

大学物理学

(上)

主编 汪晓元

内容简介

本套书是根据教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神,结合当前高等学校大学物理课程教学改革实际情况和多年教学经验而编写的.全书分上、下两册,上册:力学(含相对论)、机械振动与机械波和热学;下册:电磁学、光学和量子物理基础.与之配套的还有《大学物理学(学习指导)》.两者既可彼此独立,又可相互配套使用.本套书对于大学物理课程内容与体系做了一些改革尝试,即精选经典内容,拓宽知识面,反映科技与物理学相关的新技术、新成果及其应用与发展,同时尽量使教材符合教学实际情况,篇幅适中,难度适宜.

本套书可作为各类高等学校工科各专业或理科非物理专业的大学物理课程的教材或参考书,也可供文科专业选用.

引 言

编写一本既符合教学改革的精神,又适合目前我国高等教育实际的大学物理课程的教材,一直被高校的广大物理教师所关注,这是一项具有非常重要意义的工作.由于近一个世纪以来物理学的发展及其与物理学紧密联系的新技术的出现和广泛应用,使得这项工作变得不容易、甚至比较复杂.许多从事物理教学工作的教师在这方面做了许多有益的尝试和探索,取得了一些成果和经验.我们编写的这套《大学物理学》就是从物理课程教学改革的需要和教学实际情况出发所做的一种尝试和探索.

本套书根据“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神,借鉴国内外关于教材建设与改革的经验,结合多年来我们的教学实践编写成的.它包括了工科大学物理课程指导委员会制订的教学基本要求的全部内容,同时,适度介绍了近代物理的知识以及新技术的物理基础.力图使这套书成为既满足各个层次大学物理课程教学及改革的实际需要,又符合高校实际情况,具备鲜明特色的好教材.本教材特点主要有以下几点:

1. 精选经典内容,构建教材新体系.力学部分,省略了高中阶段已经掌握的知识,如直线运动、抛体运动、物体碰撞,主要介绍运动学描述方法及运动定律、定理和守恒定律等,与中学阶段的力学体系既有联系但又完全不同.同时把相对论纳入力学部分,使之与经典的时空概念形成鲜明的对照,有助于学生理解掌握.

2. 力求内容现代化.教材中除讲述相对论和量子物理等近代物理内容外,还介绍了许多当前新技术中的基础物理原理,包括熵、全息、光纤通信、激光、超导、能带理论、纳米科学.在通篇教材中,加大了现代化内容的比重,使学生能接触到更多新的物理知识和概念,对提高学生学习物理的兴趣,培养学生的探索精神有益处.

3. 力求内容精炼、综合.抓住主要内容,去粗取精,突出物理学中的重要定律与定理,从物理学发展的过程和教学实际情况的两个方面组织教学内容,精选例题、习题,用基本的、通俗的方法讲述物理内容.力求既满足广大师生的教学需要,又能激发学生的学习兴趣,培养学生的创新能力.

4. 适度开“窗口”、重视科学素质培养.在现代物理部分大胆地“渗透”一些科

技前沿信息,并介绍了非线性物理的一些内容和概念.有些内容对学生学习可能有一定困难,但让学生尽早了解这些内容,有益于激发和培养学生的求知欲望和独立思考能力,提高学生的科学素质.

全套书由武汉理工大学汪晓元教授主编,参加讨论和编写的有赵明、陈德彝、廖红、邓伟明、雷杰、罗来龙、赵黎、黄学洪、杨应平、刘想宁、陈清明、张甫宽等.邓伟明编写质点运动学和原子核物理部分,刘想宁编写质点动力学,罗来龙编写角动量与刚体部分,廖红编写机械振动和机械波,陈德彝编写热学,赵黎编写静电学,雷杰编写相对论和稳恒电流,汪晓元编写稳恒磁场及磁介质,黄学洪编写电磁感应和电磁波,赵明编写光学,杨应平编写量子物理基础,陈清明编写量子物理基础的部分内容及工程新技术的物理基础.《大学物理学(学习指导)》的相关部分仍由以上教师负责分工编写.全套书由汪晓元负责统稿和定稿.在编写的过程中,参加编写的教师们付出了大量的辛勤劳动,同时得到了许多同行们很好的建议及出版社等方面的大力支持和帮助,在此一并表示真诚地感谢.

由于编者水平有限,错误及不妥之处在所难免,请广大师生批评指正,以便今后逐步完善和提高.

编 者

2006年3月

目 录

绪论.....	(1)
---------	-----

第一篇 力 学

第 1 章 运动的描述.....	(4)
1.1 参考系 坐标系 物理模型	(4)
1.1.1 参考系	(4)
1.1.2 坐标系	(5)
1.1.3 物理模型	(6)
1.2 描述运动的物理量	(8)
1.2.1 位矢和运动方程	(8)
1.2.2 位移和速度	(8)
1.2.3 加速度	(10)
1.3 坐标系的运用	(11)
1.3.1 直角坐标系	(11)
1.3.2 自然坐标系	(15)
1.4 两类运动学问题.....	(18)
1.5 相对运动.....	(23)
思考题	(26)
习题 1	(26)
第 2 章 牛顿运动定律	(28)
2.1 牛顿运动定律及其应用.....	(28)
2.1.1 牛顿运动定律的表述	(28)
2.1.2 牛顿运动定律的应用	(30)
2.2 惯性系 非惯性系与惯性力.....	(34)
2.3 SI 中的单位和量纲	(37)
思考题	(38)
习题 2	(40)

