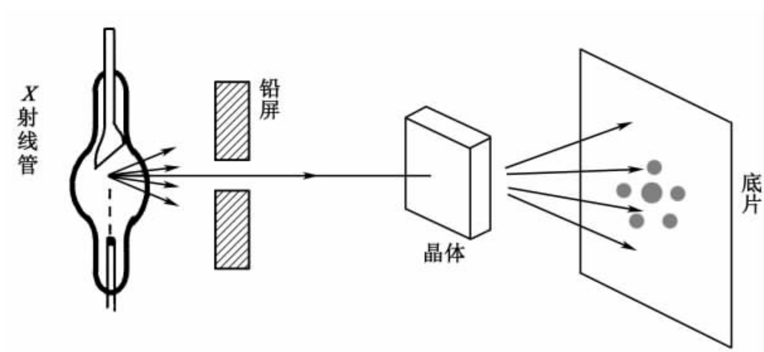


图 20－18　劳厄 X 射线衍射实验

为了得到 X 射线的衍射光谱,所使用光栅的光栅常数应该在 10^{-10} m 数量级,这已接近原子直径的数量级了,显然这样的光栅用机械加工的方法来制造是行不通的. 1912 年德国物理学家劳厄想到,晶体中的粒子(原子、离子或分子)是等间隔有规则排列的,其间隔与原子尺寸在同一数量级,它也许会构成一种适合于 X 射线衍射天然的三维衍射光栅. 劳厄的实验装置如图 20－18 所示. 由 X 射线管发出的 X 射线经过铅屏上的小孔准直后,垂直入射到薄片晶体上,在镜头后面的感光底片上就会出现许多按一定规律分布的斑点,这就是 X 射线的衍射

图样. 这些斑点称为劳厄斑，如图 20－19 所示.

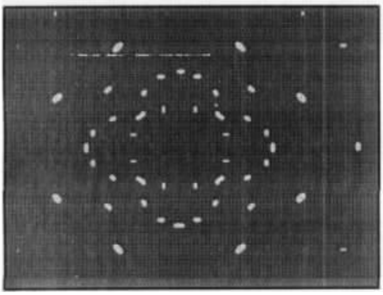


图 20－19　劳厄斑

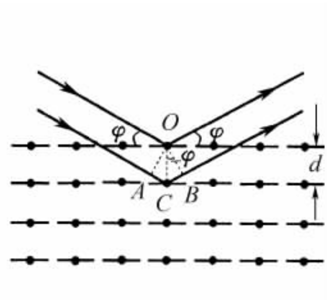


图 20－20　推导布拉格公式

X 射线的衍射图样可以这样来解释：当 X 射线照射晶体时，在晶体中每一个粒子上产生散射，每一个粒子相当于一个散射中心，而来自晶体中许多有规则排列散射中心的 X 射线会相互干涉，从而使得有些方向的 X 射线加强，形成劳厄斑点. 因此对这些劳厄斑点的位置和光强进行研究，就可以推断出晶体的结构. 对劳厄斑的定量研究，涉及空间光栅的衍射理论，这里不做介绍.

英国的布拉格父子提出了另一个研究 X 射线衍射的方法. 他们把晶体的空间点阵当作反射光栅来处理. 如图 20－20 所示，晶体由一系列平行平面组成，这些平面称为晶面，两个相邻的晶面间隔为 d，称为晶格常数，同一晶面上的原子等间隔有规则的排列. 当一束单色的平行 X 射线以掠射角 φ 入射到晶面上时，在符合反射定律的方向上可以得到光强最大的散射 X 射线，而不同晶面散射中心所发出的反射 X 射线之间会产生干涉，来自相邻两晶面反射 X 射线的光程差为 $\delta=AC+CB=2d\sin\varphi$，可见相邻两个晶面反射 X 射线干涉加强的条件为

$$2d\sin\varphi=k\lambda \tag{20-20}$$

k 为整数，上式称为布拉格公式.

晶体的 X 射线衍射有着广泛的应用. 如用已知波长的 X 射线照射某晶体的晶面，则由出现最大衍射强度方向的掠射角 φ 可以求得晶格常数，从而研究晶体的结构. 另外，用已知晶格常数的晶体做实验，则可以根据布拉格公式求得 X 射线的波长，对 X 射线的光谱进行分析，从而研究物质的原子结构.

思考题

20－1　为什么声波的衍射比光波的衍射更加显著？

20－2　衍射的本质是什么？干涉和衍射有什么区别和联系？

20－3　如果可见光是毫米波段的电磁波，则人们所看到的外部世界是一幅什么景象？（人眼瞳孔直径为 3 mm）

20－4　在单缝夫琅禾费衍射实验中，如果做如下变动，则衍射图样如何变化？

（1）缝宽变窄.

（2）入射光波长变大.

（3）线光源沿着垂直于透镜光轴方向上下移动.

（4）单缝沿着垂直于透镜光轴方向上下移动.

（5）单缝沿着透镜光轴向观察屏移动.

（6）将整个装置置于水中.

（7）使用白光入射.

20－5　在单缝夫琅禾费衍射实验中，观察屏上第三级暗纹所对应的缝间波振面，可以划分为几个半波带？

20－6　分别画出双缝干涉、单缝衍射和光栅衍射的光强分布示意图，比较之后说明这三种图样的异同？

20－7　如果光栅中透光缝和不透光部分的宽度相同，此时会出现什么样的衍射图样？

20－8　在光栅衍射装置中，将光栅沿着垂直于透镜光轴方向平移，条纹是否变化，如何变化？当平行光从垂直入射改为斜入射时，条纹又将如何变化？

20－9　光栅光谱和棱镜光谱有何不同？

20－10　为什么天文望远镜物镜的孔径要做的很大？射电天文望远镜和光学天文望远镜，谁的分辨率更高？

习题 20

20－1　波长 589.3 nm 的单色平行光垂直照射一单缝，单缝后透镜焦距为 100 cm，测得第一级暗纹到中央明纹中心距离为 1.0 mm. 求单缝的宽度.

20－2　用波长 632.8 nm 的平行光垂直照射单缝，缝宽 0.15 mm，缝后用凸透镜把衍射光会聚在焦平面上，测得第二级与第三级暗条纹之间的距离为 1.7 mm，求此透镜的焦距.

20－3　单缝宽 0.10 mm，透镜焦距为 50 cm，用 500 nm 的绿光垂直照射单缝.（1）求屏上中央明纹的宽度和半角宽度.（2）将此装置浸入水中，则中央明纹半角宽度又是多少？

20－4　波长 500 nm 的单色平行光，以与衍射屏法线方向成 30°斜入射单缝，测得第二级暗纹出现在衍射角 30°15′24″处. 试求单缝的宽度.

20－5　在某个单缝衍射实验中，光源发出的光含有两种波长 λ_1 和 λ_2，并垂直入射于

单缝上，假如 λ_1 的第一级衍射极小与 λ_2 的第二级衍射极小相重合，试问：(1)这两种波长之间有何关系？(2)在这两种波长的光所形成的衍射图样中，是否还有其他极小相重合？

20－6　用红色平行光垂直照射宽度为 0.60 mm 的单缝，缝后透镜焦距为 40.0 cm，观察屏上的单缝衍射条纹，发现到中央明纹中心距离为 1.40 mm 处的 P 点为明纹. 求(1)入射光的波长. (2) P 点处条纹的级次. (3)从 P 点看，该光波在狭缝处的波面可以分为几个半波带？

20－7　一衍射光栅，每厘米有 200 条透光缝，每条透光缝宽为 2×10^{-3} cm，在光栅后放一焦距为 1 m 的凸透镜，现以波长为 600 nm 的平行单色光垂直照射光栅. 求：(1)透光缝的单缝衍射中央明条纹宽度为多少？(2)在该宽度内，有几个光栅衍射主极大？

20－8　每毫米 500 条缝的光栅，用钠黄光正入射，观察衍射光谱. 钠黄光包含两条谱线，其波长分别为 589.6 nm 和 589.0 nm，求在第二级光谱中这两条谱线互相分离的角度.

20－9　汞灯发出波长 546 nm 的绿色平行光，以与光栅平面法线成 30°角斜入射到一透射光栅，已知光栅每毫米有 500 条刻痕. 求(1)谱线的最高级次. (2)屏上呈现的全部衍射谱线.

20－10　平行单色光波长为 500 nm，垂直入射到每毫米 200 条刻痕的透射光栅上，光栅后面放置一个焦距为 60 cm 的透镜. 求：(1)中央明纹与第一级明纹的间隔. (2)当入射光与光栅法线成 30°角斜入射时，中央明纹中心移动多少距离？

20－11　波长 600 nm 的单色光垂直入射到一光栅上，测得第二级主极大的衍射角为 30°，且第三级是缺级. 求：(1)光栅常数等于多少？(2)透光缝可能的最小宽度 a 等于多少？(3)在选定了上述 $(a+b)$ 和 a 之后，求在衍射角 $-\pi/2<\varphi<\pi/2$ 范围内可能观察到的全部主极大的级次.

20－12　用每毫米有 300 条刻痕的衍射光栅来检验仅含有属于红和蓝的两种单色成分的光谱. 已知红谱线波长 λ_R 在 0.63～0.68 μm 范围内，蓝谱线波长 λ_B 在 0.43～0.49 μm 范围内，当光垂直入射到光栅上时，发现在 24.46°角度处，红蓝两谱线同时出现. 求(1)这两单色成分的光谱线的波长. (2)在什么角度下红蓝两谱线同时出现？(3)在什么角度下只有红谱线出现？

20－13　利用每厘米 4000 条刻痕的透射光栅，可以产生多少个完整的可见光谱，其中哪些完整光谱不重叠？

20－14　在氢和氘混合气体的发射光谱中，波长为 656 nm 的红色谱线是双线，其波长差为 1.8 Å. 为能在光栅的第二级光谱中分辨它们，光栅的刻线数至少需要多少？

20－15　汽车前灯相距 120 cm，设夜间人眼瞳孔直径为 5.0 mm，入射光波长为 500 nm. 问汽车离人多远的地方，眼睛恰可分辨这两盏灯？

20－16　为了使望远镜能分辨角间距为 3.00×10^{-7} rad 的两颗星，其物镜的直径至少应多大？(可见光中心波长为 550 nm.)

20－17　一束 X 射线含有 0.095 nm 到 0.13 nm 范围的各种波长，以掠射角 45°入射

到晶体上. 已知晶格常数为 0. 275 nm. 求该晶体对那些波长的 X 射线产生强反射？

第 21 章　光的偏振

光波是横波．光波中光矢量的振动方向总是和光的传播方向垂直，光波的这一基本特性称为光的偏振．在垂直于光波传播方向的平面上，光矢量有不同的振动方向和振动状态，这些振动方向和振动状态称为光的偏振态．本章首先介绍光的各种偏振态及其特性，接着讨论获得线偏振光的方法，说明如何检验光的偏振态．还讨论了折射光和反射光的偏振态以及双折射中的偏振现象．最后简要介绍了偏振光的干涉及旋光效应．

21.1　光的偏振状态

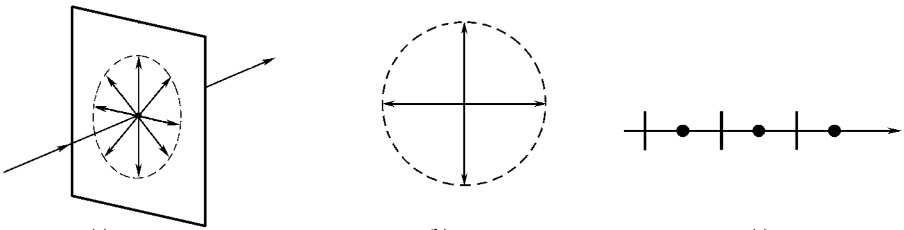
根据光的偏振状态的不同，我们可以把光分为：自然光、线偏振光、部分偏振光、椭圆偏振光和圆偏振光五大类．下面分别介绍前面三种．

1．自然光

像太阳、白炽灯等普通光源所发出的光，是大量原子、分子或离子发光的总和，不同原子或者是同一原子在不同时刻所发出的波列振动方向是各不相同的，彼此互不关联，在垂直于光的传播方向的平面内随机分布，如图 21－1a 所示．从大量原子发光的统计平均上看，光波中包含了所有方向的光振动，没有哪一个方向的光振动比其他方向更占优势，因此沿各方向所有光矢量的振幅都相同，我们把具有这种特性的光称为自然光．显然普通光源所发出的光都是自然光．

为了研究问题方便起见，我们通常把自然光中的各个方向的光振动都分解为两个相互垂直的分振动，如图 21－1b 所示．这样，就可以把自然光等价地看作是两个相互垂直的、振幅相等的、相互独立的光振动，其中每一个独立光振动的光强都等于自然光光强的一半．由于普通光源发光的随机性，这两个相互垂直的光振动没有确定的相位关系，因此它们是不相干的．图 21－1c 是自然光的表示

方法,用圆点和短线分别表示垂直纸面和平行纸面的两个独立光振动,点和线均匀分布,数目相同,表示这两个分量在自然光中各占一半.



(a)　(b)　(c)

图 21－1　自然光

2. 线偏振光

在垂直于传播方向的平面内,如果光矢量只沿一个固定的方向振动,这种光称为线偏振光,也称完全偏振光. 线偏振光的光矢量方向和光的传播方向构成的平面叫做振动面. 因为线偏振光沿传播方向各处的光矢量都在同一个振动面上,因此线偏振光也称为平面偏振光,简称偏振光.

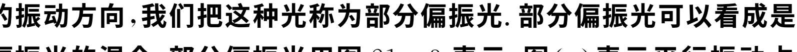
图 21－2 为线偏振光的示意图,其中图(a)表示振动方向在纸面内(简称平行振动)的线偏振光,图(b)表示振动方向垂直于纸面(简称垂直振动)的线偏振光.

(a)　(b)

图 21－2　线偏振光

3. 部分偏振光

部分偏振光是介于自然光和线偏振光之间的一种偏振光. 如果在垂直于光传播方向的平面内各方向都有光振动,但是各方向的振幅大小不同,存在一个占优势的振动方向,我们把这种光称为部分偏振光. 部分偏振光可以看成是自然光和线偏振光的混合. 部分偏振光用图 21－3 表示,图(a)表示平行振动占优势的部分偏振光,图(b)表示垂直振动占优势的部分偏振光.



(a)　(b)

图 21－3　部分偏振光

除了以上三类光的基本偏振状态之外,还有一种完全偏振光叫做椭圆偏振

光. 这种光的光矢量沿着光的传播方向前进时,绕传播方向均匀地转动,如果光矢量的大小也在不断变化,则光矢量的端点描绘出一个椭圆,因此称为椭圆偏振光. 如果光矢量的大小保持不变,则光矢量的端点描绘出的是一个圆,称为圆偏振光. 我们规定,迎着光线看过去,光矢量顺时针旋转时,称为右旋椭圆或圆偏振光;如果光矢量逆时针旋转,则称为左旋椭圆或圆偏振光. 椭圆偏振光或圆偏振光可以用两列同方向传播的同频率振动方向垂直的线偏振光叠加产生.

21.2 起偏和检偏　马吕斯定律

21.2.1 偏振片的起偏和检偏

一般光源所发出的都是自然光. 获得偏振光的主要方法是将自然光变为偏振光,这个过程称为起偏,把能够将自然光变为偏振光的器件称为起偏器. 通常我们还需要检验光的偏振状态,把这个过程称为检偏,能够检验光的偏振状态的器件称为检偏器.

最常见的起偏器和检偏器就是偏振片. 偏振片是 1928 年一位 19 岁的美国大学生兰德发明的. 它是通过在透明的玻璃基片上蒸镀上一层碘化硫酸奎宁的针状粉末晶粒制成的. 这些晶粒对于两个相互垂直的光振动具有选择性吸收作用,即对某一方向的光振动有强烈的吸收,而对与之垂直的光振动则吸收很少. 因此偏振片只容许一个特定方向的光振动通过,这个特定方向称为该偏振片的偏振化方向,也称为偏振片的透光轴.

图 21－4 中两个偏振片 P_1,P_2 平行放置,它们的偏振化方向如图中箭头所示. 当一束自然光垂直入射 P_1 时,由于只有平行于偏振化方向的光振动才能通过,所以经过 P_1 之后自然光就变成了线偏振光,P_1 起到了起偏器的作用. 由于自然光中各方向的光矢量振幅相同,因此将 P_1 绕光线转动时,透过 P_1 的光强不发生改变,总是等于入射光强的一半. 为了检验光的偏振状态,我们在 P_1 的后面再放一个偏振片 P_2,绕光线方向慢慢转动 P_2,则透过 P_2 的光强会发生变化. 当 P_2 的偏振化方向转到和入射线偏振光光矢量方向相同时,光全部通过,光强最大. 当 P_2 的偏振化方向转到和入射线偏振光光矢量方向有一定夹角时,由于 P_2 只容许线偏振光中与偏振化方向相同的光振动分量通过,因此出射光强变小. 当

P_2 的偏振化方向转到和入射线偏振光光矢量方向垂直时，光完全被挡住，出射光强为零，称为消光. 将 P_2 旋转一周时，透射光强两次出现最大，两次出现消光，这一特点可以作为检验线偏振光的依据，因此 P_2 叫做检偏器.

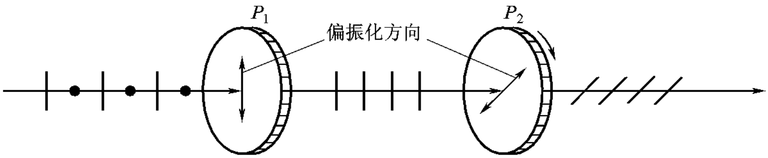


图 21－4　起偏和检偏

如果入射到检偏器 P_2 的是部分偏振光，则将 P_2 旋转一周时，透射光强两次出现最大，两次出现最小，并且最小光强不等于零，即对部分偏振光没有消光现象.

21.2.2　马吕斯定律

马吕斯在研究线偏振光通过检偏器后透射光强时发现，如果入射的线偏振光光强为 I_0，则透射光的光强 I 为

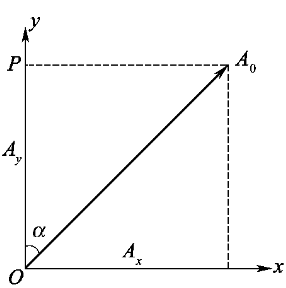
$$I = I_0 \cos^2 \alpha \tag{21-1}$$

式中 α 为线偏振光的振动方向和检偏器的偏振化方向之间的夹角. 上式称为马吕斯定律.

如图 21－5，OP 为偏振片的透光轴方向，OA_0 为入射线偏振光的振动方向. 将振幅矢量 A_0 沿透光轴方向和垂直于透光轴方向分解为两个分量 A_y 和 A_x，其大小分别为

$$A_x = A_0 \sin\alpha$$

$$A_y = A_0 \cos\alpha$$



21－5　马吕斯定律的证明

其中只有平行于透光轴方向的振幅分量 A_y 可以通过检偏器. 由于光强与振幅的平方成正比,即

$$\frac{I}{I_0}=\frac{A_y{}^2}{A_0{}^2}=\cos^2\alpha$$

所以透射光强为

$$I=I_0\cos^2\alpha$$

上式说明,当 $\alpha=0,\pi$ 时,$I=I_0$,入射光全部通过,透射光强最大;当 $\alpha=\pi/2,3\pi/2$ 时,$I=0$,入射光全部被挡住,透射光强最小. 这说明将检偏器旋转一周时,透射光强两次出现最大,两次出现消光.

要特别注意的是,马吕斯定律所指的是线偏振光入射的情形. 如果是自然光入射,则不论如何旋转检偏器,透射光强都应为入射光强的一半. 如果入射光是部分偏振光,通常将其分解为自然光和线偏振光再分别加以讨论.

例 21－1 一部分偏振光由自然光和线偏振光两种成分混合而成,当它通过检偏器时,随着检偏器的转动发现最大透射光强是最小透射光强的 6 倍,求部分偏振光中这两种成分的光强之比为多少？

解 设自然光光强为 I_0,线偏振光光强为 I. 透射光的最大光强出现在检偏器的透光轴方向平行于线偏振光的振动方向时,此时线偏振光全部通过而自然光有一半通过,因此最大光强为 $I_0/2+I$. 当透光轴方向和线偏振光的振动方向垂直时,有最小透射光强 $I_0/2$,因此

$$\frac{I_0/2+I}{I_0/2}=6$$

解得

$$I_0:I=2:5$$

例 21－2 如图 21－6 所示,在两块偏振化方向相互垂直的偏振片 P_1 和 P_3 之间插入另一块偏振片 P_2,P_2 和 P_1 的夹角为 α,光强为 I_0 的自然光垂直入射 P_1,求通过 P_3 的透射光强为多少？

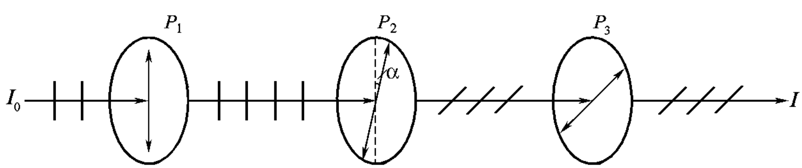


图 21－6 例 21－2 用图

解 如图 21－6,P_2 和 P_1 的夹角为 α,则 P_2 和 P_3 的夹角为 $\pi/2-\alpha$. 自然光通过 P_1 后变成线偏振光,光强为 $I_0/2$,线偏振光通过 P_2 时,由马吕斯定律,得通过 P_2 的线偏振光光强为

$$I_1=\frac{1}{2}I_0\cos^2\alpha$$

该线偏振光通过 P_3 时，其透射光强为

$$I=I_1\cos^2(\pi/2-\alpha)$$

将 I_1 代入，得

$$I=\frac{1}{8}I_0\sin^2 2\alpha$$

21.2.3　偏振光的应用

光的偏振在科学技术及工业生产中有着广泛的应用. 比如在机械工业中，利用偏振光的干涉来分析机件内部应力分布情况，这就是光测弹性力学的课题. 在化工厂里，我们可以利用偏振光测量溶液的浓度. 偏光干涉仪、偏光显微镜在生物学、医学、地质学等方面有着重要的应用，在航海、航空方面则制出了偏光天文罗盘. 下面我们介绍几种日常生活中应用偏振光的实例.

1. 汽车车灯

汽车夜间在公路上行驶与对面的车辆相遇时，为了避免双方车灯的眩目，司机都关闭大灯，只开小灯，放慢车速，以免发生车祸. 如驾驶室的前窗玻璃和车灯的玻璃罩都装有偏振片，而且规定它们的偏振化方向都沿同一方向并与水平面成 $45°$ 角，那么，司机从前窗只能看到自已的车灯发出的光，而看不到对面车灯的光，这样，汽车在夜间行驶时，即不要熄灯，也不要减速，可以保证安全行车.

另外，在阳光充足的白天驾驶汽车，从路面或周围建筑物的玻璃上反射过来的耀眼的阳光，常会使眼睛睁不开. 由于光是横波，所以这些强烈的来自上空的散射光基本上是水平方向振动的. 因此，只需带一副只能透射竖直方向偏振光的偏振太阳镜便可挡住部分的散射光.

2. 观看立体电影

在拍摄立体电影时，用两个摄影机，两个摄影机的镜头相当于人的两只眼睛，它们同时分别拍下同一物体的两个画像，放映时把两个画像同时映在银幕上. 如果设法使观众的一只眼睛只能看到其中一个画面，就可以使观众得到立体感. 为此，在放映时，两个放像机的每个镜头上放一个偏振片，两个偏振片的偏振化方向相互垂直，观众戴上用偏振片做成的眼镜，左眼偏振片的偏振化方向与左面放像机上的偏振化方向相同，右眼偏振片的偏振化方向与右面放像机上的偏振化方向相同，这样，银幕上的两个画面分别通过两只眼睛观察，在人的脑海中就形成立体化的影像了.

3. 生物的生理机能与偏振光

人的眼睛对光的偏振状态是不能分辨的，但某些昆虫的眼睛对偏振却很敏感. 比如蜜蜂有五只眼、三只单眼、两只复眼，每个复眼包含有 6300 个小眼，这些小眼能根据太阳的偏光确定太阳的方位，然后以太阳为定向标来判断方向，所以蜜蜂可以准确无误地把它的同类引到它所找到的花丛. 再如在沙漠中，如果不带罗盘，人是会迷路的，但是沙漠中有一种蚂蚁，它能利用天空中的紫外偏光导航，因而不会迷路.

21.3 反射光和折射光的偏振

当自然光在两种各向同性的介质交界面上反射和折射时，其偏振状态会发生变化. 在一般情况下，反射光和折射光都不再是自然光，而是部分偏振光. 在特定情况下，反射光还有可能成为线偏振光.

如图 21－7a 所示，自然光以入射角 i 入射到折射率分别为 n_1，n_2 的两种介质交界面上，在反射光中，垂直于入射面的光振动要多于平行入射面的光振动，在折射光中则相反，平行入射面的光振动多于垂直入射面的光振动，因此反射光和折射光都是部分偏振光. 我们通过偏振片观察水面，当旋转偏振片时，就可以观察到光强由明到暗的变化，但是最暗处光强不为零.

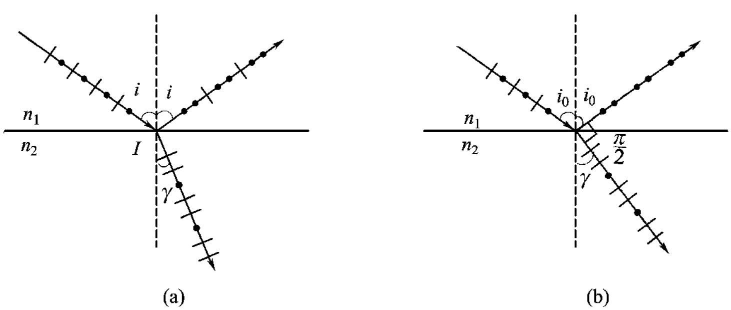


图 21－7　反射和折射时光的偏振

反射光的偏振化程度与入射角 i 有关. 当入射角等于某个特定值 i_0 时，反射光成为振动方向垂直于入射面的线偏振光，如图 21－7b 所示. 入射角 i_0 满足下式

$$\tan i_0=\frac{n_2}{n_1}=n_{21} \tag{21-2}$$

式中 $n_{21}=n_2/n_1$ 为介质 2 对介质 1 的相对折射率. 这个规律是布儒斯特在 1812 年通过实验发现的，称为布儒斯特定律. 满足布儒斯特定律的入射角 i_0 称为起偏振角，又叫布儒斯特角. 布儒斯特定律也可以由麦克斯韦电磁理论严格地加以证明.

当自然光以布儒斯特角 i_0 入射两种介质的交界面时，其反射光和折射光是相互垂直的，这一点很容易证明. 由折射定律

$$n_1\sin i_0=n_2\sin r$$

和布儒斯特定律

$$n_1\sin i_0=n_2\cos i_0$$

由上两式容易得到

$$i_0+\gamma=\pi/2$$

即入射角和折射角之和为 90°，因此反射光和折射光垂直（图 21－7b）.

值得注意的是，当自然光以起偏振角 i_0 入射时，所有平行振动都被折射，反射光是垂直于入射面的线偏振光，但是反射光并不包含入射光中垂直振动的全部能量，而只是其中的一小部分，大部分的垂直振动将被折射，因此反射光是线偏振光，但是光强较弱，而折射光虽然是部分偏振的，但是光强较强. 例如自然光从空气向玻璃（$n_{21}=1.50$）入射时，起偏角约为 56°，此时反射光强只占整个入射光强的 7.4%左右，而折射光强要占整个入射光强的 92.6%.

利用布儒斯特角可以产生线偏振光. 为了增加反射光的强度和提高折射光的偏振化程度，常常把多层玻璃片叠放在一起，构成一个玻璃片堆. 当自然光以布儒斯特角入射玻璃片堆时，光在每一层玻璃面上反射和折射，这样就可以使反射光的光强得到加强，同时折射光中的垂直振动也因多次反射而减小. 当玻璃片的数目足够多时，透射光就接近线偏振光，而且透射光和反射光的振动面相互垂直.

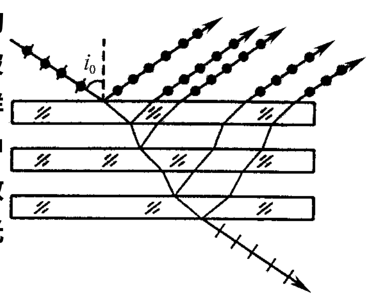


图 21－8　玻璃片堆

21.4　光的双折射

21.4.1　双折射现象

1. 双折射现象

1669 年的一天，巴塞林纳斯无意之中将一块冰洲石（即方解石）晶体放在书上，他发现书上的每一个字都成双像，如图 21－9 所示. 后来惠更斯分析了上述现象，认为通过冰洲石看书，一个字有两个像，表明一束光入射冰洲石表面时，会产生两束折射光，惠更斯把这种现象称为双折射现象. 除了立方系晶体（例如岩盐）之外，光线进入各向异性晶体时都会产生双折射现象.

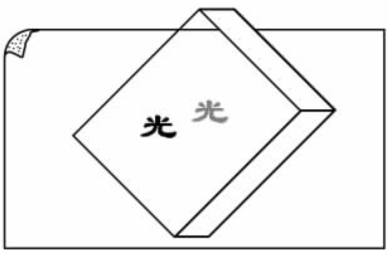


图 21－9　双折射现象

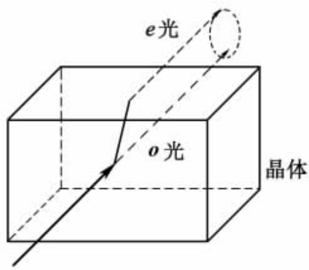


图 21－10　o 光和 e 光

2. 寻常光和非寻常光

深入研究光波入射晶体时产生的双折射现象，发现其中一束光遵守通常的折射定律，称为寻常光，简称为 o 光；另外一束则不遵守折射定律，即传播方向通常不在入射平面内，并且对于不同的入射角，入射角的正弦与折射角的正弦之比不是恒量，称为非常光，简称为 e 光. 如图 21－10 所示，当入射光垂直入射晶体表面时，o 光在晶体中沿入射方向传播，而 e 光通常情况下有一定的折射角，若以入射光线为轴转动晶体，则 o 光不动，而 e 光则绕轴旋转. 如果用偏振片检查这两束光，发现 o 光和 e 光都是线偏振光，它们的振动方向几乎相互垂直.

应该指出，只有在晶体内部才有 o 光和 e 光的区别，表现出不同的性质. 从晶体内部出来后，它们只是振动方向不同的两束线偏振光，其他方面并无差异.

3. 晶体的光轴与光线的主平面

为了更好地描述 o 光和 e 光的偏振情况，下面对晶体的光学性质做简单介绍.

研究发现，并不是沿任何方向入射晶体表面，都可以产生双折射的. 在晶体

内部存在某一特定方向，当光束沿此方向传播时不产生双折射，这一特定方向称为晶体的光轴．只有一个光轴的晶体称为单轴晶体，方解石、石英、红宝石等都是单轴晶体．有两个光轴的晶体称为双轴晶体，云母、硫磺、蓝宝石等都是双轴晶体．应当注意，光轴仅仅表示晶体中的一个特定方向，并不限于是某条特定的直线，因此与该方向平行的所有直线都可以当作是晶体的光轴．

如图 21－11 所示为天然方解石晶体的光轴．天然方解石晶体是六面棱体，两棱之间夹角约为 102°或者是约为 78°．从其三个钝角相会的顶点 A 出发，做一条直线并使其与各邻边夹角相等，这一直线所表示的方向就是方解石晶体的光轴方向．

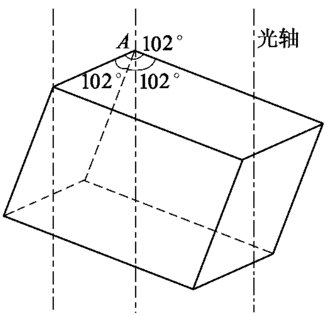


图 21－11　方解石晶体的光轴

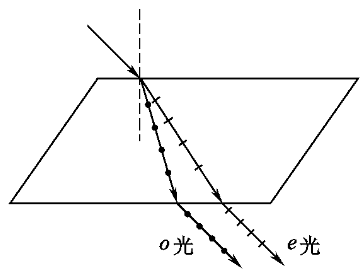


图 21－12　o 光和 e 光的偏振

在晶体中，我们把光线与晶体光轴所构成的平面称为晶体中该光线的主平面．实验和理论都表明，o 光的光矢量振动方向总是垂直于 o 光的主平面，而 e 光的光矢量振动方向在 e 光的主平面内．通常情况下，由于 o 光在入射平面内而 e 光不在入射平面内，o 光和 e 光的主平面并不重合，因此 o 光和 e 光的振动方向不是严格垂直的．只有当光轴位于入射平面内时，o 光和 e 光的主平面才是严格重合．在大多数情况下，这两个主平面的夹角很小，因此 o 光和 e 光的振动方向可以认为是近似相互垂直的，如图 21－12 所示．

我们把光轴和晶体表面法线方向组成的平面称为晶体的主截面．在实际应用中，一般都把入射光线选择在主截面内，这样可以使双折射现象的研究更为简化．

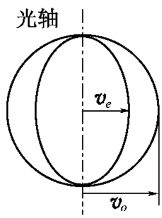
21.4.2　双折射现象的解释

这里我们应用惠更斯原理对单轴晶体的双折射现象做出定性的解释．一般说来，晶体中 o 光和 e 光的传播速率不相同．o 光沿各方向具有相同的速率，所以

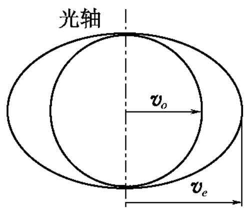
在晶体中任意一个子波源所发出的子波波面是一球面. 而 e 光的速率在各方向是不相同的,在同一点所引起的 e 波波面可以证明是一个旋转椭球面. 只有当两束光沿光轴传播时,它们的速率才是相同的,没有双折射现象,因此上述的两个子波面沿光轴方向应该相切,如图 21－13 所示.

从图中可以看出,除了沿光轴方向,在其他方向上 o 光和 e 光的速率都不相同. 在垂直与光轴方向,o 光和 e 光的速率之差是最大的,设它们分别为 v_o 和 v_e. 在图 21－12a 中,$v_0>v_e$,此类晶体称为正晶体,如石英等;在图 21－12b 中,$v_0<v_e$,此类晶体称为负晶体,如方解石等.

根据折射率的定义 $n=c/v$,可以定义 $n_o=c/v_0$,$n_e=c/v_e$,n_o 和 n_e 称为晶体的主折射率. 对于正晶体,$n_o<n_e$,对于负晶体,$n_o>n_e$,表 21－1 为几种常见单轴晶体的主折射率.



(a) 正晶体



(b) 负晶体

图 21－13　晶体中的子波波面

表 21－1　几种单轴晶体的主折射率(对 5893 Å 的钠黄光)

晶体	n_o	n_e	晶体	n_o	n_e
石英	1.544	1.553	方解石	1.658	1.486
冰	1.309	1.313	电气石	1.669	1.638
金红石(TiO_2)	2.616	2.903	白云石	1.681	1.500

知道了晶体的光轴和主折射率,就可以根据惠更斯原理采用作图的方法确定 o 光和 e 光在晶体中的传播方向.

* 21.5　偏振光的干涉及其应用

21.5.1　椭圆偏振光和圆偏振光

根据两个同频率相互垂直的振动能够合成椭圆运动或者圆运动的原理，可以获得椭圆偏振光和圆偏振光. 如图 21－14 所示，把一个单轴晶体切割成厚度为 d，光轴平行于晶面的晶片. 当一束线偏振光垂直入射晶片时，会产生双折射，入射的线偏振光被分解为垂直光轴振动的 o 光和平行光轴振动的 e 光. 设入射线偏振光的振幅为 A，与光轴的夹角为 θ，则 o 光和 e 光的振幅分别为

$$A_o = A\sin\theta$$

$$A_e = A\cos\theta$$

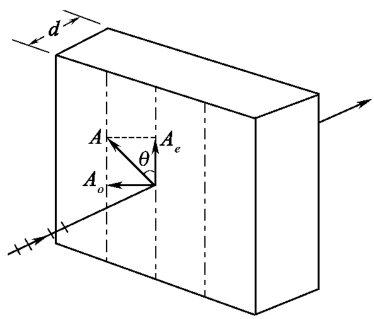


图 21－14　椭圆偏振光的获得

在晶体中 o 光和 e 光沿相同方向传播. 由于折射率的不同，透过晶片时 o 光和 e 光的光程差为

$$\delta = (n_0 - n_e)d \qquad (21-3)$$

相应的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d \qquad (21-4)$$

这样两束振动方向互相垂直，相位差一定的光叠加之后，就形成椭圆偏振光，此时合成光矢量末端的轨迹为垂直于传播方向的一个顺时针或者逆时针旋转的椭圆.

当入射的线偏振光的光振动方向和晶片光轴的夹角 $\theta = 45°$，并且 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi/2$ 时，出射光为圆偏振光.

选择适当的晶片厚度，可以使得相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = \frac{\pi}{2}$$

则通过晶片后的合成光为正椭圆偏振光，即椭圆的长、短轴分别平行或垂直于晶体的光轴. 此时 o 光和 e 光通过晶片时的光程差为

$$\delta = (n_o - n_e)d = \frac{\lambda}{4}$$

所以我们把这样厚度的晶片称为四分之一波片. 显然，这是对满足上式的特定波长而言的. 四

分之一波片可以用来检验椭圆偏振光和圆偏振光. 因为椭圆偏振光和圆偏振光通过四分之一波片会变成线偏振光,而自然光和部分偏振光没有这个特点. 因此在实际应用中通常是在检偏器前加一个四分之一波片的方法来区分圆偏振光和自然光以及椭圆偏振光和部分偏振光.

若晶片可以使得相位差满足

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=\pi$$

此时 o 光和 e 光的通过晶片时的光程差为

$$\delta=(n_o-n_e)d=\frac{\lambda}{2}$$

我们称这样厚度的晶片为二分之一波片,又叫半波片. 线偏振光通过半波片之后还是线偏振光,只是振动方向转过了一个角度. 若入射的线偏振光振动方向与光轴之间的夹角为 θ,则出射光的振动方向转过 2θ 角度.

21.5.2 偏振光的干涉

观察偏振光干涉的实验装置如图 21－15 所示.

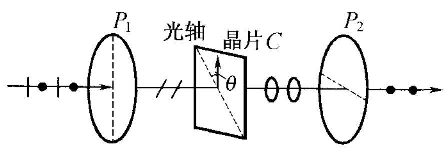


图 21－15 偏振光干涉装置

P_1,P_2 为两个偏振化方向正交的偏振片,其中放置一个光轴与表面平行的晶片,其光轴方向与 P_1 的偏振化方向夹角为 θ,其厚度为 d. 自然光通过起偏器 P_1 之后称为一束线偏振光,其振幅为 A_1,射入晶片 C 后分解为 o 光和 e 光,其振动方向分别垂直于光轴和平行于光轴,其振幅为

$$A_{1o}=A_1\sin\theta$$

$$A_{1e}=A_1\cos\theta$$

其相位差由式(21－4)决定,即

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$$

当它们入射到 P_2 时,根据马吕斯定律,从 P_2 透射的为两束振动方向都是沿 P_2 偏振化方向的线偏振光,其振幅分别为

$$A_{2o}=A_{1o}\cos\theta=A_1\sin\theta\cos\theta$$

$$A_{2e}=A_{1e}\sin\theta=A_1\sin\theta\cos\theta$$

如图 21－16 所示. 可见透过 P_2 的两束光振幅相等,它们是相干光,其总的相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d+\pi \tag{21-5}$$

其中第二项 π 为 o 光和 e 光通过 P_2 后 A_{2o} 和 A_{2e} 方向相反而产生的附加相位差.

由此可知干涉的明暗纹条件为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d+\pi=\begin{cases}2k\pi & k=1,2,3,\cdots\quad \text{加强},P_2\ \text{后为明视场}\\(2k+1)\pi & k=1,2,3,\cdots\quad \text{减弱},P_2\ \text{后为暗视场}\end{cases}$$

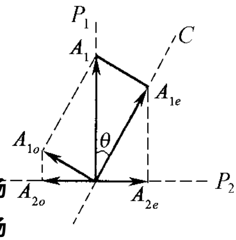


图 21－16　偏振光干涉振幅矢量图

如果使用的是劈尖状晶体片，则可以在满足上式的厚度处分别观察到明、暗条纹. 当采用白光光源时，则对应不同波长的光，满足各自的相干条件，在视场中将看到彩色干涉条纹，这种现象称为色偏振.

色偏振现象有着广泛的应用. 例如在地质和冶金工业中经常使用的偏光显微镜，就是在普通显微镜上附加了起偏器和检偏器，它可以利用色偏振现象精确地鉴别矿石的种类，研究晶体的结构. 色偏振还是检验物质是否具有双折射现象极为灵敏的方法. 把待测物质做成薄片放在两个尼科尔棱镜之间，根据是否观察到彩色即可确定该物质是否具有双折射性质.

21.5.3　人为双折射现象

某些原本各向同性的物质，在人为的条件下（例如加外力，加电场、磁场等），会变成各向异性的物质，能够产生双折射，这种现象称为人为双折射.

1. 光弹性效应——应力双折射

在机械应力的作用下，某些透明的各向同性介质（例如塑料、赛璐珞等）会产生各向异性的光学性质，从而产生双折射现象，这叫做光弹性效应. 受力后的介质表现为单轴晶体的特性，其等效光轴沿受力方向. 实验表明，两个主折射率之差 (n_1-n_p) 正比于应力 P，即

$$n_0-n_p=kP \tag{21-6}$$

其中比例系数 k 决定于介质的性质.

利用光弹性效应可以研究介质受力后其内部应力的分布情况. 在图 21－15 所示观察偏振光干涉的实验装置中，用待测材料替代晶片，当它受外力作用时，在 P_2 后的视场中就可以观察到干涉条纹. 由式(21－6)可知，条纹的分布与材料中的应力分布有关，应力越大的地方，干涉条纹就越密集. 这就是光测弹性力学的理论基础. 当设计桥梁、水坝等大型工程时，必须要了解整体结构以及各部分的受力情况. 通常用透明材料按比例将它们做成模型，然后对模型施加与实际情况相符的外力，观察分析出现的干涉条纹分布，从而对模型内部的受力情况做出判断，以便使结构设计更加合理.

2. 克尔效应——电致双折射

克尔在 1875 年发现，在强电场作用下，可以使某些各向同性介质变为各向异性，从而产

生双折射，这种现象称为克尔效应，也叫做电光效应.

克尔效应的实验装置如图 21－17 所示. C 为装有平板电极的容器，储有非晶体或液体（例如硝基苯、二硫化碳等）. P_1，P_2 为两个正交的偏振片. 在使用时通常让电场方向分别与两个偏振化方向成 $45°$. 在电源未接通前，P_2 后面的视场是暗的. 当接通电源，视场由暗转明，说明在电场作用下，克尔盒中的非晶体物质具有了双折射性质，相当于是一个单轴晶体，其光轴沿外电场方向. 实验表明，两个主折射率之差满足

$$n_0 - n_e = kE^2\lambda \tag{21-7}$$

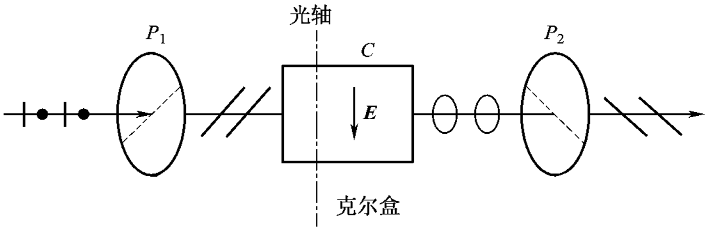


图 21－17 克尔效应实验

式中 k 称为克尔常数，它与材料的性质有关.

利用克尔效应可以制成光开关. 这种光开关的最大优点是弛豫时间极短，双折射性质随电场的出现和消失只需要不到 10^{-9} s 的时间，可以使光强的变化非常迅速. 因此这种光开关已经广泛应用于高速摄影、光速测量等领域，近年来更多地用来作为激光器的 Q 开关，可以产生高强度的脉冲激光.