第 3 章 动量 动量定理	(42)
3.1 动量 冲量 动量定理	(42)
3.2 质点系的动量定理 动量守恒定律	(44)
3.3 变质量问题(火箭)	(47)
思考题	(51)
习题 3	(52)
第 4 章 功和能及功能原理	(56)
4.1 功 动能定理	(56)
4.1.1 功与功率	(56)
4.1.2 动能定理	(59)
4.2 保守力及保守力的功	(61)
4.2.1 重力的功	(61)
4.2.2 弹性力的功	(62)
4.2.3 万有引力的功	(62)
4.3 势能 势能曲线 势能梯度	(63)
4.3.1 势能	(63)
4.3.2 势能曲线与势能梯度	(65)
4.4 功能原理 机械能守恒定律	(67)
4.4.1 功能原理	(67)
4.4.2 机械能守恒定律	(67)
思考题	(69)
习题 4	(71)
第 5 章 角动量与角动量定理	(75)
5.1 质点的角动量定理	(75)
5.1.1 力矩	(75)
5.1.2 质点的角动量	(76)
5.1.3 质点的角动量定理	(78)
5.2 质点的角动量守恒定律	(78)
思考题	(80)
习题 5	(81)
第 6 章 刚体的定轴转动	(83)
6.1 刚体定轴转动的角动量	(83)
6.1.1 刚体的运动	(83)
6.1.2 刚体定轴转动的角动量	(86)

6.1.3 刚体对固定轴的转动惯量.....	(87)
6.2 刚体定轴转动定律.....	(90)
6.2.1 刚体定轴转动定律	(90)
6.2.2 定轴转动中的功和能	(92)
6.3 对定轴的角动量守恒.....	(95)
6.3.1 对定轴的角动量定理	(95)
6.3.2 对定轴的角动量守恒	(97)
6.4 守恒律与对称性.....	(99)
6.4.1 对称性与对称操作	(99)
6.4.2 对称性与守恒律	(100)
6.4.3 对称破缺	(103)
思考题.....	(105)
习题 6	(105)
第 7 章 相对论.....	(108)
7.1 力学相对性原理 伽利略变换	(108)
7.1.1 力学相对性原理	(108)
7.1.2 伽利略变换	(109)
7.2 狭义相对论产生的实验基础和历史条件	(112)
7.2.1 产生根源	(112)
7.2.2 实验基础和历史条件	(113)
7.3 狭义相对论的基本原理 洛伦兹变换	(116)
7.3.1 狭义相对论的基本原理	(116)
7.3.2 洛伦兹变换	(116)
7.4 狭义相对论时空观	(121)
7.4.1 同时的相对性	(122)
7.4.2 长度收缩	(123)
7.4.3 时间延缓	(125)
7.4.4 因果律	(127)
7.5 相对论的动力学	(128)
7.5.1 相对论质速关系	(128)
7.5.2 相对论动力学的基本方程	(130)
7.5.3 相对论动能	(131)
7.5.4 静能、总能和质能关系	(132)
7.5.5 能量和动量的关系	(134)

* 7.6 动力学的变换	(134)
7.6.1 质量变换式	(134)
7.6.2 动量-能量变换式	(135)
7.6.3 力的变换公式	(136)
* 7.7 广义相对论简介	(138)
7.7.1 广义相对论的两条基本原理	(138)
7.7.2 广义相对论的重要结论	(140)
思考题	(144)
习题 7	(145)

第二篇 机械振动与机械波

第 8 章 机械振动	(147)
8.1 简谐振动	(147)
8.1.1 简谐振动	(148)
8.1.2 描述简谐振动的特征量	(149)
8.1.3 旋转矢量法	(152)
8.1.4 简谐振动的实例	(154)
8.1.5 简谐振动的能量	(157)
8.2 简谐振动的合成	(158)
8.2.1 两个同方向同频率简谐振动的合成	(158)
8.2.2 两个同方向不同频率的简谐振动的合成	(161)
8.2.3 相互垂直的简谐振动的合成	(162)
8.3 阻尼振动 受迫振动 共振	(165)
8.3.1 阻尼振动	(165)
8.3.2 受迫振动 共振	(166)
* 8.4 振动的分解	(168)
* 8.5 非线性振动简介	(169)
思考题	(170)
习题 8	(171)
第 9 章 机械波	(176)
9.1 机械波的产生和传播	(176)
9.1.1 机械波的形成	(176)
9.1.2 描述波动的物理量	(178)
9.2 平面简谐波的波动方程	(181)

9.3 波的能量	(185)
9.3.1 波的能量和能量密度	(185)
9.3.2 波的能流和能流密度	(186)
9.3.3 波的吸收	(188)
9.4 波的衍射 干涉	(189)
9.4.1 惠更斯原理 波的衍射	(189)
9.4.2 波的叠加原理 波的干涉	(190)
9.5 驻波	(192)
9.5.1 驻波的形成	(192)
9.5.2 驻波方程	(194)
9.5.3 半波损失	(195)
* 9.5.4 弦线振动的简正模式	(196)
9.6 多普勒效应	(197)
* 9.7 非线性波简介	(198)
思考题	(199)
习题 9	(200)

第三篇 热 学

第 10 章 气体动理论	(205)
10.1 热学的基本概念	(205)
10.1.1 系统与外界	(205)
10.1.2 平衡态	(206)
10.1.3 状态参量	(207)
10.1.4 温度	(207)
10.1.5 温标	(208)
10.1.6 状态方程	(209)
10.2 气体动理论的基本观点	(211)
10.2.1 物质微观结构的物理图像	(211)
10.2.2 统计观点简介	(212)
10.3 理想气体的压强公式	(213)
10.3.1 理想气体模型	(213)
10.3.2 理想气体压强公式	(214)
10.3.3 压强公式的物理意义	(216)
10.4 温度的统计解释	(217)

10.4.1	温度的统计解释.....	(217)
10.4.2	方均根速率	(218)
10.5	能量均分定理 理想气体的内能.....	(219)
10.5.1	自由度	(219)
10.5.2	能量均分定理	(220)
10.5.3	理想气体的内能.....	(221)
10.6	麦克斯韦速率分布律.....	(221)
10.6.1	麦克斯韦速率分布函数	(221)
10.6.2	麦克斯韦速率分布曲线	(223)
10.6.3	应用速率分布函数求统计平均值.....	(224)
10.7	麦克斯韦速度分布率和玻尔兹曼分布率简介.....	(225)
10.7.1	麦克斯韦速度分布律	(225)
10.7.2	玻尔兹曼分布律.....	(226)
10.8	气体分子的平均自由程和平均碰撞频率.....	(227)
10.8.1	平均碰撞频率	(228)
10.8.2	气体分子的平均自由程	(229)
	思考题.....	(230)
	习题 10	(231)
第 11 章	热力学基础	(234)
11.1	准静态过程 功 内能和热量.....	(234)
11.1.1	准静态过程	(234)
11.1.2	功	(236)
11.1.3	内能	(237)
11.1.4	热量	(238)
11.2	热力学第一定律.....	(239)
11.2.1	热力学第一定律.....	(239)
11.2.2	热力学第一定律在理想气体等值过程中的应用	(240)
11.2.3	理想气体的摩尔热容量	(241)
11.3	绝热过程	(243)
11.3.1	绝热过程	(243)
11.3.2	准静态绝热过程曲线	(243)
11.4	循环过程 卡诺循环.....	(246)
11.4.1	循环过程	(246)
11.4.2	卡诺循环	(248)