在强磁场的作用下，一些非晶体也能产生双折射现象，这叫做磁致双折射，具体情况这里不再介绍.

*21.6 旋光现象

法国物理学家阿喇果在 1811 年发现，当线偏振光沿石英晶体光轴方向通过时，虽然并没有产生双折射，透射光仍然是线偏振光，但是它的振动方向却相对于入射光旋转了一个角度，这种现象称为旋光现象，具有这种旋光性的物质称为旋光物质，如石英、糖和酒酸石溶液等都是旋光物质.

观察旋光现象的实验装置如图 21－18 所示. 在一对正交的偏振片之间放入旋光物质 C（例如石英晶片），则将会看到 P_2 后面的视场由暗转明，将 P_2 旋转某个角度后，视场又将由明转暗，这说明线偏振光通过旋光物质之后仍然是线偏振光，只是振动方向旋转了一个角度.

实验表明，对于一定波长的线偏振光，通过旋光物质后，振动方向转过的角度 φ 与旋光物质的厚度 l 有关，即

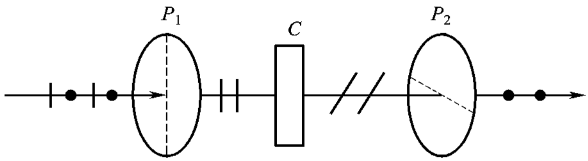


图 21－18　观察旋光现象实验装置

$$\varphi = al \tag{21-8}$$

式中比例系数 a 称为旋光率，与旋光物质的性质和入射波长有关.

实验还发现，线偏振光通过旋光物质时振动方向的旋转有左旋和右旋之分. 迎着光观察，若振动方向按顺时针旋转，我们称该旋光物质为右旋物质，反之则为左旋物质. 例如葡萄糖为右旋物质，果糖为左旋物质，而石英则兼有右旋和左旋两种.

如果旋光物质为溶液，则旋转角还与其浓度 c 有关，即

$$\varphi = acl \tag{21-9}$$

量糖计就是利用旋光现象测量糖溶液浓度的仪器，在制糖工业中得到广泛地应用.

思考题

21－1　自然光、线偏振光和部分偏振光有何区别？如何使用检偏器检验光的偏振状态？

21－2　试列举几种获得线偏振光的方法.

21－3　自然光入射到两个重叠的偏振片上时，入射光不能透过. 这时在两个偏振片之间插入第三块偏振片，则可以观察到有光透过，则这第三块偏振片应该如何放置？如果还是没有光透过，则又该如何放置？

21－4　一束光入射到两种透明介质的交界面上，发现只有折射光而没有反射光，试说明入射光的偏振状态，以及是如何入射交界面的？

21－5　如何测定不透明介质(例如珐琅)的折射率？

21－6　什么是双折射现象？什么是寻常光和非寻常光？它们的偏振状态如何？其光振动方向和各自的主平面有什么关系？

21－7　一束线偏振光入射双折射晶体，此时能否观察到双折射现象？

习题 21

21－1　一束自然光和线偏振光的混合光束垂直照射偏振片. 当转动偏振片时，测得透射光强的最大值是最小值的 5 倍. 求入射光中线偏振光和自然光的光强之比.

21－2　两偏振片的偏振化方向夹角为 60°，在两者之间插入第三个偏振片，其偏振

化方向与前两个夹角均为 $30°$. 若以光强为 I_0 的自然光入射，求透射光强是多少？

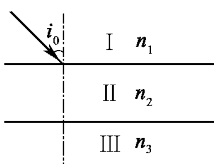
21－3　一束自然光投射到叠放在一起的两个偏振片上，若透射光强度为(1)透射光最大强度的三分之一；(2)入射光强度的三分之一，则两偏振片的偏振化方向之间的夹角是多少？

21－4　两块偏振片叠在一起，其偏振化方向成 $30°$ 角. 由强度相同的自然光和线偏振光混合而成的光束垂直入射在偏振片上，已知两种成分的入射光透射后强度相等. (1)若不计偏振片对透射分量的反射和吸收，求入射光中线偏振光光矢量振动方向与第一个偏振片偏振化方向之间的夹角. (2)仍如上一问，求透射光与入射光的强度之比. (3)若每个偏振片对透射光的吸收率为 5％，再求透射光与入射光的强度之比.

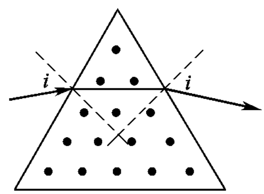
21－5　一束自然光入射到折射率为 1.72 的火石玻璃上，设反射光为线偏振光，则在火石玻璃中光的折射角为多大？

21－6　利用布儒斯特定律可以测定不透明介质的折射率. 现测得釉质的布儒斯特角为 $58°$，求它的折射率是多少？

21－7　如图所示，三种透明介质Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的折射率分别为 n_1, n_2, n_3，它们之间的两个交界面互相平行. 一束自然光以起偏角 i_0 由介质Ⅰ射向介质Ⅱ. 欲使在介质Ⅱ和介质Ⅲ的交界面上的反射光也是线偏振光，三个折射率 n_1, n_2 和 n_3 之间应满足什么关系？



题 21－7 图



题 21－8 图

21－8　用方解石切割成一个 $60°$ 正三角形棱镜，其光轴垂直于棱镜的正三角形截面. 设非偏振光的入射角为 i，而 e 光在棱镜内的折射线与镜底边平行如图所示. 求入射角 i，并在图中画出 o 光的光路. 已知 $n_e=1.49$，$n_o=1.66$.

*第 22 章　现代光学简介

光学的发展已有两千多年的历史.人们对光的传播、辐射、成像以及光与物质的相互作用等一系列问题进行了深入的研究,形成了经典光学的理论体系.20 世纪 60 年代以来,随着激光器的发明和激光技术的应用,古老的光学焕发出了新的活力,逐步形成了非线性光学、信息光学、集成光学等现代光学的各个分支,并且在现代科学、工程技术乃至社会生活的各个领域得到了广泛的应用.本章将对非线性光学、全息照像技术和光纤通讯等内容做简单介绍.

22.1　非线性光学

在强光的作用下,介质中将出现许多新的现象,如谐波的产生、光参量放大、光束自聚焦、自感应透明、受激拉曼散射、光子回波等,研究这些现象的学科称为非线性光学,它是现代光学的一个重要分支.

22.1.1　强光下光学介质的极化

电场能引起电介质的极化.如图 22 − 1 所示,极化后的电介质分子都具有一定的电偶极矩,介质中单位体积的总分子电矩不为零.定义介质的电极化强度为

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{p}_i}{\Delta V}$$

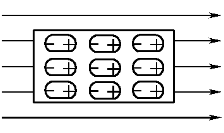


图 22 − 1　介质的极化

实验表明,在弱光作用下,介质的极化强度与光波中的电场强度 E 成正比,即

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E} = \alpha \boldsymbol{E} \tag{22-1}$$

上式反映的是介质的线性极化,表明在弱光作用下,介质对外场的响应 P 与电场强度 E 成线性关系.这种线性关系可以直接得到光的独立传播和叠加原理,从而能够解释弱光在介质的传播、反射、折射、干涉、衍射、偏振等现象.这些属于线性光学的范畴.

随着激光的问世,人们有了强光光源,发现在强光作用下,介质的极化强度 P 与入射光的场强 E 的关系可以表示为

$$P=\alpha E+\beta E^2+\gamma E^3+\cdots \tag{22-2}$$

式中 α,β,γ 为与介质有关的系数. 通常这些系数的值是依次递减的. 理论表明,式(22－2)中相邻两项的比值为

$$\frac{\beta E^2}{\alpha E}\approx\frac{\gamma E^3}{\beta E^2}\approx\cdots\approx\frac{E}{E^{at}}$$

即

$$\frac{\beta}{\alpha}\approx\frac{\gamma}{\beta}\approx\cdots\approx\frac{1}{E^{at}}$$

式中 E^{at} 为原子内部的平均电场强度,约为 $10^{10}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

对于普通光源,所发出光波中 E 场强的数量级约为 $10^4\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$. 显然 $E\ll E^{at}$,有 $\beta E^2\ll\alpha E$,式(22－2)中从第二项起都很小,非线性项的影响可以忽略不计,此时可以写为 $P=\alpha E$,即线性光学的表达式(22－1),此时介质只表现出线性光学的性质.

由于激光中的电场强度可以达到 $10^8\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$ 数量级,与原子内部场强可以比拟,因此式(22－2)中的非线性项不能够忽略,形成了各种强光作用下的非线性光学效应. 下面对几种主要的非线性光学效应做一简要介绍.

22.1.2 倍频效应和混频效应

1961 年,佛兰肯(Franken)用 $\lambda_0=0.6943\ \mu\mathrm{m}$ 的红宝激光入射石英晶体,经透镜会聚后,发现在红色聚焦点周围有蓝紫色光泽出现,其波长 $\lambda=0.3472\ \mu\mathrm{m}=\lambda_0/2$,如图22－2所示. 这一现象说明一部分红光经过石英晶体后,频率增加了一倍,这种现象称为倍频效应,它是一种典型的非线性光学效应.

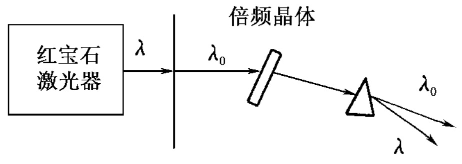


图 22－2 光学二倍频效应实验装置

设入射单色激光的场强为 $E_0\cos\omega t$,忽略式(22－2)中三次以上的非线性项,有

$$P=\alpha E+\beta E^2=\alpha E_0\cos\omega t+\beta {E_0}^2\cos^2\omega t=\frac{1}{2}\beta {E_0}^2+\alpha E_0\cos\omega t+\frac{1}{2}\beta {E_0}^2\cos 2\omega t \tag{22-3}$$

式中第一项不随时间变化,称为直流项. 第二项为与入射波频率相同的基频部分,而第三项则为两倍于入射光频率的倍频部分,表明介质将辐射倍频光波. 更高次非线性项将导致更高次的谐波. 能否出现高次谐波,将取决于晶体的结构. 强光下产生倍频光的物质,除石英晶体外,还有磷酸二氢氨、铌酸锂、铌酸钡钠,金属蒸气和某些液体也具有此种性能. 而具有对称中心的方解石晶体不会产生二次和更高次的偶次谐波,但可以产生三次谐波.

如果入射到介质中的是两种不同频率的强光 $E_1=E_{10}\cos\omega_1 t$,$E_2=E_{20}\cos\omega_2 t$,则合场强 $E=E_1+E_2$,代入式(22－2),略去三次以上的非线性项,有

$$P=\alpha(E_{10}\cos\omega_1 t+E_{20}\cos\omega_2 t)+\frac{1}{2}\beta {E_{10}}^2(1+\cos 2\omega_1 t)+\frac{1}{2}\beta {E_{20}}^2(1+\cos 2\omega_2 t)+$$
$$\beta E_{10}E_{20}[\cos(\omega_1+\omega_2)t+\cos(\omega_1-\omega_2)t]$$

上式中除了直流、基频、倍频项之外，还有和频（$\omega_1+\omega_2$）及差频（$\omega_1-\omega_2$）项，这意味着介质将辐射和频及差频的光波，这种现象称为光学混频现象，如图 22－3 所示. 利用光学混频效应，可以产生更多频率的强光辐射，实现光频的上转换和下转换，从而获得从微波、红外线、可见光到紫外线甚至更高频率的强光. 例如利用和频效应，可以将红外线转换为可见光进行探测，这在夜视技术和军事领域都有广泛的应用.

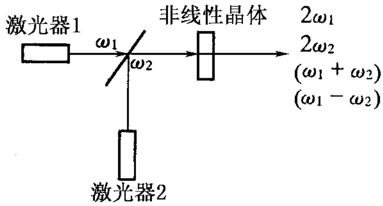


图 22－3　光学混频效应

22.1.3　光束的自聚焦

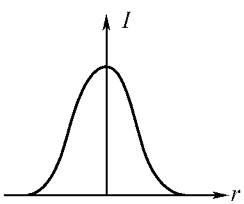
一束普通的平行光经过透镜会产生会聚或者发散，但是若通过均匀透明的平行平板玻璃却仍然是平行光. 一束强光却不然，当它通过均匀的平行平面晶体时，将会聚成直径为几个微米的细线或一串串细小的焦点，这一现象称为光的自聚焦. 此外，实验还发现，强光通过硫化镉（GeS）会出现自散焦，即原来入射的平行光束在硫化镉中会自动发散开来. 自聚焦与自散焦都是一种非线性效应.

光在介质中的速度 u 是与介电常数 ε 有关的，而 ε 与 P 有关. 因此，介质的折射率 n 也将与 P 或者与光强有关，展开到二阶项有

$$n=n_0+\frac{1}{2}n_2E^2\qquad(n_2>0)\tag{22-4}$$

当光强 E^2 增大时，n 亦增大；反之，则 n 减小.

通常，激光束的光强呈高斯分布（见图 22－4），中心轴线处光强大，四周光强逐渐减弱. 于是有 $n_{中心}>n_{边}$，这样，自然会使光线由四周向中心轴线会聚. 光的自聚焦又称为光自陷，它和通常的透镜聚焦不同. 自聚焦后的光束不再发散. 目前多认为电致伸缩是引起自聚焦的主要原因. 发生自聚焦现象时，中心轴线上功率密度剧增，达到 10^2 MW 以上，因而介质击穿甚至炸裂. 这是发展高功率激光的重要障碍，也是激光武器和受控核聚变技术的重要研究课题.



22－4　高斯光强分布

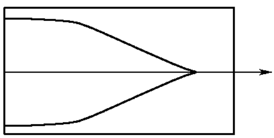


图 22－5　折射引起光束自聚焦

22.1.4 自感应透明与双光子吸收

强光通过光学介质时,可使介质由不透明或部分透明变成完全透明,这种现象称为自感应透明.介质对光的透明度与介质对光的吸收有关.一般情况下,介质的原子多处在低能级上,因此,介质总是要吸收外来的光子,成为半透明的或不透明的.但是,强光能在一瞬间使处于高能级的原子数与处于低能级的原子数相当,此刻介质不再吸收光能量,因而变成透明介质.

完全相反的情况也可能在强光通过介质时出现.例如,当弱光通过 CS_2 时,只存在单光子吸收过程 $h\nu=E_2-E_1$.由于吸收较少,介质基本上是透明的.但当强光通过介质时,原子有可能一次吸收两个甚至多个光子,由初态 E_1 跃迁至末态 E_2,即

$$h\nu_1+h\nu_2=E_2-E_1 \tag{22-5}$$

这称为双光子吸收.此时强光几乎被吸收了 2/3,CS_2 则由透明变得几乎完全不透明了.

22.2 全息照相技术

全息照相(简称全息)原理是 1948 年匈牙利人伽柏(Dennis Gabor)为了提高电子显微镜的分辨本领而提出的.他曾用汞灯做光源拍摄了第一张全息照片.其后,由于当时使用的光源相干性很差,这方面的工作进展相当缓慢.直到 1960 年激光出现以后,全息技术才获得了迅速发展,现在它已是一门应用广泛的重要新技术.

表 22-1 全息照相和普通照相的区别

类　别	全息照相	普通照相
记录方式	物光与参考光束	光学镜头成像(物光)
记录内容	物体散射光的强度及相位信息	景物本身或反射光强度
成像介质	记录后称全息片(全灰色调)	感光胶片
影像观察方式	一般借助激光还原观看	眼睛直接观看
色彩表现	彩色干涉条纹图像	彩色物体图像
影像特点	三度空间立体感的景物,只有散射光线而并无实物	平面物体图像

普通照相技术是利用了光能引起感光乳胶发生化学变化这一原理.化学变化的浓度随入射光强度的增大而增大,因而冲洗过的底片上各处会有明暗之分.但底片就仅仅记录了明暗,或者说记录了入射光波的强度或振幅.全息照相不但能记录入射光波的强度,而且还能记录下入射光波的相位,因此它和普通照相技术有着根本的区别,见表 22-1.之所以能如此,是因为全息照相不是通过透镜成像来完成的,而是利用了光的干涉现象.它采用了一种全新的

两步成像技术.第一步是全息纪录过程,即拍摄全息和制备全息照片(全息图),如图 22－6 所示;第二步是全息再现过程,即重现物像.

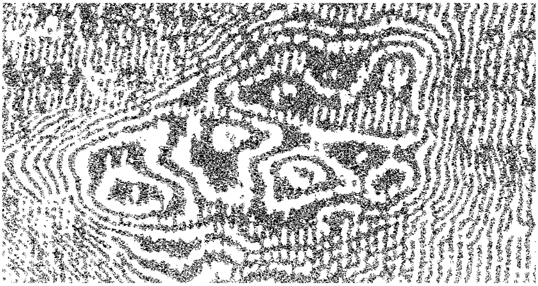


图 22－6　全息照片

22.2.1　全息纪录

拍摄全息照片的基本光路如图 22－7 所示.将激光器输出的平行光分为两束,一束直接投射到感光底片上,称为参考光束;另一束经过平面反射镜投射到被摄物体上,然后再经过物体表面反射到达感光底片,称为物光束.参考光和物光在底片处干涉叠加,形成各种复杂形状的干涉条纹(见图 22－6).干涉条纹记录光波的强度的原理是容易理解的.因为射到底片上的参考光强度是各处一样的,但物光的强度则各处不同,其分布由被摄物体上各处发来的光决定,这样参考光和物光叠加干涉时形成的干涉条纹在底片上各处的浓淡也不同.这浓淡就反映物体上各处发光的强度,这一点是与普通照相类似的.

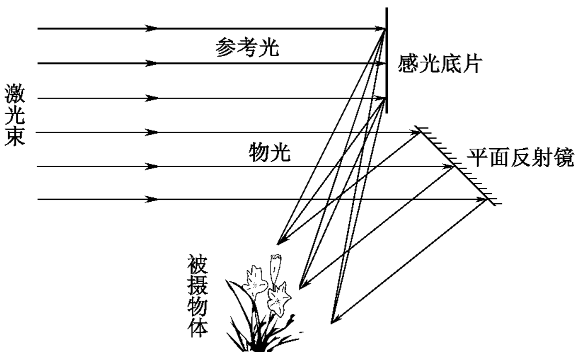


图 22－7　全息照相光路示意图

那么全息照片中的干涉条纹是如何纪录相位信息的呢?如图 22－8 所示,设 O 为物体上某一发光点,它发出的光和参考光在感光底片上形成干涉条纹.设 a,b 为相邻的两个暗纹(即冲洗后底片上的两个透光缝),与 O 点距离为 r.显然,参考光和物光在 a,b 两点的光程差

相差一个波长λ，由于参考光到达底片时各处光程均相同，因此到达a，b两处物光的光程必定相差一个波长λ，由图中几何关系，可得

$$\mathrm{d}x\sin\theta=\lambda$$

即

$$\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\sin\theta}=\frac{\lambda}{x}r \tag{22-6}$$

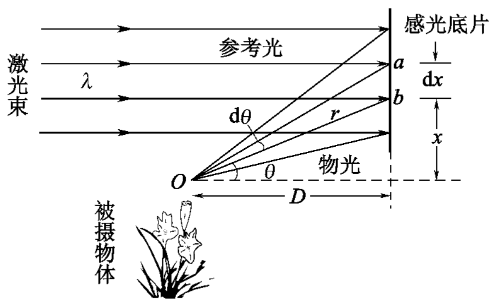


图 22－8　全息记录原理图

上式说明，在底片上同一处，来自物体上不同发光点的光，由于它们的θ或r不同，与参考光形成的干涉条纹的间距就不同，因此底片上各处干涉条纹的间距(以及条纹的方向)就反映了物光波相位的不同，这种不同实际上反映了物体上各发光点的位置(前后、上下、左右)的不同. 整个底片上形成的干涉条纹实际上是物体上各发光点发出的物光与参考光所形成的干涉条纹的叠加. 这种把相位不同转化为干涉条纹间距(或方向)不同从而被感光底片记录下来的方法是普通照相方法中不曾有的.

由于全息照片的拍摄利用光的干涉现象，它要求参考光和物光是彼此相干的. 实际上所用仪器设备以及被拍摄物体的尺寸都比较大，这就要求光源有很强的时间相干性和空间相干性. 激光，作为一种相干性很强的强光源正好满足了这些要求，而用普通光源则很难做到. 这正是激光出现后全息技术才得到长足发展的原因.

22.2.2　全息再现

全息照片在普通光源下直接观察时，看不到物体的像. 在放大镜下也只能观察到弯弯曲曲的密集干涉条纹，犹如一块复杂的透射光栅.

为了再现全息图像，需要用拍摄该照片时所用同一波长的光沿原参考光方向照射底片，如图 22－9 所示. 当我们从照片的背面向照片看去时，就可看到在原位置处被摄物体完整的立体形象，而照片就像一个观察窗口一样. 所以能有这样的效果，是因为光的衍射的缘故，此时的全息照片就相当于一个透射式光栅. 仍考虑两相邻的干涉条纹a和b，这时它们是两条透光缝，照明光通过它们将发生衍射. 沿入射方向前进的光波不产生成像效果，只是强度受到

照片的调制而不再均匀. 沿着原来从物体上 O 点发出物光方向的两束衍射光，其光程差一定也就是一个波长 λ. 这两束衍射光通过人眼会聚，将叠加形成 $+1$ 级极大，这一极大正对应着发光点 O. 通过那些 O 点所发出的光所形成透光条纹的照射光的衍射总效果就会使人眼感到在原来 O 点所在处有一发光点 O'. 被摄物体上所有反射点在照片上产生的透光条纹对照明光的衍射，就会使人眼看到一个在被摄物体原位置处一个完整的立体虚像. 值得注意的是，这个立体虚像真正是立体的，其突出特征是：当人眼换一个位置时，可以看到物体的侧面像，原来被挡住的地方这时也显露出来了，而普通的照片不可能做到这一点.

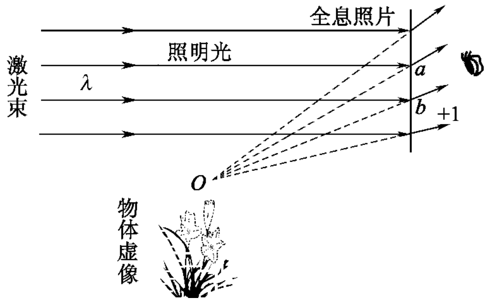


图 22－9　全息图像的再现和观察

全息照片还有一个重要特征是通过其一部分，例如一块残片，也可以看到整个被摄物体的立体图像. 这是因为拍摄全息照片时，物体上任一发光点发出的物光在整个底片上各处都与参考光发生干涉，因而在底片上各处都有该发光点的记录. 取照片的一部分用照明光照射时，这一部分上的记录就会显示出该发光点的像. 对物体上所有发光点都是这样，所不同的只是观察的窗口小了一点，因此所见到图像的光强有所减弱. 这种点－面对应记录的特点是普通照片所不具有的.

22.2.3　全息照相技术的应用

全息照相技术自发明以来，特别是随着激光技术的飞速发展，已经广泛应用于科技、工业、农业、商业、军事以及文化艺术等各个领域. 如制作全息光学元件、全息显微术、全息 X 射线显微镜、全息电影、全息干涉计量术、全息存储、特征字符识别、全息广告和全息防伪商标等. 除光学全息外，还发展了红外、微波、超声全息术，这些全息技术在军事侦察或监视上具有重要意义. 如对可见光不透明的物体，往往对超声波“透明”，因而超声全息可用于水下侦察和监视，也可用于医疗透视以及工业无损探伤等.

22.3 光纤通讯技术

光纤通信是以光波作为信息载体,以光纤作为传输媒介的通信方式. 在 20 世纪 60 年代之前,光通讯一直未发展到实用阶段,主要原因有两个,其一是没有可靠、高强度的光源;其二是没有稳定的、低损耗的传输介质. 1960 年美国物理学家梅曼(T. Maman)发明了激光器,至此第一个问题得到解决. 1966 年,英籍华人高锟 (C. K. Kao)预见利用玻璃可以制成衰减为 20 dB/km 的通信光导纤维(简称光纤). 1970 年,美国康宁公司首先研制成衰减为 20 dB/km 的光纤. 1976 年,美国西屋电气公司在亚特兰大成功地进行了世界上第一个 44.736 Mbit/s 传输速率且传输 110 km 的光纤通信系统的现场实验,使光纤通信向实用化迈出了第一步. 1981 年以后,光纤通信技术产品大规模地推向市场. 历经近 20 年突飞猛进的发展,光纤通信速率由 1978 年的 45 Mbit/s 提高到目前的 40 Gbit/s. 目前光纤通讯技术已经成为衡量一个国家科学技术水平重要标志之一. 在未来的信息社会里,光纤通讯技术必将发挥巨大的作用,对人类文明的发展产生日益深远的影响.

22.3.1 光导纤维

光纤是传光的纤维波导或光导纤维的简称,它是由石英、玻璃或塑料拉成的柔软细丝,其直径在 1～100 μm 之间,像水流过导管一样,光波能沿这种细丝在其内部传播,因而把这种细丝称为光导纤维.

1. 光纤的结构和分类

光纤典型结构是多层同轴圆柱体,如图 22－10 所示,自内向外为纤芯、包层和涂覆层. 核心部分是纤芯和包层,其中纤芯由高度透明的材料制成,是光波的主要传输通道;包层的折射率略小于纤芯,使光的传输性能相对稳定. 纤芯粗细、纤芯材料和包层材料的折射率,对光纤

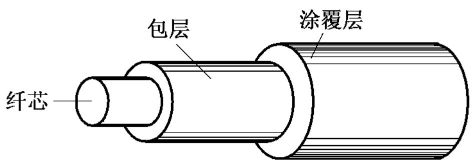


图 22－10 光纤的结构

的特性起决定性影响. 涂覆层包括一次涂覆、缓冲层和二次涂覆,以保护光纤不受水汽的侵蚀和机械擦伤,同时又增加光纤的柔韧性,起着延长光纤寿命的作用.

根据折射率在光纤横截面上的分布来划分,光纤分为阶跃型光纤和渐变型光纤两种. 阶

跃型光纤在纤芯和包层交界处的折射率呈阶梯形突变，纤芯的折射率 n_1 和包层的折射率 n_2 是均匀常数. 渐变型光纤纤芯的折射率 n_l 随着半径的增加而按一定规律逐渐减少，到纤芯与包层交界处为包层折射率 n_2. 根据光纤中光的传输模式多少，光纤可分为单模光纤和多模光纤两类. 单模光纤只传输一种模式，纤芯直径较细，通常在 4 μm～10 μm 范围内. 而多模光纤可传输多种模式，纤芯直径较粗，典型尺寸为 50 μm 左右. 按制造光纤所使用的材料分，有石英系列、塑料包层石英纤芯、多组分玻璃纤维、全塑光纤等四种. 光通信中主要用石英光纤，下面所说的光纤也主要是指石英光纤.

2. 光纤的导光原理

通常光纤的直径比光的波长大得多，因此可以忽略光的波动性质，采用几何光学方法对光在光纤中的传播进行描述.

图 22－11 为光纤沿轴线方向的剖面图，n_1 为纤芯折射率，n_2 为包层折射率. 设某一光线以 θ 角入射到光纤的垂直端面，将 θ 角称为光线的端面入射角. 光线进入纤芯后又射到纤芯和包层的交界面上，其入射角 β 称为包层界面入射角. 光线在交界面上产生折射和反射. 由于纤芯是光密媒质，包层是光疏媒质($n_1 > n_2$)根据反射和折射的菲涅耳(Fresnel)定律，当 β 满足

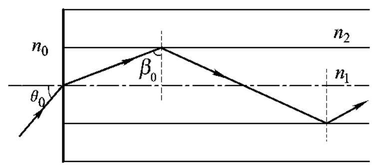


图 22－11　光纤的导光原理

$$\beta \geqslant \beta_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \tag{22-7}$$

时，光线在该处将会产生全反射，β_0 称为包层界面临界角. 与之对应的，在光纤端面上也存在一个端面临界角 θ_0，当端面入射角 $\theta \leqslant \theta_0$ 时，光线将在线芯和包层的交界面上不断地产生全反射而向前传播.

3. 光纤的数值孔径 (NA)

下面以阶跃型光纤为例，讨论光纤的端面临界角 θ_0 与介质折射率的关系.

如图 22－11，当光线以端面临界角 θ_0 入射时，根据折射定律，有

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \cos\beta_0 \tag{22-8}$$

在纤芯和包层的交界面，产生全反射，有

$$n_1 \sin\beta_0 = n_2 \tag{22-9}$$

因此有

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sqrt{1-\sin^2\beta_0} = n_1 \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2} \tag{22-10}$$

式中 $n_0 \sin\theta_0$ 定义为光纤的数值孔径(Numerical Aperture)，记为 NA，即

$$\mathrm{NA} = \sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2} \tag{22-11}$$

通常情况下纤芯和包层的折射率相差无几，有 $n_1 \approx n_2$，因此

$$\mathrm{NA}=\sqrt{n_1{}^2-n_2{}^2}\approx\sqrt{2n_1(n_1-n_2)}=n_1\sqrt{2\frac{n_1-n_2}{n_1}}=n_1\sqrt{2\Delta} \tag{22-12}$$

式中 $\Delta=\frac{n_1-n_2}{n_1}$ 为两种介质折射率的相对差.

光纤的数值孔径 NA 是表示光纤波导特性的重要参数，它反映光纤与光源或探测器等元件耦合时的耦合效率，即反映了光纤的集光本领，数值孔径越大，光纤的集光本领就越强. 由式(22－12)可知，NA 仅决定于光纤的介质折射率，与光纤的几何尺寸无关. 因此，在制作光纤时可将 NA 做的很大而光纤的截面积很小，使光纤柔软容易弯曲，这也是其他传输介质所不能比拟的.

4. 光纤的传输特性

光纤的传输特性，主要指光纤的损耗特性和色散特性.

1）光纤的损耗特性

光波在光纤中传输，随着距离的增加光功率逐渐下降，这就是光纤的传输损耗. 该损耗直接关系到光纤通信系统传输距离的长短，是光纤最重要的传输特性之一. 自光纤问世以来，人们在降低光纤损耗方面做了大量的工作，目前 1.31 μm 的光纤损耗值在 0.5 dB·(km)$^{-1}$ 以下，而 1.55 μm 的损耗为 0.2 dB·(km)$^{-1}$ 以下，这个数量级接近了光纤损耗的理论极限. 形成光纤损耗的原因很多，其损耗机理较为复杂，其主要因素有吸收损耗和散射损耗，还有来自光纤结构的不完善等.

不论是吸收损耗还是散射损耗，我们可以定义光纤的损耗系数. 若入射光强为 I_0，在光纤中经过 L 千米长的距离，其光强为 I，则光纤的损耗系数

$$\alpha=\frac{10}{L}\lg\frac{I_0}{I}\ \mathrm{dB} \tag{22-13}$$

其单位为分贝每千米.

(1) 吸收损耗　光纤的吸收损耗是指通过介质吸收，光纤将传输的光能变成热能，从而造成光功率的损失. 吸收损耗有三个原因：一是本征吸收；二是杂质吸收；三是原子缺陷吸收.

① 本征吸收　光纤的本征吸收与电子及分子的谐振有关. 对于石英(SiO_2)材料，固有吸收区在红外区域和紫外区域，其中，红外吸收区的中心波长在 8 μm～12 μm 范围内，对光纤通信波段影响不大. 对于短波光纤不引起损耗，对于长波长光纤引起的损耗小于 1 dB·(km)$^{-1}$. 紫外吸收区中心波长在 0.16 μm 附近，尾部拖到 1 μm 左右，已延伸到光纤通信波段.

② 杂质吸收　由于一般光纤中含有铁、镍、铜、锰、铬、钒、铂等过渡金属和水的氢氧根离子，这些杂质造成的附加吸收损耗称为杂质吸收. 金属离子含量越多，造成的损耗就越大. 降低光纤材料中过渡金属的含量可以使其影响减小到最小的程度. 为了使由这些杂质引起的损耗小于 1 dB·(km)$^{-1}$，必须将金属离子的含量减小到 10^{-9} 以下. 这样高纯度石英材料的生长技术已经实现. 目前，光纤中杂质吸收主要由于原料中所含水份以及含氢化合物，这些化合物在合成石英玻璃时与氧作用能形成氢氧根离子.

③ 原子缺陷吸收　原子缺陷吸收是由于加热过程或者由于强烈的辐射造成，玻璃材料会受激而产生原子的缺陷，引起吸收光能，造成损耗．对于普通玻璃，在 3000 rad 的伽玛射线的照射下，可能引起损耗高达 20000 $\mathrm{dB\cdot(km)^{-1}}$．但是有些材料受到影响比较小，例如掺锗的石英玻璃，对于 4300 rad 的辐射，仅在波长 0.82 μm 引起损耗 16 $\mathrm{dB\cdot(km)^{-1}}$．因此选择适当的材料，可以原子缺陷吸收损耗．

（2）散射损耗　由于光纤材料密度的微观变化以及各成分浓度不均匀，使得光纤中出现折射率分布不均匀的局部区域，从而引起光的散射，将一部分光功率散射到光纤外部，由此引起的损耗称为本征散射损耗．本征散射可以认为是光纤损耗的基本限度，又称瑞利（Rayleigh）散射．此外，物质在强大的电场作用下，会呈现非线性，即出现新的频率或输入的频率得到改变．这种由非线性激发的散射有两种，即受激喇曼（Raman）散射和受激布里渊（Brillouin）散射．

2）光纤的色散特性

由于光纤中所传信号的不同频率成分，或信号能量的各种模式成分，在传输过程中，因群速度不同互相散开，引起传输信号波形失真，脉冲展宽的物理现象称为色散．光纤色散的存在使传输的信号脉冲畸变，从而限制了光纤的传输容量和传输带宽．从机理上说，光纤色散分为材料色散，波导色散和模式色散．前两种色散由于信号不是单一频率所引起，后一种色散由于信号不是单一模式所引起．光纤的色散问题可以通过光孤子通讯加以解决．在单模光纤中，当光强增加到一定程度时，会出现非线性效应，在一定的条件下，非线性效应可以与光纤中的色散效应互相补偿，从而形成无畸变的光脉冲，这时的光脉冲宽度、形状以及传播速度将不再变化，犹如一个孤立的粒子，称为孤立子．这种孤立子的脉冲宽度极小，仅仅只有 0.2 μm，因此可以用来实现超大容量、超长距离的光孤子通讯．

22.3.2　光纤通讯的工作原理

通信就是各种形式信息的转移或传递．通常的具体做法是首先将拟传递的信息设法加载或调制到某种载体上，然后再将被调制的载体传送到目的地，再将信息从载体上解调出来．

光纤通信系统中电端机的作用是对来自信息源的信号进行处理；发送端光端机的作用则是将光源（如激光器或发光二极管）通过电信号调制成光信号，输入光纤传输至远方；接收端的光端机内有光检测器（如光电二极管）将来自光纤的光信号还原成电信号，经放大、整形、再生恢复原形后，输至电端机的接收端．

对于长距离的光纤通信系统还需中继器，其作用是将经过长距离光纤衰减和畸变后的微弱光信号经放大、整形、再生成一定强度的光信号，继续送向前方以保证良好的通信质量．目前的中继器多采用光—电—光形式，即将接收到的光信号用光电检测器变换为电信号，经放大、整形、再生后再调制光源将电信号变换成光信号重新发出，而不是直接放大光信号．近年来，适合作光中继器的光放大器（如掺铒光纤放大器）已研制成功，这就使得采用光纤放大器的全光中继及全光网络将会变得为期不远．

22.3.3 光纤通讯的优势和特点

与电缆或无线电等电通信方式相比，光纤通信的优点如下：

（1）传输频带极宽，通信容量很大

光纤通讯最突出的优点是频带宽，通讯容量大，它是无线电通讯容量的 $10^4 \sim 10^5$ 倍. 理论上一个光纤通道可以同时开通 100 亿门电话或着是传送 1000 万套电视节目. 而实际应用中数百根光纤组合成的光缆，其通讯容量更是无线电通讯所无法比拟的.

（2）能量损耗低，传输距离远

光波在光纤中传播时能量损耗极低. 目前已经能制造出损耗系数低于 $0.2\ \mathrm{dB} \cdot (\mathrm{km})^{-1}$ 的光纤. 这就意味着在光纤通讯中信号可以传递更远的距离而不需要设置中继站以补充能量损耗，其传输距离为电缆通讯的数倍. 这就大大降低了通讯成本，同时提高了系统的稳定性.

（3）信号传输质量高，抗电磁干扰，耐化学腐蚀

光纤传输的信号质量高，失真度小. 光纤还有很强的抗电磁干扰能力，即使与别的电缆一起铺设，也不受其影响. 由于光缆属于石英介质，可以耐高温和耐腐蚀，在恶劣的环境下也能正常工作.

（4）光纤尺寸小，质量轻，便于传输和铺设

光纤细如发丝，一根 12 芯的光缆直径也仅有 1 cm，质量仅为 $90\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. 由于线径细，质地柔软，可绕性好，便于铺设，甚至可以直接插入已有的电缆管道，方便地扩容，特别适合飞机、轮船、宇宙飞船等各种复杂设施.

（5）光纤是石英玻璃拉制成形，原材料来源丰富，并节约了大量有色金属.

第六篇　量子物理基础

第 23 章　量子物理基础

20 世纪初，人们发现许多物理实验现象无法用经典理论给予解释，如黑体辐射、光电效应、康普顿效应及原子光谱等. 为了解释这些实验规律，必须建立新的理论. 量子物理就是在这样的背景下逐渐发展起来的一种新理论. 本章首先介绍了几个主要的实验规律以及为了解释这些规律而提出的相关假设. 然后介绍了薛定鄂方程及其在几个一维问题中的应用.

23.1　黑体辐射　普朗克能量子假设

23.1.1　热辐射

物体在任何温度下都向外发射不同波长的电磁波，也在吸收由周围其他物体发射的电磁波，即物体既发射也吸收辐射能. 研究显示：一个物体发出的辐射能以及辐射能按波长的分布与物体的温度有密切的关系. 这种能量按波长的分布随温度而不同的电磁辐射叫热辐射.

为了定量描述物体热辐射能按波长的分布规律，我们定义以下几个物理量.

单色辐射出射度　单位时间内从物体表面单位面积上发射的波长在 $\lambda \sim \lambda + \mathrm{d}\lambda$ 之间的辐射能为 $\mathrm{d}E_\lambda$，则 $\mathrm{d}E_\lambda$ 与 $\mathrm{d}\lambda$ 之比称为单色辐射出射度，用 M_λ 表示：

$$M_\lambda = \frac{\mathrm{d}E_\lambda}{\mathrm{d}\lambda} \tag{23-1}$$

单色辐射出射度 M_λ 与物体的温度和辐射的波长有关，因此 M_λ 是热力学温度 T

和 λ 的函数，M_λ 可以写成 $M_\lambda(T)$. $M_\lambda(T)$的单位是 $W \cdot m^{-3}$.

辐射出射度 从物体单位表面上所辐射的各种波长的总辐射功率称为辐射出射度，简称为辐出度，用 $M(T)$表示，它和单色辐出度的关系为

$$M(T) = \int_0^\infty M_\lambda(T)\mathrm{d}\lambda \tag{23-2}$$

辐出度的单位为 $W \cdot m^{-2}$.

23.1.2 黑体辐射定律

物体在向外发射电磁波的同时，还不断吸收外来的电磁波. 一个物体如果在任何温度下都能把照射到它上面的任何波长的电磁波完全吸收，这样的物体我们称为黑体. 在自然界中，黑体是不存在的，即使最黑的煤烟也只能吸收 99% 的入射电磁波. 如图 23-1 所示，在一个足够大的空腔壁上开一个足够小的孔，这个小孔区域就可以近似看成黑体表面，这就是一个黑体模型. 因为入射到小孔的电磁波，进入小孔后在腔内多次反射被吸收，几乎没有反射电磁波从小孔出来，它与构成空腔的材料无关. 当空腔处于某一温度时，空腔内壁便不断地发射各种电磁波，并充满腔内形成电磁场，部分电磁波将从小孔射出，由小孔射出的电磁波就可以看成黑体辐射. 对上述空腔黑体模型的辐射进行实验测量，绘出如图 23-2 所示的 $M_\lambda(T)-\lambda$ 能谱曲线. 从实验曲线可以得到关于黑体辐射的两个定律.

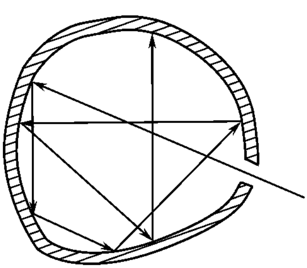


图 23-1 黑体模型

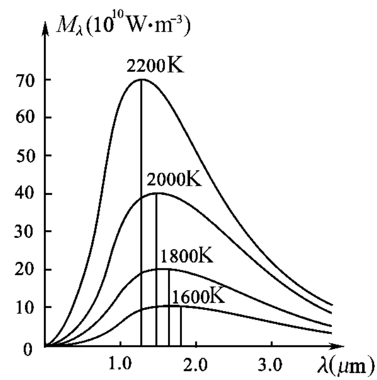


图 23-2 黑体单色辐出度的实验曲线

每条能谱曲线下的面积等于黑体的辐射出射度，即

$$M(T)=\int_0^{\infty} M_\lambda(T)\mathrm{d}\lambda$$

实验证明,黑体的辐射出射度与温度的四次方成正比,可以表示为

$$M(T)=\sigma T^4 \tag{23-3}$$

式(23－3)称为斯特藩-玻尔兹曼定律,式中比例系数 $\sigma=5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$,称为斯特藩常数.

如果测出不同温度下能谱曲线的峰所对应的波长 λ_m,将发现 λ_m 与温度 T 的乘积为一常量 b,即

$$\lambda_m T=b \tag{23-4}$$

式(23－4)称为维恩位移定律. 式中比例系数 $b=2.897\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot K}$,称为维恩常数.

黑体辐射的主要性质通过两个定律定量地表示出来,这两个定律在科学技术中有广泛的实用价值. 如利用两个定律进行高温测量、星球表面温度的估算、遥感测量、红外跟踪等.

例 23－1　由测量得到太阳辐射谱的峰值处在 490 nm. 计算太阳表面的温度和太阳的辐射出射度.

解　将太阳看成黑体,由维恩位移定律有

$$T=b/\lambda_m=5.9\times10^3\ \mathrm{K}$$

由斯特藩-玻尔兹曼定律有

$$M(T)=\sigma T^4=5.67\times10^{-8}\times(5.9\times10^3)^4=6.9\times10^7\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$$

23.1.3　普朗克能量子假设

19 世纪末,黑体辐射的理论研究成了物理学家研究的中心课题之一. 许多科学家尝试从理论上推导出黑体辐射出射度公式. 其中,有影响的是维恩、瑞利和金斯的研究工作. 但维恩推出的公式只适用于高频区,瑞利-金斯得到的公式只适用于低频区,皆不能对实验给予满意的解释. 德国科学家普朗克以维恩、瑞利-金斯两公式为基础,提出了一个试探性的公式:

$$M_\lambda(T)=\frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1} \tag{23-5}$$

式(23－5)就是著名的普朗克公式. 式中 k 为玻尔兹曼常数,h 称为普朗克常数,目前的精确值为 $h=6.626176\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$.

普朗克公式在高频区与维恩公式一致;在低频区又与瑞利-金斯公式一致.

由普朗克公式画出的曲线与实验曲线符合得极好，如图 23－3 所示.

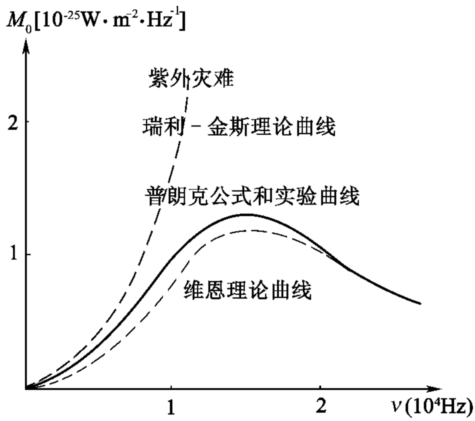


图 23－3 热辐射理论公式和实验曲线的比较

为解决经典物理在热辐射中所遇到的困难，普朗克抛弃了能量连续取值的概念，大胆的提出了能量量子化的假设.