11.5	热力学第二定律.....	(251)
11.5.1	可逆过程与不可逆过程	(251)
11.5.2	热力学第二定律的表述	(252)
11.5.3	热力学第二定律的实质	(253)
11.5.4	热力学第二定律的理解	(253)
11.6	卡诺定理 克劳修斯熵.....	(255)
11.6.1	卡诺定理	(255)
11.6.2	克劳修斯等式不等式	(255)
11.6.3	熵	(256)
11.6.4	热力学第二定律的数学表达式	(257)
11.6.5	熵增加原理	(258)
11.7	热力学第二定律的统计意义 玻耳兹曼熵.....	(260)
11.7.1	热力学概率	(260)
11.7.2	热力学第二定律的统计意义	(261)
11.7.3	玻耳兹曼熵	(262)
11.8	熵与信息 耗散结构简介.....	(263)
11.8.1	熵与信息	(263)
11.8.2	耗散结构简介	(265)
	思考题.....	(269)
	习题 11	(271)
	参考答案.....	(276)

绪 论

物理学是研究自然界中物质最基本、最普遍的现象和规律的科学。科学技术进步和发展的历史表明,物理学是人类认识、利用和改造自然的有效理论与方法,物理学极大地推进了人类关于自然的认识,同时也为人们对于自然界作出总体描绘、构成关于物质世界的自然图像打下了基础。

世界是物质构成的,物质是客观实在,独立于我们的意志之外的。物质存在的形态有两种,一种是实物,一种是场。按物理学的观点,像电子、质子、中子、原子、分子等是微观实物粒子,地球上的宏观物体、天体等都是实物,像电磁场、引力场是有别于实物的另一类物质形态。

物质的运动及其相互作用是物质的普遍属性,其运动形式有多种,像最简单、最基本、最普遍的运动形式有:机械运动、热运动、电磁运动和量子运动,这些统称为物理运动。由于物质的物理运动具有粒子和波动两种图像,宏观物体的运动是粒子图像,而场的运动呈波动图像。自然界中,物质间有四种基本相互作用,即引力相互作用、电磁相互作用、强相互作用和弱相互作用。在 20 世纪 70 年代末,电磁相互作用和弱相互作用已经统一为电弱相互作用。人们研究发现,实物间的相互作用是由场来传递的,即是实物激发出相应的场,场再作用于另一实物。

物质世界中的自然现象都是物质运动的表现,也是物质间相互作用的结果,两者相互依存,又相互对立。运动中的某种平衡构成了形形色色的物质结构及形态。

物质的运动及相互作用总是发生在一空间范围里和时间间隔中,空间反映物质运动的广延性,时间体现物质运动过程的持续性。物理学的研究表明,在一定的条件下,在物质运动及相互作用的过程中遵从一系列的守恒定律,而在高速及强场情况下,时空的几何特性和测量与物质的分布和运动有密切联系。

大学物理课程教学内容大致为:

- (1) 力学和相对论——讨论物体的机械运动和时空属性;
- (2) 机械振动与机械波——讨论宏观物体的振动与连续介质弹性波的规律;

- (3) 热学——讨论大量分子热运动的统计规律及其宏观表现；
- (4) 电磁学——讨论电磁现象及电磁场的规律和电磁相互作用；
- (5) 波动光学——讨论光的波动性质及规律，包括光的干涉、衍射和偏振；
- (6) 量子物理——研究微观粒子的波粒二象性和量子运动的特征。

物理学是一切自然科学的基础，是自然科学中一门核心学科。物理学为化学、生物学、天文学等学科提供物理学研究的理论和方法。物理学中已经派生出许多独立的学科，如：基本粒子物理学、原子核物理学、凝聚态物理学、天体物理等。而且，还有许多与其他学科交叉的边缘学科，推动了生物物理学、量子化学等许多学科的发展。

物理学是科学与技术发展的源动力，物理学推动了工程技术的革命，促进了生产力的发展。物理学的发展经历了三次重大变革，第一次，18世纪到19世纪，牛顿力学及热力学创立，极大地推动了机械及蒸汽机制造业的革新和发展，导致了第一次工业革命的兴起。第二次是19世纪，由法拉第-麦克斯韦等人建立的电磁学，推动了电机及其用电设备制造业的发展，使电能广泛地应用于工农业生产与生活中，带来了第二次工业革命。第三次是20世纪初诞生的相对论与量子力学的建立及发展，使人们对高速微观物质世界的认识日益加深，促进了核能的利用，激光技术的发展。计算机技术、信息论、通信技术、控制论的诞生和发展，都是建立在物理研究的基础和成果之上，引领了新一轮的信息技术革命，使人类社会进入信息时代。

为什么要学习大学物理？由于物理学本身的特点及其作用，大学物理是高等学校非物理类理工科各专业开设的一门重要的基础课程。学好大学物理对进一步深入学习后续课程是必需的，并且对于学习新科学、新材料、新工艺都会有很大的帮助。因为大学物理对于我们从知识内容的学习到科学方法论的培养等方面都有十分重要的作用。

大学物理所研究的问题与以往中学学习的课程有联系，但又不同，尤其是处理方法及深广度都有很大差别。我们在学习本课程时应该注意以下几点。

1. 注意物理思想和方法的学习。通过物理课内容和知识的学习，掌握物理学研究的方法和思想，学会善于观察、实验、概括、归纳、总结和提出物理假设。这是物理学研究的特点，它是以实验为基础，同时又有理论基础和学说的一门学科。这些方法在今后的学习和研究中都会发挥重要的作用。

2. 注意能力的培养，即自学、抽象思维、发散思维能力的培养。自学能力主要是指通过课程的学习，自己阅读、查文献的能力；抽象思维和发散思维能力，主要是学习对具体问题抽象出物理模型、给出数学表达式，并能由此发现新规律、新

现象的思想方法,即创新思维能力.这些能力要在学习、解答和思考物理问题的过程中逐步培养.物理课程的学习难在研究问题方法的学习和掌握,这要通过适量的具体物理题的解答,逐步提高综合分析问题的能力.

3. 掌握物理课程的特点,运用正确的学习方法.学习过程中,注意物理学中具体研究对象和体系的不同以及现象、研究方法和手段不同,规律、结论及其所适用范围的不同.物理学重在理解,在理解的基础上学习、掌握方法.通过大学物理课程的学习,使自身在多方面终身受益,实现学习大学物理课程的根本目的.

第一篇 力学

第 1 章 运动的描述

运动学描述物体空间位置状态随时间的变化规律,不涉及引起物体运动及运动状态改变的原因.本章介绍质点运动学,内容包括描述物体运动的物理量、这些物理量在两种坐标系中的表示以及运动学基本问题的求解方法等.

自然界中物质的运动具有各种形式,包括机械运动、热运动、电磁运动、化学运动、生命运动、等等.在各种运动形式中,最简单的一种就是机械运动,它只涉及物体的位置随时间的变化.力学就是研究物体机械运动规律的一门科学,它也是物理科学中最古老的学科之一.在经典力学中,通常将力学分为运动学、动力学和静力学三大部份.运动学主要讨论如何描述物体的运动,即研究物体的空间位置随时间的变化关系问题;动力学则主要研究物体的运动和运动变化的原因,即研究物体间相互作用和物体运动的内在联系;而静力学则研究物体在相互作用下的平衡问题.本章讨论运动学问题.

1.1 参考系 坐标系 物理模型

1.1.1 参考系

自然界所有物质,都处在永恒的运动之中,包括简单的和复杂的运动、宏观的和微观的运动、人们可以观测到的和目前还不能观测到的运动,这称为运动的绝对性.就机械运动而言,任何物体每时每刻都在不停地运动着,绝对静止的物

体是不存在的。一张桌子看起来毫无生气,但实际上它也在运动,不但参与地球的自转与公转,而且构成桌子的物质材料的分子、原子也处在永不停息的运动之中。毛泽东有一诗句曰:“坐地日行八万里”,就是对运动绝对性的形象认识。认识到这一点人类经历了漫长的历史过程,布鲁诺甚至为此付出了生命。

我们怎样来描述这种绝对运动呢?对物体运动的任何描述都不可能脱离该物体的周围环境,脱离周围环境和特定条件孤立地讨论某物体的位置和运动,是没有任何意义的。因此,在确定物体的位置和运动之前,需要在该物体的周围环境中选择一个充作运动状态比较的参照物,这种参照物或保持彼此相对静止的物体群,就称为参考系。例如研究汽车的运动,通常用街道边的房屋或电线杆作为参考系;研究太阳系内部行星的运动,通常用太阳作为参考系。

进一步研究发现,同一物体的运动,如果我们选择不同的参考系,则对该物体运动所作的描述会不同,这称为运动描述的相对性。例如,站在运动着的船上的人手举一个小球,当他松手时,船上的观察者看到小球作自由落体运动;而岸边的观察者看到小球在作平抛运动。这是因为船上观察者是以船为参考系,而岸边观察者是以地面为参考系,他们选择不同的参考系,对同一小球运动的描述也就不同。一般说来,在运动学中参考系可以任意选择,通常以对物体运动的描述最方便、最简洁为原则。例如研究地面上物体的运动,通常选择地面参考系,而没有必要去选择太阳参考系。但是在动力学问题中,参考系就不能任意地选择了,因为牛顿运动定律只在惯性参考系中成立。

1.1.2 坐标系

有了参考系后,为了对物体运动作出定量地描述,即给出物体相对于参考系的空间位置随时间变化的数量关系,还需要在参考系上建立适当的坐标系。坐标系是参考系的数学抽象,常用的坐标系有直角坐标系、极坐标系、球面坐标系、柱面坐标系以及自然坐标系,等等。坐标系的选择也要以研究问题的方便和简洁为原则。例如研究地面上物体的运动,可以在地面建立一个直角坐标系;而研究地球的运动时,可以以太阳为坐标原点,指向某个恒星的方向为极轴,建立一个极坐标系。值得注意的是,在同一参考系上,不论建立什么样的坐标系,虽然得到的物体运动方程形式上不同,但是对物体运动所作的描述应当是相同的。

1.1.3 物理模型

当我们选好了参考系、坐标系,准备着手对物体的机械运动用数学语言给予描述时,常常发现,这仍是一件很困难的事.例如我们要描述足球场上的“香蕉球”,仔细观察一下,球星起脚后,足球不仅沿着弧线飞向球门,而且本身还打着旋.这怎么描写呢?这已经不是简单运动了.又如运动员跑步,运动员的身体躯干可能沿直线行进,但他的手和脚的运动形式却很复杂.怎么办呢?这就要看我们准备研究问题的哪一方面了.在前面的例子里,如果我们要研究球的空间轨迹,那么我们就可以不管球的旋转,把球看成一个点状对象;同样,如果我们要描写的是运动员身体总的前进状态,我们也可以不去管他手脚的运动情况,而将他的身体看成一个点.

从上面两个例子中,可以悟出一个原则:为了便于抓住问题的本质,人们常常在科学分析的基础上,突出事物中与问题有关的主要矛盾,而将一些影响不大的次要因素加以忽略,从而建立一个理想化的模型,或称简化模型.这是科学研究的基本方法之一.在物理学中,由于任何一个真实的物理过程都是十分复杂的,为了寻找反映该过程的最本质规律,也需要抓住问题的主要矛盾而忽略一些次要因素,对真实的物理过程进行简化,从而建立一个理想化的物理模型.这种采用理想化模型的研究方法在物理学中比比皆是,诸如质点、刚体、理想气体、点电荷、玻尔氢原子,等等.当然,一种理想化的物理模型,能否正确反应客观现实,是否与实际问题相符合,最后还需要实验加以验证.还必须注意,由理想化模型方法得到的结论,具有严格的适用条件,将其结果推广时要慎重.