（1）组成黑体腔壁的分子或原子可视为带电的线性谐振子；

（2）这些谐振子和空腔中的辐射场相互作用过程中吸收和发射的能量是量子化的，只能取一些分立值：$\varepsilon, 2\varepsilon, \cdots, n\varepsilon$；

（3）频率为 ν 的谐振子，吸收和发射的能量最小值 $\varepsilon = h\nu$ 称为能量子.

黑体辐射的实验事实迫使普朗克做出了能量子假设，显然，这样的假设与经典物理学的基本概念是格格不入的. 从经典物理学来看，能量子假设是荒诞的、不可思议的. 但就是这一新的重大发现，开创了物理学的新时代，标志着人类对自然规律的认识从宏观领域进入了微观领域，也为量子力学的诞生奠定了基础.

23.2 光的量子性

23.2.1 光电效应

光照射到金属表面时，有电子从金属表面逸出，这种现象称为光电效应. 光电效应是 1888 年赫兹在做验证电磁波的实验时发现的. 金属表面所逸出的电子

称为光电子. 由光电子所形成的电流叫光电流. 其后进一步的研究发现,某些物质在光的照射下,内部的束缚电子被激发成自由电子,但没有逸出表面,从而使物质的导电性能增强,这种现象也称为光电效应. 为区别起见,前者叫外光电效应,后者叫内光电效应(光电导效应和光生伏特效应). 这里讨论的是外光电效应.

光电效应实验研究的原理如图 23－4 所示,从实验结果可以得出以下规律.

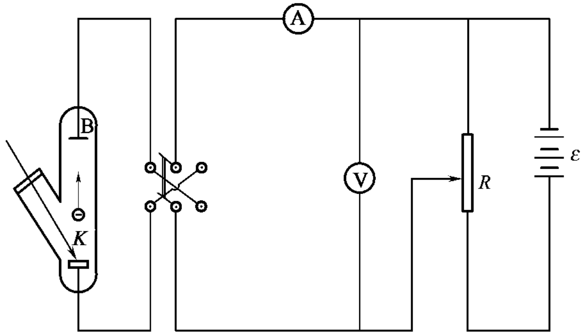
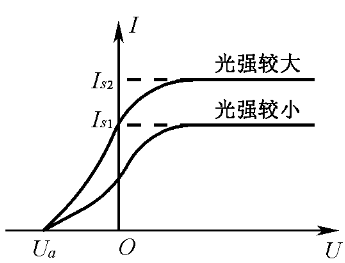


图 23－4　光电效应的实验装置

(1) 当入射光的频率不变且光强一定时,光电流 I 和两极间的电势差 U 关系如图 23－5 所示,表明光电流 I 随 U 的增加而增加,但当 U 增加到一定值时,光电流不再增加而达到一饱和值 I,饱和现象说明单位时间内从阴极逸出的光电子已全部被阳极 B 接受. 改变光强,结果表明,饱和电流与光强成正比,即单位时间内从阴极逸出的光电子数与入射光的强度成正比.



23－5　光电效应的 U～I 曲线

(2) 从实验曲线可以看出,当电势差减小到零时,光电流 I 并不等于零,当电势差为负值时,光电流才减小为零,光电子不能到达阳极. 这时的电压称为截止电压,用 U_a 表示. 由功能关系可以知道,逸出光电子的最大动能

$$\frac{1}{2}m{v_m}^2=eU_a \tag{23-6}$$

式(23-6)中,m 为电子的质量,v_m 为电子的最大初速度,e 为电子的电量. 实验研究表明 U_a 与光的强度无关,与入射光的频率成线性关系,可以表示为

$$U_a=k\nu-U_0 \tag{23-7}$$

式(23-7)中,k 为曲线的斜率,它是与金属材料无关的常数,U_0是和金属有关的常数,不同的金属其值不同. 这样有

$$\frac{1}{2}m{v_m}^2=eU_a=ek\nu-eU_0 \tag{23-8}$$

即光电子的动能是随入射光频率线性变化的. 当入射光频率小于 $\nu<\nu_0=\frac{U_0}{k}$时,光电子的动能是负值,表明金属表面没有光电子逸出,ν_0 称为光电效应的红限.

(3) 光电效应是瞬时的. 实验发现,从光子入射开始,到阴极释放光电子,无论光强多么微弱,光电效应几乎都是同时发生,其时间间隔不超过 10^{-9} s.

上述光电效应的实验规律是经典波动图像无法解释的. 按照光的波动理论,金属中的电子是在光波作用下做受迫振动,其振动频率就是入射光的频率. 由于光的强度与入射光振幅的平方成正比,因此无论入射光的频率多么低,只要光强足够大(振幅足够大),光照时间足够长,电子就能从入射光中获得足够的能量而脱离原子核的束缚,并逸出金属表面而产生光电效应,即光电效应只与入射光的强度、光照时间有关,而与入射光的频率无关.

23.2.2 爱因斯坦光子假设

为了解释光电效应,爱因斯坦在普朗克能量子假设的基础上提出了光子假设. 该假设认为,光在空间传播时,也具有粒子性,一束光就是一束以光速运动的粒子流. 这些粒子称为光量子,简称光子. 频率为 ν 的光子具有的能量为

$$\varepsilon=h\nu \tag{23-9}$$

式(23-9)中,h 为普朗克常数.

应用爱因斯坦的光子理论,对光电效应能给予很好的解释.

(1) 当频率为 ν 的单色光照射金属时,金属中的电子吸收一个光子的能量. 能量的一部分用于电子逸出金属表面所需的逸出功 A,另一部分则转变为逸出电子的初动能$\frac{1}{2}mv^2$. 根据能量守恒定律有

$$h\nu=\frac{1}{2}mv^2+A \tag{23-10}$$

这就是爱因斯坦的光电效应方程. 这个方程成功地解释了光电子的初动能与入射光频率的线性关系和红限的存在.

（2）入射光的强度取决于单位时间内通过垂直于光传播方向单位面积的能量. 设单位时间内通过单位面积的光子数为 N，则入射光的能量密度为 $Nh\nu$，当 ν 一定时，入射光越强，N 越大，照射到阴极的光子数越多，逸出的光电子数越多，因此饱和电流越大.

（3）由于光子被一个电子一次性吸收而增大能量的过程时间很短，因此光电流的产生是瞬时性的.

经典物理学中实验证明光是一种波，表现出干涉、衍射和偏振是波的基本特征. 近代物理的实验证明光又表现出粒子性即光子. 因此，光既有波动性，又有粒子性，即光具有波粒二象性. 光的波动性可以用波长 λ 和频率 ν 描述，光的粒子性可以用光子的质量、能量、动量描述. 按照普朗克能量子假设，光子的能量为

$$\varepsilon=h\nu \tag{23-11}$$

根据相对论的质能关系

$$\varepsilon=mc^2 \tag{23-12}$$

则光子的质量

$$m=\frac{h\nu}{c^2} \tag{23-13}$$

由粒子的质-速关系

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

可知，对于光子 $v=c$，由于 m 是有限的，因此，光子的静止质量为零.

光子的动量 $p=mc$，将代入有

$$p=\frac{h}{\lambda} \tag{23-14}$$

例 23－2　用波长为 350 nm 的紫外光照射金属钾（$A=2.25$ eV）做光电效应实验，求：

（1）紫外光子的能量、质量和动量；

（2）逸出光电子的最大速度和相应的截止电压.

解　（1）由 $\varepsilon=h\nu$ 有

$$\varepsilon=h\nu=\frac{hc}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{350\times10^{-9}}=5.68\times10^{-19}\ \text{J}$$

光子的质量

$$m=\frac{\varepsilon}{c^2}=\frac{5.68\times10^{-19}}{(3\times10^8)^2}=6.31\times10^{-36}\ \mathrm{kg}$$

光子的动量

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}}{350\times10^{-9}}=1.89\times10^{-27}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

（2）由

$$h\nu=\frac{1}{2}mv^2+A$$

得

$$v=\sqrt{\frac{2(h\nu-A)}{m}}=\sqrt{\frac{2(5.68\times10^{-19}-2.25\times1.6\times10^{-19})}{9.11\times10^{-31}}}=6.76\times10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

又

$$\frac{1}{2}mv=h\nu-A=eU_a$$

$$U_a=\frac{h\nu-A}{e}=\frac{5.68\times10^{-19}-2.25\times1.6\times10^{-19}}{1.6\times10^{-19}}=1.3\ \mathrm{V}$$

23.2.3 康普顿效应

1923～1925年间，康普顿和我国物理学家吴有训研究了X射线被较轻物质（石墨、石蜡等）散射的实验，实验发现散射谱线中除了有波长与原波长相同的成分外，还有波长较长的成分. 这种散射现象称为康普顿散射或康普顿效应. 康普顿效应进一步证实了光的量子性.

图23－6是康普顿散射实验装置图. X射线源发射一束波长为λ_0的X射线，经光阑后，射到一块石墨上，从石墨上再出现的X射线是沿着各个方向的. 被石墨散射的X射线的波长和强度可以利用X射线谱仪测量. 散射方向和入射方向之间的夹角为θ，称为散射角. 图23－7表示实验观察结果，实验结果可以概括为如下几点：

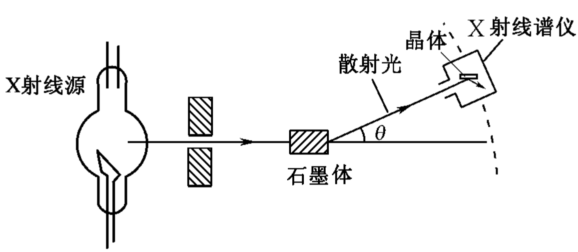


图23－6 康普顿散射实验装置图

（1）散射线中除了和原波长λ_0相同的谱线外，还有一种波长$\lambda>\lambda_0$.

(2) 波长差 $\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0$ 随散射角 θ 的增大而增加.

(3) 波长差 $\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0$ 与散射物质无关，但散射光中原波长 λ_0 的光强随散射物的原子序数增加而增大，而 λ 的光强则相对减小.

按照光的波动理论，当电磁波入射物质时，将引起原子内电子的受迫振动，振动频率应和入射频率相同，不应该出现波长变化的现象. 因此，经典物理理论无法解释康普顿效应中散射光波长变化的现象.

康普顿利用光子理论成功地解释了这一实验结果. 入射 X 射线与散射物质间的相互作用看成是光子与电子间发生弹性碰撞的结果. 设入射光的频率为 ν_0，则一个光子的能量为 $h\nu_0$，动量为 $\frac{h\nu_0}{c}\hat{n}_0$；散射物质原子的外层电子可看成是静止的自由电子，其能量和动量分别为 m_0c^2 和 0. 碰撞后散射光子的能量为 $h\nu$，动量为 $\frac{h\nu}{c}\hat{n}$；电子的能量为 mc^2，动量为 $m\boldsymbol{v}$. 这里，$\hat{n}_0$ 和 $\hat{n}$ 分别为碰撞前和碰撞后光子运动方向上的单位矢量. 如图 23－8 所示，按照能量和动量守恒定律有

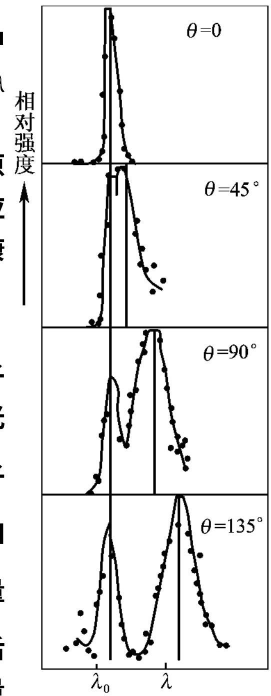


图 23－7　石墨康普顿散射实验结果

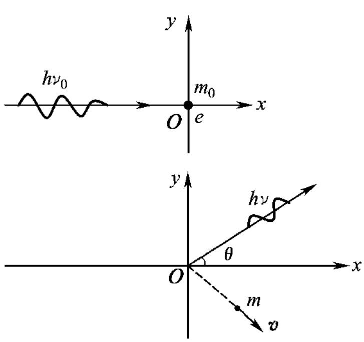


图 23－8　光子与静止电子的碰撞

$$h\nu_0+m_0c^2=h\nu+mc^2 \tag{23-15}$$

$$\frac{h\nu_0}{c}\hat{n}_0=\frac{h\nu}{c}\hat{n}+m\boldsymbol{v} \tag{23-16}$$

考虑到反冲电子的速度较大，故电子的质量应该表示为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{23-17}$$

将式(23-16)变成为 $mv=\frac{h\nu_0}{c}\hat{n}_0-\frac{h\nu}{c}\hat{n}$，两边平方后得

$$(mv)^2=\left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2+\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2-2\,\frac{h\nu_0}{c}\frac{h\nu}{c}\cos\theta \tag{23-18}$$

将式(23-15)变成 $mc^2=h(\nu_0-\nu)+m_0c^2$ 平方后减去式(23-18)得

$$m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=m_0{}^2c^4-2h^2\nu_0\nu(1-\cos\theta)+2m_0c^2h(\nu_0-\nu) \tag{23-19}$$

化简后得

$$\frac{c}{\nu}-\frac{c}{\nu_0}=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$$

即有

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{23-20}$$

上式说明散射光中出现了波长 λ 的成分，且 $\Delta\lambda$ 随 θ 角的增大而增大，由此式得出的计算值与实验值极为符合. 此外，入射的光子也会同原子的内层电子相碰，但由于内层电子被束缚得较紧，光子实际是与整个原子相碰撞的，这就使得散射光中存在原波长成分. 又当散射原子序数增加时，价电子被束缚得愈来愈紧，故原波长成分的光强随散射物质原子序数的增大而增强.

康普顿效应进一步证明了光的粒子性，其次也证明了光子与电子的相互作用过程中，能量和动量遵从守恒定律.

例 23-3 波长为 5 nm 的 X 射线与自由电子碰撞，在与入射线 60°方向观察散射的 X 射线.

求：(1) 散射 X 射线的波长；

(2) 反冲电子的动能.

解 (1) 由康普顿散射公式

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}=2\times0.0243\times\sin^2 30^\circ=0.122\ \text{nm}$$

散射 X 射线的波长为

$$\lambda'=\lambda+\Delta\lambda=5+0.122=5.122\ \text{nm}$$

(2) 由能量守恒定律，反冲电子所得动能为

$$E_k=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}=6.63\times10^{-34}\times3.00\times10^8\times\left(\frac{1}{5\times10^{-9}}-\frac{1}{5.122\times10^{-9}}\right)=582\ \text{eV}$$

23.3　氢原子光谱的实验规律　玻尔理论

23.3.1　氢原子光谱的实验规律

原子光谱的规律为原子内部结构提供了重要信息.不同原子的辐射光谱特征是完全不同的.因此,研究原子光谱的规律是探索原子结构的重要线索.氢原子是结构最简单的原子.对氢原子的光谱规律研究发现在可见光和近紫外区,氢原子的谱线如图 23-9 所示.其中 H_α,H_β,H_γ,H_δ 都在可见光区,从图中可以看出,谱线是线状分立的,光谱从长波方向的 H_α 线起向短波方向展开,谱线的间距越来越小,最后趋近一个极限位置称为线系限,用 H_∞ 表示.

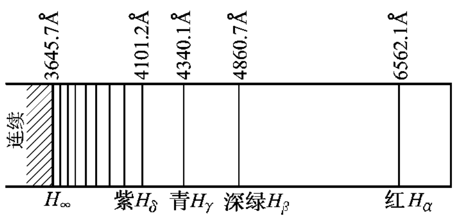


图 23-9　氢原子巴耳末系谱线图

1885 年巴耳末发现这些谱线的波长可以表示为

$$\lambda = B\frac{n^2}{n^2-4} \tag{23-21}$$

式中 $B=3.6457\times10^{-7}$ m,当 $n=3,4,5,6,\cdots$ 正整数时,就可以计算出 H_α,H_β,H_γ,H_δ,…波长.这个公式称为巴耳末公式.

1890 年,里德伯将巴耳末公式写成对称形式

$$\tilde{v}=\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)\quad(n=3,4,5,\cdots) \tag{23-22}$$

其中,$\tilde{v}=\dfrac{1}{\lambda}$ 为波数,它表示的物理意义是单位长度内所包含完整波长数目.$R=1.0967758\times10^7\ \text{m}^{-1}$,称为氢原子的里德伯常数.

后来,人们又在光谱的紫外区、红外区及远红外区发现了其他线系,这些线系有:

赖曼系：$\tilde{v}=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right),n=2,3,4,\cdots$　紫外区；

帕邢系：$\tilde{v}=R\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right),n=4,5,6,\cdots$　近红外区；

布喇开系：$\tilde{v}=R\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{n^2}\right),n=5,6,7,\cdots$　红外区；

普芳德系：$\tilde{v}=R\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{n^2}\right),n=6,7,8,\cdots$　红外区；

这些线系可统一用公式表示为

$$\tilde{v}=R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) \tag{23-23}$$

$$m=1,2,3,\cdots;$$

$$n=m+1,m+2,m+3,\cdots$$

式(23－23)称为广义巴耳末公式.

一般来说，原子光谱可以分成为若干线系，每一线系的谱线均可以写成两项之差的形式，即

$$\tilde{v}=T(m)-T(n) \tag{23-24}$$

上式称为里兹组合原则，$T(m)$，$T(n)$称为光谱项.

23.3.2　玻尔的氢原子理论

原子光谱的规律性是原子内在运动规律的体现，为揭示原子光谱的奥秘，人们对原子结构进行了大量的研究. 1912 年卢瑟福根据盖革、马斯敦所做的 α 粒子散射实验，提出了原子结构的核模型. 原子中心有一带正电荷 Ze(Z 为原子序数，e 为电子电量)的原子核，其线度不超过 10^{-15} m，却集中了原子质量的绝大部分，原子核外有 Z 个带负电的电子，它们围绕着原子核运动. 卢瑟福模型成功地解释了 α 粒子散射实验，但也遇到了不可克服的困难. 从经典电磁学理论看来，电子绕核的加速运动应该产生电磁辐射，所辐射的电磁波的频率等于电子绕核转动的频率. 由于电子辐射电磁波，电子的能量逐渐减小，运动轨道越来越小，相应的转动频率越来越高，因而结论是原子光谱是连续的，电子最终落到核上，原子系统是一个不稳定系统. 这和原子是稳定的和原子光谱是离散的线状光谱相矛盾.

为了解决经典理论所遇到的困难，玻尔将普朗克、爱因斯坦的量子理论推广到原子系统，并根据原子线状光谱的实验事实，于 1913 年提出了三条假设.

(1) 定态假设　原子中的电子只能在一些半径不连续的轨道上做圆周运动. 在

这些轨道上，电子虽做加速运动，但不辐射能量，因而处于稳定状态，称为定态.

（2）轨道角动量量子化假设　电子在定态轨道上运动时，其角动量只能取 $\frac{h}{2\pi}$ 的整数倍，即

$$L=mvr=n\frac{h}{2\pi}\quad n=1,2,3,\cdots \tag{23-25}$$

式中 m 为电子的质量，v 为电子运动的速率，r 为轨道半径，n 为量子数. 此条件称为轨道角动量量子化条件.

（3）频率条件假设　电子从某一定态向另一定态跃迁时，将发射（或吸收）光子，其频率表示为

$$h\nu=E_n-E_m \tag{23-26}$$

式中 h 为普朗克常数.

玻尔根据上述假设计算了氢原子在稳定态中的轨道半径和能量. 玻尔认为，核外电子在电子与核之间的库仑力的作用下，绕核做圆周运动，并服从牛顿运动定律，即

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{23-27}$$

将两式联立求解，得电子在定态轨道上运动的速率和半径分别为

$$\begin{aligned} r_n&=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}n^2=n^2r_1\\ v_n&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{n\hbar}\end{aligned} \tag{23-28}$$

式(23－28)中，$r_1=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi me^2}=5.29\times10^{-11}$ m 为氢原子核外电子最小的轨道半径，称为玻尔半径，用 a_0 表示.

玻尔认为原子系统的能量为电子的动能和电子与核的势能之和，规定无穷远为势能的零点，则电子在的轨道上运动时所具有的能量

$$\begin{aligned} E_n&=E_{kn}+E_{pn}=\frac{1}{2}mv_n{}^2-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}\\ &=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}=-\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0{}^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\end{aligned} \tag{23-29}$$

式(23－29)中，$n=1,2,3,\cdots$. 可见能量是量子化的，这些分立的能量值 E_1，E_2，E_3，…称为能级. 当 $n=1$ 时有

$$E_1=-\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2h^2}\right)=-13.6\ \text{eV} \tag{23-30}$$

E_1是能量最低态，称为原子的基态．$E_1, E_2, E_3, \cdots$分别称为第一激发态、第二激发态…．基态和各激发态中电子都没有脱离原子，称为束缚态．当 $n \to \infty$时，$E_\infty = 0$．这时电子脱离原子核成为自由电子．电子从基态到脱离原子核的束缚所需要的能量称为电离能．显然，氢原子的电离能为 13.6 eV.

处于激发态的原子是不稳定的，根据玻尔的频率条件，有

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{23-31}$$

用波数表示，则

$$\tilde{v} = \frac{\nu}{c} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^3 c}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{23-31}$$

与式(23－23)比较得到里德伯常数

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^3 c} = 1.097373 \times 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$$

与里德伯常数的测量值一致．可见，由玻尔理论推导式与氢原子的实验规律完全符合，氢原子能级及能级跃迁所产生的各谱线系如图 23－10 所示．

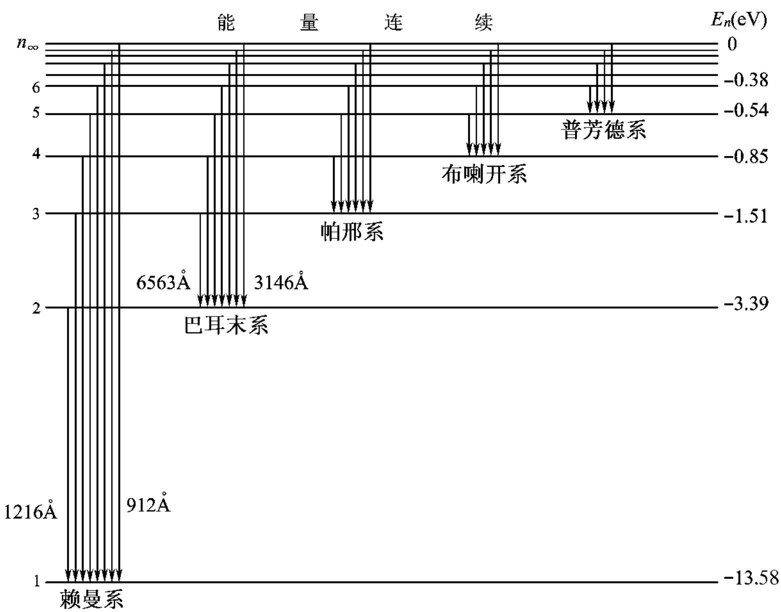


图 23－10 氢原子谱线系

玻尔理论成功地解决了原子的稳定性问题，从理论上推出了氢原子光谱的实验规律，从理论上计算出了里德伯常数．玻尔首先指出经典物理学对原子内部

现象不适用，提出了原子系统能量量子化的概念和角动量量子化的概念．玻尔创造性地提出了定态假设和能级跃迁决定谱线频率的假设，这在现代量子力学理论中仍然是两个重要的基本概念．

玻尔理论也有很大的局限性，他只能计算氢原子的频率，无法计算光谱的强度、宽度、偏振等．从理论上来讲，玻尔理论的缺陷在于没有完全摆脱经典物理的束缚．他一方面指出经典力学不适用于原子等微观粒子体系，将量子条件引进原子系统；同时他又保留了质点沿轨道运动的经典概念．

例 23－4　用能量为 $E=12.2\ \mathrm{eV}$ 的电子去轰击处于基态的氢原子．确定被轰击后的氢原子所能辐射的谱线波长．

解　设氢原子吸收能量 E 后，由基态（$n=1, E_1=-13.6\ \mathrm{eV}$）跃迁到激发态（$n, E_n$），由能量守恒定律得：

$$E=E_n-E_1=E_1\left(\frac{1}{n^2}-1\right)$$

解得

$$n=\sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{E}{E_1}}}=\sqrt{\frac{1}{1-12.2/13.6}}\approx 3$$

处于激发态的氢原子是不稳定的，当它由第 3 能态跃迁到第 2 能态时，辐射谱线的波长满足

$$\frac{1}{\lambda_{32}}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{5R}{36}$$

解得

$$\lambda_{32}=656.3\ \mathrm{nm}$$

它继续由第 2 态回到基态时，有

$$\frac{1}{\lambda_{21}}=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3R}{4}$$

解得

$$\lambda_{21}=121.5\ \mathrm{nm}$$

如果它直接由第 3 态回到基态则有：

$$\frac{1}{\lambda_{31}}=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{8R}{9}$$

解得

$$\lambda_{31}=102.6\ \mathrm{nm}$$

23.4 德布罗意假设 电子衍射实验

23.4.1 德布罗意物质波假设

1924 年法国青年物理学家德布罗意在光的波粒二象性的启发下指出：在 19 世纪人们只重视了光的波动性，忽视了光的粒子性；现在在实物粒子的研究中却发生了相反的情形，只重视实物粒子的粒子性，而忽视了它的波动性．基于此思想，德布罗意大胆地提出了物质的波粒二象性假设．他认为：质量为 m、速度为 v 的自由粒子，一方面可以用能量 E 和动量 p 来描述它的粒子性；另一方面还可以用频率 ν 和波长 λ 来描述它的波动性．其关系可以表示为

$$E=mc^2=h\nu \tag{23-32}$$

$$p=mv=\frac{h}{\lambda} \tag{23-33}$$

这两个公式称为德布罗意公式，它是光子所遵循的公式的推广．和实物粒子相联系的波称为德布罗意波或物质波．

对于静止质量为 m_0、速度为 v 的实物粒子，其质量 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$，由式(23－33)得德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

将相对论的动量公式 $p=\sqrt{2m_0E_k(1+E_k/2m_0c^2)}$ 代入上式，得

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_0E_k(1+E_k/2m_0c^2)}}$$

当 $v\ll c$ 时，$E_k\ll m_0c^2$，则式可以近似写成

$$\lambda=\frac{h}{m_0 v}$$

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}}$$

例 23－5　设电子被加速电压 $U=150\ \text{V}$ 加速，忽略相对论效应情况下计算加速后电子的德布罗意波长.

解　由于不考虑相对论效应，则有

$$E_k=\frac{1}{2}m_0v^2=eU$$

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{m_0v}$$

由上两式消去 v，得

$$\lambda=\sqrt{\frac{h^2}{2m_0eU}}=\sqrt{\frac{(6.63\times10^{-34})^2}{2\times9.11\times10^{-31}\times1.60\times10^{-19}\times150}}=10\ \text{nm}$$

例 23－6　计算质量 $m=0.01\ \text{kg}$，速率 $v=300\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 子弹的德布罗意波长.

解　由德布罗意公式，得

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}=\frac{6.63\times10^{-34}}{0.01\times400}=1.66\times10^{-34}\ \text{m}$$

可以看出，宏观物体由于波长小到实验难以测量的程度，因而宏观物体表现出粒子性.

23.4.2　电子衍射实验

物质波假设要得到承认，必须有实验直接或间接的证实. 德布罗意指出，电子的物质波波长大致接近 X 射线的波长，如果电子确有波动性，则将电子束投射到晶体上时也像 X 射线那样产生衍射现象. 1927 年戴维孙和革末首次将加速的电子束垂直投射到镍单晶的表面上，当加速电压为 54 V 时实验结果发现除了观察到由次级发射引起的电子强度的缓慢变化外，在 $\theta=50°$ 处还检测到很强的电子电流，实验原理和结果如图 23－11 所示.

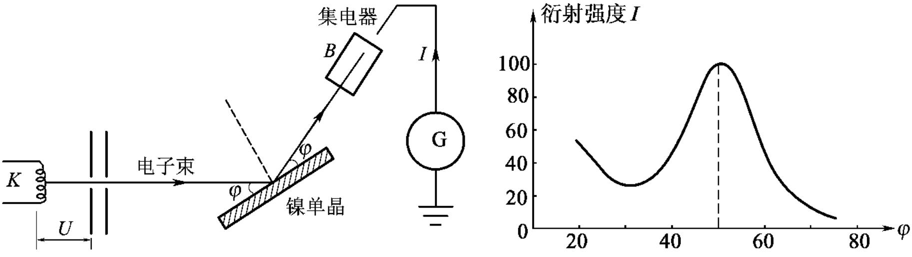


图 23－11　戴维孙–革末电子衍射实验

由布喇格公式 $2d\sin\varphi=k\lambda$，可以求出电子波的波长. 如图 23－12 所示，电子对晶面的掠射角为

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}=65^{\circ}$$

由 X 射线衍射实验测得晶面间距 $d=0.091\text{nm}$

对应于一级衍射极大，可算得电子的物质波波长

$$\lambda=2d\sin\varphi=0.165\ \text{nm}$$

另一方面由德布罗意波长公式，也可以计算电子的物质波波长，由式得

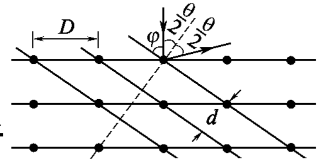


图 23－12　布喇格散射

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}}=\frac{h}{\sqrt{2meU}}=0.167\ \text{nm}$$

两者的结果惊人地一致. 这就不仅证明了电子具有波动性，而且也证明了德布罗意公式的正确性.

同年，汤姆孙用电子束垂直射向金箔和铝箔，发现同 X 射线一样，也产生了清晰的电子衍射图，这也证实了电子的波动性. 后来，人们又做了中子、质子、原子、分子的衍射实验，都说明微观粒子具有波动性. 波粒二象性是光子和一切微观粒子共同的特征，德布罗意公式是描述微观粒子波粒二象性的基本公式.

微观粒子的波动性在现代科学技术有着广泛的作用. 电子、中子的衍射技术已用来测定晶体的结构和原子的排列间隔等. 根据电子的波动性设计制造的电子显微镜，因电子的波长短、分辨率高，因而不仅能够直接看到蛋白质一类大分子，而且能分辨单个原子，为研究分子和原子的结构提供了有力的工具.

23.5　波函数　薛定谔方程

23.5.1　波函数

经典物理中，运动粒子在任意时刻都具有确定的位置和动量. 因此，粒子的运动状态可以用位置和动量完全确定. 由于微观粒子表现出波粒二象性，因此，其运动状态不能用位置和动量来确定，而必须采用新的方法来描述. 以自由粒子的运动为例加以说明.

自由粒子不受力，动量和能量为常量. 由德布罗意关系，其频率 $\nu=\dfrac{E}{h}$，波长

$\lambda=\dfrac{h}{p}$，是单色平面波. 如果该自由粒子沿 x 轴正向传播，其平面简谐波的波动方程为

$$y(x,t)=A\cos 2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right) \tag{23-34}$$

用复数形式表示为

$$y(x,t)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})} \tag{23-35}$$

将德布罗意关系式代入上式，并用 $\Psi(x,t)$ 表示，则有

$$\Psi(x,t)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})}=A\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{h}2\pi(Et-p_x x)} \tag{23-36}$$

将上式推广到三维空间的情况，则得

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=A\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{h}2\pi(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{23-37}$$

上式称为自由粒子的波函数，简称波函数.

说明波函数物理意义的是玻恩的统计解释. 他提出不论光还是电子的干涉或衍射实验，对于单个入射光子或电子，在荧光屏上出现的总是一个闪光点，这闪光点出现在屏幕何处，一般是不能预计的，但随入射粒子数的增多就逐渐地显示出某种规律性. 当到达的粒子数相当多时，就出现严格的规律，即光波或物质波的强度分布. 可见，光波或物质波描写的乃是大量光子或大量电子的统计规律性. 显然，物质波在空间某处的强度同粒子在该处出现的数目成正比. 因此，物质波的强度也就描写了单个粒子在该处出现的概率.

物质波的波函数一般是复数式，其强度可以表示为

$$|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2=\Psi(\boldsymbol{r},t)\Psi^*(\boldsymbol{r},t) \tag{23-38}$$

式(23－38)中 $\Psi^*(\boldsymbol{r},t)$ 是 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 的共轭复数.

因此，t 时刻电子在 $\boldsymbol{r}$ 处出现的概率和 $|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2$ 成正比. 显然，微观粒子出现的概率随时间、空间而变化. $\Psi(\boldsymbol{r},t)\Psi^*(\boldsymbol{r},t)$ 表示 t 时刻在 r 附近单位体积内测得粒子的概率，称为概率密度，用 P 表示. 因此，波函数不是一个物理量，而是用来表示测量概率的数学量. 波函数描写的波是概率波，而概率波没有直接的物理意义，不是任何物理实在的波动. t 时刻，微观粒子在 $\boldsymbol{r}(x,y,z)\rightarrow\boldsymbol{r}(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$ 范围内找到这个粒子的概率为

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)\Psi^*(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2\mathrm{d}V \tag{23-39}$$

由于在空间各点找到粒子的总概率为 1，显然有

$$\iiint_V \Psi(\boldsymbol{r},t)\Psi^*(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V=1 \tag{23-40}$$

式中 V 为波函数存在的全部空间，此式称为波函数的归一化条件，其波函数为

归一化波函数.

由于一定时刻在空间给定点粒子出现的概率应该是唯一的,并且是有限的,概率的空间分布不能发生突变,所以波函数必须满足单值、有限、连续三个条件.通常称为波函数的标准条件.

23.5.2 薛定谔方程

式(23-37)**给出了自由粒子的波函数,对微观粒子来讲,其运动状态需用波函数来描述.能否建立一个波函数所满足的方程,通过求解这个方程,就可以得到各种条件下微观粒子的波函数呢?**1925**年,薛定谔找到了这个方程.他指出,质量为** m **的粒子,在势函数** $U(\boldsymbol{r},t)$**的势场中运动,当它的速度远小于光速时,波函数** $\Psi(\boldsymbol{r},t)$**所满足的方程为**

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}\Psi \tag{23-41}$$

式(23-41)**就是著名的薛定谔方程.其中,** $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z^2}\right)+U(\boldsymbol{r},t)$,**称为哈密顿算符.**

薛定谔方程是量子力学中的动力学方程,它的地位就同经典力学中的牛顿运动方程一样.如果已知粒子在外力场中的势能,在满足波函数标准化条件和归一化的条件下,就能通过式(23-41)**求解出粒子的波函数.**

23.5.3 定态薛定谔方程

如果外力场不随时间变化,则势函数 U **仅与位置有关,数学上就可以将波函数分离变量,写成**

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\Psi(\boldsymbol{r})f(t) \tag{23-42}$$

将式(23-42)**代入式**(23-41),**将方程两边除以** $\Psi(\boldsymbol{r})f(t)$,**得**

$$\frac{\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial f(t)}{\partial t}}{f(t)}=\frac{\hat{H}\Psi(\boldsymbol{r})}{\Psi(\boldsymbol{r})} \tag{23-43}$$

式(23-43)**中,左边仅有时间变量,右边仅有空间变量,因此,要使等式成立,必须两边等于与时间和空间无关的常数.令这个常数为** E,**有**

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial f(t)}{\partial(t)}=Ef(t) \tag{23-44}$$

$$\hat{H}\Psi(\boldsymbol{r})=E\Psi(\boldsymbol{r}) \tag{23-45}$$

式(23－44)的解为

$$f(t)=C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t} \tag{23-46}$$

式(23－45)称为定态薛定谔方程，将 $\Psi(\boldsymbol{r})$称为定态波函数.

23.6　不确定关系

实物粒子的波动性说明微观粒子和牛顿力学所处理的“经典粒子”(质点)根本不同. 根据牛顿力学理论(或者说是牛顿力学的一个基本假设)，质点沿着一定的轨道运动，在轨道上任意时刻质点都有确定的位置和动量. 正是用位置和动量来描述一个质点在任一时刻的运动状态的. 对于微观粒子则不然，由于其粒子性，可以谈论它的位置和动量，但由于其波动性，它的空间位置要用概率波来描述，而概率波只能给出粒子在各处出现的概率，所以在任一时刻粒子不具有确定的位置，与此相联系粒子在各时刻也不可能具有确定的动量. 这也可以说，由于实物粒子具有波粒二象性，在任意时刻粒子的位置和动量都是一不确定的量. 量子力学理论证明，在某一个方向，例如 x 方向上，粒子的位置不确定量 Δx 和在该方向上的动量的不确定量 Δp_x 有一个简单的关系，这一关系叫做不确定性关系(又称测不准关系).

$$\Delta x\Delta p_x\geqslant h \tag{23-47}$$

下面我们借助于电子单缝衍射实验来粗略地推导这一关系. 如图 23－13 所示，一束动量为 p 的电子通过宽为 Δx 的单缝发生衍射，在屏上形成衍射条纹. 让我们考虑一个电子通过缝时的位置和动量. 对一个电子来说，我们不能确定地说它是从缝上哪一点通过的，而只能说它是从宽为 Δx 的缝中通过的，因此它在 x 方向上的位置不确定量就是 Δx . 它沿 x 方向的动量 p_x 是多大呢？如果说它在缝前的 p_x 等于零，在过缝后，就不再是零，如果仍是零，电子就要沿原方向前进而不会发生衍射了. 屏上电子落点沿 x 方向展开，说明电子通过缝时已有了不为零的 p_x 值，忽略次级极大可以认为电子全部落在中央衍射条纹内，因而电子束通过缝时，运动方向偏转角为 φ，则动量分量和不确定量分别表示如下：

$$\Delta p_x=p\sin\varphi=p\,\frac{\lambda}{\Delta x}\qquad\qquad \lambda=\frac{h}{p}$$

这样，在电子通过狭缝的瞬间，其坐标和动量都存在各自的不确定范围. 不难

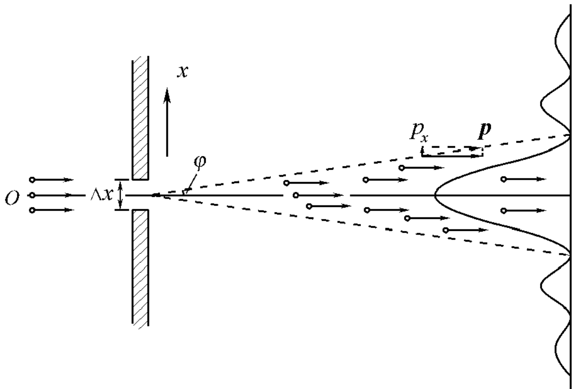


图 23－13　电子单缝衍射

看出：

$$\Delta x \Delta p_x = h$$

一般说来，如果把衍射图样的次级也考虑在内，则

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant h$$

这就是不确定性关系，它说明位置不确定量越小，则同方向上的动量不确定量越大．这个结论和实际的衍射实验结果完全相符．因为我们知道狭缝越窄，衍射现象越明显，即电子的落点在屏上铺展得越宽．不确定关系不仅适用于电子，也适用于其他微观粒子．不确定关系表明：对于微观粒子不能同时用确定的位置和确定的动量来描述．

可以证明，能量和时间也有相似的测不准关系

$$\Delta E \Delta t \geqslant h \tag{23－48}$$

其中 ΔE 是系统能量的不确定量，Δt 是时间不确定量．我们用一个特例说明上式．设质量为 m 的粒子以速度 v 作直线运动，其动能为

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

将上式两端取微分，得

$$\Delta E = \frac{p}{m} \Delta p = \frac{mv}{m} \Delta p = v \Delta p$$

另外 $x = vt$ 则有 $\Delta x = v \Delta t$，利用动量的测不准关系有

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{\Delta E}{v} v \Delta t = \Delta E \Delta t \geqslant h$$

原子处于某激发能级的平均时间称为平均寿命，用 τ 表示．利用能量和时间的不

确定关系,可见能级宽度 ΔE 与平均寿命 τ 成反比,能级寿命越短,能级宽度越宽,反之越窄.

不确定关系是海森伯于 1927 年提出的. 微观粒子的这一特性,是由于它既具有粒子性,也同时具有波动性的缘故,是微观粒子波粒二象性的必然表现.

然而应强调的是,作用量子 h 是一个极小的量,其数量级仅为 10^{-34}. 所以,不确定关系只对微观粒子起作用,而对宏观物体就不起作用了,这也就说明了为什么经典力学对宏观物体仍是十分有效的.

例 23－7　设子弹的质量为 0.01 kg,枪口的直径为 0.1 cm,试用不确定性关系计算子弹射出枪口的横向速度.

解　枪口直径可以当作子弹射出枪口时位置不确定量 Δx

$\Delta p_x = m\Delta v_x$　又　$\Delta x m \Delta v_x \geqslant h$

取等号计算

$$\Delta v_x = \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6.63\times10^{-34}}{0.01\times0.1\times10^{-2}} = 6.63\times10^{-29}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

这也就是子弹的横向速度. 和子弹飞行速度每秒几百米相比,这一横向速度是微不足道的,它的波动性不会对它的“经典式”运动以及射击时的准确性产生任何实际的影响.

例 23－8　电视显像管中电子的加速电压为 9 kV,电子枪枪口直径取 0.1 mm,求电子射出枪口的横向速度.

解　以 $\Delta x = 0.1\ \mathrm{mm} = 1.0\times10^{-4}\ \mathrm{m}$ 和 $m = 9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$ 代入不确定性关系式计算电子的横向速度为

$$\Delta v_x = \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6.63\times10^{-34}}{9.11\times10^{-31}\times1.0\times10^{-4}} = 7.3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

电子经过 9 kV 的加速电压后速度约为 $6\times10^{7}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 由于 $\Delta v_x \ll v_x$,在这种情况下,电子的波动性仍然不起什么实际影响. 电子的行为表现得跟经典粒子一样,这就是电视机中用电子产生的电视图像清晰可见的原因.

例 23－9　原子的线度为 10^{-10} m,求原子中电子速度的不确定量.

解　电子的位置不确定量为 $\Delta x = 10^{-10}$ m

由不确定性关系可知:

$$\Delta v_x = \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6.63\times10^{-34}}{9.11\times10^{-31}\times10^{-10}} = 7.3\times10^{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

按照牛顿力学计算得电子的轨道运动速度约为 $10^{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 它与上面的速度不确定量有相同的数量级,可见对原子范围内的电子,谈论其速度是没有实际意义的. 这时电子的波动性十分明显,描述它的活动时必须放弃轨道概念而代之以说明电子在空间概率分布的电子云图像.

23.7 一维势阱 势垒 隧道效应

23.7.1 一维无限深势阱

设一维运动的粒子所在的势场 $U(x)$ 满足下列条件：

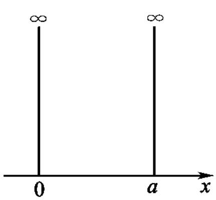
$$U(x)=\begin{cases}0 & (0<x<a)\\ \infty & (x\leqslant 0, x\geqslant a)\end{cases}$$

如图 23-14 所示，其中 a 为阱宽，其势能曲线形状似阱，所以称为一维无限深方势阱. 在阱内粒子受力为零，而在阱壁处受极大的斥力，粒子只限于在阱内运动，即粒子处于束缚状态. 势能曲线与时间 t 无关，这是一个定态问题. 下面看看如何求解定态薛定谔方程. 势能 $u(x)$ 不同，薛定谔方程不同. 首先写出阱内的定态薛定谔方程有

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_i}{\mathrm{d}x^2}=E\Psi_i, 0<x<a \qquad (23-49)$$

而在阱外 $U(x)=\infty$，按定态薛定谔方程，粒子波函数恒为零，即

$$\Psi_e(x)\equiv 0, x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant a$$



23-14 一维无限深势阱

下面求解阱内的定态薛定谔方程，将式(23-49)改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi_i}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi_i=0$$

令 $k=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$，已知 $E>0$，k 为正常数，显然 $k=\dfrac{p}{\hbar}$ 为波数，即 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$. 上式简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi_i}{\mathrm{d}x^2}+k^2\Psi_i=0$$

其解是

$$\Psi_i(x)=C\sin(kx+\delta) \qquad (23-50)$$

式中 C 和 δ 是两待定常数. 因为在阱壁上波函数必须单值、连续，即应有

$$\Psi_i(0)=\Psi_e(0)=0$$

$$\Psi_i(a)=\Psi_e(a)=0$$

即

$$\Psi_i(0)=C\sin(kx+\delta)|_{x=0}=C\sin(\delta)=0$$

$$\delta=0$$

$$\Psi_i(a)=C\sin(ka)=0$$

$$ka=n\pi, n=1,2,3,\cdots$$

因此

$$\Psi_i(x)=C\sin\frac{n\pi x}{a}$$

对波函数归一化

$$\int_0^a |\Psi_i(x,t)|^2 dx=\int_0^a |\Psi_i(x)|^2 dx=\int_0^a C^2\sin^2\frac{n\pi x}{a}dx=1$$

求得

$$C=\sqrt{\frac{2}{a}}$$

于是得定态波函数

$$\begin{cases}\Psi_i(x)=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}, n=1,2,3,\cdots \\ \Psi_e(x)=0\end{cases} \tag{23-51}$$

现在可将一维无限深势阱中粒子运动特征总结如下:

(1)在阱中运动的粒子,能量只能取一系列的分立值,即其能量是量子化的.