在研究物体的机械运动时,如果物体的形状和大小与所研究的问题无关(例如光滑斜面上滑块的平动)、或者是物体的形状和大小对于所研究的问题来说是次要因素(例如前面的“香蕉球”运动),就可以忽略物体的形状和大小,将该物体看作是一个具有一定质量的点,这种理想化的物理模型称为质点.能否将物体视为质点取决于所研究问题的性质.例如,当研究地球的公转时,可以忽略地球自身的形状和大小,将地球视为质点;而当研究地球的自转时,就不能将地球视为质点了,因为质点的转动是没有任何意义的.

质点模型的意义还不仅仅在于能够简化问题.如果一个复杂物体的运动不能用质点模型处理,例如太阳系的运动,流体的运动等,虽然不能将整个复杂物体当作质点,但是可以把复杂物体看作是由很多质点所组成的系统,称为质点系.在解决了质点运动问题的基础上再来研究质点系的运动问题.

在另外一些问题中,物体的形状和大小是不能被忽略的.例如飞轮的转动,弹簧的拉伸和压缩等.这时质点模型就不再适用了.如果物体在运动时其形状和大小的变化可以忽略不计,即物体内任意两点间距离不随时间变化,我们就可以将其视为没有形变的物体,这种物理模型称为刚体.质点和刚体是力学中两个最基本的物理模型.

物体运动形式简化的四种途径:

(1) 将扩展物体“粒子化”(从空间上考虑).

这一条就是将物体的整体运动视为一个质点的运动,如前面所述不考虑自旋的球、不考虑附体伴随运动的运动员身体躯干.

(2) 平均运动(从时间上考虑).

这一方法是将粒子的复杂运动平均化,即撇开运动的轨迹或路程,只计其单位时间或一段时间内的位移.例如夏日黄昏,当你在河边、堤上、操场散步时,晚风习习,十分惬意,可讨厌的蚊虫总在头顶嗡嗡乱飞,你注意过吗?每一蚊虫的飞行路线是非常复杂的,但如果要描写的是它们对你的追随运动,可不计其折反的飞行路线.在气体动理论和金属导电理论中,我们就采用这种方法.

(3) 选择最佳参考系.

从运动的绝对性来看,任何运动都是复杂运动,但从运动描述的相对性来看,选择好的参考系可使问题大大简化.在托勒密的地心系中,行星对地球的运动显得莫名其妙,它们在宇宙中留下复杂得难以解释的路线.但在哥白尼的日心系看来,一切都那么简单,行星不过是绕日作圆周运动(后来开普勒认定是椭圆运动).

(4) 划分尺度范围.

这是近代才确定的一个原则.

我们可以将物质运动的空间尺度划分为宏观尺度和原子—亚原子尺度(或称微观尺度).宏观,是指研究对象所占空间区域的线度在 $10^{-8} \sim 10^{-6}$ m 以上;微观的线度在 $10^{-9} \sim 10^{-8}$ m 以下.

还要将物体运动的速度区分为常规速度和高速(可与光速相比拟).

另外,从实验环境上还可区分常规条件和极端条件(如强场、强光、强电流、超高压、超高温、超低温等非线性因素).

现代物理学的理论和实验都证明:不同空间尺度和速度范围内、极端实验条件下,物质运动涉及的规律是很不一样的.物理学家们现在所作的研究工作,都是不同尺度上分别展开进行的.

如果前三条途径是我们选择的,即出于主观考虑,这第四条却是来自客观因

素的限制. 近年来在一些较活跃的研究领域中, 还常常可以遇到“宇观”和“亚微观”这样一些概念, “宇观”是宇宙学中的术语, 用于表征星系、星系团以上规模的物质运动过程, 而“亚微观”则是粒子物理学中的一个概念.

1.2 描述运动的物理量

描述质点运动的物理量有位矢、位移、速度和加速度.

1.2.1 位矢和运动方程

仰望星空时, 我们常常会问, 火星或者天狼星现在的位置在哪儿? 运动学遇到的第一个问题就是描述质点的空间位置.

要确定一个质点的空间位置, 首先必须选择一个参考系, 在参考系上选择一个原点, 把它标记为 O . 连接 O 与 t 时刻被考察质点的位置 P , 将有向线段 OP 记作矢量 r 如图 1-1 所示, 称为 P 点相对于 O 点的位置矢量, 简称位矢或矢径.

质点运动时, 位矢 r 的大小和方向随时间变化, 这样位矢 r 就可以表示为时间 t 的函数

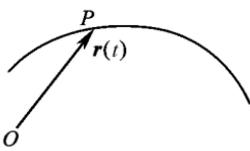


图 1-1 质点的位置矢量

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (1-1)$$

式(1-1)称为质点的运动方程. 确定了物体的运动方程, 也就确定了物体在任意时刻的位置和运动规律, 因此运动学的主要任务之一就是要寻找物体的运动方程.

1.2.2 位移和速度

运动过程中质点的空间位置会发生变化, 如果在 t 到 $t + \Delta t$ 时间内, 质点的位矢 r 由 $r(t)$ 变化到 $r(t + \Delta t)$, 则位矢的增量为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \quad (1-2)$$

称为质点 t 到 $t + \Delta t$ 时间内的位移. 其方向由初始位置指向末时刻位置.

位移是一个过程量, 它描述了运动过程中质点位置的变化. 请注意, 运动过程中质点所走过的路程为运动轨迹曲线的长度, 如图 1-2 中 P 到 P' 的路程是

$\Delta s = \widehat{PP'}$. 由此可见位移和路程是两个完全不同的概念, $\Delta \mathbf{r}$ 是矢量, Δs 是标量, 而且一般地说, $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$, 例如作圆周运动的质点回到出发点, 其位移是零, 而路程是 $2\pi R$. 只是在无穷小位移情况下才有 $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s$.

位移给出了一段时间内质点位置的变化, 但是并没有告诉我们这段时间内质点位置变化的快慢情况. 质点空间位置的变化是在时间的流逝中完成的, 不同的运动, 完成相同的空间位移, 所经历的时间间隔可能不同; 在相同的时间间隔内, 所完成的位移也可能不同. 设在 Δt 时间内, 质点的位移为 $\Delta \mathbf{r}$, 为了描述质点在该段时间或该段位移内运动的快慢情况, 定义质点的平均速度为

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1-3)$$

平均速度是矢量, 其方向与位移方向相同. 要注意的是, 除了匀速直线运动之外, 平均速度与所选择的时间间隔有关, 因此在讨论平均速度时首先要指明是哪一段时间内的平均速度.

当时间间隔 Δt 比较大时, 平均速度只能反映这段时间内质点运动变化的大致情形. 而在 Δt 内的各时刻, 质点的运动情况不尽相同, 质点的运动可以时快时慢, 运动方向也在随时变化, 而这种瞬时的变化用平均速度是无法描述的. 为了描述每一时刻质点运动的变化情况, 应当使 Δt 足够小. 因此引入瞬时速度的概念, 令 $\Delta t \rightarrow 0$, 则平均速度的极限值即为瞬时速度 (简称速度).

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \quad (1-4)$$

很明显, 速度的方向为质点所在处轨道的切线方向, 并指向质点运动的一侧, 如图 1-3 所示.

在实际应用中, 也常用速率的概念来描述质点运动. 在图 1-2 中, 设在 Δt 时间内质点走过路程为 Δs , 则定义这段时间内的平均速率为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1-5)$$

以及瞬时速率 (简称速率) 为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad (1-6)$$

速度和速率是两个不同的概念. 速度是矢量, 既有大小又有方向; 而速率是

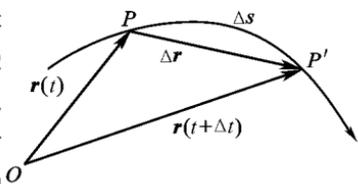


图 1-2 质点的位移

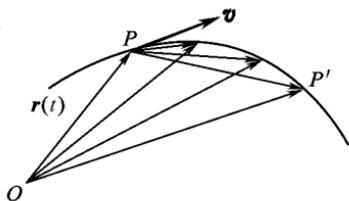


图 1-3 质点运动的速度

标量,只有大小没有方向.通常平均速率不等于平均速度的大小,因为同一段时间内质点所经过路程一般不等于位移的大小.但是对于瞬时速率,由于有 $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s$,因此

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{r}|}{\mathrm{d}t} = \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right| = |\mathbf{v}| \quad (1-7)$$

上式说明,瞬时速度的大小就等于瞬时速率.

1.2.3 加速度

通常物体运动时速度的大小和方向也会发生变化,于是引入加速度的概念来描述物体速度变化的快慢情况.如图1-4所示,设质点在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内速度由 $\mathbf{v}(t)$ 变为 $\mathbf{v}(t+\Delta t)$,则该过程中速度的变化为 $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)$ (即速度的增量).与平均速度的定义类似,我们定义质点在该段时间内的平均加速度为

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1-8)$$

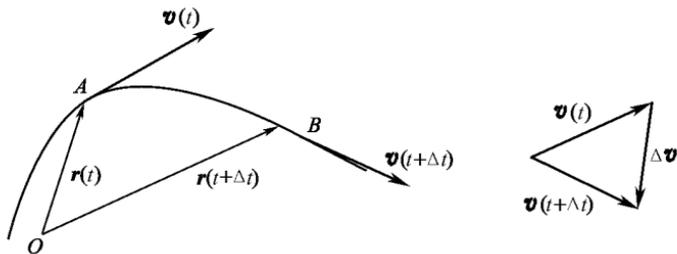


图 1-4 质点运动的加速度

同样,平均加速度也只能反映在 t 到 $t+\Delta t$ 时间段内速度的平均变化率.为了描述质点在某一时刻或者是某一位置处的速度变化率,还需引入瞬时加速度的概念.定义瞬时加速度(简称加速度) \mathbf{a} 为平均加速度在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限,即

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} \quad (1-9)$$

加速度是矢量,其方向指向 $\Delta t \rightarrow 0$ 时速度增量的方向.当质点作曲线运动时,加速度方向和速度方向不在一条直线上.加速度描述了质点的速度变化,因此不论是速度的大小变化还是方向变化,都有加速度产生.利用微积分学这门数学工具,加速度概念的内涵就更加清晰了.从上式中可以看到加速度是速度对时间的一阶变化率;是位矢对时间的二阶变化率.

加速度的概念首先是由伽利略给出的,他最初想过由 $\Delta v/\Delta s$ 来定义加速度,很快发现这样不行,才转而用 $\Delta v/\Delta t$ 来定义.伽利略通过敏锐的观察,相信自由落体的运动是匀加速运动,并亲自通过斜面实验进行推证.

按照上面的推理逻辑,我们是否还要用更高阶的导数,来描述加速度的变化情况呢?数学上当然没有问题,也确实曾有过这样的定义如“加加速度”,但这些作法后来都被放弃了,因为从目前的动力学角度来看,进一步定义更高阶变化率没有什么物理意义.著名物理学家吉布斯曾经说过:“一个数学家可以说他愿意说的任何东西,而一个物理学家必须至少部分合乎情理.”他坚持认为,物理学家使用的数学必须永远面对实验结果.

1.3 坐标系的运用

矢量符号提供了一种语言,它使物理定律的表述具有简单、明了的形式,能脱离任何特定的坐标系统而具有确切的物理内容.但为了定量分析(计算)的方便,对物理定律的处理,一般都需要在一定的坐标系中进行.

1.3.1 直角坐标系

直角坐标系也叫笛卡尔坐标系.下面我们来研究笛卡尔坐标系中运动的描述方法.

笛卡尔是最先试图为 17 世纪欧洲文艺复兴时期的新科学提供一个总的哲学框架的人.他不仅提出了一些科学家应关心的基本问题,而且提出了解决这些问题的方法.但他的名字在物理学史上并不引人注目,这是因为他的详细解答大部分遭到后人的否定.笛卡尔留给我们的,除了对物理世界总的看法外,就是他建立的解析几何.在解析几何中,他开创了一种在逻辑推导中极为方便的符号语言,用来描述几何图形和物理过程,这种强有力的数学方法后来又同牛顿、莱布尼兹的微积分密切地结合在一起.