因为 $k=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ 且 $k=\dfrac{n\pi}{a}$,所以

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2}, n=1,2,3,\cdots \tag{23-52}$$

式中 n 称为粒子的能量量子数.可见在量子力学中,能量量子化是求解定态薛定谔方程的自然结果,不需作任何人为的假设.

(2)粒子的最低能量不为零.因为 n 不能取零,如果 n 取零那么波函数也为零,没有实际物理含义.阱中粒子的能量有一最小值

$$E_1=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

粒子的最低能量状态称为基态.而上述基态能量公式表明 a 愈小,E_1 就愈大,粒子运动愈剧烈.因此,在阱内不可能有静止的粒子.这一结论在经典理论看来不可理解,而在量子理论看来,这完全是应该的.因为如果阱中粒子的能量为零,则动量为零,则动量不确定量 $\Delta p=0$,按照量子理论所建立的测不准关系,粒子位置的不确定量应为无穷大,即 $\Delta x=\infty$.但实际上,粒子只能在势阱内出现,位置不确定量不超过势阱宽,故最小能量不能为零.

（3）粒子的物质波在势阱内形成驻波. 因为粒子在势阱内的波函数为

$$\Psi_i(x,t)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin kx\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sqrt{\frac{2}{a}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-kx})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sqrt{\frac{2}{a}}\left[\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(Et-px)}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(Et+px)}\right]$$

不难发现粒子的波函数乃是沿 x 轴正向传播的单色平面波与沿 x 轴负向传播的单色平面波的叠加. 因为

$$ka=\frac{2\pi}{\lambda}a=n\pi$$

$$a=n\frac{\lambda}{2},n=1,2,3,\cdots$$

即波函数在两阱壁间形成驻波. 这里所不同的是物质波是以复数形式表示的，图 23－15 画出了几种定态波函数和粒子的概率密度 $|\Psi_i(x)|^2$ 的分布曲线.

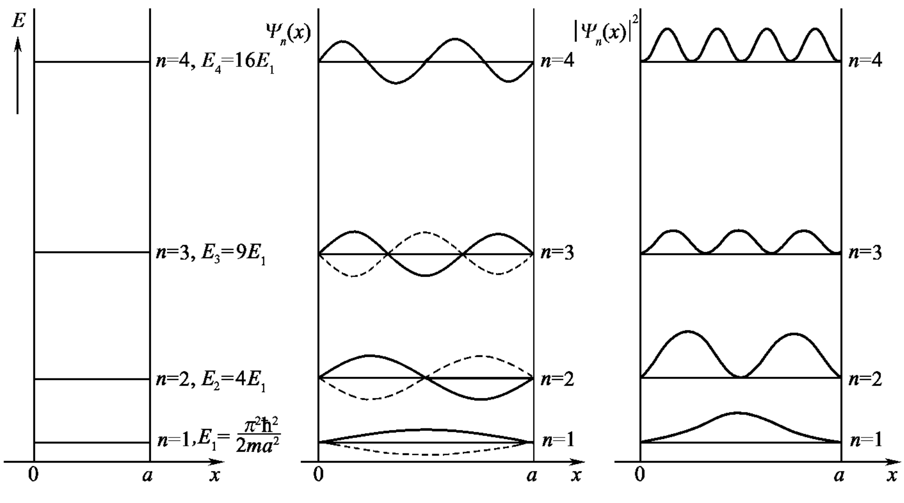


图 23－15　一维无限深势阱中的能级、波函数和概率密度

实际情况中势阱不是无限深的，例如金属中的电子、原子核中的质子就处于阱状的势能曲线中，而粒子的总能量又低于阱壁的深度. 理论证明，此时粒子也可以到达阱外，即粒子在阱外不远处出现的概率不为零. 此结果已被实验证实.

一维势阱是研究两维或三维势阱的基础. 例如对于三维势阱，粒子的波函数和能级公式分别为

$$\Psi_i(x,y,z)=\sqrt{\frac{8}{l_1l_2l_3}}\sin\frac{n_1\pi x}{l_1}\sin\frac{n_2\pi y}{l_2}\sin\frac{n_3\pi z}{l_3}\qquad(23-53)$$

$$E=\frac{n_1{}^2\hbar^2\pi^2}{2ml_1{}^2}+\frac{n_2{}^2\hbar^2\pi^2}{2ml_2{}^2}+\frac{n_3{}^2\hbar^2\pi^2}{2ml_3{}^2}\tag{23-54}$$

式中 l_1,l_2,l_3 为势阱的长、宽、高，n_1,n_2,n_3 分别是三个方向的量子数，它们均取 $1,2,3,\cdots$ 整数值.

实际上，处在超晶格的一维量子线和两维量子阱中的电子就属于一维和两维势阱中的粒子，而处在金属内的自由电子可看作三维势阱中的粒子.

例 23－10　设原子的线度约为 10^{-10} m，原子核的线度约为 10^{-14} m，已知电子的质量为 $m_e=9.11\times10^{-31}$ kg，质子的质量为 $m_p=1.67\times10^{-27}$ kg. 估计原子中电子的能量和原子核中质子的能量.

解　把电子看作是局限于原子大小的无限深势阱中，能级公式有

$$E_n=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2m_ea^2}=n^2\ \frac{(1.054\times10^{-34})^2\times3.14^2}{2\times9.11\times10^{-31}\times(10^{-10})^2}$$
$$=0.605\times10^{-17}\ n^2\ \mathrm{J}=37n^2\ \mathrm{eV}$$

例如 $E_1=37$ eV，$E_2=148$ eV.

把质子看作是局限于原子核大小的无限深势阱中，能级公式有

$$E_n=n^2\ \frac{(1.054\times10^{-34})^2\times3.14^2}{2\times1.67\times10^{-27}\times(10^{-14})^2}=2\times10^6n^2\ \mathrm{eV}$$

例如 $E_1=2$ MeV，$E_2=8$ MeV.

例 23－11　质量为 m 的微观粒子处在长度为 L 的一维无限深势阱中. 试求：

(1) 粒子在 $0\leqslant x\leqslant\frac{L}{4}$ 区间中出现的概率，并对 $n=1$ 和 $n=\infty$ 的情况求出概率值；

(2) 在哪些量子态上 $\frac{L}{4}$ 处的概率密度取极大？

解　(1) 已知粒子的定态波函数

$$\Psi_i(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

概率密度

$$p_i(x)=\Psi_i{}^*\Psi_i=\frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}$$

粒子在 $0\leqslant x\leqslant\frac{L}{4}$ 区间中出现的概率

$$P=\int_0^{\frac{L}{4}}\frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$n=1\qquad P=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}=9\%$$

$$n\to\infty\qquad P=\frac{1}{4}$$

(2) $\frac{L}{4}$处的概率密度

$$p\left(\frac{L}{4}\right)=\frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi}{L}\left(\frac{L}{4}\right)=\frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi}{4}$$

P 极大对应

$$\sin\frac{n\pi}{4}=\pm1,\frac{n\pi}{4}=(2k+1)\frac{\pi}{2},k=0,1,2,\cdots$$

即 $n=2,6,10,\cdots$

23.7.2 一维势垒 隧道效应

在两块金属(或半导体、超导体)之间夹一很薄的绝缘层(厚约 0.1 nm),构成一个叫做“结”的元件. 设电子开始时处在左方金属中,应用薛定谔方程分析电子的运动时,首先将金属中的电子当作自由粒子,设电子在金属中的势能为零. 由于电子不易通过绝缘层,故绝缘层就像一个势的壁垒,如图 23-16 所示.

设电子在势场中的势能为

$$U=\begin{cases}U_0 & (0<x<a)\\ 0 & (x\leqslant0,x\geqslant a)\end{cases}$$

这种势能分布称为方势垒. U_0和 a 分别称为势垒的高度和宽度.

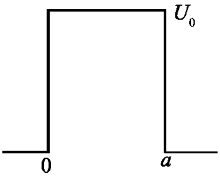


图 23-16 势垒

设质量为 m,能量为 E 的粒子由势垒的左方($x<0$)向右运动. 在经典力学中,只有能量大于 U_0的粒子才能越过势垒进入 $x>0$ 的区域. 能量小于 U_0的粒子在运动到势垒左方边缘($x=0$)时将被反射回去,不能穿过或透过势垒进入 $x>0$ 的区域. 但是在量子力学中由于微观粒子的波动性,能量小于 U_0的粒子有可能被势垒反射回来,也有可能穿过势垒进入 $x>0$ 的区域. 下面我们将就 $E<U_0$的情况进行讨论.

在 $E<U_0$的情况下,粒子波函数所满足的定态薛定谔方程如下:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi=0\quad(x\leqslant0,x\geqslant a)\tag{23-55a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}\Psi=0\quad(0<x<a)\tag{23-55b}$$

令 $k_1{}^2=\frac{2mE}{\hbar^2},k_2{}^2=\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}$

方程 23-55 可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}+k_1{}^2\Psi=0\quad(x\leqslant0,x\geqslant a)$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}-k_2{}^2\Psi=0 \quad (0<x<a)$$

方程的一般解为

$$\Psi_1=Ae^{ik_1x}+A'e^{-ik_1x} \quad x\leqslant 0 \tag{23-56a}$$

$$\Psi_2=Be^{k_2x}+B'e^{-k_2x} \quad 0<x<a \tag{23-56b}$$

$$\Psi_3=Ce^{ik_1x}+C'e^{-ik_1x} \quad x\geqslant a \tag{23-56c}$$

将上述定态波函数乘以时间因子 $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$，可知式(23－56c)中各项分别表示沿 x 轴正向和负向传播的平面波. 但 $x\geqslant a$ 区域只有沿 x 轴正向传播的波，因此

$$\Psi_3=Ce^{ik_1x} \quad (x\geqslant a)$$

定态波函数 Ψ_2 并不是周期性函数，而是按指数规律变化的，表示进入势垒区域内的粒子的波函数. 综上所述，当 $E<U_0$ 时，从势垒一侧入射的粒子，可以穿过势垒进入另一侧. 由于波的强度反映粒子出现的几率，对一个粒子来说，只能说它有一定的几率穿透势垒；对大量的粒子形成的粒子流而言，说明入射粒子中有一部分穿透势垒，另一部分将被反射回去.

这种在粒子总能量低于势垒壁高度的情况下，粒子能够越过垒壁甚至能穿透有一定宽度的势垒而逃逸出来的现象称为隧道效应，如图 23－17 所示.

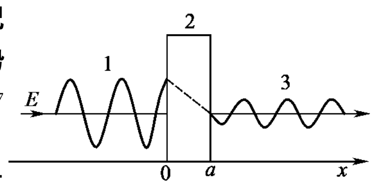


图 23－17　隧道效应

微观粒子具有穿透势垒的能力已为许多事实所证实. 例如将两段铜线扭在一起，电流仍能通过，尽管铜线表面都已被很薄的氧化铜(绝缘体)覆盖，电子是如何通过绝缘层呢？是隧道效应. 在太阳中发生的热核反应里，当两个氢核彼此接近到核引力发生作用之前要受到电力排斥，两核之间为一库仑势垒隔开，核聚变能否发生决定于氢核穿过这一势垒的能力，所以如果没有隧道效应，核聚变就会停止.

现代电子技术中使用的半导体隧道二极管，约瑟夫逊超导元件等都是利用隧道效应制成的.

23.8　氢原子

用量子物理学的观点讨论氢原子问题，就是求解氢原子的定态薛定谔方程，

得出其电子的波函数和能级，并由此分析电子在原子中的分布状态和它的光谱.氢原子的定态薛定谔方程能够精确求解.但由于数学推演过于冗长，这里只给出定态薛定谔方程的求解结果，并说明所得结果的物理图像.

23.8.1 氢原子定态

对于氢原子，可合理的假设其原子核是静止的，氢原子的状态完全由在原子核势场中的电子运动状态来决定.原子核的势场是不随时间变化的，氢原子的势能函数

$$U(r)=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电子的定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r,\theta,\varphi)-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\Psi(r,\theta,\varphi)=E\Psi(r,\theta,\varphi) \tag{23-57}$$

因为势能是球对称的，采用球坐标较方便，波函数 Ψ 和拉普拉斯算符 ∇^2 都应表示成球坐标形式.

按量子力学理论，电子在与时间无关的和具有中心球对称的原子势场中运动，存在一系列可能的定态，在这些定态上，电子能量 E、角动量大小 L 和角动量分量 L_z 都是守恒量，且具有确定值.定态波函数 $\Psi(r,\theta,\varphi)$ 必须满足有限、单值、连续的标准条件.电子的能量、角动量大小和其分量必须分别满足下列量子化的公式

$$E_n=-\frac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2h^2n^2}=-\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0{}^2\hbar^2n^2},n=1,2,3,\cdots$$

$$L=\sqrt{l(l+1)}\hbar,l=0,1,2,\cdots,n-1$$

$$L_z=m_l\hbar,m_l=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l \tag{23-58}$$

23.8.2 氢原子的量子化特征

以上公式说明，对于氢原子的定态，电子的能量、角动量大小和角动量分量的量子化值可由量子数 n，l，m_l 来确定.如果再考虑到电子的自旋，还有 $s_z=\pm\frac{\hbar}{2}$ 两种状态，则氢原子的电子状态可由四个量子数 n，l，m_l，m_s 来描写，下面综述这四个量子数的性质.

(1) n 称为主量子数.它确定原子的能量(即电子的能量)，n 可取 1，2，3，… 等正整数，n 是在求解氢原子薛定谔方程中，要求波函数满足标准条件得出能量

量子化而引入的. 由量子力学求得的氢原子能级公式同玻尔理论中所列出的完全一致.

(2) l 称为角量子数. 它确定电子轨道角动量的值，l 可取 $0,1,2,\cdots,(n-1)$ 共 n 个值. 常用 s，p，d，f，…表示 $l=0,1,2,\cdots$各种转动状态. 它是由电子轨道转动具有量子性而出现的，也是在求解薛定谔方程中，要求波函数满足标准条件而引入的.

(3) m_l 称为轨道磁量子数. 它确定轨道角动量在空间任一方向上分量的量子化，即“空间量子化”. m_l 取 $0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$，共 $2l+1$ 个值.

(4) m_s 称自旋磁量子数. 它决定电子自旋角动量在空间任一方向上分量的量子化（自旋的空间量子化），m_s 只取两个数值，即 $\pm\frac{1}{2}$. 量子数 n,l,m_l 的一组值就对应氢原子的一个定态，即薛定谔方程的一个解，其定态波函数为：

$$\Psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\varphi)=R_{n,l}(r)Y_l^{m_l}(\theta,\varphi) \tag{23-59}$$

式中 $Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)$ 为球谐函数，$R_{n,l}(r)$ 则为拉盖尔函数.

23.8.3　氢原子中的电子分布——电子云

根据已经解出的氢原子的电子定态波函数

$$\Psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\varphi)=R_{n,l}(r)Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)$$

就可求得电子出现在原子核周围不同点的概率密度

$$|\Psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\varphi)|^2$$

而

$$|\Psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\varphi)|^2\mathrm{d}V$$

则代表电子出现在距核为 r，方位在 θ,φ 处的体积元 $\mathrm{d}V$ 中的概率. 根据波函数的统计解释，量子力学不能断言电子一定会出现在核外某处，只能给出电子出现在某处的几率.

由图 23-18 可以看出，在不同的状态下，在距核不同的 r 处，发现电子的几率不同. 在基态（$n=1$），发现电子几率密度最大的地方出现在 $r=a_0=0.53$ Å 处，这就是玻尔理论中的第一玻尔轨道所在的位置. 为了形象地描述电子在核周围出现的几率的三维分布，通常把电子在原子核周围出现的几率分布称为电子云. 几率密度大的地方用浓云表示，几率密度小的区域用淡云表示.

必须强调的是，所谓电子云并非指电子真的像一团云雾一样罩在原子核的周围，电子仍然是颗粒状的，只是它在原子核周围出现的是几率性的，其几率分布宛如云状.

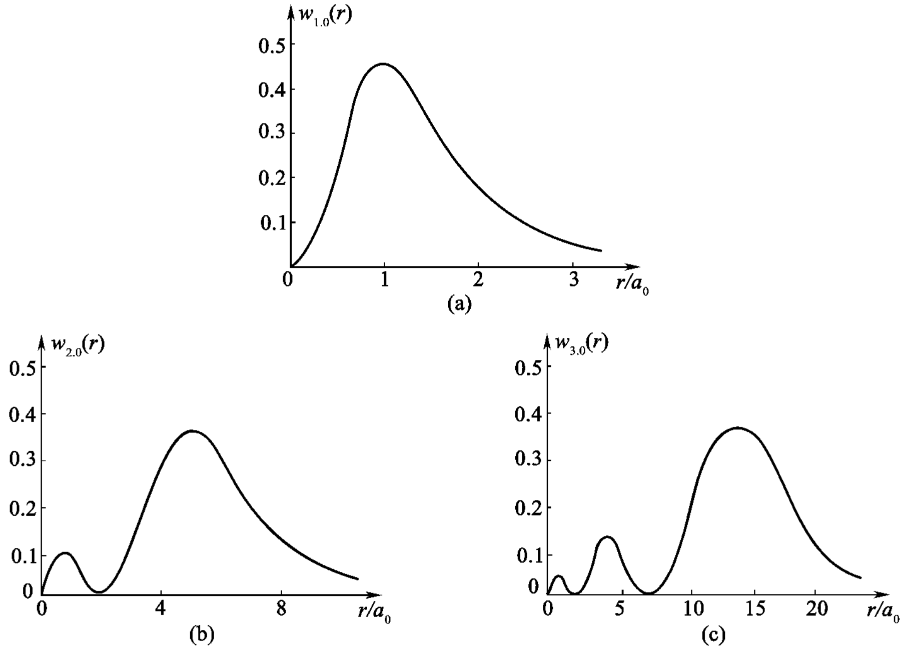


图 23－18　电子几率密度分布

23.9　斯特恩-盖拉赫实验　电子自旋

1921 年斯特恩和盖拉赫用实验证实了原子的磁矩在外磁场中的取向是量子化的.

23.9.1　电子的轨道磁矩

原子中电子绕核运动和闭合小线圈的电流相似,所以原子也有磁矩.按照磁矩的定义,磁矩 μ 的大小

$$\mu = IA \tag{23-60}$$

其中 I 是电流强度,A 是回路所包围的面积.μ 的方向垂直于线圈平面,而且和电流的方向成右手螺旋关系.一般情况下电子绕核做椭圆轨道运动,电子的电量为 e ,周期为 T,则

$$I=\frac{e}{T} \tag{23-61}$$

电流的方向和电子运动的方向相反. 在 $\mathrm{d}t$ 时间内电子矢径扫过的面积为 $\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\varphi$,绕行一周扫过的面积为

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\varphi=\int_0^T\frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

电子的角动量为 $mr^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$,所以 $r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{m}$($L$ 是角动量的大小,m 是电子的质量). 在有心力场中运动,角动量守恒,L 为常量,则

$$A=\int_0^T\frac{L}{2m}\mathrm{d}t=\frac{L}{2m}T \tag{23-62}$$

单电子的轨道运动磁矩大小为　$\mu=IA=\frac{e}{2m}L$

角动量和磁矩都为矢量,因为电子带负电,磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 和角动量 $\boldsymbol{L}$ 的方向相反,于是有

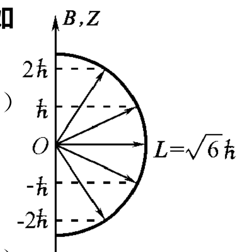
$$\boldsymbol{\mu}=-\frac{e}{2m}\boldsymbol{L} \tag{23-63}$$

在量子力学中,$L=\sqrt{l(l+1)}\hbar$, l 是角量子数. 设角动量 L 在外磁场中,取外磁场 B 的方向为 z 轴正方向,角动量在 B 方向的投影为 L_z,如图 23－19 所示,则

$$L_z=m_l\hbar \tag{23-64}$$

磁矩 μ 在 z 轴的投影 μ_z 为

$$\begin{aligned}\mu_z&=-\frac{e}{2m}L_z=-\frac{e}{2m}m_l\hbar\\&=-m_l\mu_B\end{aligned} \tag{23-65}$$



3－19　角动在外磁场方向的分量

其中

$$\begin{aligned}\mu_B&=\frac{e\hbar}{2m}=\frac{eh}{4\pi m}=9.27401541\times10^{-24}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}\\&=5.078838263\times10^{-5}\ \mathrm{eV\cdot T^{-1}}\end{aligned}$$

称为玻尔磁子.

23.9.2　斯特恩-盖拉赫实验

如图 23－20 所示,加热炉 O 为原子射线源,当时所用的是银原子,S_1,S_2 为

准直狭缝，N 和 S 为产生不均匀磁场的电磁铁的两极，P 为照相底板. 全部仪器安置在高真空容器中.

实验所根据的原理是具有磁矩的磁体在不均匀磁场中的运动将因受到磁力而发生偏转，偏转的方向与大小跟磁矩在磁场中的指向有关. 如前所述，电子在原子内的运动使原子具有一定的磁矩，因此，从原子射线源发射的原子束经过不均匀磁场时，将因受到磁力的作用而偏转. 如果原子具有磁矩而没有空间量子化，即磁矩的指向可以是任意方向，在 P 上应得到连成一片的原子沉积. 如果原子具有磁矩而且是空间量子化的，则在 P 上应得到分立的条状的原子沉积. 斯特恩和盖拉赫在实验中果然得到了成条状的原子沉积，从而证实了原子磁矩的空间量子化以及相应的角动量的空间量子化.

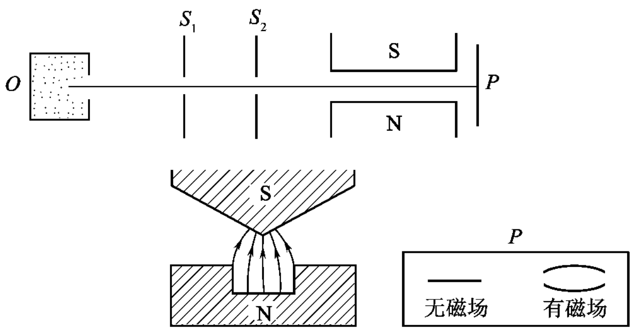


图 23－20　斯特恩-盖拉赫实验

但是，实验结果也还有令人费解的地方，这就是，银原子射线在磁场作用下，只分裂成两条上下对称的原子沉积. 按当时已知的角动量量子化的规律，电子的轨道角动量量子数为 l 时，它在空间的取向应有 $(2l+1)$ 种可能，原子射线在磁场中发生偏转就应该产生奇数条沉积，而银原子沉积却是两条.

23.9.3　电子的自旋

为了解释斯特恩-盖拉赫实验的结果，1925 年乌伦贝克和哥德斯密特提出电子自旋的假说. 电子除了轨道运动外，还有自旋运动，相应地具有自旋角动量和自旋磁矩. 自旋角动量 S 在外磁场方向的投影 S_z 只能取两个值，即

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2} \tag{23-66}$$

自旋磁矩 $\boldsymbol{P}_{ms}$ 和自旋角动量 $\boldsymbol{S}$ 的关系为

$$\boldsymbol{P}_{ms}=-\frac{e}{m}\boldsymbol{S}$$

式中$\frac{e}{m}$为电子的荷质比，负号表示自旋磁矩和自旋角动量的方向相反．P_{ms}在外磁场方向的投影只能取两个值，即

$$P_{ms}=\pm\frac{e\hbar}{2m} \tag{23-67}$$

乌伦贝克和哥德斯密特假定电子自旋磁矩只能有和磁场平行或反平行两个指向，因而银原子射线分裂成了两束．

乌伦贝克和哥德斯密特的电子自旋概念是在薛定谔量子理论之前提出的．后来量子力学也把自旋包括进去．它给出的结果是电子自旋角动量 S 的大小为：

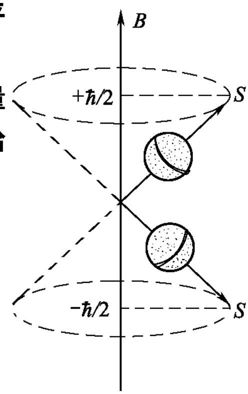
$$S=\sqrt{s(s+1)}\hbar$$

$$s=\frac{1}{2}$$

通常把自旋角动量在外磁场方向的投影表示成：

$$S_z=m_s\hbar$$

$$m_s=\pm\frac{1}{2}$$



23－21　电子的两种自旋角动量

23.10　原子的壳层结构

我们讨论了氢原子中电子的运动状态，氢原子是最简单的原子，只有一个电子．较复杂的原子中有许多电子，这些电子的运动状态如何呢？

在多电子原子中，每个电子的运动除了受到原子核势场的作用之外，还要受到其他电子的排斥作用，这时电子的薛定谔方程比单电子原子系统的要复杂得多，电子的波函数难以用解析的方程精确求解．但应用量子力学的近似计算方法可以证明，在多电子原子中，核外各电子的运动状态和氢原子相类似，仍由 4 个量子数来确定，但与氢原子有如下不同：

（1）电子的能量不仅与主量子数 n 有关，还与角量子数 l 有关．一般说来，主量子数相同而角量子数不同的电子，其能量略有不同．所以对多电子原子系统

只能说主量子数大体上决定着电子的能量.

(2) 一组量子数只能代表一个单电子的运动状态,一个电子的运动状态不能代表原子系统的运动状态.每个电子可以处在不同的状态,原子中所有电子状态的组合称为电子组态,原子的状态由电子组态决定.例如氦原子的基态就是它的 2 个电子分别处在量子态$(1,0,0,-\frac{1}{2})$和$(1,0,0,\frac{1}{2})$的电子组态.

(3) 电子在核外有一定的分布.1916 年柯塞耳提出了形象化的壳层分布模型.他认为主量子数 n 相同的电子分布在同一壳层中不同的支层上,n 不同的电子分布在不同的壳层上,因为 $l=0,1,2,3,\cdots,(n-1)$,共有 n 个值,所以主量子数为 n 的壳层中共有 n 个支壳层,对应 $l=0,1,2,3,\cdots$的支壳层分别用符号 s,p,d,f,…表示.

要想知道核外电子在不同壳层中的分布情况,必须解决以下两个问题,一是每一壳层最多能容纳多少个电子,二是电子按怎样的顺序填入各壳层.这两个问题分别由下列两条原理解决.

① 泡利不相容原理　1925 年泡利(W. Pauli)在仔细地分析了原子光谱和其他实验事实后提出:在原子中要完全确定各个电子的运动状态需要用四个量子数(n, l, m_l, m_s).并且在一个原子中不可能有两个或两个以上的电子处于相同的状态,亦即它们不可能具有完全相同的四个量子数.这个结论称为泡利不相容原理.泡利不相容原理不局限于原子体系,是量子力学的一条基本原理.

下面先计算 l 支壳层中能容纳的电子数.给定 l 后,$m_l=-l,-l+1,\cdots,l$,共计 $2l+1$ 个值;而当 n, l, m_l 都给定时,m_s 只能取$\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$两个可能的值.所以 l 支壳层中最多可容纳 $2(2l+1)$个电子.当支壳层中电子数达到最大值时,称为满支壳层或闭合支壳层.

给定主量子数 n 后角量子数 $l=0,1,2,\cdots,(n-1)$共 n 个数值.因此在 n 值一定的主壳层中所能容纳的最大电子数 Z_n 为

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) \\ &= 2\times\frac{1+(2n-1)}{2}\times n \\ &= 2n^2 \end{aligned} \tag{23-68}$$

即原子中主量子数为 n 的壳层最多能容纳 $2n^2$ 个电子.

表 23－1　　原子中各壳层和支壳层上最多可容纳的电子数

n \ l	0 s	1 p	2 d	3 f	4 g	5 h	6 i	$Z_n=2n^2$
1，K	2	—	—	—	—	—	—	2
2，L	2	6	—	—	—	—	—	8
3，M	2	6	10	—	—	—	—	18
4，N	2	6	10	14	—	—		32
5，O	2	6	10	14	18	—	—	50
6，P	2	6	10	14	18	22	—	72
7，Q	2	6	10	14	18	22	26	98

② **能量最低原理　原子系统处于正常状态时，每个电子都要占据最低能级，因为这时整个原子最稳定. 能量首先决定于主量子数** n**，所以总的趋势是先填主量子数小的壳层. 但特别要注意的是，由于能量也决定于角量子数** l**，因此填充次序并不总是简单地按** K，L，M，… **一层填满再填另一层. 从** $n=4$ **起就有先填** n **较大** l **较小的支壳层，后填** n **较小** l **较大的支壳层的反常情况出现. 总的说来，填充次序是** 1s，2s，2p，3s，3p，[4s，3d]，5p，[4s，4f，5d]，6p，[7s，5f，6d].

表 23－2　　原子中电子排布实例

原子序数	元素	各壳层上的电子数							
		K	L		M			N	
		s	s	p	s	p	d	s	p
1	H	1							
2	He	2							
3	Li	2	1						
4	Be	2	2						
5	B	2	2	1					
6	C	2	2	2					
7	N	2	2	3					
8	O	2	2	4					
9	F	2	2	5					
10	Ne	2	2	6	1				
11	Na	2	2	6	2				
12	Mg	2	2	6	2				
13	Al	2	2	6	2	1			

续表

原子序数	元素	各壳层上的电子数							
		K	L		M			N	
		s	s	p	s	p	d	s	p
14	Si	2	2	6	2	2			
15	P	2	2	6	2	3			
16	S	2	2	6	2	4			
17	Cl	2	2	6	2	5			
18	Ar	2	2	6	2	6			
19	K	2	2	6	2	6		1	
20	Ca	2	2	6	2	6		2	

用原子的壳层结构可以很好地解释元素的周期性质.表 23－2 给出部分原子基态的电子组态,可以看出元素的周期性是电子组态的周期性的反映.每个周期的第一个元素,都对应着开始填充一个新壳层,都只有一个价电子.价电子是外层电子,元素的性质主要由价电子决定,价电子相同则物理、化学性质相似.每个周期末的元素,都对应着一个壳层或一个支壳层被填满.第一周期只有 H,He 两种元素,原子基态电子组态分别是 $1s$,$1s^2$,至 He,第一壳层填满.但要注意,以后的每一个周期不是以填满 n 壳层来划分的,而是从电子填充一个 s 支壳层开始,以填满 p 支壳层结束.

思考题

23－1　一绝对黑体在 $T_1=1450\ \mathrm{K}$ 时,单色辐射出射度的峰值所对应的波长 $\lambda_1=2\ \mu\mathrm{m}$,当温度降低到 $T_2=976\ \mathrm{K}$ 时,单色辐射出射度峰值所对应的波长 $\lambda_2=$__________,两种温度下辐射出射度之比 $M_1:M_2=$__________.

23－2　为制成对可见光发生光电效应的光电管,应选择下列哪几种材料作为光电阴极材料:

(1) 铂($A=5.3$ eV);　(2) 钨($A=4.5$ eV);　(3) 钽($A=4.2$ eV);

(4) 铝($A=4.2$ eV);　(5) 钡($A=2.5$ eV);　(6) 锂($A=2.3$ eV);

(7) 铯($A=1.9$ eV).

23－3　光电效应有哪些实验规律?用光的波动理论解释光电效应遇到哪些困难?

23－4　波长为 $\lambda=300$ nm 的紫外光照射某金属,测得光电子的最大速度为 $5\times10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,该金属的截止波长为__________.

23－5　从热辐射、光电效应、康普顿效应散射实验中，人们对光的粒子性的认识是如何深化和发展的？

23－6　波长为 0.1 nm 的 X 射线，其光子的能量为________；质量为________；动量为________.

23－7　微观粒子的物理量的不确定性是怎样产生的？是否是测量中的误差？

23－8　为什么说由于不确定关系的存在，粒子的运动轨道的概念就失效了？

23－9　按照波函数的统计解释，应要求波函数具有哪些性质？

23－10　处于基态的氢原子被外来单色光激发后发出的巴耳末线系，但仅观察到两条谱线，这两条谱线的波长 $\lambda_1=$________，$\lambda_2=$________，外来光的频率________.

23－11　氢原子基态的电离能是________ eV，电离 $n=$________的激发态氢原子，电离能为 0.544 eV.

23－12　氢原子的四个量子数各代表什么？如何取值？在同一 n 的简并度为多少？

23－13　下列波函数中合理的是：

(1) $\psi(x)=\sin x$；　(2) $\psi(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$；　(3) $\psi(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$；　(4) $\psi(x)=\begin{cases}x^2, & (x>0)\\ 0, & (x<0)\end{cases}$

23－14　微观粒子的运动状态用________来描述，反映微观粒子运动的基本方程是________.

23－15　简述泡利不相容原理和能量最低原理.

23－16　当主量子数 $n=3$ 时，角量子数 l，磁量子数 m_l 的取值关系为 $l=$________，$m_l=$________；$l=$________，$m_l=$________；$l=$________，$m_l=$________. 电子的自旋磁量子数 $m_s=$________. 电子共有________种可能的状态.

习题 23

23－1　将星球作为绝对黑体，利用维恩位移定律，只要测得星球光谱的 λ_m 值便可求得该星球的温度 T. 这是测量星球表面温度的方法之一. 现测得：太阳的 $\lambda_m=0.55\ \mu\text{m}$，北极星的 $\lambda_m=0.35\ \mu\text{m}$，天狼星的 $\lambda_m=0.29\ \mu\text{m}$. 试求这些星球的表面温度.

23－2　在对黑体加热的过程中，其最大单色辐出度（最大单色发射本领）所对应的波长由 0.69 μm 变化到 0.5 μm，问其辐出度增加了几倍？

23－3　用辐射高温计测得炉壁小孔的辐射出射度（总辐射本领）为 $2.28\times10^5\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$，求炉内温度及单色辐出度的极大值所对应的波长.

23－4　地球表面每平方厘米每分钟由于辐射而损失的能量平均值为 0.13 卡，问如有一绝对黑体，它在辐射相同的能量时，温度需为多少？

23－5　从钾中移出一个电子需要 2.0 eV 的能量，今有波长为 3600 Å 的光投射到钾表面上. 问：(1)由此发射出的光电子的最大动能是多少？(2)截止电压 V_0 为多大？(3)钾

的截止波长为多大？

23－6 银的光电效应的截止波长是 2620 Å，求：(1)银的逸出功 A；(2)当入射光的波长为 2000 Å 时的截止电压 V_0.

23－7 人眼可觉察的最小光强大约是 10^{-10} W·m^{-2}. 在这一光强下问每秒有多少个光子进入人眼的瞳孔？设光波波长为 5600 Å，瞳孔面积看作是 10^{-6} m^2.

23－8 试求：(1)红光($\lambda=7\times10^{-5}$ cm)(2)X 射线($\lambda=0.25$ Å)；(3)γ 射线($\lambda=1.24\times10^{-2}$ Å)的光子的能量、动量和质量.

23－9 若一个光子的能量等于一个电子的静能量. 试问该光子的频率、波长和动量是多少？在电磁波谱中它是属于何种射线？

23－10 X 射线在电子上发生康普顿散射，若最大的波长变化是入射波长的 1%，问入射 X 光子的能量有多大？又问在 $\varphi=60°$的方向上，$\Delta\lambda$ 等于多少埃？在这种情况下反冲电子的动能是多少？

23－11 波长为 10^{-10} m 或 1 Å 的 X 射线在电子上发生康普顿散射，(1)在垂直于入射的方向上求康普顿散射的波长；(2)在这种情况下求反冲电子的动能和运动方向. 设散射前电子处于静止状态.

23－12 已知氢原子光谱中有一条谱线的波长是 1025.7 Å. 问跃迁发生在哪两个能级之间？

23－13 问氢原子光谱中哪些谱线位于可见光区(3800 Å～7800 Å)？

23－14 计算氢原子光谱赖曼线系的最短波长和最长波长(Å 表示).

23－15 对处于第一激发态($n=2$)的氢原子，如果用可见光照射，能否使之电离？

23－16 在气体放电管中，用能量为 12.2 eV 的电子去轰击处于基态的氢原子，试确定此时氢所能发出的谱线的波长.

23－17 用可见光照射能否使处于基态的氢原子受到激发？如果改用加热的方法，问至少应加热到多少温度才能使之激发？要使氢原子电离，问至少要加热到多高温度？(提示：温度为 T 时原子平均功能为 $3kT/2$，设在碰撞中可交出其动能的一半.)

23－18 试由赖曼线系主线(第一条线)波长 $\lambda_1=1215$ Å，巴耳末系主线波长 $\lambda_2=6562$ Å 和帕邢系的极限波长 $\lambda_3=8203$ Å；计算氢原子的电离能.

23－19 为使电子的德布罗意波长为 1 Å，问需要多大的加速电压？

23－20 具有能量为 15 eV 的光子，被处于基态的氢原子中的电子所吸收而形成一光电子. 问此光电子远离质子时的速度多大？它的德布罗意波长为多少？

23－21 一束带电粒子经 200 V 的电势差加速以后，测得其德布罗意波长为 0.02 Å. 已知这带电粒子所带电量与电子电量相等. 求这粒子的质量.

23－22 计算动能分别为 1 keV，1 MeV，1 GeV 的电子的德布罗意波长.

23－23 光子与电子的波长都是 2.0 Å，它们的动量是否相等；他们的总能量是否相等？

23 − 24 **一个质量为 m 的粒子，约束在长度为 L 的一维线段上，请根据测不准关系估计此粒子所能具有的最小能量值. 由此试计算在直径 10^{-14} m 的核内质子和中子的最小动能.**

23 − 25 **利用测不准关系估计氢原子的基态能量和第一玻尔轨迹半径**（**提示**：**写出氢原子的能量的表示式，然后，利用测不准关系分析使此级量为最小值的条件**）.

23 − 26 **当一电子束通过** 0.8 Wb · m^{-1}**的匀强磁场时，自旋取向与此磁场“顺向”和“反向”的两种电子的能量差是多少？**

23 − 27 **一个粒子处于大小为 a 的无限深势阱的基态. 求在**：(1)$x=a/2$；(2)$x=3a/4$；(3)$x=a$ **处于** $\Delta x=0.01a$ **的间隔内分别找到该粒子的几率**（**因为** Δx **很小，不需做积分**）.

23 − 28 **当一维无限深势阱的宽度**(1)**减少**，(2)**增大时，对能级的影响如何？**

23 − 29 **原子内电子的量子态由** n，l，m_l，m_s **四个量子数表征，当** n，l，m_l **一定时，不同的量子态数目是多少？当** n，l **一定时，不同的量子态数目是多少？当** n **一定时，不同的量子态数目是多少？**

23 − 30 **写出以下各量子态的角动量的大小**：(1)1s **态**；(2)2p **态**；(3)3d **态**；(4)4f **态.**

第 24 章　原子核物理和粒子物理简介

原子核物理是研究原子核的结构、变化和反应以及核能利用等问题的科学. 放射性元素和核裂变现象的发现使核物理在军事、能源、医学等科学领域得到了广泛应用,具有重大的实用价值. 粒子是比原子核更深层次的物质结构. 粒子物理研究的空间尺度小于 10^{-16} m,是人类探索物质世界的一个重要前沿阵地. 本章主要介绍原子核的基本性质、原子核能、原子核的放射性衰变,及粒子物理初步概念.

24.1　原子核的基本性质

24.1.1　原子核的组成

原子核由带单位正电荷的(proton)质子和不带电的中子(neutron)组成,质子和中子统称为核子(nucleon). 在原子核物理中通常使用“原子质量单位”,用 u 表示,它是 ^{12}C 原子质量的 1/12. 1 u $=1.660566\times10^{-27}$ kg $=931.5\mathrm{MeV}/c^2$. 质子的质量 $m_{\mathrm{p}}=1.007276$ u,中子的质量为 $m_{\mathrm{n}}=1.008665$ u. 不同的原子核内质子和中子的数目不同. 原子核中质子数即为该元素原子核的电荷数,亦即化学元素的原子序数,用 Z 表示,原子核的质量同原子的质量相差极小,若以“原子质量单位”计算原子的质量,结果都近似等于一整数,称为原子的质量数(mass number),用 A 表示. 质子数 Z 和中子数 N 与核的质量数 A 之间的关系为 $A=Z+N$.

电荷数 Z 和质量数 A 是表征原子核特征的两个重要物理量,常用 $^{A}_{Z}\mathrm{X}$ 来标记某原子核,其中 X 代表与 Z 相应的化学元素符号. 例如质量数为 4 的氦核记为 $^{4}_{2}\mathrm{He}$,质量数为 12 的碳核记为 $^{12}_{6}\mathrm{C}$.

原子核物理中,具有相同质子数 Z 和不同中子数的原子核称为同位素

(isotope);各元素的同位素统称核素(nuclide). 质量数 A 相同而质子数 Z 不同的原子核称为同量异位素. 例如,氢有三种同位素 ${}_1^1H$、${}_1^2H$(或 ${}_1^2D$)和 ${}_1^3H$(或 ${}_1^3T$),分别称为氢、氘、氚,铀有两种同位素 ${}_{92}^{235}U$ 和 ${}_{92}^{238}U$,而 ${}_1^3H$ 和 ${}_2^3He$ 则为同量异位素.

24.1.2　原子核的大小

原子核的大小可以用实验来测定. 实验表明,核的体积总是正比于质量数 A. 如果将原子核看作球体,则其半径 R 的三次方与质量数 A 成正比,可写成

$$R=r_0A^{1/3} \tag{24-1}$$

式中 r_0 为比例系数,实验测得 $r_0=1.2\times10^{-15}$ m. 这一结论意味着核物质基本上是均匀分布的. 在一切原子核中,核物质的密度是一个常数,$\rho_m=2.29\times10^{17}$ kg·m^{-3},这一数值比水的密度大了百万亿倍. 原子核中质子带电,而原子核中电荷大多是旋转椭球形状分布,核物质分布与电荷分布有相似情况. 因此,严格来说,原子核大多是椭球体. 但长轴与短轴比不大于 5/4,与球体偏离不大,所以可把这些原子核近似看作球体,也有些原子核本身就是球对称的,如 ${}_8^{16}O$. 图 24-1画出了 ${}_8^{16}O$ 和 ${}_{92}^{238}U$ 两个原子核的尺寸示意图.

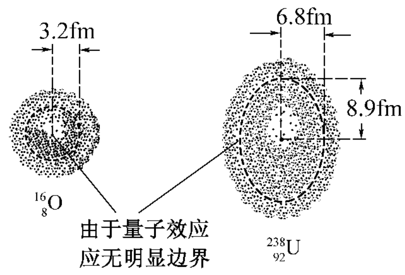


图 24-1　${}_8^{16}O$ 和 ${}_{92}^{238}U$ 核的尺寸示意图

例 24-1　计算原子核的核物质密度.

解　设原子核的质量、半径和密度分别为 m,R 和 ρ_m,则有

$$\rho_m=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{(1.66\times10^{-27})A}{\frac{4}{3}\pi(1.2\times10^{-15}A^{\frac{1}{3}})^3}=2.3\times10^{17}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

这个密度数值是极其巨大的.

24.1.3　核力

原子核中质子之间存在较强的库仑斥力,中子不带电,因而中子与质子、中

子与中子之间无库仑力作用，而核子之间的万有引力比电磁力还小 10^{39} 倍，显然不能将质子与质子、质子与中子束缚在一起形成原子核. 核的稳定性说明，核子之间一定存在一种极强的相互作用力，这种力称为核力(nuclear force)，核力具有以下重要性质：

① 核力是一种强相互作用力. 在作用范围内比电磁力强得多，主要是吸引力.

② 核力是短程力. 只有当核子间的距离小于 10^{-15} m 时才显现出来. 在大于原子核范围以外观察不到核力的存在.

③ 核力具有饱和性. 一个核子只能和它邻近的有限个数目的核子有核力作用，而不能与核内所有核子都有核力作用.

④ 核力与核子带电情况无关. 大量实验表明，无论中子和中子之间，还是质子和质子或者质子和中子之间，核力作用都大致相同.

1935 年，日本物理学家汤川秀树提出了核力的介子理论，认为核力是一种交换力，核子之间是通过交换媒介粒子 π^+，π^- 或 π^0 而产生相互作用的，并通过理论计算估计这种介子的质量约为电子质量的 200 多倍. 到 1947 年，在宇宙射线中发现了 π 介子，从而证实了 π 介子的存在. 应该指出的是，核力的介子理论虽然可以定性解释某些核现象，但对有些问题仍存在困难，尚待继续研究. 虽然如此，汤川的介子理论的历史作用仍不可忽视.

24.1.4 核的自旋与磁矩

同其他微观粒子一样，原子核也在不停地运动着，在原子核物理中一般只考虑它的自旋运动. 实验证明，质子、中子及原子核都具有自旋角动量. 和电子一样，它们的自旋角动量可表示为

$$L=\sqrt{I(I+1)}\hbar \tag{24-2}$$

式中 I 称为原子核的自旋量子数，质子和中子的自旋量子数为 $\frac{1}{2}$，原子核的自旋是内部各核子的自旋及各核子“轨道”运动(如何运动尚不清楚)的综合效应，其自旋量子数的取值可以是整数，也可以是半整数. 质量数 A 为奇数的核自旋量子数为半整数，质量数 A 为偶数的核自旋量子数为整数.

同样，原子核自旋角动量空间某方向投影也是量子化的

$$L_z=m_I\hbar \tag{24-3}$$

其中 m_I 称为核自旋磁量子数，其取值为 $0,\pm1,\cdots,\pm(I-1),\pm I$.

原子核有自旋角动量，则必然有磁矩，且磁矩也由量子数 I 决定

$$\mu_I = g_I\sqrt{I(I+1)}\mu_N \tag{24-4}$$

其中 $\mu_N=\dfrac{e\hbar}{2m_p}=5.05\times10^{27}\ \mathrm{A\cdot m^2}$ 称为核磁子，g_I 称为原子核的 g 因子，其数值可由实验测得.

24.2　原子核的结合能　裂变和聚变

24.2.1　原子核的结合能

由实验测得的原子核的质量总是小于组成它的核子的质量和，这一差值

$$\Delta m = Zm_{\mathrm{p}}+(A-Z)m_{\mathrm{n}}-m_{\mathrm{X}}$$

称为原子核的质量亏损. 其中 m_{X} 表示原子核 ${}_Z^A\mathrm{X}$ 的质量. 根据狭义相对论质能关系，系统的质量变化必然伴随相应的能量的变化，所以有

$$E_B=\Delta mc^2=[Zm_{\mathrm{p}}-(A-Z)m_{\mathrm{n}}-m_{\mathrm{X}}]c^2 \tag{24-5}$$

由此可知，核子在组成核的过程中有能量放出，这部分能量称为原子核的结合能(binding energy)，用 E_B 表示. 这一能量也为将原子核分解成自由核子时所需给予的能量.

在计算原子核的质量亏损和结合能时. 通常采用以下两式：

$$\Delta m = ZM_{\mathrm{H}}+(A-Z)m_{\mathrm{n}}-M_{\mathrm{X}} \tag{24-6}$$

$$E_B=(\Delta m)c^2=[ZM_{\mathrm{H}}+(A-Z)m_{\mathrm{n}}-M_{\mathrm{X}}]c^2 \tag{24-7}$$

式中 M_{H} 表示 ${}_1^1\mathrm{H}$ 原子的质量，M_{X} 表示 ${}_Z^A\mathrm{X}$ 原子的质量.

原子核的结合能非常大，所以一般来说原子核是非常稳定的系统. 原子核结合的松紧程度，通常用每个核子的平均结合能来表示，称之为比结合能，记为 ε.

$$\varepsilon=\frac{E_B}{A}=\frac{(\Delta m)c^2}{A} \tag{24-8}$$

比结合能越大，原子核就越稳定. 表 24－1 列出了一些原子核的结合能及比结合能的数值. 将比结合能 ε 对核子数 A 作图，可得到核的比结合能曲线，如图 24－2 所示.

表 24－1　　　　原子核的结合能及比结合能

核	结合能 E_B(MeV)	核子的比结合能 ε(MeV)	核	结合能 E_B(MeV)	核子的比结合能 ε(MeV)
$^{2}_{1}D$	2.23	1.11	$^{14}_{7}N$	104.63	7.47
$^{3}_{1}H$	8.47	2.83	$^{15}_{7}N$	115.47	7.70
$^{3}_{2}He$	7.72	2.57	$^{16}_{8}O$	127.5	7.97
$^{4}_{2}He$	28.3	7.07	$^{19}_{9}F$	147.75	7.78
$^{6}_{3}L_{i}$	31.98	5.33	$^{20}_{10}Ne$	160.60	8.03
$^{7}_{3}L_{i}$	39.23	5.60	$^{23}_{11}Na$	186.49	9.11
$^{9}_{4}Be$	58.0	6.45	$^{24}_{12}Mg$	198.21	8.26
$^{10}_{5}B$	64.73	6.47	$^{56}_{26}Fe$	492.20	8.79
$^{11}_{5}B$	76.19	6.93	$^{63}_{29}Cu$	552	8.75
$^{12}_{6}C$	92.2	7.68	$^{120}_{50}Sn$	1020	8.50
$^{13}_{6}C$	93.09	7.47	$^{238}_{92}U$	1803	7.58

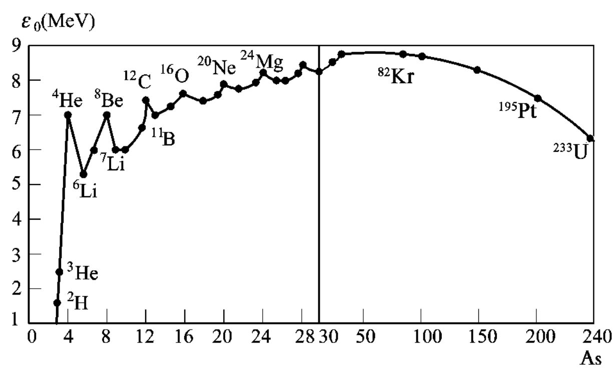


图 24－2　比结合能曲线

由图 24－2 和表 24－1 可以看出，比结合能有以下特点：

（1）核子数小于 30 的原子核中，比结合能随核子数呈周期性变化，核子数是 4 的整数倍的原子核的比结合能较大，核较为稳定. 总的来说，轻核的比结合核能变化的趋势是随核子数增加而增加.

（2）核子数介于 30 到 120 之间的中等质量核的比结合能较大，近似于一常数，这些核最为稳定.

（3）核子数大于 120 的原子核的比结合能随核子数增加而减小，尤其是核子数大于 200 的核，结合较松散.

当比结合能小的核变成比结合能大的核时，就会放出能量. 由核的比结合能

特点可知，利用原子核的结合能有两种方法：一是重核的裂变，二是轻核的聚变.

例 24－2　计算铀 ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ 的结合能和比结合能.

解　已知 $M_{\mathrm{H}}=1.007825\ \mathrm{u}$，$m_{\mathrm{n}}=1.008665\ \mathrm{u}$，

$M_{{}^{235}_{92}\mathrm{U}}=235.043915\ \mathrm{u}$，$1\ \mathrm{u}=931.4943\ \mathrm{MeV}/c^2$

$$\begin{aligned}E_B&=[ZM_{\mathrm{H}}+(A-Z)m_{\mathrm{n}}-M_{{}^{235}_{92}\mathrm{U}}]c^2\\&=(92\times1.007825+143\times1.008665-235.043915)\times931.4943\\&=1783.886\ \mathrm{MeV}\end{aligned}$$

$$\varepsilon=\frac{E_B}{A}=\frac{1783.886}{235}=7.591\ \mathrm{MeV}$$

*24.2.2　重核的裂变

原子核裂变(fission)是指一个重核自发地或吸收外界粒子后分裂成两个质量相差不多的碎片的核反应.

1936 年～1939 年间，哈恩(O. Hahn)、迈特纳(L. Meitner)和斯特拉斯曼(F. Strassmann)用慢中子(能量在 1eV 以下)轰击铀核，发现 ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ 分裂成两个质量相近的中等质量的核，同时释放出 1 至 3 个快中子.

$${}^{235}_{92}\mathrm{U}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}\rightarrow{}^{137}_{56}\mathrm{Ba}+{}^{97}_{36}\mathrm{Kr}+2{}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

重核裂变能放出很大的能量，由图 24－2 可知，重核分裂为两块中重核时，比结合能 ε 将增加 1MeV，即每个粒子平均贡献约 1 MeV 的能量. 一般每个 ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ 裂变平均可放出大约 200 MeV 的能量，假如有一克 ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ 全部裂变，那么释放出来的能量可达 $8\times10^{10}\ \mathrm{J}$，相当于 2.5 吨煤的燃烧热.

裂变形成的核具有过多的中子，是不稳定的，通过一系列的 β 衰变，可以转变为正常的稳定核. 铀核裂变过程中能放出 2 个或 2 个以上的中子，如果这些中子全部被别的铀核吸收，又会引起新裂变，裂变数目按指数增大. 结果形成发散式链式反应，如图 24－3 所示. 从而释放出大量的原子能，这就是原子弹爆炸的能量来源，如果控制反应条件，使每次裂变平均只有一个中子引起新的裂变，维持稳定的链式反应，这种利用裂变能的装置称为核反应堆.

*24.2.3　轻核的聚变

两个轻原子核聚合成一个中等质量原子核的反应称为聚变反应(fussion)，在聚变反应中由于比结合能增加，因而有大量的能量放出. 例如，由氘核 ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ 生成氦核 ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$，其反应为

$${}^{2}_{1}\mathrm{H}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow{}^{3}_{2}\mathrm{He}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}+3.27\ \mathrm{MeV}$$

$${}^{2}_{1}\mathrm{H}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow{}^{3}_{1}\mathrm{H}+{}^{1}_{1}\mathrm{p}+4.04\ \mathrm{MeV}$$

$${}^{3}_{1}\mathrm{H}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow{}^{4}_{2}\mathrm{He}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}+17.58\ \mathrm{MeV}$$

$${}^{3}_{2}\mathrm{He}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow{}^{4}_{2}\mathrm{He}+{}^{1}_{1}\mathrm{p}+18.34\ \mathrm{MeV}$$

若温度足够高，上述反应都可发生，总的效果是

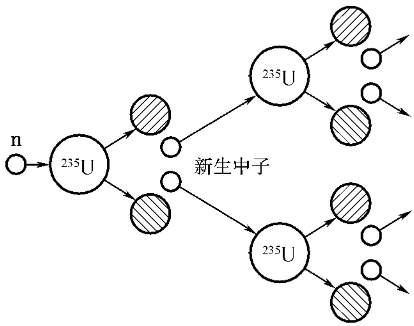


图 24－3　链式反应

$$6{}_1^2\mathrm{H} \rightarrow 2{}_2^4\mathrm{He} + 2{}_1^1\mathrm{p} + 2{}_0^1\mathrm{n} + 43.24\ \mathrm{MeV}$$

每个核子平均放出 3.60MeV 的能量. 1 克氘聚变时放出的能量是 1 克铀裂变时放出能量的 4 倍,相当于 10 吨煤完全燃烧时放出的能量. 地球表面海水中有七千分之一是由氘组成的重水. 若其中所有氘发生聚变反应,可放出 10^{25} 千瓦时的能量,可供人类使用 100 亿年. 而且聚变反应产物中只有中子有放射性,放射性污染比裂变反应要小得多,有“干净的核反应”之称.

由于原子核之间存在库仑排斥力作用,两核必须具有足够的动能来克服库仑势垒,而且势垒随着原子序数的增加而增大,所以具有低原子序数的核才能发生核聚变反应.

根据经典电磁场理论,两个原子序数为 Z_1 和 Z_2 的核的电势能为

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{(Z_1 \mathrm{e})(Z_2 \mathrm{e})}{4\pi\varepsilon(R_1 + R_2)}$$

其中 $R_1 + R_2$ 等于两核半径之和,约为 10^{-14} m,于是得到

$$E_{\mathrm{p}} \sim 0.15 Z_1 Z_2\ \mathrm{MeV}$$

即势垒高度. 如果发生聚变的核的动能小于 E_{p},就不能发生聚变,然而由量子力学我们知道,在稍低于 E_{p} 的能量下,由于势垒贯穿,仍有聚变概率,与这一能量对应的温度约为 10^9 K. 因此,大量的轻原子核聚变只有在极高温度下才能发生,这种通过加热而引起的聚变反应称为热核反应.

太阳和其他星球能量的来源,就主要依赖于轻核聚变,其主要过程有两个:

(1) 质子－质子循环(又称克里齐菲尔德(C. L. Crichfield)循环)

循环周期约为 3×10^9 年,产生的能量约占太阳放出总能量的 96%,系列核反应为

$${}_1^1\mathrm{p} + {}_1^1\mathrm{p} \rightarrow {}_1^2\mathrm{H} + \mathrm{e}^+ + \nu$$

$${}_1^1\mathrm{p} + {}_1^2\mathrm{H} \rightarrow {}_2^3\mathrm{He} + \gamma$$

$${}_2^3\mathrm{He} + {}_2^3\mathrm{He} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + 2{}_1^1\mathrm{p}$$

如图 24－4 所示.

(2) 碳－氮循环(又称贝蒂(H. A. Bethe)循环)

循环周期约为 6×10^6 年,产生的能量约占太阳放出总能量的 4%,其系列核反应为

$${}_1^1\mathrm{p} + {}_6^{12}\mathrm{C} \rightarrow {}_7^{13}\mathrm{N}$$

$$ {}^{13}_{7}\mathrm{N} \to {}^{13}_{6}C + e^{+} + \nu $$

$$ {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{13}_{6}\mathrm{C} \to {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \gamma $$

$$ {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \to {}^{15}_{8}\mathrm{O} + \gamma $$

$$ {}^{15}_{8}\mathrm{O} \to {}^{15}_{7}\mathrm{N} + e^{+} + \nu $$

$$ {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{15}_{7}\mathrm{N} \to {}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}\mathrm{He} + \gamma $$

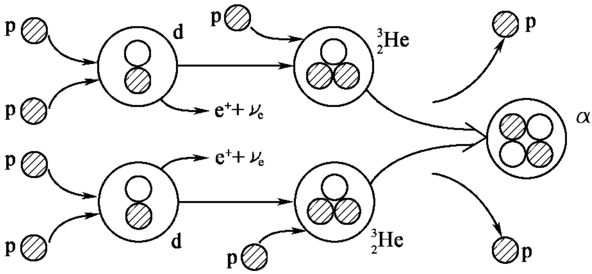


图 24－4　质子－质子循环

如图 24－5 所示.

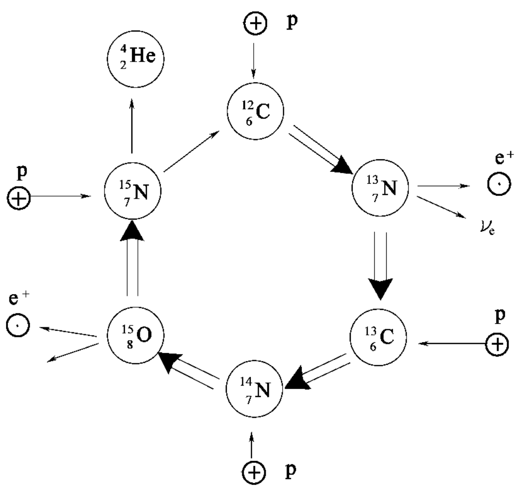


图 24－5　碳－氮循环

由上面两个循环的核反应式可以看出，不论是哪种循环反应，最终都是四个质子结合成一氦核，放出能量约为 26.7 MeV，反应式可写为

$$ 4\,{}^{1}_{1}\mathrm{p} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2e^{+} + 2\nu_{e} + 26.7\ \mathrm{MeV} $$

平均每个质子对能量的贡献约为 6.7 MeV.

24.3 原子核的放射性衰变

人类所发现的 2000 多种同位素中绝大多数(约 1600 多种)都是不稳定的.由一种核素自发地变为另一种核素,同时放出各种射线的现象称为放射性衰变.天然放射性现象是 1896 年法国物理学家贝克勒尔(H. Bacguerel)首先发现的.

24.3.1 放射性衰变

放射性衰变(radioactive decay)主要是 α 衰变、β 衰变和 γ 衰变.

1. α 衰变

α 衰变是原子核自发放射出 α 粒子(即$_2^4$He 核),一般可表示为

$$_Z^AX \rightarrow _{Z-2}^{A-4}Y + \alpha \tag{24-9}$$

式中$_Z^AX$ 是衰变前的原子核,称为母核,$_{Z-2}^{A-4}Y$ 是衰变后的剩余核,称为子核.观测表明,多数能发生 α 衰变的天然放射性核素的电荷数 Z 都大于 82.α 射线有很强的电离作用,电离能量的损失也很大,因而 α 粒子的贯穿本领很小,连一张薄纸也穿不过,在传播中的轨迹几乎是直线.

2. β 衰变

β 衰变是核电荷改变而核子数不变的核衰变.它分为三类:β^- 衰变、β^+ 衰变和电子俘获.

β^- 衰变是原子核自发地放射出电子 e^- 和反中微子 $\bar{\nu}_e$,是核内的中子转变为质子(留在核内)同时放出个电子和一个反中微子.

即 β^- 衰变可表示为

$$_Z^AX \rightarrow _{Z+1}^{A}Y + _{-1}^{0}e + \bar{\nu}_e \tag{24-10}$$

β^+ 衰变是原子核自发地放出正电子 e^+ 和中微子 ν_e,一般表示为

$$_Z^AX \rightarrow _{Z-1}^{A}Y + _{+1}^{0}e + \nu_e \tag{24-11}$$

实际上 β^+ 是原子核内质子转变为中子(留核内)同时放出一个正电子和一个中微子,即

$$_1^1p \rightarrow _0^1n + _{+1}^{0}e + \nu_e$$

电子俘获是与 β 衰变相反的过程,是原子核俘获了与之最接近的内层电子,

使核内的一个质子转变为中子,同时放出一个中微子,一般表示为

$$ {}_{Z}^{A}X+{}_{-1}^{0}e \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y+\nu_e \tag{24-12}$$

β 射线是一束能量较高的电子,它的电离作用较小,有较大的贯穿本领,但仍穿不透一张薄金属片.

3. γ 衰变

原子核从激发态跃迁到较低能态时发出 γ 射线的现象称为 γ 衰变. 某些原子核发生 α、β 衰变后的子核通常处于激发态,它要向低激发态或基态跃迁,同时放出 γ 电子.

当原子核放出 γ 射线时,核的电荷数与质量数都不发生变化,但能量改变了,这种过程被称为同质异能跃迁. γ 射线(波长在 2Å 以下)和 X 射线(10^{-5} Å~10^{2} Å)都是波长很短的电磁波. 它们的区别在于前者是原子核在不同能级之间跃迁时放出的,后者则是内层电子跃迁时放出的. 同 α 射线与 β 射线相比,γ 射线的贯穿本领大,可以穿透 1 cm 厚的铝板;电离作用小;在磁场中不偏转.

24.3.2　放射性衰变规律

大多数放射性实际上是原子核的转变,实验表明原子核的衰变服从一定的统计规律,这就是放射性衰变规律.

设在 $t \sim t+\mathrm{d}t$ 时间间隔内发生衰变的原子核数为 $\mathrm{d}N$,$\mathrm{d}N$ 与当时尚未衰变的原子核数目 N 成正比,也与时间 $\mathrm{d}t$ 成正比,即

$$-\mathrm{d}N=\lambda N\mathrm{d}t \tag{24-13}$$

负号表示原子核的数目在减少,λ 是比例系数,由其表达式 $\lambda=\dfrac{-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t}{N}$ 可知,式中分子表示单位时间内发生衰变的原子核数目,分母表示当时的原子核总数,因此 λ 的物理意义为一个原子核在单位时间发生衰变的概率,称为衰变常量. 不同元素或同一种元素的不同同位素的 λ 都可能不同,即 λ 是该同位素的特征常数. 设 $t=0$ 时原子核的数目为 N_0,则式(24－13)积分后可得到

$$N=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{24-14}$$

这就是放射性衰变定律,如图 24－6 所示.

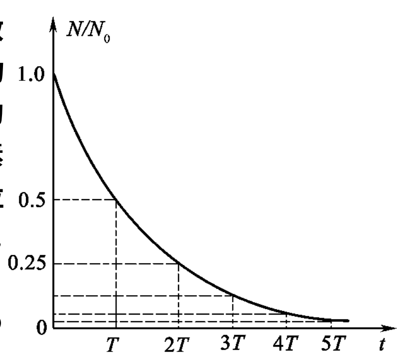


图 24－6　放射性指数衰变律

对于放射性同位素衰变的快慢可以用半衰期(half-life)来表述. 半衰期是放射性同位素衰变到原来数目的一半时所需要的时间,用 $T_{1/2}$ 表示. 当 $t=T_{1/2}$ 时,$N=\frac{N_0}{2}$,于是由式(24－14)可得

$$\frac{N_0}{2}=N_0 \mathrm{e}^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{0.693}{\lambda} \tag{24－15}$$

式(24－15)说明半衰期与外界因素(如温度、压强、电磁场等)无关,只决定于放射性同位素的特征常数 λ. 表 24－2 给出了几种放射性同位素的半衰期.

表 24－2　　几种放射性同位素的半衰期

同位素	衰　变	半衰期	同位素	衰　变	半衰期
^{3}H	β	12.4 年	^{226}Ra	α	1622 年
^{14}C	β	5568 年	^{142}Ce	α	5×10^{15} 年
^{32}P	β	14.3 天	^{212}Po	α	3×10^{-7} 秒
^{42}K	β	12.4 小时	^{235}U	α	7.13×10^{8} 年
^{60}Co	β	5.27 年	^{238}U	α	4.51×10^{9} 年

此外,也可以用平均寿命 τ 来表征衰变的快慢,它表示核在衰变前存在的时间的平均值. 设在 $\mathrm{d}t$ 时间内衰变了 $\mathrm{d}N$ 个核,其中每个核的寿命为 t,则

$$\tau=\frac{\int_0^{N_0} t(-\mathrm{d}N)}{N_0}$$

将式(24－13)代入,得

$$\tau=\frac{\int_0^{\infty}\lambda N t\,\mathrm{d}t}{N_0}=\frac{\int_0^{\infty}\lambda N_0 t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t}{N_0}=\frac{1}{\lambda}=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}=1.44T_{1/2} \tag{24－16}$$

即平均寿命是半衰期的 1.44 倍,表明半衰期长的放射性同位素,它的原子核平均寿命也长.

因为任何放射性核素的衰变常数 λ 是确定的,与外界条件无关. 当某核素的 λ 值测得后,可以利用衰变前后的原子核数,根据式(24－14)确定衰变发生的时间. 在地质考古上就是利用这种方法准确地测出岩石形成的年代,确定文物的年代等.

*24.3.3　放射性强度

放射性物质在单位时间内发生衰变的原子核数称为该物质的放射性强度(或放射性活

度)，用 A 来表示.

$$A=-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\lambda N=\lambda N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}=A_0\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{24-17}$$

它服从指数规律，决定了物质的放射性强弱.

放射性强度的单位是贝克勒尔(Bq)，其物理意义是单位时间衰变 1 个核，即

1 贝克勒尔(Bq)＝1 次核衰变/秒

放射性强度的非国际单位为居里(Ci)，因纪念居里夫妇而得名. 它与贝克勒尔的关系是

1 居里(Ci)＝3.7×10^{10} 贝克勒尔(Bq)

例 24－3　已知镭($^{226}_{88}\mathrm{Ra}$)的半衰期为 1622 年，求 5 毫克镭衰变成 2 毫克时所需的时间.

解　因为 $T_{1/2}=1622$ 年$=5.11\times10^{10}\,\mathrm{s}$

故镭的衰变常数 $\lambda=\frac{0.693}{T_{1/2}}=1.356\times10^{-11}$

由(24－14)式得衰变成 2 毫克所需的时间为

$$t=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N_0}{N}=\frac{1}{1.356\times10^{-11}}\ln\frac{5}{2}=6.76\times10^{10}\,\mathrm{s}=2143\text{ 年}$$

*24.4　粒子物理简介

24.4.1　粒子的基本特征

自 1896 年发现电子以来，人们发现并已确认的粒子有 400 多种，还有 300 多种已发现但尚未被确定.

粒子的基本特征可以用以下几个物理量来描述：

(1) 质量. 粒子物理中用静质量来表示粒子的质量，测定粒子的质量，是辨认粒子的一种基本方法. 常常直接用其静能 m_0c^2 来表示质量.

(2) 电量. 粒子荷电是量子化的，都是电子电量 e 的整数倍.

(3) 自旋. 自旋指粒子的自旋角动量，以常数 $\hbar$ 为单位，粒子的自旋通常是 $\hbar$ 的整数或半整数倍.

(4) 平均寿命. 除光子、电子、质子和中微子以外，绝大多数粒子是不稳定的，都可以自发衰变，衰变特征用平均寿命表征. 通常将平均寿命大于 $10^{-22}\,\mathrm{s}$ 的粒子称为稳定粒子.

在粒子进行反应的过程中，能量、电荷、动量、角动量等仍然守恒，但此外还需要引入一些新的量及相应的守恒定律，来确定反应的正确与否. 例如重子数及重子数守恒定律，轻子数及

轻子数守恒定律，同位旋及同位旋分量守恒定律，宇称守恒定律等等.

24.4.2 粒子的相互作用及其统一模型

粒子之间的相互作用有四种，即引力相互作用、电磁相互作用、强相互作用和弱相互作用. 引力相互作用比其它三种作用弱得多，在微观世界中可忽略不计.

电磁相互作用只存在于带电粒子或具有磁矩的粒子之间，是通过交换虚光子而实现的，强相互作用是核子结合成原子核的核力，是通过交换 π 介子而实现的. 原子核的 β 衰变中不涉及带电粒子，是通过弱相互作用进行的，作用的媒介子是弱玻色子. 表 24－3 列出了四种相互作用的比较.

表 24－3 四种相互作用比较

名称	引力作用	弱相互作用	电磁相互作用	强相互作用
作用力程(m)	∞	$<10^{-16}$	∞	$10^{-15}\sim10^{-16}$
举例	天体之间	β 衰变	原子结合	核力
相对强度	10^{-39}	10^{-15}	1/137	1
媒介	引力子	中间玻色子	光子	介子和胶子
被作用粒子	一切物体	强子、轻子	强子，e、μ、γ	强子
特征时间(s)		$>10^{-10}$	$10^{-20}\sim10^{-16}$	$<10^{-23}$

自然界中存在的相互作用都可以归结于上述四种相互作用，那么它们之间有没有联系呢？爱因斯坦在建立了广义相对论后便致力于研究电磁作用和引力的统一，最终没有成功. 到 1968 年格拉肖、温伯格、萨拉姆三人在现代高能物理实验的基础上，把弱相互作用和电磁相互作用统一起来，即弱电统一理论. 弱电统一理论已得到了实验的检验，证明它是正确的理论，但仍存在着不足，如没有给出电荷量子化的解释，不能说明到底存在多少夸克和多少轻子等.

大统一理论是把电磁相互作用、弱相互作用和强相互作统一起来的理论，但这一理论至今未被实验验证，反而由实验得出的一些结论与这种大统一理论的预言相矛盾，使这一理论的前途并不乐观.

大统一理论以后，人们陆续建立了一些新的理论，试图将上述四种相互作用力完全统一起来，其中超弦理论最为瞩目，但遗憾的是理论上至今未找到一项可同实验比较的新结果.

24.4.3 粒子的分类

迄今为止，人类已发现了 700 多种粒子，其中有许多是反粒子. 除光子、π^0 介子等的反粒子就是自身外，其余粒子都有相应的反粒子，一般在粒子符号上加“－”表示反粒子. 粒子和反粒子具有相同的质量、寿命和自旋，但其它性质可能不同，例如质子、电子的反粒子带相反的电荷，反中子与中子磁矩方向相反等等. 粒子可按不同方式分为若干类，见表 24－4.

表 24－4　　粒子分类表

类别		粒子名称	符号	质量 MeV	自旋	平均寿命(s)	主要衰变方式
规范粒子		光子	γ	0	1	稳定	
		W 粒子	$W^{\pm}$	80800	1	$>0.95\times10^{-25}$	$W^{-}\rightarrow e^{-}+\bar{\nu}_e$
		Z^0 粒子	Z^0	92900	1	$>0.77\times10^{-25}$	$Z^0\rightarrow e^{+}+e^{-}$
		胶子	g	0	1	稳定	
轻子		电中微子	ν_e	0	1/2	稳定	
		μ 中微子	ν_μ	0	1/2	稳定	
		τ 中微子	ν_τ	0	1/2	稳定	
		电子	e^-	0.5110034	1/2	稳定	
		μ 子	μ^-	105.65932	1/2	2.19709×10^{-6}	$\mu^{-}\rightarrow e^{-}+\bar{\nu}_e+\nu_\mu$
		τ 子	τ^-	1776.9	1/2	3.4×10^{-13}	$\tau^{-}\rightarrow\mu^{-}+\bar{\nu}_\mu+\nu_\tau$
强子	介子	π 介子	π^0	134.9630	0	0.83×10^{-16}	$\pi^0\rightarrow\gamma+\gamma$
			$\pi^{\pm}$	139.5673	0	2.6030×10^{-18}	$\pi^{+}\rightarrow\mu^{+}+\nu_\mu$
		η 介子	η	548.8	0	7.48×10^{-19}	$\eta\rightarrow\gamma+\gamma$
		K 介子	K^0	497.67	0	0.8923×10^{-10}	$K_s^0\rightarrow\pi^{+}+\pi^{-}$
			$\bar{K}^0$			5.183×10^{-8}	$K_L^0\rightarrow\pi^{-}+e^{+}+\nu_e$
			$K^{\pm}$	493.667	0	1.2371×10^{-8}	$K^{+}\rightarrow\mu^{+}+\nu_\mu$
		D 介子	D_0	1864.7	0	4.4×10^{-13}	$D^0\rightarrow K^{-}+\pi^{+}+\pi^0$
			$\bar{D}^0$				$D^{+}\rightarrow\bar{K}^0+\pi^{+}+\pi^0$
			$D^{\pm}$	1869.4	0	9.2×10^{-13}	
		F 介子	$F^{\pm}$	1971	0	1.9×10^{-13}	$F^{+}\rightarrow\eta+\pi^{+}$
		B 介子	B^0	5274.2	0	14×10^{-13}	$B^0\rightarrow\bar{D}^0+\pi^{+}+\pi^{-}$
			$\bar{B}^0$				$B^{+}\rightarrow\bar{D}^0+\pi^{+}$
			$B^{\pm}$	5270.8	0		
	重子	质子	p	938.2796	1/2	稳定	
		中子	n	939.5731	1/2	898	$n\rightarrow p+e^{-}+\bar{\nu}_e$
		Λ^0 超子	Λ^0	1115.60	1/2	2.632×10^{-10}	$\Lambda^0\rightarrow p+\pi^{-}$
		Σ 超子	Σ^+	1189.36	1/2	0.800×10^{-10}	$\Sigma^{+}\rightarrow p+\pi^0$
			Σ^0	1192.46	1/2	5.8×10^{-20}	$\Sigma^0\rightarrow\Lambda^0+\gamma$
			Σ^-	1197.34	1/2	1.482×10^{-10}	$\Sigma^{-}\rightarrow n+\pi^{-}$
		Ξ 超子	Ξ^0	1314.9	1/2	2.90×10^{-10}	$\Xi^0\rightarrow\Lambda^0+\pi^0$
			Ξ^-	1321.32	1/2	1.641×10^{-10}	$\Xi^{-}\rightarrow\Lambda^0+\pi^{-}$
		Ω^- 超子	Ω^-	1672.45	3/2	0.819×10^{-10}	$\Omega^{-}\rightarrow\Lambda^0+K^{-}$
		$\Lambda_e{}^+$ 重子	$\Lambda_e{}^+$	2282.0	1/2	2.3×10^{-13}	$\Lambda_e{}^{+}\rightarrow p+K^{-}+\pi^{+}$

（1）按其自旋可分为两类：

① 玻色子．自旋为 $\hbar$ 的整数倍的粒子，例如光子自旋为 $\hbar$．

② 费米子. 自旋为 $\hbar$ 的半整数倍的粒子,例如电子、质子、中微子等.

(2) 按其参与相互作用的性质可以分为三类:

① 规范粒子. 规范粒子是传递相互作用的粒子. 光子传递电磁相互作用,$W^{\pm}$ 和 Z^0 传递弱相互作用,胶子传递强相互作用.

② 轻子. 轻子的自旋都是$\frac{1}{2}\hbar$,如电子、μ 子等. 只参与弱相互作用,带电的轻子也参与电磁作用.

③ 强子. 强子分为介子和重子两类,绝大多数粒子都属于这一类. 它们可参与强相互作用,也可参与弱相互作用. 两种作用同时存在时,强相互作用是主要的.

(3) 按其质量可分为三类:

① 轻子. 这些粒子的质量都很小,如电子、中微子、μ 子.

② 介子. 粒子的质量介于电子与质子之间. 如 π 介子,K 介子.

③ 重子. 重子可分为核子和超子. 核子如质子、中子,其质量是电子的 1000 多倍,超子的质量超过质子,包括 Λ 超子、Σ 超子、Ξ 超子、Ω 超子.

24.4.4 夸克模型

到目前为止,没有任何实验结果显示轻子有内部结构,现阶段仍可以认为轻子是“基本粒子”. 但是强子的情况却不同,加速器使人们不断发现强子可分,至今发现的强子有 800 多种.

1964 年,盖耳曼(M. Gell-Mann)和茨外格(G. Zweig)同时独立地提出“夸克”(quark)模型,认为强子是由若干个夸克组成的,夸克是强子的组元粒子,夸克的自旋为 1/2,电量为 $-2e/3$ 或 $e/3$. 目前已发现的夸克共有 6 种,物理学称之为具有 6 种不同的“味道”. 表 24-5 列出这 6 种夸克的一些性质,每种夸克都有其相应的反夸克.

表 24-5 夸克的一些性质

夸克种类	上	下	奇异	粲	底	顶
符号	u	d	s	c	b	t
质量 (GeV)	0.008	0.004	0.15	1.2	4.7	(?)
电荷	$\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{2}{3}e$
自旋	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
重子数	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
同位旋	1/2	1/2	0	0	0	0
同位旋分量 I_z	1/2	−1/2	0	0	0	0

续表

夸克种类	上	下	奇异	粲	底	顶
奇异数	0	0	-1	0	0	0
粲数	0	0	0	1	0	0
底数	0	0	0	0	1	0
顶数	0	0	0	0	0	1

夸克模型认为，所有重子都是由三个夸克组成的，所有介子都是由一个夸克和反夸克组成. 例如质子是由 uud 三个夸克组成，$\mathrm{p}=(\mathrm{uud})$. 中子是由 udd 三个夸克组成，$\mathrm{n}=(\mathrm{udd})$. π^+ 介子是由一个上夸克 u 和一个反夸克 $\bar{\mathrm{d}}$ 组成. $\pi^+=(\mathrm{u}\bar{\mathrm{d}})$，$\pi^-$ 介子是由一个下夸克和一个反夸克 $\bar{\mathrm{u}}$ 组成，$\pi^-=(\mathrm{d}\bar{\mathrm{u}})$. 由强子的夸克结构式可以算出强子的电荷、自旋、重子数、同位旋等量子数. 质子的电荷量为 $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}e-\frac{1}{3}e=e$，自旋为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；中子的电荷为 $\frac{2}{3}e-\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}e=0$，自旋为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；$\pi^+$ 介子的电荷为 $\frac{2}{3}e+\frac{1}{3}e=e$，自旋为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$. 表 24－6给出了一些强子的夸克谱.

表 24－6　一些强子的夸克谱

介　子	重　子
$\pi^+=(\mathrm{u}\,\bar{\mathrm{d}})$	$\mathrm{p}=(\mathrm{uud})$
$\pi^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{u}\,\bar{\mathrm{u}}-\mathrm{d}\,\bar{\mathrm{d}})$	$\mathrm{n}=(\mathrm{udd})$
$\pi^-=(\mathrm{d}\,\bar{\mathrm{u}})$	$\Sigma^+=(\mathrm{uus})$
$\mathrm{K}^+=(\mathrm{u}\,\bar{\mathrm{s}})$	$\Sigma^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{uds}+\mathrm{sdu})$
$\mathrm{K}^-=(\mathrm{s}\,\bar{\mathrm{u}})$	$\Sigma^-=(\mathrm{dds})$
$\mathrm{K}^0=(\mathrm{d}\,\bar{\mathrm{s}})$	$\Xi^0=(\mathrm{uss})$
$\overline{\mathrm{K}}^0=(\mathrm{s}\,\bar{\mathrm{d}})$	$\Xi^-=(\mathrm{dss})$
$\eta=\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{u}\,\bar{\mathrm{u}}+\mathrm{d}\,\bar{\mathrm{d}}-2\mathrm{s}\,\bar{\mathrm{s}})$	$\Lambda^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sdu}-\mathrm{sud})$

夸克的自旋都是 $\frac{1}{2}$，在组成强子时，应遵守泡利不相容原理，因此质子中的两个上夸克就不允许处于同一状态. 为解决这一问题，引入了新的量子数，提出夸克除具有“味”以外，还具有颜色，分别用红、黄、蓝来描述，反夸克则具有相应颜色的补色. 组成重子的三个夸克具有不同的颜色，组成介子的夸克和反夸克互为补色，这样所有强子对外都是白色. 夸克有六种“味道”，三种“颜色”，又各有正反粒子，一共有 36 种.

夸克理论的确立使人们对微观粒子的认识迈进了一大步，但至今尚未在实验室中观察到自由夸克，可认为夸克和轻子是组成物质世界的基本粒子. 但它们是不是物质的终极本质，还有待于进一步探索.

思 考 题

24－1 在几种元素的同位素$^{12}_{6}C$，$^{13}_{6}C$，$^{14}_{6}C$，$^{14}_{7}C$，$^{15}_{7}C$，$^{16}_{8}O$和$^{17}_{8}O$中，哪些同位素的核包含有相同的(1)质子数，(2)中子数，(3)核子数？哪些同位素有相同的核外电子数？

24－2 为什么说核好像是A个小硬球挤在一起形成的？

24－3 为什么各种核的密度都大致相等？

24－4 完成下列核反应：

$^{6}_{3}Li+?\rightarrow ^{7}_{4}Be+n$

$^{10}_{5}B+?\rightarrow ^{7}_{3}Li+\alpha$

$^{35}_{17}Cl+?\rightarrow ^{32}_{16}S+\alpha$

24－5 为什么重核裂变或轻核聚变能够放出原子核能？

24－6 原子弹与核反应堆有什么本质的不同？

24－7 由放射性的$^{232}_{90}Th$经过四次α衰变和两次β衰变，会形成什么核素？

24－8 核$^{14}_{8}O$和$^{19}_{8}O$均将通过β衰变而趋于稳定，你认为哪一个核将发生β^{+}衰变，哪一个将发生β^{-}衰变？

24－9 原子核发射出γ射线后，核的结构有没有变化？核的状态有没有变化？波长同是1Å的γ射线与X射线有何不同？

24－10 写出放射性衰变定律的公式. 衰变常数λ物理意义是什么？什么叫半衰期$T_{1/2}$？$T_{1/2}$和λ有什么关系？什么叫平均寿命τ？它和半衰期$T_{1/2}$以及λ有什么关系？

24－11 粒子与其反粒子有哪些性质相同，哪些性质相反？

习题 24

24－1 ^{16}N，^{16}O和^{16}F原子的质量分别是16.006 099 u，15.994 915 u和16.011 465u. 试计算这些原子的核结合能.

24－2 已知$^{232}_{90}Th$的原子质量为232.03821u，计算其原子核的比结合能.

24－3 $^{208}_{82}Pb$核的比结合能近似为8MeV/核子.

(1)铅的这一同位素的总结合能多少？

(2)总结合能相当于多少个核子的静质量？

(3)总结合能相当于多少个电子的静质量？

24－4 在温度比太阳高的恒星内氢的燃烧据信是通过碳循环进行的，其分过程如下：

$$^{1}H+^{12}C\rightarrow ^{13}N+\gamma$$

$$^{13}N\rightarrow ^{13}C+e^{+}+\nu_{e}$$

$$^{1}H+^{13}C\rightarrow^{14}N+\gamma$$

$$^{1}H+^{14}N\rightarrow^{15}O+\gamma$$

$$^{15}O\rightarrow^{15}N+e^{+}+\nu_{e}$$

$$^{1}H+^{15}N\rightarrow^{12}C+^{4}He$$

(1)说明此循环并不消耗碳，其总效果和质子－质子循环一样.

(2)计算此循环中每一反应或衰变所释放的能量.

(3)释放的总量是多少？

给定一些原子的质量为

^{1}H:1.007 825 u	^{13}N:13.005 738 u
^{14}N:14.003 074 u	^{15}N:15.000 109 u
^{13}C:13.003 355 u	^{15}O:15.003 065 u

24－5　测得地壳中铀元素$^{235}_{92}U$只占 0.72％，其余为$^{238}_{92}U$，已知$^{238}_{92}U$的半衰期为4.468×10^{9} 年，$^{235}_{92}U$的半衰期为 7.038×10^{8} 年，设地球形成时地壳中的$^{238}_{92}U$和$^{235}_{92}U$是同样多的，试估计地球的年龄.

24－6　已知^{238}U核 α 衰变的半衰期为 4.50×10^{9} 年，问

(1)它的衰变常数是多少？

(2)要获得 1 Ci 的放射性强度，需要^{238}U多少克？

(3)1 克^{238}U每秒将放出多少 α 粒子？

24－7　经过 100 天后，铊的放射性强度减少到$\dfrac{1}{1.07}$，试确定铊的半衰期.

24－8　已知$^{230}_{92}U$的半衰期为 1.8×10^{6} s，求 5×10^{-7} kg$^{230}_{92}U$的放射性强度.

24－9　由电荷数、自旋数验证 $n=(udd)$，$\Sigma^{+}=(uus)$，$\Lambda=(uds)$，$K^{+}=(u\bar{s})$

第 25 章　工程新技术的物理基础

几乎所有的重大的新技术领域(如半导体、激光、超导和信息技术等)的创立,事前都在物理学中经过了长期的酝酿,在理论和实验上积累了大量的知识之后,才突然迸发出来的. 1960 年第一台红宝石激光器的诞生依赖于受激辐射理论. 晶体管、集成电路以及以计算机为代表的信息技术革命和具有广阔应用前景的超导体在诞生之前的几十年内,正是量子力学逐步完善的时期. 量子力学及建立在量子力学基础上的能带理论孕育并成就了这些新技术.

这一章我们将从量子物理的基本理论出发,对能带、激光、超导和纳米科学技术等专题逐一介绍.

25.1　固体的能带结构

25.1.1　晶态固体的基本性质

固体是一种重要的物质结构形态. 固体物理是研究固体的结构和组成粒子(原子、离子、电子等)之间的相互作用与运动的规律. 由此便可说明固体的各种物理特性. 作为固体物理的一部分,本节着重介绍晶态固体的能带结构,并以半导体为例,阐明半导体的导电机理.

晶态固体的基本性质: 固体可分为三大类:一类是晶态固体,简称晶体. 例如食盐、金刚石、金属等;二是非晶体. 如玻璃、松香、塑料等;三是准晶体. 对于晶体已有较成熟的理论,但目前对非晶体和准晶体的研究也很活跃. 因为固体是由大量原子紧密结合而成,它的结构和性质既决定于原子之间的相互作用,又与原子中外层电子的运动有重要关系. 实践证明,固体的许多性质无法用经典理论解

释，必须用量子理论才能说明.