(1) 位矢.

如果选择直角坐标系作为空间度量的工具,并以 O 点为坐标系的原点,那么位置矢量可以用三个互相正交的坐标分量表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad (1-10)$$

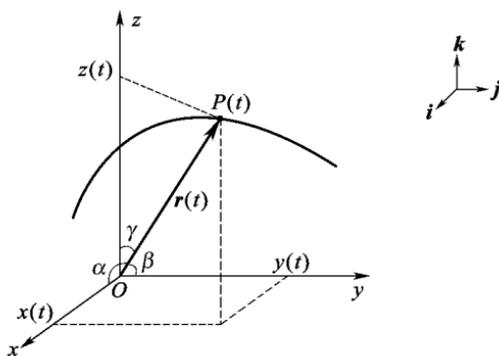


图 1-5 位置矢量

其中, i, j, k 为 x, y, z 三个坐标方向的单位矢量.

位矢 r 的大小(或“模”)给出了 P 点此刻相对于 O 点的距离

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1-11a)$$

位矢 r 的方向由其方向余弦确定

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}; \cos\beta = \frac{y}{r}; \cos\gamma = \frac{z}{r} \quad (1-11b)$$

其中 α, β, γ 是位矢 r 分别与 x, y, z 轴正向间的夹角.

由于有关系 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, 因此 α, β, γ 只有两个是独立的.

当质点运动时, 其坐标分量当然也是时间 t 的函数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1-12)$$

结合式(1-1)、(1-10)和(1-12), 质点的运动方程表述为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1-13)$$

(1-13)是运动方程的分量式; (1-12)是运动方程的投影式.

质点运动过程中, 位矢 r 连续地改变其大小和方向, 其末端在空间描绘出一条连续曲线, 称为质点运动的轨迹. 在运动方程的投影式(1-12)中消去时间参数 t , 就可以得到轨迹方程.

(2) 位移.

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \\ &= [x(t+\Delta t) - x(t)]\mathbf{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\mathbf{j} + [z(t+\Delta t) - z(t)]\mathbf{k} \\ &= \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1-14)$$

可见, 一个质点在空间的位移, 等于它在各个坐标方向上的位移分量的矢量

合成. 此即运动叠加原理, 它是物质和物质运动的空间性质的自然反映.

(3) 速度.

将(1-13)代入(1-4), 得速度的直角坐标分量式

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \quad (1-15a)$$

或记作

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \quad (1-15b)$$

就是说, 速度 \boldsymbol{v} 可用三个坐标方向的分速度的矢量合成式表示, 此即速度的叠加.

速度的大小可以表示为

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (1-16a)$$

其方向

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{v}, \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) = \frac{v_y}{v}, \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) = \frac{v_z}{v} \quad (1-16b)$$

(4) 加速度.

将(1-15b)代入(1-9), 得加速度的直角坐标分量式为

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k} \quad (1-17a)$$

或记作

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \quad (1-17b)$$

加速度的大小为

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad (1-18a)$$

加速度的方向

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) = \frac{a_i}{a} \quad (i = x, y, z) \quad (1-18b)$$

例 1-1 质点运动方程为: $x=2t; y=19-2t^2$ (SI), 求:

- (1) 轨迹方程;
- (2) $t=1$ s, 2 s 时的位矢与这一秒内的平均速度;
- (3) $t=1$ s, 2 s 时的速度、加速度;
- (4) 何时 $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{v}$;
- (5) 何时 r 最小, 算出 r_{\min} ;

(6) 运动方程中 t 取负值, 所得结果如何解释?

解 (1) 从运动方程中消去时间 t , 得轨迹方程

$$y = 19 - \frac{1}{2}x^2 \quad (\because t > 0, \therefore x > 0)$$

(2) 位矢为

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = 2t\mathbf{i} + (19 - 2t^2)\mathbf{j}$$

所以 $\mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} + 17\mathbf{j}(\text{m}); \quad \mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 11\mathbf{j}\text{m}$

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(2) - \mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}\text{ m}$$

则

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 速度

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$$

所以 $\mathbf{v}(1) = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad \mathbf{v}(2) = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

加速度

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -4\mathbf{j}$$

所以

$$\mathbf{a}(1) = \mathbf{a}(2) = -4\mathbf{j}\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(4) $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$, 则有 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$, 令

$$[2t\mathbf{i} + (19 - 2t^2)\mathbf{j}] \cdot [2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}] = 4t + (19 - 2t^2)(-4t) = 0$$

整理

$$2t(t^2 - 9) = 0$$

得

$$t_1 = 0\text{ s}; \quad t_2 = 3\text{ s}; \quad t_3 = -3\text{ s}(\text{舍去})$$

(5) 任一时刻, 质点到坐标原点的距离(即质点位矢的大小)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2t)^2 + (19 - 2t^2)^2}$$

r 取极值时, 应有 $\frac{dr}{dt} = 0$, 将上式代入

即

$$8t + 2(19 - 2t^2)(-4t) = 0$$

整理

$$2t(t^2 - 9) = 0$$

得

$$t_1 = 0\text{ s}; \quad t_2 = 3\text{ s}; \quad t_3 = -3\text{ s}(\text{舍去})$$

$$r(0) = 19; \quad r(3) = 6.08$$

所以

$$r_{\min} = 6.08\text{ m}$$

(6) t 取负值应理解为计时初始时刻以前质点的运动情况, 千万不能认为是质点沿反向运动。就此题来看, 有两种可能, 质点作平抛或斜抛运动。若质点作斜抛运动, 那么题设的运动方程就描述了它到达最高点以后的运动, 因此, 在该运动方程中取 t 为一定范围内的负值, 可给出该质点上升段的运动描述, 而如果质点只作平抛运动, 那么在题设的运动方程中取 t 为负值就毫无意义了。