1. 晶体结构和晶体分类

（1）晶体结构

从外观上看，晶体具有规则的几何外形. 从微观结构看，聚合成晶体的分子、原子或离子有规则的周期性地排列着，组成非晶体的分子、原子等虽然也紧密地聚合在一起，它们却没有一定的排列规则. 使用 X 射线晶体结构分析的方法，可直接测定晶体中组成晶体的粒子的排列规则. 发现不同的晶体粒子的排列规则不同. 晶体中粒子的这种规则排列称为晶体点阵（简称晶格）. 例如，食盐晶体是由 Na^+ 和 Cl^- 交替排列而成，如图 25－1 所示.

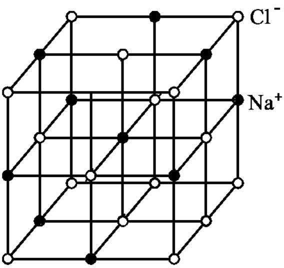


图 25－1　NaCl 结构

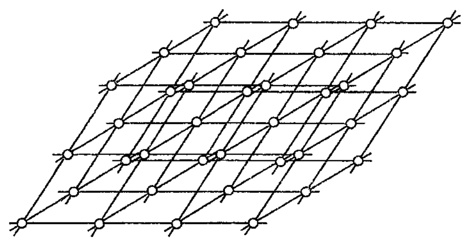


图 25－2　晶胞

由于晶格的周期性，可以选取一定的单元，不断的重复平移，就可得到整个晶体. 这样的重复单元称为晶胞，如图 25－2 所示.

（2）晶体分类

晶体按结合力的性质可分成四种基本类型，它们是：

① 离子晶体　这种晶体的正负离子相间排列，起结合作用的主要是正负离子间的库仑力，称为离子键. 最典型的离子晶体是周期表中 A 族的碱金属元素 Li，Na，K，Rb，Cs 和 ⅦA 族卤元素 F，Cl，Br，I 间形成的化合物，如 NaCl 晶体. 离子晶体一般硬度、熔点高、脆性好、导电性弱. 离子键没有方向性和饱和性.

② 共价晶体　原子晶体的结合力称为共价键，故原子晶体又称为共价晶体. 氢分子 H_2 是典型的靠共价键结合的. 当两个氢原子相互靠近形成分子时，两个自旋相反的价电子将在两个氢核之间运动，为两个氢核所共有，这时它们同时与两个氢核有较强的吸引力作用，形成共价键，从而将两个原子结合起来. 具有代表性的共价晶体有金刚石、半导体材料锗、硅、碳化硅等. 共价键具有方向性和饱和性. 共价键晶体具有高硬度、高熔点、高沸点，不溶于所有寻常液体的特性. 这类晶体在低温时电导率很低，但当温度升高或掺入杂质时，电导率会随之增加.

③ 分子晶体　组成分子晶体的微粒是电中性的无极性分子，其结合力主要来自各分子相互接近时诱发的瞬时电偶极矩. 这种结合力称为范德瓦耳斯力，相应的结合键称为范德瓦耳斯键. 这种键没有方向性和饱和性.

大部分有机化合物的晶体和 Cl_2，CO_2，CH_4，SO_2，HCl 等以及惰性气体如 Ne，Ar，Kr，Xe 等在低温时形成的晶体都是分子晶体. 由于范德瓦耳斯力很弱，所以分子晶体具有熔点低、硬度低和导电性差等特点.

④ 金属晶体　金属是一种重要的晶体类型，它与共价晶体较相似. 在金属晶体中，原子失去了它的部分或全部价电子而成为离子实. 这些离开了原子的价电子为全部离子实所共有. 金属键就是靠共有化价电子和离子实之间的库仑力实现的. 金属键没有饱和性和明显的方向性.

金属所具有的特性，如导电性、导热性、金属光泽等都与共有化电子可以在整个晶体中自由运动有关.

对大多数晶体，微粒之间的结合往往是上述各种结合的混合，称为混合键. 如石墨晶体，同一层中碳原子之间靠共价键结合，而不同层面间都是范德瓦耳斯结合，如图 25－3 所示.

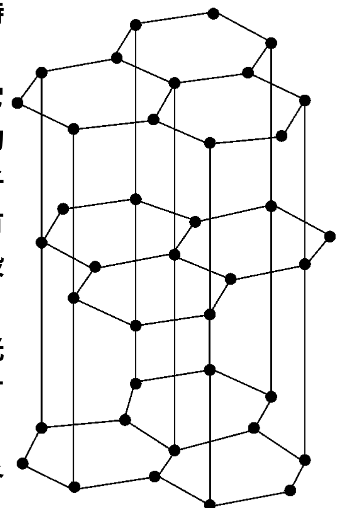


图 25－3　石墨晶体

25.1.2　固体的能带

固体中的能带结构和孤立原子不同，形成能带. 为了弄清能带形成的原因，先要了解电子的共有化.

1. 电子共有化

在晶体中，组成晶体的原子、分子或离子（统称微粒）彼此紧密结合，有规则地周期性地排列，形成晶体点阵. 因为相邻原子挨得非常近，以致原子的内外各层轨道都有不同程度的重叠，而最外层电子的轨道重叠最多. 这样晶体中的电子不再局限于一定的原子，而可以由一个原子转移到相邻的原子上去，这样电子将可以在整个晶体中运动，这一重要特性称为电子的共有化. 原子的内外层电子由于轨道交叠程度的不同，共有化的情况是不同的. 最外层电子的共有化程度最为显著，而内层电子的情况则和孤立原子时的情形差不多. 图 25－4 给出原子和晶

体中的势能曲线.

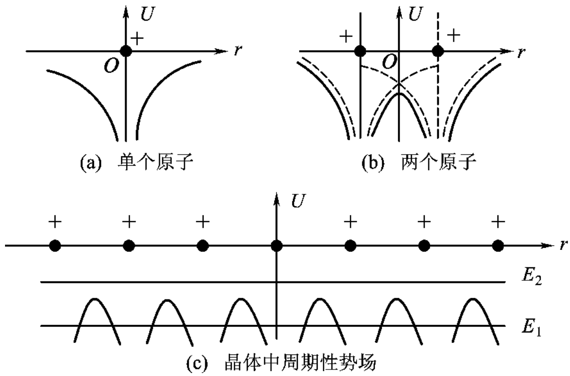


图 25－4　从单个原子的势场到晶体中的周期势场

共有化运动是指不同原子中的相似轨道上的电子的转移. 我们知道，每个原子中电子轨道从内到外依 1s，2s，2p，3s，…排列，相似轨道是指不同原子的 1s，2s，2p，3s，…轨道. 因为在各原子的相似轨道上，电子有相同的能量，所以能在相似轨道上转移.

2. 能带的形成

由于电子共有化运动，当 N 个原子相接近形成晶体时原来单个原子中每个能级分裂成 N 个与原来能级很接近的新能级. 而电子则具有能带中某一能量，在晶体点阵的周期性场中运动.

在实际晶体中，原子数目 N 非常大，同时新能级又与原来能级非常接近，所以两个相邻的新能级间能量差非常小，其数量级是 10^{-22} eV，几乎可以认为是连续的，这 N 个新能级具有一定的能量范围，故称为能带. 可见，能带是能级分裂的结果，如图 25－5 所示.

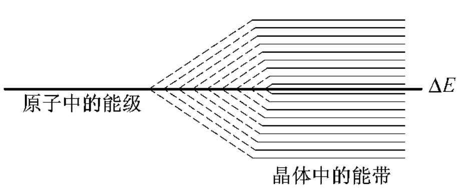
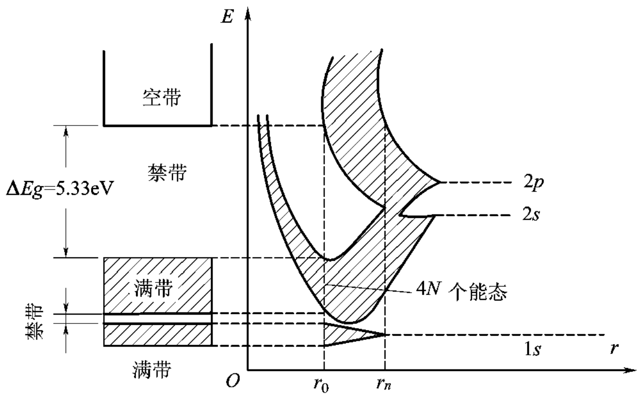


图 25－5　晶体中原子能级分裂形成能带

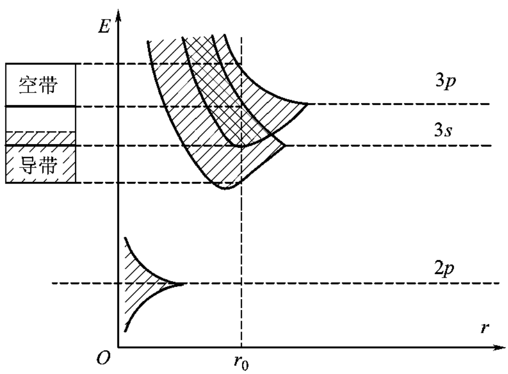
能带的宽度与多种因素有关：一是与原子间距有关，间距越小，能带越宽；二是与原子中内层与外层电子状态有关. 对内层电子，由于它们距自身核很近，受邻近原子核的作用较弱，因此内层能带宽度较小；而外层价电子由于与自身核的距离和相邻原子核的距离处于同等数量级，受相邻原子的作用较强烈，因此，价电子的能级分裂的能带较宽. 由此类推，比价电子能量更高的激发态能级分裂出

的能带更宽.

由于原子中的每一个能级分裂成一个能带,所以相邻的能带间可能存在不被允许的能量间隔,这一能量间隔称为禁带.两个能带相互重叠时,禁带消失,如图 25-6 所示.



(a) 金刚石的能带



(b) 钠晶体的能带

r—原子间距 r_0—平衡位置

图 25-6 能带的形成

电子在这些能带中分布情况如何呢?

根据泡利不相容原理,每个能带可以容纳的电子数等于与该能带相应的原子能级所能容纳的电子数的 N 倍,这里 N 是组成晶体的原子个数.比如,由 N 个原子组成的晶体中,其 2s 能带总共可以容纳 $2N$ 个电子.其 2p 能带总共可以容纳 $6N$ 个电子等等.

在有些能带中,各个能级完全被电子所占据,这种能带称为满带.当晶体加

上外电场时，满带中电子不能起导电作用. 这是因为所有能级都已为电子所填满，在外电场作用下，除了不同能级间电子交换外，总体上并不能改变电子在能带中的分布，所以加电场和不加电场一样，不存在定向电流. 由价电子能级分裂而形成的能带称为价带，通常情况下价带为能量最高的能带，价带可能被填满，也可能未被填满. 与各原子激发能级相应的能带，在未被激发的正常情况下没有电子填入，称为空带. 如有电子因某种因素受激进入空带，则在外电场作用下，这种电子可以在该空带内向稍高的能级移动，表现出一定的导电性，因此空带也称为导带.

3. 导体和绝缘体

相据前面的讨论，当 N 个原子形成晶体时，原子能级分裂成包含有 N 个相近能级的能带. 能带所能容纳的电子数，等于原来能级所能容纳的电子数乘上 N.

一般原子的内层能级均填满电子，所以形成晶体时，相应的能带也填满电子. 原子最外层的能级可能原来填满电子，也可能原来未被填满. 如果原来填满电子，那么相应的能带中亦填满电子. 如果原来没有填满电子那么相应的能带中也没有填满电子.

从能带结构来看，当温度接近热力学温度零度时半导体和绝缘体都具有填满电子的满带和隔离满带与空带的禁带. 半导体的禁带比较窄，禁带宽度 ΔE_g 约为 0.1～1.5 eV，因此用不大的激发能量（热、光和电场）就可以把满带中的电子激发到空带中去，从而参与导电.

绝缘体的禁带一般很宽，禁带宽度 ΔE_g 约为 3～6 eV，采用一般的热激发，光照或外加电场不强时，满带中的电子很少能被激发到空带中去，所以在外电场作用下一般没有电子参与导电，表现出电阻率很大（$\rho \approx 10^{16} \sim 10^{20}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$）. 大多数的离子晶体如 NaCl，KCl，…和分子晶体如 Cl_2，CO_2，…都是绝缘体. 表 25－1 列出了一些晶体的禁带宽度.

表 25－1　一些晶体的禁带宽度

绝缘体 ΔE_g(eV)	半导体 ΔE_g(eV)	半导体 ΔE_g(eV)
金刚石(C) 5.33	硅(Si) 1.14	硫化镉(CdS)2.42
氧化锌(ZnO) 3.2	锗(Ge) 0.87	氧化亚铜(Cu_2O)2.17
氯化银(AgCl) 3.2	碲(Te) 0.33	砷化镓(GaAs)1.43
		硫化铅(PbS)0.34～0.37
		锑化铟(InSb)0.18

导体的情况就完全不同，其能带结构或者是能带中只填入部分电子而成为

导带；或者是满带与另一相邻空带紧密相连或部分重叠；或者是导带与另一空带重叠. 如有外电场作用，它们的电子很容易从一个能级跃入另一个能级从而形成电流，显示出很强的导电能力. 图 25－7 给出不同晶体的能带结构.

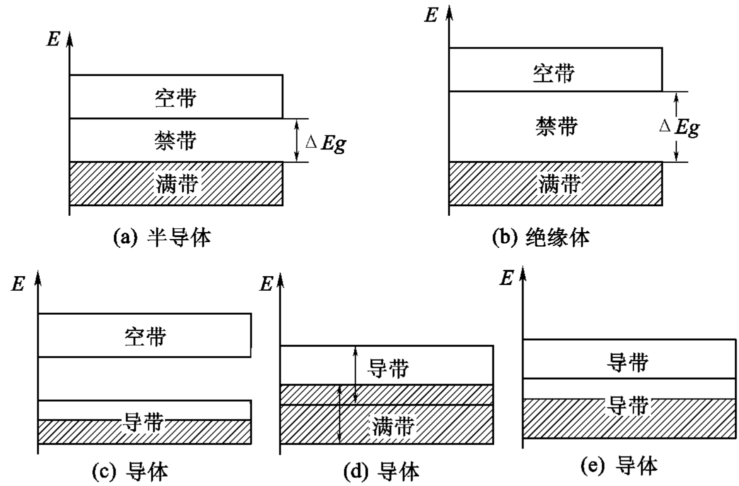


图 25－7　晶体能带结构简图

应该指出，能带和能级之间有时并不存在简单的对应关系，而且也不是永远可以根据原来原子中各能级是否填满电子来判断晶体的导电性质的. 例如两价金属 Ca 和 Mg，它们的最外层的价电子能级中有两个电子，组成晶体时，与价电子能级相应的能带好像应该填满电子，但是由于价电子能带和它上面的空带相叠，因而晶体中所有的价电子填不满叠合后的能带，所以这种晶体是导体.

4. 半导体

从能带理论知道，半导体的满带和空带之间存在着禁带，但这个禁带宽度比绝缘体的小得多. 热运动的结果，使一部分电子从满带跃迁到空带，这不但使空带具有导电性能，而且使满带也具有导电性能. 因为这时满带出现了空位通常称为空穴. 在外电场作用下，进入空带的电子可参与导电，称为电子导电. 而满带中的其他电子在电场作用下填充空穴并且它们又留下新的空穴，因而引起空穴的定向移动，效果就像是一些带正电的粒子在外电场作用下定向运动一样. 这种由于满带中存在空穴所产生的导电性能称为空穴导电. 对于没有杂质和缺陷的半导体它的导电机构是电子和空穴的混合导电，这种导电称为本征导电，参与导电的电子和空穴称为本征载流子. 这种没有杂质和缺陷的半导体称为本征半导体.

在纯净半导体里，可以用扩散的方法掺入少量其他元素的原子. 所掺进的原

子,对半导体基体而言称为杂质. 掺有杂质的半导体称为杂质半导体. 杂质半导体的导电性能较之本征半导体有很大的改变.

从能带理论知道,当原子相互接近形成固体时,外层电子的显著特点是电子的共有化. 电子共有化是指电子在不同原子的相同能级上转移而引起的,电子不能在不同能级上转移,因为不同能级的能量值不同. 杂质原子不同于原来组成晶体的原子,因而杂质原子的能级和晶体中其他原子的能级并不相同,在这些能级上的电子由于能量的差异,不能过渡到其他原子的能级上去,即它不参与电子的共有化. 虽然如此,杂质的能级在半导体导电上却起着很重要的作用.

量子力学证明,杂质原子的能级不在能带中,而是处于禁带中,不同类型的杂质,其能级在禁带中的位置不同. 有些杂质能级离导带较近,有些离满带较近. 杂质能级位置不同,杂质半导体的导电机构也不同,按照其导电机构,杂质半导体一般可以分为两类:一类以电子导电为主,称为 n 型(或电子型)半导体,另一类以空穴导电为主称为 p 型(或空穴型)半导体.

(1) n 型半导体

在四价元素如硅或锗半导体中,掺人少量五价元素如磷或砷等杂质,可形成 n 型半导体.

四价元素的原子,最外层有四个价电子,形成共价键晶体. 掺入五价元素的杂质如磷后,磷原子的五个价电子中有四个与相邻近的硅或锗原子形成共价键,多余的一个电子无法参与共价键而束缚在磷离子上,理论计算表明这种多余价电子的能级在禁带中,而且靠近导带,如图 25－8 所示. 这种杂质价电子很容易

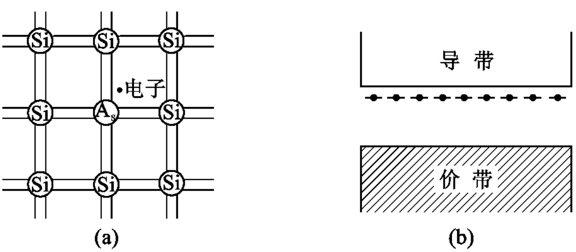


图 25－8　n 型硅晶体的平面示意图及能带

被激发到导带中去,所以这类杂质原子称为施主,相应的杂质能级称为施主能级. 施主能级与导带底部之间的能量差值 ΔE_d 比禁带宽度 ΔE_g 小得多,数量级约为 10^{-2} eV. 所以在较低温度下,施主能级小的电子就可以被激发到导带中去. 这种半导体中,杂质原子的数目虽然不多,但是在常温下,导带中的自由电子浓度却比同温度下纯净半导体的导带中自由电子浓度大得多,这就大大提高了

半导体的导电性能. 这种主要靠施主能级激发到导带中去的电子来导电的半导体称为 n 型半导体或电子型半导体.

(2) p 型半导体

如果在硅或锗的纯净半导体中,掺入少量三价元素如硼、镓、铟等杂质原子,那么这种杂质原子与相邻的四价硅或锗原子形成共价键结构时,缺少一个电子,这相当于一个空穴. 相应于这种空穴的杂质能级也出现在禁带中,并且靠近满带如图 25－9 所示. 满带顶部与杂质能级之间的能级差别 ΔE_A 一般不到 0.1 eV. 在温度不很高的情况下,满带中的电子很容易被激发到杂质能级,同时在满带中形成空穴. 这种杂质能级收容从满带跃迁来的电子,所以这类杂质原子称为受主,相应的杂质能级称为受主能级. 这时,半导体中的空穴浓度较之纯净半导体中的空穴浓度增加了好多倍,其导电性能显著增加. 这种杂质半导体的导电机构主要决定于满带中的空穴,所以称为 p 型半导体或空穴型半导体.

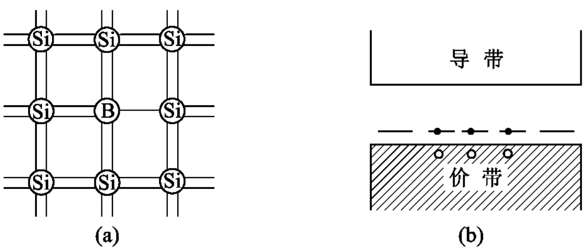


图 25－9 p 型硅晶体的平面示意图及能带

由上可见,杂质对改变半导体的导电性能起着非常重要的作用. 但是必须指出,加入不适当的杂质和杂质太多并不会改善半导体的导电性能.

(3) p－n 结

在一片本征半导体的两侧各掺以适当的高价和低价杂质,就构成一个 p－n 结. 这是由于:p 型半导体一侧空穴的浓度较大,而 n 型半导体一侧的电子浓度较大,因此就有 n 型中的电子向 p 型扩散,p 型中的空穴向 n 型扩散,结果在交界面两侧出现电荷积累,在 p 型一边是负电,n 型一边是正电,这些电荷在交界处形成一层电偶极层称为 p－n 结,其厚度约 10^{-7} m,如图25－10a所示.

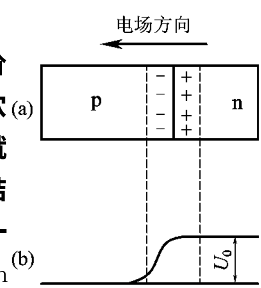


图 25－10 $p-n$ 结

在 p－n 结内存在着由 n 型指向 p 型的电场,阻止电子与空穴的继续扩散,最后达到动态平衡. 此时,p－n 结中存在电场,两半导体间存在着一定的电势差 U_0,电势由 n 型向 p 型递减,这就是 p－n 结处的接触电势差,如图 25－10b 所示.

由于接触电势 U_0 的存在,在分析半导体的能带结构时,必须把由该电势差引起的附加电子静电势能 $-eU_0$ 考虑进去.由于 p－n 结中,p 型一侧积累了较多的负电荷,所以 p 型侧相对 n 型侧电势较低,这样在 p 型导带中的电子比在 n 型导带中的电子有较大的能量,这能量差值为 eU_0,则在 p－n 结处,能带出现弯曲,如图 25－11 所示.

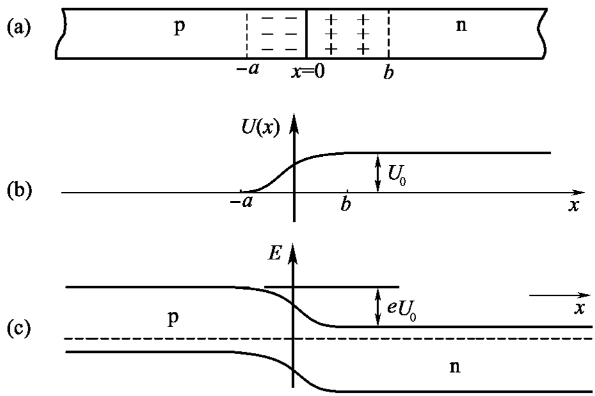
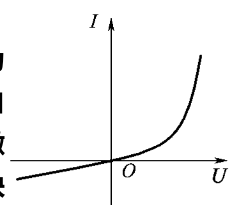


图 25－11　p－n 结形成前后能带示意图

在 p－n 结处,势能曲线呈弯曲形,构成势垒,由于它阻止 n 型中的电子进入 p 型,同时也阻止 p 型中的空穴进入 n 型,所以又称为阻挡层.

由于阻挡层的存在,把外加电压加到 p－n 结两端时,阻挡层处的电势差将发生改变,如把正极接到 p 型部分,而负极接到 n 型(称为正向联接),外电场方向与阻挡层的电场力方向相反,使 p－n 结中电场减弱,势垒降低.于是 n 型中的电子和 p 型中的空穴就容易通过阻挡层,不断向对方扩散,形成正向电流,p－n 结导通,外加电压增大时电流增大.

反之当把电源负极接到 p 型而正极接到 n 型部分(称为反向联接),则 p 型中的空穴就更难于通过阻挡层.只有来自 p 型的少数电子和来自 n 型的少数空穴能通过阻挡层形成微弱的反向电流,而且随着反向电压的升高,这反向电流很快达到饱和.p－n结的伏安特性曲线如图 25－12 所示.



25－12　p－n 结伏安特性曲线

由于反向电流很弱,通常说 p－n 结具有单向导电作用.利用 p－n 结具有单向导电作用,可以作成晶体二极管做整流用.也可以把各种类型的半导体适当组合,制成各种晶体管.随着超精细小型化技术的发展,制成各种规模的集成电路,广泛应用于电子计算机、通讯、雷达、宇航、电视等技术领

域.

5. 半导体的其他特性和应用

半导体还有其他一些特性和应用，本节仅就热敏电阻、光敏电阻、温差电偶等的原理和应用做一些简单介绍.

① 热敏电阻　半导体的电阻随温度的升高而指数下降. 这是因为随着温度的升高，由于热激发，半导体中的载流子(电子或空穴)，显著增加的缘故；这种热激发载流子称为热生载流子. 特别在杂质半导体中，因为施主受主能级处于禁带中，所需要的激发能量远较禁带宽度对应的能量小，所以热生载流子的增加，尤为显著. 其导电性随温度的变化十分灵敏. 通常把这种电阻随温度的升高而降低的半导体器件称为热敏电阻. 由于热敏电阻有体积小，热惯性小，寿命长等优点，已广泛应用于自动控制中.

② 光敏电阻　半导体硒在可见光照射下，电阻值随光强的增加而急剧地减小. 这是由于光激发使半导体中载流子迅速增加的缘故. 这种光激发的载流子称为光生载流子，由于光生载流子并没有逸出体外，所以又称为内光电效应.

应该注意，光电导和热电导不同，热敏电阻是一种没有选择性的辐射能接收器：而光敏电阻是有选择性的，和光电效应类似，要求照射光的频率大于红限频率. 在此条件下，光强愈强，电导率越大. 电导率随光强的变化十分灵敏. 利用这种特性制成的半导体器件称为光敏电阻，是自动控制、遥感技术中的一个重要元件.

③ 温差电偶　两种不同的金属导体组成的闭合回路，如果两个接头处于不同的温度，那么回路中将产生温差电动势，这个回路称为温差电偶或热电偶. 如果把两种不同类型的半导体组成回路，并使两个接头处于不同的温度，也会产生温差电动势，而且比金属组成的热电偶产生的电动势大得多. 这是因为半导体中的自由电子或空穴是热激发产生的，随着温度升高，自由电子或空穴的浓度极其迅速地增长.

由于有温度差，半导体中的电子或空穴由浓度大、运动速度较大的热端跑到冷端，同时也有少量电子或空穴由冷端运动到热端，在 n 型半导体中，载流子是电子，结果造成冷端带负电，热端带正电. 而在 p 型半导体中，冷端带正电，热端带负电，而在冷热两端造成电势差.

随着电势差的增加，半导体内电场也开始增大，并且阻止由热端向冷端载流子的扩散而加速由冷端到热端的扩散，最后达到动态平衡. 这种动态平衡决定了半导体中因温差而形成的温差电动势. 它比金属中的温差电动势要大数十倍，温

度每差一度，能够达到甚至超过 10^{-3} V.

实际的半导体温差电偶如图 25－13 所示.

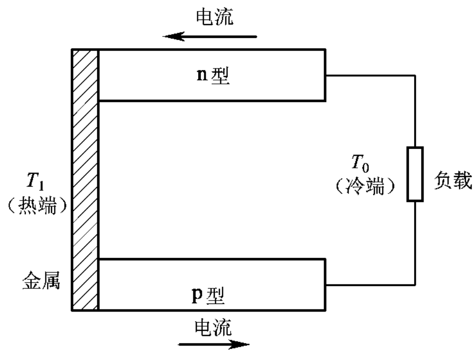


图 25－13　半导体热电偶示意图

此外还有半导体光电池，半导体场致发光材料、半导体激光器等等，广泛应用于工农业生产及科研、通讯、测量、宇航等各种技术领域.

25.2　激　光

激光技术是一门新兴的科学技术. 世界上第一台激光器是 1960 年问世的. 由于激光具有亮度高、方向性好、单色性和相干性好等优异特性，使得激光技术极迅速地发展成为一个内容广阔的新科技领域. 目前已广泛应用于工农业生产、国防、医疗和科学实验等方面. 对整个社会生产和科学技术的发展都起着重大的推动作用.

本节着重讲述激光形成的基本原理，在此基础上阐明激光的特性并简略介绍激光的应用.

25.2.1　激光的基本原理

1. 自发辐射和受激辐射

早在 1917 年，爱因斯坦在他的辐射理论中就预见了有受激辐射存在. 我们知道，光与原子体系相互作用时，总是同时存在着受激吸收、自发辐射和受激辐射三种过程. 设原子中有高低能级 E_1 和 E_2（$E_2>E_1$），则在常温下，物质的绝大

部分原子都处于低能级 E_1（基态）中. 处于高能级 E_2 上的原子会自发地跃迁到低能级 E_1，辐射出光子 $h\nu$，这个过程叫作自发辐射. 设发光物质单位体积中处于能级 E_1，E_2 的原子数分别为 N_1，N_2，则单位时间从 E_2 向 E_1 自发辐射的原子数

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{自}}=A_{21}N_2 \tag{25-1}$$

其中比例系数 A_{21} 称为自发辐射概率，它与外来辐射能量密度无关.

原子吸收辐射 $h\nu$ 从低能级 E_1 跃迁到高能级 E_2，叫受激吸收跃迁. 受激吸收每秒跃迁的原子总数与辐射能量密度成正比并与处于低能级 E_1 的原子数 N_1 成正比.

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{12}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{吸}}=W_{12}N_1 \tag{25-2}$$

比例系数 $W_{12}=B_{12}\rho(\nu,T)$ 称为吸收几率，其中 B_{12} 称为吸收系数，$\rho(\nu,T)$ 是辐射场能量密度.

处于高能级 E_2 的原子除了自发辐射外，还有一种辐射叫受激辐射. 它是处于高能级 E_2 的原子在外来辐射或某一原子的自发辐射所放出的光子激发下，跃迁到低能级 E_1 而发出光子 $h\nu$. 受激辐射每秒跃迁的原子数与高能级原子数 N_2 及辐射能量密度成正比

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{受}}=W_{21}N_2 \tag{25-3}$$

比例系数 $W_{21}=B_{21}\rho(\nu,T)$ 称为受激辐射概率，其中 B_{21} 称为受激辐射系数，$\rho(\nu,T)$ 是辐射场能量密度.

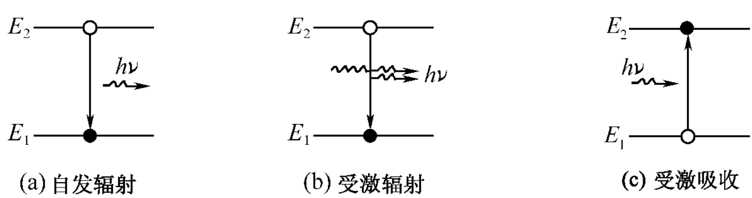


图 25－14　自发辐射、受激辐射和受激吸收跃迁过程

激光之所以具有普通光源所没有的那些优异特性，根本原因在于它的发光机制不同，普通光源发光由自发辐射产生，而激光是受激辐射产生的.

自发辐射过程与外界作用无关，各个原子的辐射都是自发地、独立地进行，因此这些原子发出的光射向四面八方，方向性差；各原子开始发光的时间参差不齐；光的相位没有一定的关系，因而各原子发出的光不是相干光；由于原子的数量大，各原子可处在许多不同的激发态上，因而自发辐射光的频率也就不同，所

以自发辐射光的单色性差.

受激辐射的光子与外来诱发它的光子性质完全相同,就是说它们的频率、相位、传播方向及偏振方向都是相同的.如果原子体系中有许多原子都处于某一相同的激发态能级,则其中某一原子的自发辐射产生的光子就可以促使处于同一激发态的其他原子发生受激辐射而放出同样的光子,这一过程称为光放大.光放大是激光的必要条件.

2. 粒子数反转

通常情况下,任何一个发光系统总有自发辐射过程存在.即处于高能态(E_2)的原子可以在没有任何外界影响的情况下从 E_2 跃迁回低能态(E_1),并放出一个光子,光子频率为

$$h\nu=E_2-E_1$$

另一方面,当有外界光波照射时,还存在受激吸收和受激辐射两种过程.要产生激光,必须使受激辐射占优势,即要使发光系统的自发辐射和受激吸收都要比受激辐射弱得多.

一般情况下,处于温度为 T 的平衡态下的体系,在各能级上的原子数由玻尔兹曼分布确定,即有

$$\frac{N_2}{N_1}=\mathrm{e}^{-(E_2-E_1)/kT} \tag{25-4}$$

而受激吸收与 E_1 上的原子数 N_1 成正比,受激辐射与 E_2 上的原子数 N_2 成正比,处于热平衡状态时 $N_2 \ll N_1$,受激辐射远小于受激吸收,不可能实现光放大.要实现光放大必须打破原子数在热平衡态下的玻尔兹曼分布,使 $N_2>N_1$,称为粒子数反转状态,是产生激光的首要条件.

能够实现粒子数反转的介质称为激活介质.要造成粒子数反转分布,首先要求介质有适当的能级结构,其次还要有必要的能量输入系统,供给低能态的原子以能量,促使它们跃迁到高能态去的过程称为抽运过程或泵浦过程.

激光工作物质常见的能级结构有三能级和四能级系统.

红宝石(掺有质量分数为 0.035%铬离子 Cr^{3+} 的 $A1_2O_3$ 晶体)激光器是一个典型的三能级系统的激光器.工作粒子是 Cr^{3+},它参与激光产生过程的能级有三个,其能量为 E_1,E_2 和 E_3,如图 25-15 所示.其中 E_1 为基态能级,并作为激光下能级.E_2 为亚稳能级(粒子在此能级上的平均寿命较长),它作为激光上能级.E_3 为抽运高能级.工作粒子(原子、分子等)在这些能级间的跃迁过程如下:在激励泵浦源的作用下,基态 E_1 上的粒子被抽运到高能态 E_3.处于激发态 E_3 的粒子将主要以无辐射跃迁(不发射光子,而以其他形式放出能量的跃迁)的形式迅速

转移到激光上能级 E_2. 由于 E_2 能级寿命较长(亚稳能级),可以积累较多的粒子虽然也会自发地跃迁到 E_1,但只要抽运速率足够大,就可以在能级 E_2 和 E_1 之间实现粒子数反转($N_2>N_1$). 三能级系统中激光下能级是基态,粒子数较多,需要较高的能量才能实现粒子数反转,对泵浦源要求很高.

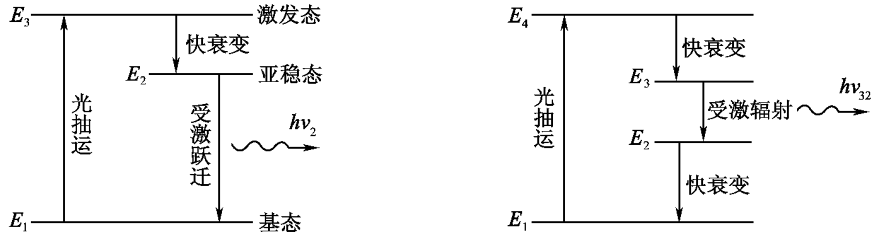


图 25－15 激光物质的三能级系统四能级系统

掺钕钇铝石榴石是四能级系统的工作物质. 工作粒子是 Nd^{3+},简化的能级如图 25－15 所示. 其中 E_1 是基态能级,E_2 是激光下能级,E_3 是激光上能级(亚稳态),E_4 是抽运高能级. 四能级系统的主要特点是:激光下能级不是基态能级,在热平衡状态下处于 E_2 能级的粒子很少,因而很容易实现 E_3 和 E_2 之间的粒子数反转. 这比三能级系统有利,所以多数激光器选用四能级系统的工作物质.

抽运过程按输入能量的方式不同可分为电激励、气体放电激励和化学能激励等. 固体激光器多采用光激励,例如红宝石激光器就是以脉冲氙灯作为它的激励源. 气体激光器普遍使用气体放电激励. 例如氦-氖激光器就是用气体放电的方式通过氦原子来激励氖原子的,在它的放电管两端加上几千伏以上的高电压,而放电管中充满氦氖混合气体,从阴极发出的自由电子,在轴向电场的作用下,向阳极加速运动,并与氦、氖原子相碰撞,把能量传递给它们,使它们从基态激发到各激发态,从而实现了对它们的激励.

3. 光学谐振腔

实现工作物质的粒子数反转,创造了产生激光的一个重要条件,但还不是充分条件. 粒子数反转使得受激辐射与受激吸收相比,占了绝对优势,但是还不能保证受激辐射超过自发辐射. 因为处于激发态的原子还可以通过自发辐射而返回基态,而且在热平衡条件下,在激光器工作频率区域内(从红外至紫外)自发辐射占绝对优势. 因此,在一般情况下,即使已实现激活物质的粒子数反转,但如果不采取措施,要利用受激辐射来得到激光仍然是不可能的.

前面我们介绍过,自发辐射概率与辐射场的能量密度无关,而受激辐射概率与辐射场的能量密度成正比. 因此,在激光器中利用光学谐振腔来形成所要求的

强辐射场，从而使受激辐射概率远大于自发辐射概率.

在激活介质两端放置两块反射镜，这两块反射镜，可以是平面也可以是凹面的，或者是一平面一凹面的. 两反射镜的轴线与工作物质的轴线平行放置，这对反射镜就构成了光学谐振腔. 它是激光器的重要组成部分，对激光的形成和光束特性有着重要作用. 下面以平行平面腔为例讨论谐振腔对光束方向的选择作用.

在谐振腔中，光信号能多次反复地沿着一定的方向通过工作物质，使之获得多次放大，信号强度越来越强，即产生了激光振荡，最后达到饱和、形成激光输出，这种情况相当于电子学线路中的正反馈. 所以谐振腔起了正反馈作用. 正是由于谐振腔对光信号起了正反馈作用，激光才有高亮度的特点. 在激光振荡形成和持续的过程中. 凡是传播方向偏离腔轴方向较大的光子，很快逸出腔外被淘汰，只有沿着腔轴方向传播的受激辐射光子才能不断地往返运行. 又不断地激发出同方向的光子. 这样，激光光束只能沿着腔轴方向传播. 所以输出的激光具有很好的方向性，如图 25－16 所示.

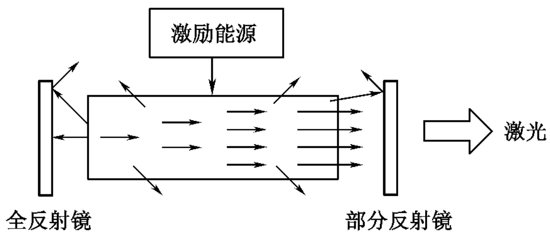


图 25－16　谐振腔对光束方向的选择性

激活介质加上谐振腔还不一定能出光，因为谐振腔内还存在各种损耗，如吸收、透射、端面衍射以及因介质内部不均匀引起的折射、散射等各种损耗，要使受激辐射的光不断得到放大而产生激光，介质的长度和反射镜的反射系数等必需满足一定的条件. 只有当光在谐振腔中来回一次所得到的增益大于同一过程的损耗时，光放大才会实现，这一条件称为激光的阈值条件.

4. 横模与纵模

在激光技术中，经常提到激光的“模式”，按光的量子理论，给定模式对应于谐振腔内光子的一个量子态. 激光模式有横模与纵模之分. 按光的波动理论，在与谐振腔轴线垂直的截面上形成的光的横向驻波模式称为横模. 产生横模的原因很多，其中主要是不沿轴线方向传播的光束相互干涉加强所引起的. 不同频率的光束沿谐振腔轴线方向上形成不同的纵向驻波模式称为纵模，也叫轴模，纵模是由频率不同引起的.

谐振腔除了实现光振荡的作用之外，还有选频的作用. 由于谐振腔的选频作用使得激光器内可能出现的振荡频率不是任意的，而是某些谱线宽度很窄的离散谱.

设有一单一频率的平面波沿腔轴方向来回反射，这些反射的平面波之间产生相干叠加，只有形成驻波的光才能形成振荡放大，产生激光. 设腔长为 L，介质折射率为 n，波长为 λ，根据驻波条件有

$$nL=k\frac{\lambda}{2}$$

$$\nu_k=\frac{c}{\lambda}=k\frac{c}{2nL} \tag{25-5}$$

式中 c 为光速，ν_k 称为谐振频率. 通常谐振频率有许多个，但是考虑到激活介质辐射的线宽和谐振频率间隔，则只有某几个谐振频率的受激辐射可以得到振荡放大而形成激光. 这就是谐振腔的选频作用.

由激光器输出的每一个谐振频率称为一个纵模. 一般激光器是多纵模输出的，如果采取适当的措施也可以输出单纵模. 因为纵模线宽很窄，所以激光的单色性很好.

25.2.2 激光介绍

1. 常见激光器

激光器是产生激光的器件或装置，它由三部分组成：工作物质、激励系统和谐振腔（有些激光器如氮分子激光器也可以没有谐振腔）. 现在激光器波长已从 X 射线区一直扩展到远红外区，最大连续输出功率达 10^4 W，最大脉冲输出功率达 10^{14} W. 表 25－2 给出常用激光器主要性能.

表 25－2 常用激光器

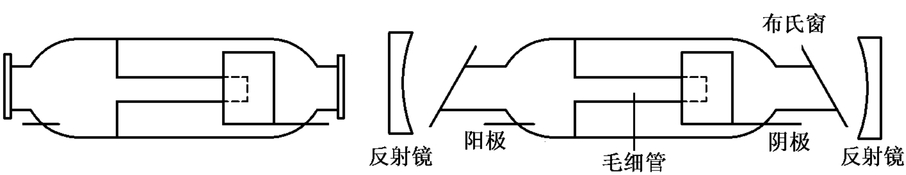
激光器名称	工作物质	典型波长(nm)	性　能
红宝石	掺 Cr^{3+} 红宝石	694.3	脉冲、大功率
YAG	掺 Nd^{3+} 钇铝石榴石	1064	连续、中小功率
钕玻璃	掺 Nd^{3+} 玻璃	1059	大功率
氦氖	He－Ne 混合气	632.8，1150，3390	连续、小功率
氩离子	Ar^+	488.0，514.5	连续、大功率
二氧化碳	CO_2	1060	脉冲、连续、大功率

续表

激光器名称	工作物质	典型波长(nm)	性　能
氮分子	N_2	337.1	脉冲
氦镉	He,蒸气 Cd	441.6,325.0	连续、中功率
氦锌	He,蒸气 Zn	747.9,589.4	
氦硒	He,蒸气 Se	522.8,497.6	
染料	染料液体	590～640	连续可调谐、小功率
半导体	GaAs/GaAlAs	～800～900	可调谐、小功率

He－Ne(氦-氖)激光器是最早研制成功的气体激光器.在可见及红外波段可产生多条激光谱线,其中最强的是 632.8 nm,1.15 μm,3.39 μm 三条谱线.放电管长数十厘米的 He－Ne 激光器输出功率为毫瓦量级,放电管长 1～2 m 的激光器输出功率可达数十毫瓦.由于它能输出优质的连续运转可见光,而且具有结构简单、体积较小、价格低廉等优点,在准直、定位、全息照相、测量、精密计量、光盘录放等方面得到了广泛应用.

He－Ne 激光器是一个气体放电管,工作物质是氦气和氖气的混合气体.其谐振腔有图 25－17 所示的内腔式和外腔式两种,外腔式两端的反射镜放置在放电管外.



(a) 内腔式　(b) 外腔式

图 25－17　He－Ne 激光器的两种谐振腔

2. 激光的特性

激光与普通光源相比有四大特点:

① 方向性好　普通光源发出的光是向四面八方辐射的,而激光是沿着一定方向(谐振腔轴线方向)发出的,是平行度很高的光束,发散角在 $10^{-3}\sim10^{-5}$ rad,激光束几乎是平行光束,若将激光射向几千米之外,光束直径也只增加几厘米.根据这一特性可把激光用于定位、导向、测距等工作.

② 亮度高　由于激光的方向性好,能量在空间上高度集中,因而光的强度很大,表现出光的亮度很高,而且还可制造脉冲激光器,使能量在时间上也高度集中.由于能量在空间、时间上高度集中,可以产生强度很高的激光.太阳是很亮

的光源，但是一台功率仅为 1 mW 的 He－Ne 激光器输出激光的亮度也比太阳约高一百倍，而一台功率较大的红宝石巨脉冲激光器输出激光的亮度比太阳要高一百亿倍.

③ 单色性好　实际的单色光都有一定的谱线宽度. 在普通光源中，单色性最好的是氪(Kr^{86})灯发出的光，其谱线宽度 $\Delta\lambda = 0.0047$ Å，而单模稳频 He－Ne 激光器发出的激光，其谱线宽度 $\Delta\lambda < 10^{-7}$ Å，其单色性比氪灯提高约十万倍. 激光极好的单色性使得激光可作为长度标准进行精密测量.

④ 相干性好　光的时间相干性与其单色性是密切相联的，单色性好，时间相干性也好. 激光的单色性远高于普通光源，所以时间相干性很好. 我们知道，时间相干性可用相干长度来衡量. 在普通光源中，相干长度最大的是氪灯的光. 其相干长度 L 约 78 cm，而稳频 He－Ne 激光器发射的激光，其相干长度可达 180 km. 激光也有好的空间相干性.

3. 激光应用简介

激光的应用范围很广，以下分几个方面作一些面上的介绍.

(1) 激光用作热源　利用激光能量高度集中这一特点，可作为热源使用. 在工业加工方面，可应用于激光打孔、切割、焊接等. 在军事上，高强度激光可制成激光武器，这种武器以光速出击，只要对准目标，就可以击中. 近程激光武器可以使人致盲或烧伤，反战车激光武器可用来击毁坦克或其他装甲车，远程激光武器可远距离摧毁飞机、导弹、卫星等. 激光已成为超级大国“星球大战”计划中的重要武器.

(2) 激光用于精密测量　由于激光的单色性、相干性好和亮度高，使激光成为精密测量中十分有效的工具. 例如“激光干涉测长仪”，可测量长度达 40 m，测量精度在 10^{-6} m 以上. 利用激光方向性好、亮度高的特点可制成高精度的激光测距仪. 若用于测量地球到月球的距离，其精确度可达 5 cm. 还可用激光检查计量用的标准元件，对光学仪器表面进行精密测定，测定薄膜厚度，测量工件与产品的运行速度，以及测量地震等等.

(3) 激光用于通信、雷达和电视　由于激光的定向传输，因而通信的保密性能好. 特别突出的优点是信息容量大.

在激光测距的基础上制成了激光雷达. 其所测得的目标位置相对运动速度的精度都比普通雷达高得多.

激光电视用激光进行摄像、传输和显示，比普通电视有许多优点. 例如，显示屏幕可单独放置，因而其屏幕尺寸可等于或大于电影的屏幕尺寸. 由于激光能量集中，因而图像亮度很高，而且图像的色彩更加鲜艳、逼真.

（4）激光用于计算机技术　激光用于计算机技术，其前景是用来制造光计算机以代替现有的电子计算机.

（5）激光全息照相　全息照相，是把物光的全部信息（物光的振幅和周相）记录下来，并通过一定的手续，“再现”出物体的立体图像. 全息照相原理早在 20 世纪 40 年代就有人提出来，但直到 1960 年激光问世以后，才使全息照相成为现实.

25.3　超导电性

超导电现象的研究，从 1911 年昂尼斯（K. Onnes）首先发现超导现象，到 1987 年高温超导材料的获得并在世界上激起“超导热”，前后经历了 70 多年的历史，迄今超导物理学已成为凝聚态物理学的一个重要分支. 本节将简要介绍一下超导的基本特性、超导典型的微观理论、超导材料及超导的一些重要应用.

25.3.1　超导的基本特性

1. 零电阻效应

1908 年，荷兰物物理学家昂内斯首次成功地把称为“永久气体”的氦液化，因而获得 4.2 K 的低温源，为超导发现准备了条件. 三年后即 1911 年，在测试纯金属电阻率的低温特性时，他又发现，汞的直流电阻在 4.2 K 时突然消失，多次精密测量表明，汞柱两端压降为零，昂尼斯确认这时汞进入了一种以零电阻为特征的新物态，并称为“超导态”.

所谓超导电性是指当某些金属、合金及化合物的温度低于某一值时，电阻突然为零的现象. 当物质具有超导电性时，我们把这种状态称为“超导态”，而把某一温度下能呈现出超导特性的物质称为超导体. 当超导体在某一温度时它的电阻突然消失，这一温度称为超导体的临界温度 T_c.

只有在稳恒电流的情况下才有零电阻效应. 或者说，超导体在其临界温度以下也只是对稳恒电流没有阻力.

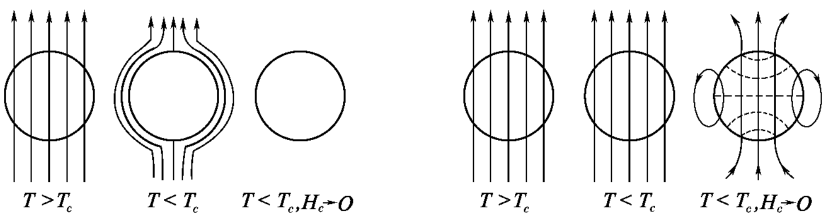
法奥（J. File）和迈奥斯（R. G. Mills）利用精确核磁共振方法测量超导电流产生的磁场来研究螺线管内超导电流的衰变，他们的结论是超导电流的衰减时间不低于十万年.

2. 迈斯纳效应(完全抗磁性)

迈斯纳效应又叫完全抗磁性. 1933年迈斯纳发现,超导体一旦进入超导态. 体内的磁通量将全部被排出体外、磁感应强度恒等于零. 这种现象称为迈斯纳效应.

自1911年超导电现象发现到1933年二十多年间,人们一直把超导体单纯看成理想导体,即除电阻为零之外,其他一切性质都和普通金属相同. 迈斯纳效应展示了超导体与理想导体完全不同的磁性质. 使人们对超导体有了全新的认识.

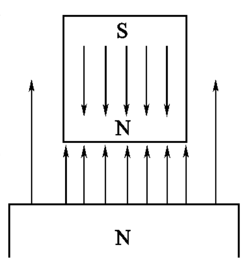
完全抗磁性是超导体的另一更为重要的特征. 它表明超导体和仅仅具有零电阻特性的理想导体不同. 由于电阻为零,在理想导体内部不可能存在电场,根据电磁感应定律,穿过理想导体的磁通量不可能改变,原来存在于体内的磁通量,在临界温度以下,仍然存在于体内不被排斥出来. 当撤去外磁场后,为了保持体内的磁通量,将会产生永久性的感生电流,并在体外产生相应的磁场. 这种情况如图25－18所示. 比较图25－18a和25－18b,可看出超导体和理想导体的本质区别.



(a) 迈斯纳效应　　(b) 理想导体的情形

图25－18　超导体的迈斯纳效应及其和理想导体的比较

当把超导样品放入磁场中时,由于穿过样品的磁通量发生了变化,因而会在样品表面产生电流,这电流在样品内部产生一个和外磁场大小相等、方向相反的内磁场,完全抵消掉内部的外磁场,如图25－19所示. 这时可将超导体本身看作是一个磁体. 其磁场方向和外磁场相反. 由于同性相斥造成的斥力甚至可以抵消重力使超导体悬浮在空中,这种现象称为磁悬浮. 利用磁悬浮性质可得到无摩擦轴承、无摩擦陀螺等,还可制成超导磁悬浮列车,使速度大大提高,其速度可超过500 km·h^{-1}.



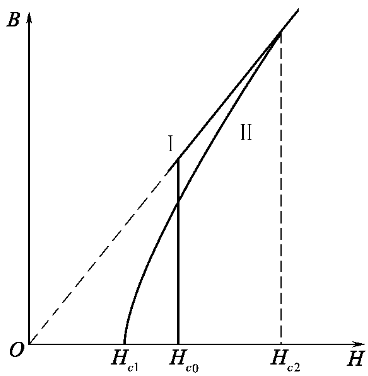
5－19　超导磁悬浮原理

3. 临界磁场和临界电流

实验发现,当物体在低温下处于超导态时,如果周围环

境的磁场足够强，则可破坏其超导电性．使其出现电阻，恢复到正常态．在一定温度下破坏超导电性所需的最小磁场称为临界磁场，用 $H_c(T)$ 表示．图 25－20 给出了一些元素超导体的 $H_c(T)$ 曲线．由图可见，温度越低，则相应的 H_c 越高，$H_c(T)$ 和 T 的关系可近似地表示为

$$H_c(T)=H_{c0}\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] \tag{25-6}$$



25－20　超导体内的磁感应强度 B 和外加磁场 H 的关系曲线

式中 H_{c0} 是 $T=0\mathrm{K}$ 时的超导体的临界磁场．

在外磁场为零时，超导体自身电流产生的磁场太强也会破坏其超导电性，因此超导体内流过的电流不能太大．能维持超导态，在超导体中允许流过的最大电流密度，称为临界电流密度，用 $J_c(T)$ 表示．$J_c(T)$ 和 T 的关系与式(25－6)类似．应当指出，J_c 和 H_c 有关，但并不唯一决定于 H_c，它和其他因素也有一定的关系．

从超导体排斥磁力线的特性及其和临界磁场的关系来看，超导体可分为两类．第一类超导体的特性如图 25－20 中的曲线Ⅰ所示．图中的横坐标 H 表示外加磁场的强度，纵坐标 B 则为超导体内部的磁感应强度．曲线Ⅰ表示：当 $H>H_c$ 时导体为正常态，内部磁感应强度不为零，B 随 H 的减少而减少；当 $H<H_c$ 时 B 突然变为零，成为超导态，第二类超导体的特性则如曲线Ⅱ所示．当 $H<H_{c1}$（下临界磁场）时 $B=0$，处于超导态，当 $H>H_{c2}$（上临界磁场）时，则为正常态．当 $H_{c1}<H<H_{c2}$ 时，处于一种混合态，它能把一部分磁通排斥在外，具有一定的超导电性．

在远低于 T_c 的低温区，第一类超导体的临界磁场 $H_c(T)$ 的典型数值为 10^2 Gs（$1\mathrm{Gs}=10^{-4}\mathrm{T}$），而第二类超导体的上临界磁场可高达 10^5 Gs．所以前者称为

软超导体.后者称为硬超导体.由于硬超导体的临界磁场很高,已成为可以实用的重要超导材料.

4. 同位素效应

1950 年雷诺(Reynolds)等人和依·麦克斯韦(E. Maxwell)分别独立发现超导临界温度 T_c 与元素的同位素质量 M 有关,即

$$M^{\alpha}T_c = \text{常量} \qquad (\alpha = 0.50 \pm 0.03) \tag{25-7}$$

这就是同位素效应.同位素效应说明超导不仅与超导体的电子状态有关,而且也与金属的离子晶格有关.

5. 能隙

理论研究表明,超导体中电子的能量存在着类似半导体禁带的情况,只不过这个禁带非常窄,只有 10^{-4} eV 的量级,吸收一个红外光子即可跃迁,通过这一能量间隙,故谓之能隙,常用符号 Δ 记之.

超导体处于超导状态时,除了上述基本特性外,还有磁通量子化、约瑟夫逊效应等等一些奇特性质,这里就不一一介绍,这些性质在讲到超导应用时一并说明.

25.3.2 超导的微观机理

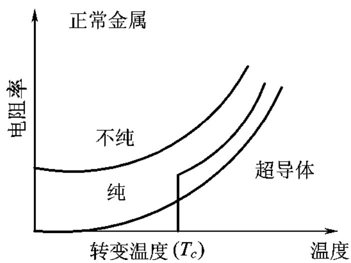
对于超导体所具有的这些特性,从 20 世纪 30 年代起就陆续地提出了不少唯象的理论.这些理论可以帮助人们理解零电阻现象和迈斯纳现象,但不能说明超导电性的起源问题.这个谜底直到 20 世纪 50 年代才由美国的三位物理学家所揭开.

1. 金属导体电阻的电子理论

早期的超导体都是在金属及它们的合金中发现的.当它们由正常态转变为超导态时电阻一下子就消失了,那么它们的微观结构到底发生了什么变化呢?为此,我们简略地介绍一下金属导体电阻的电子理论.

按照量子力学的观点,电子的行为要由薛定谔方程的电子波来描述.理论证明,在一个严格的周期性势场中,电子波是没有散射的,电子也不与晶格交换能量,因此也就没有电阻.而由于缺陷和热振动的存在使得金属中原子实所形成的势场就不能是严格周期性的.电子波在非严格周期性势场中传播将会发生散射,散射的结果使自由电子的动量发生变化,即使得电子在电流方向上的加速运动受到阻碍,这就是电阻.由于散射的原因有缺陷和热振动两个方面,因而金属中的电阻也可以分成两部分,即杂质电阻 ρ_i 和热振动电阻 ρ_l.杂质电阻与杂质浓度

有关而与温度无关.热振动电阻与温度有关.理论研究表明 $\rho_l \propto T$,即非超导物质的电阻随温度下降的曲线是平缓而光滑的.如上所述,一个排列非常整齐,没有杂质的理想离子晶体,只有在晶格没有热振动时(即 $T=0$ K),才没有电阻.而超导体,在临界温度 T_c 以上,即处于正常态时,它的电阻随温度下降的曲线也是平缓而光滑的.但是到了临界温度时,其电阻值突然地一下子消失掉,如图 25－21所示,显然处于超导态的物质,其电子的行为是有异于这种自由无序化电子波的.



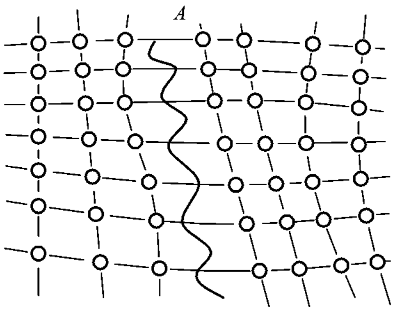
－21　超导体的电阻在转变点完全消失

2. 弗罗里希的“电–声”作用

由于超导体从正常态向超导态的转变是一种突变,因此人们根据金属导体电阻的电子理论,认为这种转变应是电子态的转变,即应该是电子由自由态转变为束缚态,由无序化转化为有序化.1950 年弗罗里希(Frohlich)提出“电–声”作用的图像解释上述转变.

弗罗里希认为,金属中的共有化价电子在离子实组成的晶格间运动时,电子密度是有起伏的.即电子的密度在局部范围内有大有小.如果在某时刻,电子在某处 A 比较集中,这时高密度的电子便会对 A 点附近的离子晶格产生较大的吸引力,而使 A 处的离子实离开自己的平衡位置而产生振动,这振动在局部区域内的传播即为晶格波(有时简称格波).格波的能量,按量子力学的理论是量子化的,其每一份能量为 $h\nu$,ν 为格波的频率.格波波场能量的能量子 $h\nu$ 称为声子.另一方面格波的波场区域内,在沿着高密度电子流运动的轨迹方向上,晶格会发生畸变(极化),即在局部区域内形成正离子高浓度区域,如图 25－22 所示.

当第一个电子由上述的格波波场区域出来而该波场还没有消退时,第二个电子刚好进入到该格波区.由于格波区域内是正离子高浓度区,因此第二个电子就会受到较大的吸引而沿着晶格离子极化的方向去追随第一个电子运动.现在假如我们忘掉晶格离子的极化,而把注意力集中到这一对电子上,那么就会看到这一对电子间存在着一种有效吸引.



25－22　晶格由于电子密度的起伏引起的振动而产生的格波和极化径迹

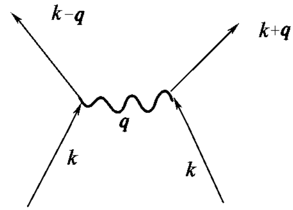


图 25－23　电子–声子作用

对上述这种图像，我们通常用下面的物理术语来描述.根据量子场理论：两个微观粒子之间的作用都是通过交换这种或那种场量子来实现的.例如，电子间的库仑作用就是通过交换光子实现的.按上述思路，我们把电子间上述那种有效吸引，描述成这一对电子是通过交换声子而出现吸引的，如 25－23 图所示.

3．BCS 理论

关于超导的理论，比较成功的是 1957 年由巴丁(Bardeen)、库珀(Cooper)和施里弗(Schrieffer)提出的微观理论，称为 BCS 理论.严格地讲述这一理论需要用到高等量子力学和较多的数学知识，已超出了本书的范围.下面我们只是粗略地对这一理论的基本概念做一些简单的介绍.

在弗罗里希“电–声作用”的基础上，1956 年库珀用离子场论证明了，只要两个电子之间存在有净的吸引作用，不论多么微弱，结果总能形成电子对束缚态.形成束缚态的一对电子，就称为库珀电子对，或简称库珀对.即处于超导态的价电子，不再是单独的一个个地处于自由态，而是配成一对对的束缚态.

在库珀对的基础上，施里弗提出了超导体超导基态波函数，并证明了由于电子配成库珀对，使整个导体处于更为有序化的状态，因此它的能量更低.处于束缚态的库珀对电子的能量与处于正常态的两个自由电子的能量差值，就是超导体中的能隙.反之，这个能隙也可称为库珀对的结合能，即拆散一个库珀对所需的能量.

计算表明，库珀对的结合能量是非常微弱的(约 10^{-4} eV)，这就意味着这个电子对中的两个电子相隔较远，相隔距离约为 10^{-4} cm，但这却是晶格间距的 1 万倍左右，也就是说，在每一个束缚电子对伸延成的体积内包含有成百万对各别的电子对，它们是彼此交叠的，而根据泡利不相容原理，不能有相同量子态的两

个电子占据同一能态. 与此限制相适应,这些相互交叠的库珀对电子的动量就只能统一到每个电子对的总动量为零,每个电子对的自旋角动量也必须为零,即要求每对库珀对的电子,它们的动量大小相等,方向相反,且自旋方向相反. 至于对与对之间,每个电子的动量可以各不相同. 也就是说在超导态中,电子的有序化是指它们动量的有序化而不是指它们位置的有序化.

简言之,BCS 理论的核心是:在超导态中,电子通过电−声作用而结成束缚态的库珀对,而泡利不相容原理则使所有的库珀对电子有序化为群体电子的动量和角动量相关为零.

当超导体处于超导态时,所有价电子都是以库珀对作为整体与晶格作用. 即它的一个电子与晶格作用而得到动量 p' 时,另一个电子必同时失去动量 p',使总动量仍然保持不变. 也就是说库珀对作为整体不与晶体交换动量,也不交换能量,能自由地通过晶格. 当有外加电场并形成传导电流后,库珀对的动量沿着电流方向增加而形成定向流动,但所有电子对携带的动量还是相同的,若此时去掉外场,便没有电子对的加速运动了. 这时库珀对虽然也受到晶格的散射,但在 T_c 以下,这个散射提供的能量还不足以把库珀对分解,故库珀对电子在散射前后总动量仍然保持不变,即电流的流动不发生变化,因此没有电阻. 但在临界温度 T_c 以上这种散射就使库珀对被拆散. 这时单个自由电子的散射将使它的动量发生变化而出现电阻.

BCS 理论不仅成功地解释了零电阻效应,还成功地解释了迈斯纳效应,超导态比热、临界磁场等实验结果. 这个曾"使理论物理蒙上耻辱"的物理难题经历了大约半个世纪之后,终于得到了比较满意的解决. 因此巴丁等人在 1972 年获得了诺贝尔物理学奖.

25.3.3　超导材料的分类

人们把超导材料按照超导体在临界磁场 H_c 时,将磁通排斥在超导体外的方式不同,把超导材料分为两类.

1. 第 Ⅰ 类超导材料

这类超导材料在磁场 H_c 以下,磁通是完全被排斥在超导体之外的,而只要磁场一高于 H_c,磁场就完全透入超导体中,材料也恢复到正常态. 即这类超导材料由超导态向正常态转变没有任何中间态,只要出现 $T>T_c$,$H>H_c$,$J>J_c$ 中的任何一种情况,就立即恢复到正常态,亦即只有处于图 25 - 24 中的曲面内时

才是超导态.

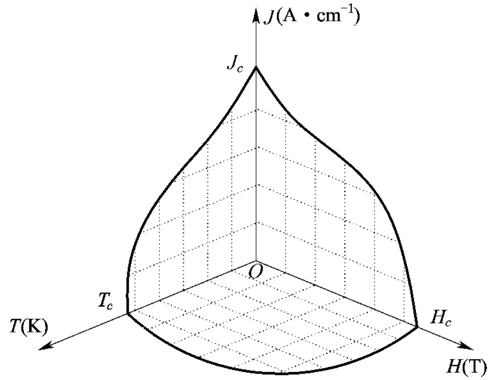
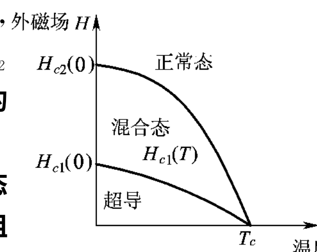


图 25－24　分开第一类材料的正常态和超导态的曲面

属于第Ⅰ类超导材料的是除铌（Nb）、钒（V）、锝（Tc）以外的纯超导元素如铱（Ir，T_c＝0.14K），镉（Cd，T_c＝0.56K），锌（Zn，T_c＝0.85K），汞（Hg，T_c＝4.15K），铅（Pb，T_c＝7.2K）……这类超导材料的 T_c 和 H_c 一般都很低.由于低温技术难以获得，故这类超导材料的应用前景有限.

2. 第Ⅱ类超导材料

这类超导材料存在两个临界磁场，即下临界磁场 H_{c1} 和上临界磁场 H_{c2}. 当材料处于下临界磁场 H_{c1} 时是完全超导态.当磁场超过 H_{c1} 但仍在 H_{c2} 以下，处于混合态，这时材料的大部分处于超导态，而小部分处于正常态.即从 H_{c1} 开始，磁通就部分地透入超导体中，而且随着磁场的增强，透入的磁通也随之增加，当磁场达到上临界磁场 H_{c2} 时，磁场完全地透入材料中并完全恢复到有电时的正常态，参见图 25－25.



25－25　第二类超导态处于混合态时的磁通透入

值得注意的是，第Ⅱ类超导材料在处于混合态时，虽然完全抗磁性开始部分地受到破坏，但零电阻效应依然保持.在磁场透入的部分，电流与磁场之间存在相互作用，这种作用在材料中会引起电阻效应并会局部升温，使得磁通透入的范围更大，进而使局部升温范围扩大而导致超过临界温度.对于这种情况，在具体运用时可以通过技术处理而防止.

属于第Ⅱ类超导材料的有铌、钒、锝及合金、化合物等.第Ⅱ类超导材料，尤

其是化合物的超导材料，其临界温度相对较高. 故在技术上有重要应用的主要是指第Ⅱ类超导材料.

3. 高温超导材料

超导最惹人注目的特点，就是在临界温度以下的零电阻效应. 然而直到 1986 年以前，人们发现的超导材料几乎都只能在液氦温区工作. 而氦气的稀少，制备液氦技术的复杂和成本之高昂却大大地限制了超导体的研究和应用.

1986 年 1 月，瑞士苏黎世的 IBM 公司（国际商业通用机械公司）研究所的物理学家缪勒（K. A. Muller）和贝德诺兹（J. G. Bednorz），意外地发现镧、钡、铜三元氧化物这种陶瓷材料在 35 K 出现了超导性. 后经反复实验，证明这是确实的，于是在 4 月才公布发表. 当年 12 月日本东京帝国大学和美国波士顿大学宣布重复了缪勒等人的实验，这一事件引起了世界各国的重视. 世界各地的科学家纷纷对这种氧化物超导体进行系列的研究，其中也有我国物理学家的出色工作. 1986 年 12 月 25 日中科院物理所的赵忠贤等人得到了锶、镧、铜氧化物系统的转变温度为 48.6 K，1987 年 2 月 24 日，他们又获得了钡、钇、铜氧化物的转变温度为 92.8 K（20 世纪 90 年代的最新报道是，Hg 系列氧化物超导体，其超导转变温度达 133.8 K）. 从 1986 年 12 月开始，差不多每天都有这方面的新报道，全世界掀起了“超导热”. 新的超导材料之所以鼓舞人心，是因为它能在液氮温区工作. 氮的沸点是 77 K，而获得液氮要比液氦容易得多，且氮是空气的主要成分，资源丰富. 因此超导材料的临界温度提高到液氮范围，这是一个重大的突破，给超导的实际应用带来了非常广阔的前景

由于缪勒和贝德诺兹在高温超导材料中的关键性突破，为高温超导材料的研究开辟了新的道路. 他们荣获了 1987 年的诺贝尔物理学奖.

4. 超导理论新动向

1986 年高温超导的出现，不仅改变超导材料的应用前景，同时对超导理论的研究也起了推进作用. 过去超导材料主要是金属和合金，而现在主要是多元金属氧化物. 人们普遍关心的是对于新的超导材料，以金属超导材料为对象的 BCS 理论是否依然有效？根据新发表的一些材料来看，实验证明电子在超导体中配成库珀对这一点仍然是必要的，而对形成库珀对的机制有不同的看法. 1987 年安德逊（D. W. Anderson）提出的共振理论认为，新的超导体存在母体和掺杂两部分，例如 La－Ba－Cu－O 中，La_2CuO_4 是母体，本身是绝缘体，电子在晶格附近配成自旋相反的共价键，通过掺杂的驱动，这种共价电子就共振转变为超流的库珀对而形成超导.

罗伏兹(J. Ruvalds)则提出固体中电子气的密度发生起伏，以波的形式传递而形成所谓电荷密度波，而它的量子称为等离子激元，它起了 BCS 理论中声子的作用. 这两种理论都是全电子理论，即形成电子对与晶格无直接关系.

还有一种所谓“激子机制”而形成电子对的. 这种理论认为金属(如 Ba)与半导体(如 Cu_2O)是以一层层形式的结构而存在的，称为 M－S－M 结构. M(金属)中的电子排斥 S(半导体)中的电子而形成空穴，空穴又与 M 中的电子形成电子–空穴对，这种电子–空穴对称为激子. 在两边的 M 中两个电子通过激子而配成电子对. 目前这些理论都不很成熟，超导理论工作者都在注意实验将会得到什么有意义的结果并以此来指导理论工作的方向.

5. 超导电性在工业上的应用

(1) 超导磁体

无论是现代的科学研究还是现代工业，都需要研制出大尺度、强磁场、低消耗的磁体，但现有材料制成的磁体却不能全面满足上述要求.

用铁磁材料制成的永久磁体，它两极附近的磁场只能达到 7000～8000 高斯；电磁铁由于铁芯磁饱和效应的限制，也只能产生 25000 高斯的磁场；用通以大电流的铜线圈产生的磁场虽然可以高达 10 万高斯，但耗电达 1600 千瓦，且每分钟需耗用 4.5 吨的水来冷却，此外，体积庞大也是它的一个缺点，一个能产生 5 万高斯的铜线圈重达 20 吨.

用超导线圈来制成磁体却能做到大尺度、强磁场、低消耗. 例如可以产生几万高斯的超导磁体只需耗电几百瓦(主要用于维持超导材料需要的低温)，其重也只有几百公斤，而且还无须耗用大量的冷却水. 目前世界上已制成的超导磁体产生的磁场已高达 17 万高斯，现在正在研制 20～30 万高斯的超导磁体. 此外，超导磁体所产生的磁场，无论在持久工作的时间稳定性、大空间范围内的均匀性和磁场梯度等方面都要比普通磁体强得多.

超导磁体已被应用于高能物理、磁悬浮列车(目前拥有磁悬浮列车的国家只有德国、日本和中国等少数几个国家)和医用核磁共振成像设备中，用超导磁体制成的功率已达 2400 瓦的单极电动机早在 20 世纪 60 年代已经问世(主要应用在需要连续运转但转速变化太大的地方，如轧钢机、船舶驱动和发电站的辅助电动机等). 另外，能在大尺度范围内产生强磁场的超导磁体在未来新能源磁流体发电机及受控核聚变中用于约束等离子体必将发挥重要作用. 有人还设想过，将超导磁体运用于交流发电机上，这样可以提高单机容量. 由于高温超导材料的突破，可以预计，高温超导磁体的应用将会更为广泛.

(2) 超导电缆

电能在零电阻输送时是完全没有损耗的,这无疑是用超导电缆进行电力输送者最充分的理由.在液氮低温区(4.2 K)已有实验性电缆.结论是用于超高压特大容量的电力传输,在技术上是完全可行的.目前,困难大体上集中在如下几个问题:在经济上,比较低的运转费用必须要抵得过昂贵的投资;在技术方面低温电缆所要求的绝缘介质在低温下的强度还有待解决;在传输线、制冷站或电缆中出现故障时,提供相应的保护以保证电流的供应不间断也有问题;超导电缆低温屏蔽上如出现故障也不能很快地修复等.然而,由于对电能需求的迅速增长,高温超导材料临界温度的提高,超导电缆在传输电力时的无能量损耗,这个巨大的优势正在吸引越来越多的人去开发,故可以相信,超导电缆的实际应用是为时不久了.

(3) 超导储能

将一个超导体圆环置于磁场中,降温至圆环材料的临界温度以下,撤去磁场,由于电磁感应,圆环中便有感生电流产生.只要温度保持在临界温度以下,电流便会持续下去.已有的实验表明,这种电流的衰减时间不低于 10 万年.显然这是一种理想的储能装置,称为超导储能.

超导储能的优点很多,主要是功率大、质量轻、体积小、损耗小、反应快等等,因此应用很广.如大功率激光器,需要在瞬时提供数千乃至上万焦耳的能量,这就可由超导储能装置来承担.超导储能还可用于电网,当大电网中负荷小时,把多余的电能储存起来,负荷大时又把电能送回电网,这样就可以避免用电高峰和低谷时的供求矛盾.

6. 约瑟夫逊效应及其应用

如果我们将两块处于超导态的超导体以不同的方式相接触而组成各种不同形式的"超导结",那么将会出现哪些奇特的现象呢?不但有人这样想过,而且还有人这样做过,这就导致了贾埃弗(Giaever)单电子隧道效应和约瑟夫逊的库珀对隧道效应(即约瑟夫逊效应)的发现.近 20 多年来,人们对约瑟夫逊效应进行了深入研究并已发展成为超导电子学.

(1) 单电子隧道效应

1960～1961 年,贾埃弗将正常态金属膜(N)、超导体(S)、薄氧化物绝缘层(I)组成不同的超导结:N－I－N 结、N－I－S 结和 S－I－S 结,做了一些有趣的实验(如图 25－26 所示).根据接触电势差理论可知,那一层薄的绝缘层对于电子来说就是一个势垒.根据量子力学理论,具有波粒二象性的微观粒子,即使在其动能 E 小于势垒高度时,仍有一定的概率从势垒的一侧贯穿至另一侧,这就是所谓的量子隧道效应.贾埃弗在上述超导结中发现了单电子超导效应.实验观测到,当外加电压 $V>0$ 时,单电子隧道效应产生的隧道电流 I 和外加电压 V 之

间的 $I-V$ 曲线，N－I－N 结与 N－I－S 结和 S－I－S 结之间有显著的不同. N－I－N 结的 $I-V$ 曲线如图 25－26a 所示，是呈直线的，而 N－I－S 结和 S－I－S 结的 $I-V$ 曲线不再呈直线，而是在超导能隙电压 Δ/e 处或$(\Delta_1+\Delta_2)/e$ 处（式中 Δ 表示超导能隙），隧道电流突然增加，如图 25－26(b，c)所示. 贾埃弗用电子隧道效应的发现，直接观测了超导能隙，证明了 BCS 理论的正确，并可为超导理论的新发展——强耦合理论提供实验依据.

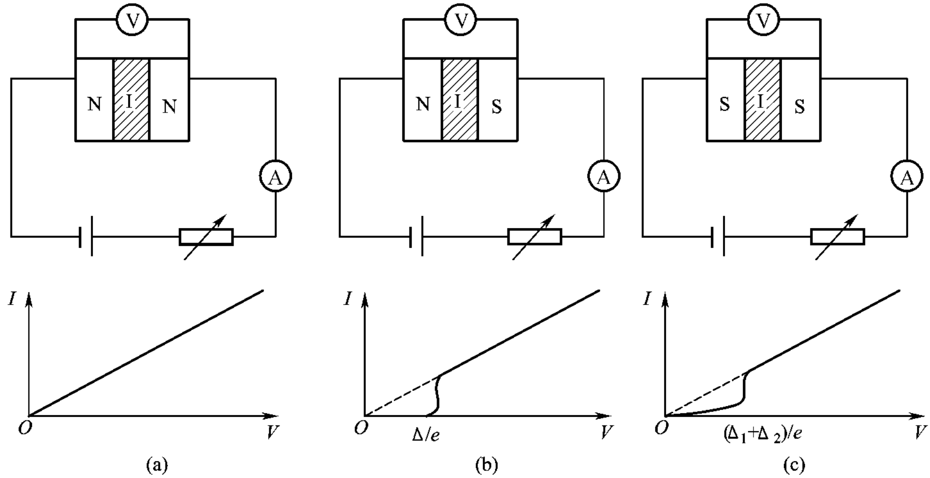


图 25－26　不同的导结

（2）约瑟夫逊效应

既然实验中已指出超导结中有单电子隧道效应存在，那么库珀对电子作为整体能否隧穿绝缘层的势垒而发生隧道效应呢？1962 年正在英国剑桥大学攻读物理博士学位的研究生、年仅 22 岁的约瑟夫逊在其导师安德森的指导下研究了这个问题. 约瑟夫逊运用 BCS 理论研究了超导能隙的性质，计算了 S－I－S 结（后人称为约瑟夫逊结）的隧道效应，从理论上预言，只要隧道结的势垒层（I）足够薄（10 Å 左右）时，库珀对也能隧穿势垒层，并且具有如下一些性质.

① 直流约瑟夫逊效应：根据 BCS 理论，总动量为 p 的库珀对也可以用具有德布罗意波波长为 h/p 的一个波函数来表示. 当存在超导电流时，每对库珀对的总动量 p 都是相同的，即所有电子对的德布罗意波长相同；又由于这些库珀对电子是大范围内彼此交叠的，亦即大量的电子对的波函数在空间内是相互交叠的，所以各电子对的波函数的相位也必须相同. 计算表明，至少在人体尺度的超导体内，库珀对电子的波函数的相位都能保持相同.

如图 25－26c 所示，S－I－S 结中的这两块超导体，电子对的相位在每一块

的内部是相同的，但是在这两块之间，它们的相位则是不同的. 若在约瑟夫逊结的外侧加上一直流电压，当电压小于 $2\Delta/e$ 时，几乎没有电流，但当电压达到 $2\Delta/e$ 时，电流突然上升，但这时电压不变，亦即结电压（S－I－S 结两端的电压）为零，这也就是零电阻效应，此时的电流就是超导隧道电流，如图 25－27 所示. 当电流超过最大约瑟夫逊电流 I_j 时，曲线就显示出正常态的电流电压关系.

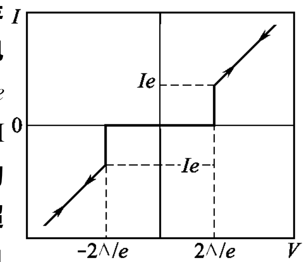


图 25－27　约瑟夫逊结的 $I-V$ 曲线

结电压为零时的超导电流满足如下关系：

$$I=I_j\sin\varphi \tag{25－8}$$

式中 I_j 为最大约瑟夫逊电流，$\varphi=\varphi_2-\varphi_1$，是绝缘层两侧库珀对波函数的位相差. 可以证明在结电压为零时，φ 为常数，即此时是一个恒定的无阻超导电流.

进一步的研究发现，最大约瑟夫逊电流 I_j 对外磁场很敏感. 若在结电压为零时，在平行于结的平面上加上外磁场，I_j 就会减少，而且出现周期性的变化，如图 25－28 所示. 当通过结面的磁通为磁通量子 $\Phi_0=\dfrac{h}{2e}$，I_j 就降为 0. I_j 与磁通 Φ 的关系曲线与光的单缝衍射时光强分布曲线非常相似.

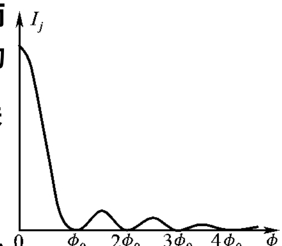


图 25－28　超导结电流 I_c 随磁通 φ 的变化

以上现象即为直流约瑟夫逊效应

② 交流约瑟夫逊效应：当外加电压继续增大，使隧道电流超过最大约瑟夫逊电流 I_j 时，亦即当结电压 $V\neq 0$ 时，约瑟夫逊指出，这时超导结两侧的超导体内电子对的量子态波函数的位相差对时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{2e}{h}\right)V \tag{25－9}$$

积分可得 $\varphi=\dfrac{2e}{h}V_0t+\varphi_0$，这时，通过约瑟夫逊结的电流为

$$I=I_j\sin\left(\frac{2e}{h}V_0t+\varphi_0\right) \tag{25－10}$$

这说明当结电压不为零时，会出现一个基频为 $\nu_0=\dfrac{2e}{h}V$ 的交变电流. 计算表明 $\dfrac{2e}{h}=483.6\ \mathrm{MHz}\cdot\mu\mathrm{V}^{-1}$，即每微伏电压对应的交变电流频率为 483.6 兆赫. 这种高频的正弦电流将会产生电磁辐射，辐射的频段在微波至红外部分 $5\times10^{12}\sim$

10×10^{12} Hz. 这是因为库珀对从结电压处获得能量，又以辐射形式发射出去的结果. 这就是交流约瑟夫逊效应.

如果在 S－I－S 结外侧的外加直流电压的基础上再外加一个交变电压（例如用微波照射在结上），同时又改变结上的直流电压时，则在某些特定的电压值，电流会突然增大，如图 25－29 所示，在 $I-V$ 曲线上出现了台阶. 由于这种现象是夏皮罗（Shapiro）在 1963 年做交流约瑟夫逊效应的逆效应实验时发现的，故这种电压台阶又称夏皮罗台阶. 实验发现这一系列电压值为

$$V_n=n\frac{h}{2e}\nu \quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad (25-11)$$

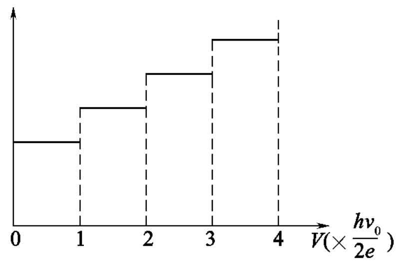


图 25－29　微波感应台阶

式中 ν 是辐照的微波频率. 这说明相邻台阶间的电压间隔是 $\frac{h}{2e}\nu$. 显然，当辐照频率一定时，这时的电压值也是量子化的，这就为电压的自然标准提供了实验基础.

由于约瑟夫逊所作出的贡献，使他和贾埃弗共享了 1973 年的诺贝尔物理学奖.

3）约瑟夫逊效应的主要应用

（1）超导量子干涉器　简称 SQUID，如图 25－30 左图所示，把两个约瑟夫逊结并联起来即成为一个 SQUID，超导电流从 P 通过结 1 和 2 到达 Q. 若用波函数来描述库珀对的量子态，则经过结 1 和结 2 后，它们的波函数的相位改变是不同的，因此波函数到达 Q 点因产生相位差而干涉，这与光通过双缝而干涉的情况相似，不过这里是描述库珀对的量子态波函数的干涉而已.

如果把器件放在外磁场中，则理论证明，当通过干涉器回路中的磁通量是磁通量子 Φ_0 的整数倍时，通过即 SQUID 的电流出现极大. 即

$$I_m=2I_j\left|\cos(\pi\Phi_c/\Phi_0)\right|$$

式中 I_j 是单结的最大约瑟夫逊电流，Φ_c 为外场穿过器件回路的磁通量，Φ_0 也为磁通量子. I_m 与 Φ_c 的关系如图 25－30 右图所示. 在具体运用时，根据偏置电流的不同又可分为直流（DC）和射频（RF）两类.

目前应用较广的是以 DCSQUID 为磁传感元件制成的超导磁强计. 由于用的是干涉原理，故灵敏度特别高，其可测出 10^{-11} 高斯的弱磁. 超导磁强计作为探测微弱磁场的精密仪器已被广泛应用于科学技术和生产实践各个领域，如探矿、地震预报、生物磁场探测等.

（2）电压标准　1893 年开始，国际上采用硫酸镉电池组作为标准电池并置

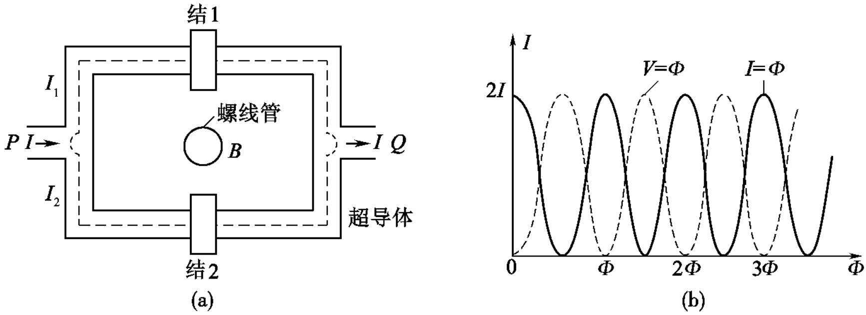


图 25－30　超导量子干涉

于恒温、恒湿、防震实验室内. 由于物理化学因素的变化,电压值不断变化,为消除各国电压标准的差异,规定每隔 3 年到法国巴黎的国际权度局进行一次直接比对. 这不仅麻烦,精确度也不能满足科技发展的需要. 根据约瑟夫逊结受微波辐照时 $I-V$ 曲线上会出现 Shapiro 台阶,电压值为

$$V_n = n\frac{h}{2e}\nu$$

频率测量精度可达 10^{-10} Hz,而$\frac{h}{2e}$为常量,监测精度可达 10^{-8} V. 故从 1976 年起国际权度局决定,改用约瑟夫逊效应方法经管电压标准. 这样不仅精度高,而且与测量地点、环境无关.

(3) **超导计算机器件**　计算机最基本的元件是开关元件. 用一磁场可使约瑟夫逊结从零压状态变为有压状态,结的这一特性便可作为计算机的开关元件,它的开关速度只需几个微微秒(10^{-12} s),比半导体的开关速度快 1000 倍,而功耗比半导体元件约小 1000 倍. 因此,超导计算机器件的特点是速度快、功耗小,不存在散热问题.

此外,利用超导隧道效应制备的敏感元件,其能量分辨率可以接近量子力学测不准关系所限定的量级,这是其他器件所不能达到的.

25.4　纳米科学与技术

1965 年诺贝尔物理奖获得者、美国著名物理学家费因曼教授(R. P. Feynman)曾经预言:如果我们对物体微小规模上的排列加以某种控制的话,我们就能使物体

得到大量的异乎寻常的特性，就会看到材料的性能产生丰富的变化．他所说的材料就是现在的纳米材料，纳米材料是指晶粒尺寸为纳米级（10^{-9}米）的超细材料．它的微粒尺寸大于原子簇，小于通常的微粒，一般为 0.1～100 μm，包含的原子不到几万个．一个直径为 3 nm 的原子团包含大约 900 个原子，几乎是英文里一个句点的百万分之一，这个比例相当于一条 300 多米长的帆船跟整个地球的比例．

纳米科学技术是用单个原子、分子制造物质的科学技术．纳米科学技术是以许多现代先进科学技术为基础的科学技术，它是现代科学（混沌物理、量子力学、介观物理、分子生物学）和现代技术（计算机技术、微电子和扫描隧道显微镜技术、核分析技术）结合的产物，纳米科学技术又将引发一系列新的科学技术，例如纳米电子学、纳米材料学、纳米机械学等．纳米科学技术被认为是世纪之交出现的一项高科技．

25.4.1 纳米材料的奇异特性

1. 表面效应

球形颗粒的表面积与直径的平方成正比，其体积与直径的立方成正比，故其比表面积（表面积/体积）与直径成反比．随着颗粒直径变小，比表面积将会显著增大，说明表面原子所占的百分数将会显著地增加，假如原子间距为 3×10^{-4} 微米，表面原子仅占一层．

表 25－3　　纳米微粒尺寸与表面原子数的关系

纳米微粒尺寸(nm)	包含总原子数	表面原子所占比例(%)
10	5×10^4	20
4	4×10^3	40
2	2.5×10^2	80
1	30	99

由表 25－3 可见，对直径大于 0.1 微米的颗粒表面效应可忽略不计，当尺寸小于 0.1 微米时，其表面原子百分数激剧增长，甚至 1 克超微颗粒表面积的总和可高达 100 米^2，这时的表面效应将不容忽略．超微颗粒的表面与大块物体的表面是十分不同的，若用高倍率电子显微镜对金超微颗粒（直径为 2×10^{-3} 微米）进行电视摄像，实时观察发现这些颗粒没有固定的形态，随着时间的变化会自动形成各种形状（如立方八面体、十面体、二十面体多晶等），它既不同于一般固体，又不同于液体，是一种准固体．在电子显微镜的电子束照射下，表面原子仿佛进入了“沸腾”状态，尺寸大于 10 纳米后才看不到这种颗粒结构的不稳定性，这时

微颗粒具有稳定的结构状态.

超微颗粒的表面具有很高的活性,在空气中金属颗粒会迅速氧化而燃烧.如要防止自燃,可采用表面包覆或有意识地控制氧化速率,使其缓慢氧化生成一层极薄而致密的氧化层,确保表面稳定化.利用表面活性,金属超微颗粒可望成为新一代的高效催化剂和贮气材料以及低熔点材料.

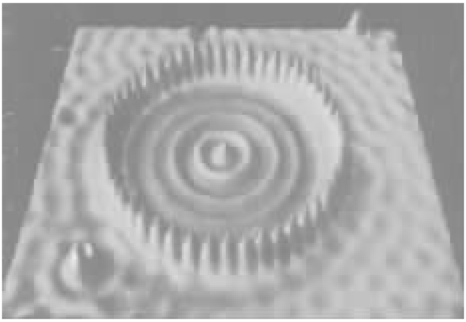


图 25－31　扫描隧道显微镜的针尖在铜表面上搬运和操纵 48 个原子,排成圆形.圆形上原子的某些电子向外传播,逐渐减小,同时向内传播的电子相互干涉,形成干涉波

2. 小尺寸效应

随着颗粒尺寸的量变,在一定条件下会引起颗粒性质的质变.由于颗粒尺寸变小所引起的宏观物理性质的变化称为小尺寸效应.对超微颗粒而言,尺寸变小,同时其比表面积亦显著增加,从而产生如下一系列新奇的性质.

(1) 特殊的光学性质　当黄金被细分到小于光波波长的尺寸时,即失去了原有的富贵光泽而呈黑色.事实上,所有的金属在超微颗粒状态都呈现为黑色.尺寸越小,颜色愈黑,银白色的铂(白金)变成铂黑,金属铬变成铬黑.由此可见,金属超微颗粒对光的反射率很低,通常可低于 1%,大约几微米的厚度就能完全消光.利用这个特性可以作为高效率的光热、光电等转换材料,可以高效率地将太阳能转变为热能、电能.此外又有可能应用于红外敏感元件、红外隐身技术等.

(2) 特殊的热学性质　固态物质在其形态为大尺寸时,其熔点是固定的,超细微化后却发现其熔点将显著降低,当颗粒小于 10 纳米量级时尤为显著.例如,金的常规熔点为 1064℃,当颗粒尺寸减小到 10 纳米尺寸时,则降低 27℃,2 纳米尺寸时的熔点仅为 327℃左右;银的常规熔点为 670℃,而超微银颗粒的熔点可低于 100℃.因此,超细银粉制成的导电浆料可以进行低温烧结,此时元件的基片不必采用耐高温的陶瓷材料,甚至可用塑料.采用超细银粉浆料,可使膜厚均匀,覆盖面积大,既省料又具高质量.

（3）**特殊的磁学性质** 人们发现鸽子、海豚、蝴蝶、蜜蜂以及生活在水中的趋磁细菌等生物体中存在超微的磁性颗粒，使这类生物在地磁场导航下能辨别方向，具有回归的本领. 磁性超微颗粒实质上是一个生物磁罗盘，生活在水中的趋磁细菌依靠它游向营养丰富的水底. 通过电子显微镜的研究表明，在趋磁细菌体内通常含有直径约为 2×10^{-2} 微米的磁性氧化物颗粒. 小尺寸的超微颗粒磁性与大块材料显著的不同，大块的纯铁矫顽力约为 80 安/米，而当颗粒尺寸减小到 2×10^{-2} 微米以下时，其矫顽力可增加 1 千倍，若进一步减小其尺寸，大约小于 6×10^{-3} 微米时，其矫顽力反而降低到零，呈现出超顺磁性. 利用磁性超微颗粒具有高矫顽力的特性，已作成高贮存密度的磁记录磁粉，大量应用于磁带、磁盘、磁卡以及磁性钥匙等. 利用超顺磁性，人们已将磁性超微颗粒制成用途广泛的磁性液体.

（4）**特殊的力学性质** 陶瓷材料在通常情况下呈脆性，然而由纳米超微颗粒压制成的纳米陶瓷材料却具有良好的韧性. 因为纳米材料具有大的界面，界面的原子排列是相当混乱的，原子在外力变形的条件下很容易迁移，因此表现出甚佳的韧性与一定的延展性，使陶瓷材料具有新奇的力学性质. 研究表明，人的牙齿之所以具有很高的强度，是因为它是由磷酸钙等纳米材料构成的. 呈纳米晶粒的金属要比传统的粗晶粒金属硬 3～5 倍. 至于金属一陶瓷等复合纳米材料则可在更大的范围内改变材料的力学性质，其应用前景十分宽广.

超微颗粒的小尺寸效应还表现在超导电性、介电性能、声学特性以及化学性能等方面.

3. 量子效应

各种元素的原子具有特定的光谱线，如钠原子具有黄色的光谱线. 原子模型在量子力学中已用能级的概念进行了合理的解释，由无数的原子构成固体时，单独原子的能级就并合成能带，由于电子数目很多，能带中能级的间距很小，因此可以看作是连续的. 对介于原子、分子与大块固体之间的超微颗粒而言，大块材料中连续的能带将分裂为分立的能级；能级间的间距随颗粒尺寸减小而增大. 当热能、电场能或者磁场能比平均的能级间距还小时，就会呈现一系列与宏观物体截然不同的反常特性，称之为量子尺寸效应. 例如，导电的金属在超微颗粒时可以变成绝缘体，磁矩的大小和颗粒中电子是奇数还是偶数有关，比热亦会反常变化，光谱线会产生向短波长方向的移动，这就是量子尺寸效应的宏观表现. 因此，对超微颗粒在低温条件下必须考虑量子效应，原有宏观规律已不再成立.

电子具有粒子性又具有波动性，因此存在隧道效应. 近年来，人们发现一些宏观物理量，如微颗粒的磁化强度、量子相干器件中的磁通量等亦显示出隧道效

应,称之为宏观的量子隧道效应.量子尺寸效应、宏观量子隧道效应将会是未来微电子、光电子器件的基础,或者它确立了现存微电子器件进一步微型化的极限,当微电子器件进一步微型化时必须要考虑上述的量子效应.例如,在制造半导体集成电路时,当电路的尺寸接近电子波长时,电子就通过隧道效应而溢出器件,使器件无法正常工作,经典电路的极限尺寸大概在 0.25 微米.目前研制的量子共振隧穿晶体管就是利用量子效应制成的新一代器件

25.4.2　纳米技术的应用及其前景

1. 纳米技术在陶瓷领域方面的应用

陶瓷材料作为材料的三大支柱之一,在日常生活及工业生产中起着举足轻重的作用.但是,由于传统陶瓷材料质地较脆,韧性、强度较差,因而使其应用受到了较大的限制.随着纳米技术的广泛应用,纳米陶瓷随之产生,希望以此来克服陶瓷材料的脆性,使陶瓷具有象金属一样的柔韧性和可加工性.英国材料学家 Cahn 指出纳米陶瓷是解决陶瓷脆性的战略途径.

所谓纳米陶瓷,是指显微结构中的物相具有纳米级尺度的陶瓷材料,也就是说晶粒尺寸、晶界宽度、第二相分布、缺陷尺寸等都是在纳米量级的水平上.

2. 纳米技术在微电子学上的应用

纳米电子学是纳米技术的重要组成部分,其主要思想是基于纳米粒子的量子效应来设计并制备纳米量子器件,它包括纳米有序(无序)阵列体系、纳米微粒与微孔固体组装体系、纳米超结构组装体系.纳米电子学的最终目标是将集成电路进一步减小,研制出由单原子或单分子构成的在室温能使用的各种器件.

目前,利用纳米电子学已经研制成功各种纳米器件.单电子晶体管,红、绿、蓝三基色可调谐的纳米发光二极管以及利用纳米丝、巨磁阻效应制成的超微磁场探测器已经问世.并且,具有奇特性能的碳纳米管的研制成功,为纳米电子学的发展起到了关键的作用.

碳纳米管是由石墨碳原子层卷曲而成,径向尺层控制在 100 nm 以下.电子在碳纳米管的运动在径向上受到限制,表现出典型的量子限制效应,而在轴向上则不受任何限制.清华大学的范守善教授利用碳纳米管,将气相反应限制在纳米管内进行,从而生长出半导体纳米线.

早在 1989 年,IBM 公司的科学家就已经利用隧道扫描显微镜上的探针,成功地移动了氙原子,并利用它拼成了 IBM 三个字母.日本的 Hitachi 公司成功研

制出单个电子晶体管,它通过控制单个电子运动状态完成特定功能,即一个电子就是一个具有多功能的器件. 另外,日本的 NEC 研究所已经拥有制作 100 nm 以下的精细量子线结构技术,并在 GaAs 衬底上,成功制作了具有开关功能的量子点阵列. 目前,美国已研制成功尺寸只有 4 nm 具有开关特性的纳米器件,由激光驱动,并且开、关速度很快.

美国威斯康星大学已制造出可容纳单个电子的量子点. 在一个针尖上可容纳这样的量子点几十亿个. 利用量子点可制成体积小、耗能少的单电子器件,在微电子和光电子领域将获得广泛应用. 此外,若能将几十亿个量子点连结起来,每个量子点的功能相当于大脑中的神经细胞,再结合 MEMS(微电子机械系统)方法,它将为研制智能型微型电脑带来希望. 纳米电子学立足于最新的物理理论和最先进的工艺手段,按照全新的理念来构造电子系统,并开发物质潜在的储存和处理信息的能力,实现信息采集和处理能力的革命性突破,纳米电子学将成为新世纪信息时代的核心.

3. 纳米技术在生物工程上的应用

众所周知,分子是保持物质化学性质不变的最小单位. 生物分子是很好的信息处理材料,每一个生物大分子本身就是一个微型处理器,分子在运动过程中以可预测方式进行状态变化,其原理类似于计算机的逻辑开关,利用该特性并结合纳米技术,可以设计量子计算机.

科学家们认为:要想提高集成度,制造微型计算机,关键在于寻找具有开关功能的微型器件. 纳米计算机的问世,将会使当今的信息时代发生质的飞跃. 它将突破传统极限,使单位体积物质的储存和信息处理的能力提高上百万倍,从而实现电子学上的又一次革命.

4. 纳米技术在光电领域的应用

纳米技术的发展,使微电子和光电子的结合更加紧密,在光电信息传输、存贮、处理、运算和显示等方面,使光电器件的性能大大提高. 将纳米技术用于现有雷达信息处理上,可使其能力提高 10 倍至几百倍,甚至可以将超高分辨率纳米孔径雷达放到卫星上进行高精度的对地侦察. 但是要获取高分辨率图像,就必需先进的数字信息处理技术. 科学家们发现,将光调制器和光探测器结合在一起的量子阱自电光效应器件,将为实现光学高速数学运算提供可能.

纳米激光器实际上是一根弯曲成极薄面包圈的形状的光子导线,实验发现,纳米激光器的大小和形状能够有效控制它发射出的光子的量子行为,从而影响激光器的工作. 除了能提高效率以外,无能量阈值纳米激光器的运行还可以得出速度

极快的激光器.由于只需要极少的能量就可以发射激光,这类装置可以实现瞬时开关.已经有一些激光器能够以快于每秒钟 200 亿次的速度开关,适合用于光纤通信.由于纳米技术的迅速发展,这种无能量阈值纳米激光器的实现将指日可待.

5. 纳米技术在化工领域的应用

纳米粒子作为光催化剂,有着许多优点.首先是粒径小,比表面积大,光催化效率高.另外,纳米粒子生成的电子、空穴在到达表面之前,大部分不会重新结合.因此,电子、空穴能够到达表面的数量多,则化学反应活性高.其次,纳米粒子分散在介质中往往具有透明性,容易运用光学手段和方法来观察界面间的电荷转移、质子转移、半导体能级结构与表面态密度的影响.

另外,如将纳米 TiO_2 粉体按一定比例加入到化妆品中,则可以有效地遮蔽紫外线.一般认为,其体系中只需含纳米二氧化钛 0.5%～1%,即可充分屏蔽紫外线.将金属纳米粒子掺杂到化纤或纸张中,可以大大降低静电作用.纳米微粒还可用作导电涂料,用作印刷油墨,制作固体润滑剂等.

研究人员还发现,可以利用纳米碳管独特的孔状结构,大的比表面积(每克纳米碳管的表面积高达几百平方米)、较高的机械强度做成纳米反应器,该反应器能够使化学反应局限于一个很小的范围内进行.在纳米反应器中,反应物在分子水平上有一定的取向和有序排列,但同时限制了反应物分子和反应中间体的运动.这种取向、排列和限制作用将影响和决定反应的方向和速度,科学家们已经利用纳米尺度的分子筛作反应器.

6. 纳米技术在医学上的应用

随着纳米技术的发展,在医学上该技术也开始崭露头脚.研究人员发现,生物体内的 RNA 蛋白质复合体,其线度在 15～20 nm 之间,并且生物体内的多种病毒,也是纳米粒子.10 nm 以下的粒子比血液中的红血球还要小,因而可以在血管中自由流动.如果将超微粒子注入到血液中,输送到人体的各个部位,作为监测和诊断疾病的手段.科研人员已经成功利用纳米 SiO_2 微粒进行了细胞分离,用金的纳米粒子进行定位病变治疗,以减少副作用等.另外,利用纳米颗粒作为载体的病毒诱导物已经取得了突破性进展,现在已用于临床动物实验,估计不久的将来即可服务于人类.

7. 纳米技术在分子组装方面的应用

纳米技术的发展,大致经历了以下几个发展阶段:在实验室探索用各种手段制备各种纳米微粒,合成块体;研究评估表征的方法,并探索纳米材料不同于常规材料的特殊性能;利用纳米材料已挖掘出来的奇特的物理、化学和力学性能,

设计纳米复合材料.目前主要是进行纳米组装体系、人工组装合成纳米结构材料的研究.虽然已经取得了许多重要成果,但纳米级微粒的尺寸大小及均匀程度的控制仍然是一大难关.如何合成具有特定尺寸,并且粒度均匀分布无团聚的纳米材料,一直是科研工作者努力解决的问题.目前,纳米技术深入到了对单原子的操纵,通过利用软化学与主客体模板化学,超分子化学相结合的技术,正在成为组装与剪裁,实现分子手术的主要手段.科学家们设想能够设计出一种在纳米量级上尺寸一定的模型,使纳米颗粒能在该模型内生成并稳定存在,则可以控制纳米粒子的尺寸大小并防止团聚的发生.

1996 年,IBM 公司利用分子组装技术,研制出了世界上最小的“纳米算盘”,该算盘的算珠由球状的 C_{60} 分子构成.美国佐治亚理工学院的研究人员利用纳米碳管制成了一种崭新的“纳米秤”,能够称出一个石墨微粒的质量,并预言该秤可以用来称取病毒的质量.

8. 纳米技术在其他方面的应用

利用先进的纳米技术,在不久的将来,可制成含有纳米电脑的可人机对话并具有自我复制能力的纳米装置,它能在几秒钟内完成数十亿个操作.在军事方面,利用昆虫做平台,把分子机器人植入昆虫的神经系统中控制昆虫飞向敌方收集情报,使目标丧失功能.

利用纳米技术还可制成各种分子传感器和探测器.利用纳米羟基磷酸钙为原料,可制作人的牙齿、关节等仿生纳米材料.将药物储存在碳纳米管中,并通过一定的机制来激发药剂的释放,则可控药剂有希望变为现实.另外,还可利用碳纳米管来制作储氢材料,用作燃料汽车的燃料“储备箱”.利用纳米颗粒膜的巨磁阻效应研制高灵敏度的磁传感器;利用具有强红外吸收能力的纳米复合体系来制备红外隐身材料,都是很具有应用前景的技术开发领域.

专家预言,未来的工业革命将与纳米技术密切相关,我们期待着纳米技术带给人类更美好、更方便的生活.

思考题

25－1　原子中的电子和晶体中的电子运动情况有什么不同？

25－2　内层电子和外层电子参予共有化运动的情况有什么不同？

25－3　从能带结构来看，导体、半导体和绝缘体分别有什么不同？

25－4　半导体的导电机制是什么？适当掺入杂质和加热都能使半导体的电导率增加，这两种情况有什么不同？

25－6　本征半导体和杂质半导体在导电性能上有什么差别？

25－7　在锗晶体中掺人适量的锑或铟，各形成什么类型的半导体？试大致画出能带结构示意图.

25－8　p 型半导体和 n 型半导体接触后形成 p－n 结，n 型中的电子能否无限地向 p 型扩散？为什么？

25－9　比较受激辐射和自发辐射的特点.

25－10　实现粒子数反转要求具备什么条件？

25－11　谐振腔在激光的形成过程中起什么作用？

25－12　处于超导态的超导体有哪些主要特性？

25－13　BCS 理论的基本内容是什么？该理论是如何解释超导的零电阻效应的？

25－14　简述超导量子干涉器的基本原理，其主要有哪些应用？

25－15　超导材料可分为几类？划分的依据是什么？人们为什么致力于高温超导材料的研究？

25－16　什么是约瑟夫逊效应？

25－17　超导在工业上有哪些主要应用？

25－28　什么是纳米技术？

习题 25

25－1　已知硅晶体的禁带宽度 $\Delta E_g = 1.14$ eV，掺入适量五价元素后，施主能级和导带底的能量差 $\Delta E_D = 10^{-2}$ eV，试计算能吸收的辐射能的最大波长是多少？

25－2　已知 Ne 原子的某一激发态和基态的能级差 $E_2 - E_1 = 16.7$ eV，试计算 $T=300$ K 时，热平衡条件下，处于两能级上的原子数的比.

25－3　设氩离子激光器输出的谱线波长 $\lambda = 4880$ Å，它的谱线宽度 $\Delta\nu = 4000$ MHz，求腔长为 1 m 时，输出的纵模个数.

附　　表

附表－1　　物理学常用常数

物理量名称	符　号	数　值
重力加速度标准值	g	9.80665 米/秒^2
万有引力常数	G	6.6731×10^{11} 牛顿·米^2/千克^2
标准大气压	p_0	1.01325×10^5 牛顿/米^2
海平面上℃的声速	v	331.7 米/秒
水的三相点温度	T_{tr}	273.16 开
绝对零度	t_0	－273.15 ℃
普适气体常数	R	8.31441 焦尔/摩尔·开
阿伏伽德罗常数	N_0	6.02204×10^{23} 1/摩尔
玻耳兹曼常数	k	1.38066×10^{-23} 焦耳/开
理想气体摩尔体积(标准状态)	v_0	22.4138×10^{-3} 米^3/摩尔
洛喜密脱常数(标准状态)	n_0	2.68676×10^{25} 1/米^3
热功当量	J	4.1840 焦耳/卡
法拉第(电解)常数	F	9.64870×10^4 库仑/摩尔
电子静止质量	m_e	9.109534×10^{-31} 千克
电子电量	e	1.6021892×10^{-19} 库仑
电子荷质比	e/m_e	1.7588047×10^{11} 库仑/千克
真空中光速	c	2.99792458×10^8 米/秒
真空介电常数	ε_0	$8.854187818\times10^{-12}$ 法拉/米
真空磁导率	μ_0	$12.566370614\times10^{-7}$ 亨利/米
普朗克常数	h	6.626196×10^{-34} 焦耳·秒
电子经典半径	r_e	2.8179380×10^{-15} 米
玻尔半径	a_0	5.2917715×10^{-11} 米
玻尔磁子	μ_B	9.274096×10^{-24} 焦耳/特斯拉
里德伯常数	R_∞	1.097373177×10^7 1/米
精细结构常数	α	7.297351×10^{-3}
斯特藩-玻耳兹曼常数	σ	5.6697×10^{-8} 瓦特/米^2·开^4

续表

物理量名称	符　号	数　值
原子质量单位	u(或 amu)	1.6605655×10^{-27} 千克
电子伏特	eV	1.602189×10^{-19} 焦耳
质子静止质量	m_p	1.672614×10^{-27} 千克
中子静止质量	m_n	1.674920×10^{-27} 千克
电子康普顿波长	λ_{ce}	2.4263096×10^{-12} 米
质子康普顿波长	λ_{cp}	1.3214099×10^{-15} 米
中子康普顿波长	λ_{cn}	1.3195909×10^{-15} 米
核磁子	μ_N	5.050951×10^{-27} 焦耳/特斯拉
电子磁矩	μ_e	9.284832×10^{-24} 焦耳/特斯拉 $\approx 1.00116\mu_B$
质子磁矩	μ_p	1.4106171×10^{-26} 焦耳/特斯拉 $\approx 2.79\mu_N$
中子磁矩	μ_n	$-1.91280\mu_N$
μ 子磁矩	μ_μ	4.494074×10^{-26} 焦耳/特斯拉

附表－2　　关于地球、太阳和月亮的一些数据

物理量名称	数　值
地球的赤道半径	6.378388×10^{6} 米
地球的极半径	6.356192×10^{6} 米
地球的体积	1.086×10^{21} 米^3
地球的质量	5.983×10^{24} 千克
地球的平均密度	5.522×10^{3} 千克/米^3
太阳年	365 日 5 小时 48 分 45.5 秒
恒星年	365.25636042 平均太阳日
平均太阳秒	1/86400 平均太阳日
地球到太阳的平均距离	1.49×10^{11} 米
1 秒内太阳垂直辐射到地球表面单位面积的能量	1.340×10^{3} 焦耳/米^2 · 秒
太阳的平均直径	1.3906×10^{9} 米
太阳的质量	1.971×10^{30} 千克
地球到月亮的平均距离	3.84×10^{8} 米
月亮的平均直径	3.476×10^{6} 米
月亮的质量	7.35×10^{22} 千克

参考答案

第 12 章

12－1　$\dfrac{5q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$，指向$-4q$

12－2　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}q$

12－3　$x>0$　　$9.00\times10^4\left[\dfrac{2.0}{x^2}+\dfrac{5.0}{(x+1.0)^2}\right]\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$

$-0.1m<x<0$　　$9.00\times10^4\left[\dfrac{5.0}{(x+1.0)^2}-\dfrac{2.0}{x^2}\right]\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$

$x<-0.1m$　　$-9.00\times10^4\left[\dfrac{2.0}{x^2}+\dfrac{5.0}{(x+1.0)^2}\right]\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$

12－4　0；0；$q/\pi\varepsilon_0 a^2$ 方向水平向右；$q/2\pi\varepsilon_0 a^2$ 方向指向右下方$-q$ 电荷

12－6　$\sigma/4\varepsilon_0$

12－7　（1）$\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{a}{x(a-x)}\boldsymbol{i}$，$x$ 为场点到带正电荷长直导线的垂直距离；

（2）$\lambda^2/2\pi\varepsilon_0 a$，方向为垂直两长直导线，相互吸引

12－8　$0.72\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$，指向缝隙

12－9　$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2\pi(\sqrt{R^2+d^2}-d)}{\sqrt{R^2+d^2}}$

12－10　（1）$1.04\ \mathrm{N\cdot m^{-2}\cdot C^{-1}}$；　　（2）$9.2\times10^{-12}\ \mathrm{C}$

12－11　$|\mathrm{d}|<\dfrac{D}{2}$　$E=\dfrac{\rho d}{\varepsilon_0}$；$|d|>\dfrac{D}{2}$　$E=\dfrac{\rho D}{2\varepsilon_0}$

12－12　$-\dfrac{1}{3}\times10^{-6}\ \mathrm{C}$，$\dfrac{5}{9}\times10^{-6}\ \mathrm{C}$

12－13　$E_{0.05}=0$；$E_{0.15}=0.41\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$，沿径向向外；$E_{0.5}=1.04\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$，沿径向向外

12－14　$\boldsymbol{E}=\dfrac{kr}{4\varepsilon_0}\boldsymbol{r}(r<R)$；　$\boldsymbol{E}=\dfrac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}(r<R)$

12－15　$\boldsymbol{E}=0(r<a)$；$\boldsymbol{E}=\dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}(r>a)$

12－16　$\boldsymbol{E}=0(r<R_1)$；$\boldsymbol{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}(R_1<r<R_2)$；$\boldsymbol{E}=0(r<R_2)$

12－17　$\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 r^2}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{a}{r}\right)^2}\boldsymbol{r}$

12－18 $\boldsymbol{E}_O=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}_{OO'}$；$\boldsymbol{E}_{O'}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}_{OO'}$；$\boldsymbol{E}_P=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r_{OP}-\dfrac{r^3}{r_{O'P}{}^2}\right)\dfrac{\boldsymbol{r}_{O'P}}{r_{O'P}}$

$\boldsymbol{E}_{P'}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{R^3}{r_{OP'}{}^2}-\dfrac{r^3}{r_{O'P'}{}^3}\right)\dfrac{\boldsymbol{r}_{OP'}}{r_{OP'}}$

12－19 （1）$E_O=720$ V/m，**方向指向右上角**；$U_O=360$ V （2）-3.6×10^{-6} J

（3）3.6×10^{-6} J

12－20 （1）$\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R+l}{R}$； （2）$\dfrac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{(l/2)+\sqrt{R^2+(l/2)^2}}{R}$

12－22 $\boldsymbol{E}=\dfrac{U_{12}}{r^3}\dfrac{R_1R_2}{R_2-R_1}\boldsymbol{r}$

12－23 （1）990 V； （2）450 V

12－25 （1）2.08×10^{-8} C・m^{-1}； （2）$\dfrac{3.74\times10^2}{r^2}\boldsymbol{r}$ V・m^{-1}

12－26 $U_{AB}=4986$ V

12－27 $\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{(x+y^2)^2}\left[a(x^2-y^2)+bx(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right]\boldsymbol{i}+\dfrac{y}{x^2+y^2}\left[2ax+b(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right]\boldsymbol{j}-$

$2cz\boldsymbol{k}$

第 13 章

13－1 （1）$q_B=-1.0\times10^{-7}$ C，$q_C=-2.0\times10^{-7}$ C； （2）2.26×10^3 V

13－2 **球壳内表面带电**$-q$，**外表面带电为零**；

$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}(r<b)$，$\boldsymbol{E}=0(b<r<c)$，$\boldsymbol{E}=0(c<r)$

13－3 （1）$U_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{R_1}-\dfrac{q}{R_2}+\dfrac{q+Q}{R_3}\right)$，$U_2=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$；

（2）$U_{12}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{R_1}-\dfrac{q}{R_2}\right)$；

（3）$U_1=U_2=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$，$U_{12}=0$；

（4）$U_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{R_1}-\dfrac{q}{R_2}\right)$，$U_2=0$，$U_{12}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{R_1}-\dfrac{q}{R_2}\right)$

（5）$U_1=0$，$U_2=\dfrac{Q(R_2-R_1)}{4\pi\varepsilon_0(R_1R_2+R_2R_3-R_3R_1)}$

$U_{12}=\dfrac{Q(R_1-R_2)}{4\pi\varepsilon_0(R_1R_2+R_2R_3-R_3R_1)}$

13－4 $\boldsymbol{E}=0$ $U=U_1$ $r<R_1$；

$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$ $U=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{r}-\dfrac{q}{R_2}+\dfrac{q+Q}{R_3}\right)$ $R_1<r<R_2$

$\boldsymbol{E}=0$ $U=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$ $R_2<r<R_3$

$$\boldsymbol{E}=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \qquad U=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad R_3<r$$

其中 $q=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2 R_3 U_1-R_1 R_2 Q}{R_1 R_2+R_2 R_3-R_3 R_1}$ **为导体球所带电量**

13－5 $\boldsymbol{E}=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}(r<b)$；$\boldsymbol{E}=0(b<r<c)$；$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}(c<r)$

13－6 $\frac{1}{2}\left(U+\frac{qd}{2\varepsilon_0 S}\right)$

13－7 $\frac{(\varepsilon_1-3\varepsilon_2)S}{4d}$；$\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)S}{2d}$

13－8 3.16μF，21 V，79 V；7.33 μF，33.3 V，66.7 V，100 V

13－9 (1) 93.2 μF；

(2) $\sigma=1.77\times10^{-5}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$，$D_1=D_2=1.77\times10^{-5}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$，$E_1=4.0\times10^{5}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$，$E_2=1.0\times10^{6}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$

13－10 (1) $\boldsymbol{D}=0 \qquad \boldsymbol{E}=0 \qquad r<R_0$

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \qquad R_0<r<R_1 \quad R_2<r$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \qquad R_1<r<R_2$$

(2) $U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_r R_1}-\frac{1}{\varepsilon_r R_2}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad r<R_0$

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_r R_1}-\frac{1}{\varepsilon_r R_2}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad R_0<r<R_1$$

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_r r}-\frac{1}{\varepsilon_r R_2}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad R_1<r<R_2$$

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad R_2<r$$

13－11 (1) $\boldsymbol{D}=0 \qquad \boldsymbol{E}=0 \qquad r<R_1$

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \qquad R_1<r<R$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi_{r2}\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \qquad R<r<R_2$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \qquad R_2<r$$

其中 $Q=-6\times10^{-8}$ C

(2) -3.75×10^{3} V

13－12 (1) $\boldsymbol{D}=\frac{\lambda_0}{2\pi r^2}\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}$

(2) $C=\frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}$

13－13　(1) $\frac{\varepsilon_0 S}{d-d'}$；(2) $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 Sd'U_0{}^2}{(d-d')^2}$；(3) $\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d'+\varepsilon_r d-\varepsilon_r d'}$，$\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 Sd'(\varepsilon_r-1)U_0{}^2}{2(d'+\varepsilon_r d-\varepsilon_r d')^2}$

13－14　(1) $E_1=2.5\times10^4\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$，$E_2=5.0\times10^4\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$；

(2) $w_1=1.11\times10^{-2}\ \mathrm{J\cdot m^{-12}}$，$w_2=2.21\times10^{-2}\ \mathrm{J\cdot m^{-13}}$；

(3) $W_1=1.11\times10^{-7}\ \mathrm{J}$，$W_2=3.32\times10^{-7}\ \mathrm{J}$；

(4) $W=4.43\times10^{-7}\ \mathrm{J}$

13－15　$\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R}$

13－16　(1) $1.82\times10^{-4}\ \mathrm{J}$；(2) $1.01\times10^{-4}\ \mathrm{J}$，$4.49\times10^{-12}\ \mathrm{F}$

13－17　(1) $\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon r^2 l^2}$；(2) $\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon rl}\mathrm{d}r$；(3) $\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{R_2}{R_1}$；(4) $\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}$

13－20　$\frac{3\varepsilon_0 S}{y_0\ln 4}$

第 14 章

14－1　13.6 s

14－2　$2.2\times10^{-5}\ \Omega$；$2.3\times10^3\ \mathrm{A}$；$1.4\times10^6\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$；$2.5\times10^{-2}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$；$1.0\times10^{-4}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

14－3　$1.81\times10^{-8}\ \mathrm{A}$

14－4　$\frac{\rho}{2\pi a}$

14－5　$\frac{\sigma s_2 V}{L(s_1+s_2)}$，$\frac{\sigma s_1}{L(s_1+s_2)}$

14－6　$0.98\ \Omega$；$6.66\times10^4\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$，$4.0\times10^5\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$，$1.0\times10^{-2}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$，$1.0\times10^{-2}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$

14－7　$\frac{\sigma_1\sigma_2 V_O}{(\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2)}$，$\frac{\sigma_1\sigma_2 V_O}{(\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2)}$；$\frac{\sigma_2 V_O}{(\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2)}$，$\frac{\sigma_1 V_O}{(\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2)}$，$\frac{\varepsilon_O\varepsilon_{r_i}\sigma_2 V_O}{(\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2)}$，$\frac{\varepsilon_O\varepsilon_{r_2}\sigma_1 V_O}{(\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2)}$；$\frac{d_1\sigma_2 V_O}{(\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2)}$，$\frac{d_2\sigma_1 V_O}{(\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2)}$

14－8　4.1 V，0.05 Ω

14－10　$\frac{4}{3}\mathrm{A}$，$\frac{2}{3}\mathrm{A}$

第 15 章

15－1　$\pi R^2 c$

15－2　$9\mu_0 I/(4\pi a)$

15－3　$\frac{\mu_0 I}{4R_1}+\frac{\mu_0 I}{4R_2}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R_2}$

15－4　$5.64\times10^{-6}\ \mathrm{T}$

15－5　(1) 4×10^{-5} T，**向外**；(2) 2.2×10^{-6} Wb

15－6　1.02×10^{2} N；17.6%

15－7　$\frac{\mu_0 I}{2R}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)$

15－8　(1) 0.24 Wb；(2) 0；(3) －0.24 Wb

15－9　$\frac{0.21\mu_0 I}{a}$

15－10　(1) $\frac{2\sqrt{2}\mu_O I}{\pi a}$；(3) $\frac{4\mu_O I a^2}{\pi(4x^2+a^2)(4x^2+2a^2)^{1/2}}$

15－11　(1) 1.2×10^{-4}；(2) 0.1 M　L_2 **外侧**

15－13　$\frac{\mu_O I}{2\pi a}\arctan\frac{a}{x}$

15－14　$\frac{\mu_o i}{2}$

15－15　6.37×10^{-5} T，**方向沿水平向左**

15－16　2.90×10^{-6} Wb

15－17　10^{-6} Wb

15－19　$\frac{\mu_o I r}{2\pi R_1 2}(r<R_1)$；$\frac{\mu_o I}{2\pi r}(R_1<r<R_2)$

$\frac{\mu_o I(R_3-r^2)}{2\pi r(R_3{}^2-R_2{}^2)}(R_2<r<R_3)$；0，$(r>R_3)$

15－20　(1) $\frac{\mu_o r^2 I}{2\pi(R^2-r^2)}$；(2) $\frac{\mu_o I a}{2\pi(R^2-r^2)}$

15－21　(1) $\frac{\mu_o x\pi n R^2}{(R^2+x^2)3/2}$，**沿** x **轴正向**；(2) $2\lambda n\pi^2 R^3$，**沿** x **轴正向**

15－22　$\frac{\mu_o\sigma W}{2}\left(\frac{2x^2+R^2}{\sqrt{x^2+R^2}}-2x\right)$**沿** x **轴向右**

15－23　9.3×10^{-3} T

15－24　6×10^{10} m，6×10^{10} m

15－25　9.21×10^{-5} N，**向上**；9.21×10^{-5} N，**向下**.

8×10^{-4} N，**向右**；8×10^{-5} N，**向左**

15－26　$F\overline{ab}=BI\overline{ab}$，**垂直于**$\overline{ab}$**向左上**

15－27　(1) 0.05π A·m^2 **垂直低面向外**；0.025π N·m **与** $\boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{B}$ **同方向**；

(2) 0.025π J

15－28　$2\pi\sqrt{\frac{5}{Na^2 JB}}$

15－29　$\frac{qB^2 l^2}{8U}$

15－30　(1) 6.7×10^{-4} m·s^{-1}；　(2) 2.8×10^{29} m^{-3}

15－31　$\dfrac{\pi\sigma\omega r^4 B}{4}$

第 16 章

16－1　(1) 2×10^4 A・m^{-1}；(2) 7.76×10^5 A・m^{-1}；(3) 38.8；(4) 39.8

16－2　$\dfrac{\mu_{r_1 1}\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$　　$r<R$；　$\dfrac{\mu_{r_2}\mu_0 I}{2\pi r}$　　$r>R$

第 17 章

17－1　$\dfrac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\dfrac{a+l}{a}$，$\dfrac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\dfrac{a+l\cos\alpha}{a}$

17－2　$\dfrac{\mu_0\omega l^2 I}{4\pi r_0}$，$M$ **端电位高.**　　$\dfrac{\mu_0\omega I}{2\pi}\left(l-r_0\ln\dfrac{r_0+l}{r_0}\right)$，$N$ **端高**

17－3　3.0×10^{-3} V

17－4　$\dfrac{\mu_0 Iv}{\pi}\left(\dfrac{a}{x_0}-\ln\dfrac{x_0+a}{x_0}\right)$，**顺时针**　　$\dfrac{\mu_0 I}{\pi R}\left[(x_0+a)\ln\dfrac{x_0+a}{x_0}-a\right]$

17－5　$B\omega r_0\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\right)$，$B\omega r_0{}^2\ \dfrac{\pi}{4}$，$u_a=u_c$，$u_a>u_b$

17－6　$\dfrac{3\mu_0\pi r^2 Iv}{2N^4R^2}$，**与大线圈相同.**

17－7　$\dfrac{mRv_0}{B^2l^2}$，$\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$

17－8　$\dfrac{1}{2}BLg\sin2\theta\cdot t$，$\dfrac{mgR\sin\theta}{BL\cos\theta}\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{(BL\cos\theta)^2}{mR}t}\right]$

17－9　$-8.7\times10^{-2}\cos100\pi t$

17－10　0.50 A

17－11　4.40×10^7 m・s^{-1}，a **向左**，b **向右**，c **向上**

17－12　$\left[\dfrac{\pi R^2}{4}+\dfrac{L}{2}\sqrt{R^2-\left(\dfrac{L}{2}\right)^2}\right]\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

17－13　2.08×10^{-5} V

17－14　$\dfrac{\mu_0 a}{2\pi}\ln3$，$\dfrac{\mu_0 a}{2\pi}\ln3\cdot I_0\omega\cos\omega t$

17－15　6.28×10^{-6} H，3.14×10^{-4} V

17－18　$\dfrac{\mu_0 Nh}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$　　**不变**

17－20　$\dfrac{1}{2}L_0$

第 18 章

18－1 $\dfrac{\varepsilon k}{r\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

18－3 (1) $720\times10^5\pi\varepsilon_0\cos10^5\pi t$;

(2) $t=0$ 时,$H=3.6\times10^5\pi\varepsilon_0$ $t=0.5\times10^{-5}$ s 时,$H=0$

18－4 2.8 A,$B_r=\dfrac{\varepsilon_0\mu_0 r}{2}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$,$B_R=5.6\times10^{-6}$ T

18－5 $\dfrac{qa^2v}{2(x^2+a^2)^{3/2}}$

18－6 (1) 3×10^5 m,10^3 Hz (2) 沿 x 轴正向

(3) $H_x=0,H_y=0,H_z=1.59\times10^{-3}\cos\left[2\pi\times10^{-3}\left(t-\dfrac{x}{c}\right)\right]$

第 19 章

19－1 (1) 550 nm;(2) 1.5 mm

19－2 (1) 0.11 m;(2) 7

19－3 1.75×10^{-5} m

19－4 0.72 mm,3.6 mm

19－5 $\arcsin\dfrac{\lambda}{2h}$

19－6 428.6 nm,600 nm

19－7 正面:404.3 nm 以及 673.9 nm 干涉加强,因此呈紫红色.反面:505.4 nm,绿色

19－8 789.5 nm

19－9 100 nm

19－10 $8''$

19－11 1.7×10^{-4} rad

19－12 1.69×10^{-6} m

19－13 4.0×10^{-6} m

19－14 1.22

19－15 $[(k\lambda-2e_0)R]^{1/2}$

19－16 $\dfrac{r_k{}^2R_1}{r_k{}^2-R_1k\lambda}$

19－17 (1) 1.2 μm;(2) 0,250,500 nm,750 nm,1000 nm

19－18 629.0 nm

第 20 章

20－1 0.589 mm

20－2 400 mm

20－3 (1) 5.0 mm, 5.0×10^{-3} rad; (2) 3.76×10^{-3} rad

20－4 0.3 mm, 1 μm

20－5 (1) $\lambda_1=2\lambda_2$; (2) 当 $k_2=2k_1$ 时，相应的暗纹重合

20－6 (1) 600 nm; (2) 第三级明纹; (3) 7 个半波带

20－7 (1) 5×10^{-5} m; (2) 有 $k=0,\pm1,\pm2$ 等 5 条光栅衍射主极大

20－8 0.043°

20－9 5

20－10 (1) 6 cm; (2) 0.35 m

20－11 (1) 2.4×10^{-4} cm; (2) 0.8×10^{-4} cm; (3) 实际呈现 $k=0,\pm1,\pm2$ 级明纹，共五条明纹.

20－12 (1) 690 nm, 460 nm; (2) 11.9°, (3) 38.4°,

20－13 3 级，一级光谱

20－14 1822

20－15 9.84 km

20－16 2.24 m

20－17 0.13 nm, 0.197 nm

第 21 章

21－1 $2.25I_0$

21－2 54° 44′, 35° 16′

21－3 (1) 45°; (2) 3/8; (3) 0.338

21－4 30.2

21－5 1.60

21－6 $n_1=n_2\cos i_0=n_3$

21－7 48° 10′

第 23 章

23－1 $T_1=5.2\times10^3$ K; $T_2=8.3\times10^3$ K; $T_3=1.0\times10^4$ K

23－2 3.63 倍.

23－3 $\lambda_n=2.04$ μm

23－4 $T=2.00\times10^2$ K

23－5 (1) $E_{k\max}=1.45$ eV; (2) $u_0=1.45$ V; (3) $\lambda_0=0.622$ μm

23－6 $A=4.74$ eV; $u_0=1.47$ V

23－7 $N=2.82\times10^3$ 个

23－8 (1) $\varepsilon_1=2.84\times10^{-10}$ J; $P_1=19.47\times10^{-28}$ kg·m·s^{-1}; $m_1=3.16\times10^{-36}$ kg

(2) $\varepsilon_2=7.96\times10^{-15}$ J; $P_2=2.65\times10^{-23}$ kg·m·s^{-1}; $m_2=8.84\times10^{-32}$ kg

(3) $\varepsilon_3=1.60\times10^{-13}$ J; $P_3=5.35\times10^{-22}$ kg·m·s^{-1}; $m_3=1.78\times10^{-30}$ kg

23－9 $\nu=1.24\times10^{20}$ Hz; $\lambda=0.024$ Å; $p=2.73\times10^{-22}$ kg·m·s^{-1}

23－10 $\varepsilon=2.56\times10^{3}$ eV; $\Delta\lambda=0.012$ Å; $E=0.1$ eV

23－11 (1) $\lambda=1.0243$ Å; (2) $E_k=0.294\times10^{3}$ eV; $\theta=44°13'$

23－12 **从** $n=3$ **到** $n=1$

23－13 6564.6 Å; 4862.4 Å; 4341.4 Å; 4102.7 Å; 3971.0 Å; 3890.0 Å; 2826.2 Å

23－14 $\lambda_{max}=1215$ Å; $\lambda_{min}=911.7$ Å

23－15 **能**

23－16 1215.6 Å; 6564.2 Å; 1025.7 Å

23－17 $T_1>15.8\times10^{4}$ K; $T_2>21.0\times10^{4}$ K

23－18 13.64 eV

23－19 $u=150$ V

23－20 $\nu=7.0\times10^{5}$ m·s^{-1}; $\lambda=10.4$ Å

23－21 $m=1.67\times10^{-17}$ kg

23－22 $\lambda_1=0.3874$ Å; $\lambda_2=1.225\times10^{-2}$ Å; $\lambda_3=3.874\times10^{-6}$ Å

23－23 **动量相等,能量不等**

23－24 $E_{k\min}\geqslant0.21$ MeV

23－25 $r=0.529$; $E=-13.6$ eV

23－26 $\Delta u=9.25\times10^{-6}$ eV

23－27 0.02; 0.01; 0

23－28 a **减小时,各级能量将变大;相对能级差也增大.**

a **增大时,各级能量将减小;相对能级差也减小.**

23－29 2; $2(2l+1)$; $2n^2$

23－30 (1) 0; (2) $\sqrt{6}\hbar$ $\sqrt{2}\hbar$; (3) $\sqrt{6}\hbar$; (4) $\sqrt{12}\hbar$

第 24 章

24－1 118.0 MeV 127.7 MeV 111.5 MeV

24－2 7.614 MeV

24－3 (1)1664 MeV

(2)**约** 1.8 **个核子**

(3)**约** 3.25×10^{3} **个电子**

24－4 (1)**略**

(2)1.944 MeV 1.198 MeV 7.551 MeV 1.732 MeV 4.966 MeV

(3)24.69 MeV

24－5 5.94×10^{9} **年**

24－6　(1)$4.88\times10^{-18}\ s^{-1}$

(2)3 g

(3)$1.23\times10^{4}\ g\cdot s^{-1}$

24－7　2.81 **年**

24－8　13.6 **居里**

24－9　**略**

第 25 章

25－1　0.124 mm

25－2　1；e^{645}

25－3　26