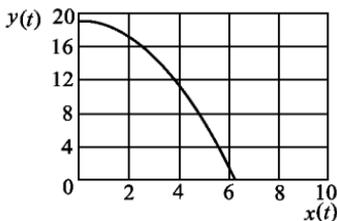


图 1-6 例 1-1 图

1.3.2 自然坐标系

有一类运动, 是事先已知其轨道的。如火车运行、回旋加速器中带电子的

圆周运动、哈雷慧星的回归、洲际弹道导弹的飞行轨道……。在这类问题中，可以在平面轨道上选取一个原点，作为坐标的起点；再选择坐标的正方向。这样一来利用 t 时刻质点所在处与原点之间轨迹曲线的长度 $s(t)$ 就可以确定质点的位置， $s(t)$ 称为弧坐标。用弧坐标而不用路程来确定质点的位置，是考虑到质点在轨道上做往复运动的可能性（如单摆）。

$$s = s(t) \quad (1-19)$$

这就是弧坐标下的质点运动方程，使用这种表述的条件是运动轨迹已知。

质点速度的大小即速率，为弧坐标对时间的一阶变化率，而速度的方向又沿轨迹曲线的切向。规定切线方向的单位矢量为 \hat{t} ，沿运动方向为正，垂直于切向并且指向曲线凹的一侧为法线方向，取沿该方向的单位矢量为 \hat{n} 。将两个相互垂直的切向和法向所组成的平面坐标系称为自然坐标系 (\hat{t}, \hat{n}) 。则速度矢量在自然坐标系中表述为

$$\boldsymbol{v} = v \hat{t} = \frac{ds}{dt} \hat{t} \quad (1-20)$$

请注意，在自然坐标系中，切向单位矢量 \hat{t} 并不固定，它随质点的位置而变。因此笛卡尔坐标系是静坐标系，而自然坐标系是动坐标系。

由于自然坐标系是随质点运动的，在这种坐标系中加速度的表述就很有特点，其结论经常要用到。由加速度定义及自然坐标系中速度表达式

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}; \quad \boldsymbol{v} = v \hat{t} \quad (1-21)$$

得

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + v \frac{d\hat{t}}{dt} \quad (1-22)$$

\hat{t} 是切向单位矢量，其大小虽然不变，但在一般平面曲线运动中其方向随时都在改变。加速度的这个表达式说明，在自然坐标系中，质点的加速度由两个分量构成。第一分量为 $\frac{dv}{dt} \hat{t}$ ，它描述了质点速度大小的变化情况。

若 $\frac{dv}{dt} > 0$ (v 增大)，方向与 \hat{t} 一致。

若 $\frac{dv}{dt} < 0$ (v 减小)，方向与 \hat{t} 相反。

若 $\frac{dv}{dt} = 0$ (v 不变)，该分量为零。

第二分量 $v \frac{d\hat{\tau}}{dt}$ 是由 v 的方向即 $\hat{\tau}$ 的变化所决定. 如图 1-7 所示, 考虑在很短的 Δt 时间内, 质点沿曲线运动产生一很小的角位移 $\Delta\theta$, 走过的路径非常接近于圆弧, 其切向单位矢量 $\hat{\tau}_1$, 由于其方向的改变过渡到 $\hat{\tau}_2$, 增量为 $\Delta\hat{\tau}$. 显然, 当 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 时, $\Delta\hat{\tau}$ 方向变得垂直于切向 $\hat{\tau}_1$, 且指向圆心, 即沿法线方向. 因此

$$|d\hat{\tau}| = |\hat{\tau}| d\theta$$

$$|d\hat{\tau}| = 1$$

则
$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{n} = \frac{d(\rho\theta)}{\rho dt} \hat{n} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} \hat{n} = \frac{v}{\rho} \hat{n}$$

ρ 为轨迹曲线的曲率半径.

将上式代入到(1-22), 得

$$a = \frac{dv}{dt} \hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n} \quad (1-23)$$

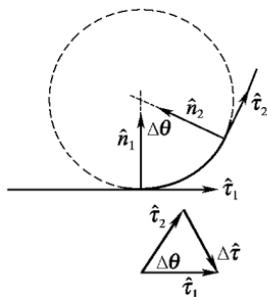


图 1-7 自然坐标系

上式说明, 做平面曲线运动的质点的加速度, 可分解成一个切向分量和一个法向分量, 分别称之为切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n . 即

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (1-24)$$

切向加速度是由速度大小的变化所引起, 而法向加速度则是由速度方向的变化所引起. 显然, 当质点做直线运动时 $\rho \rightarrow \infty$, 因此法向加速度为零. 当质点做圆周运动时, ρ 为圆周运动的半径 R . 如果 v 为常数, 则切向加速度为零, 合加速度方向指向圆心, 称为向心加速度; 如果 v 不为常数, 则还有切向加速度分量, 此时合加速度方向就不是指向圆心.

例 1-2 一质点沿半径为 0.02m 的圆周运动, 它所走过的路程与时间的关系为 $s = 0.1t^3\text{m}$, 当质点的速率为 $v = 0.3\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 它的切向加速度和法向加速度各为多少? 总加速度多大? 在什么方向?

解 由自然坐标系下对运动描述的基本定义

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.3t^2\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0.6t\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{0.09t^4}{0.02} = 4.5t^4\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

显然, 当 $v = 0.3\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, $t = 1\text{s}$; 此时

$$a_\tau(1) = 0.6\text{m} \cdot \text{s}^{-2}; \quad a_n(1) = 4.5\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0.6^2 + 4.5^2} \approx 4.677\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

方向

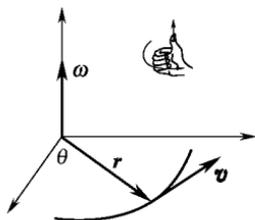
$$\alpha = \arctan \frac{a_n}{a_\tau} = \arctan \frac{4.5}{0.6} = 82.4^\circ$$

在圆周运动中,除了用位矢、位移、速度和加速度等线量描述质点的运动之外,也可以用角度来描述质点的运动状态,这称为圆周运动的角量描述.

从圆心引一条射线作为极轴,质点相对圆心的矢径与极轴间的夹角 θ 就称为角坐标,其值随时间变化

$$\theta = \theta(t) \quad (1-25)$$

Δt 时间内,质点角坐标的变化为 $\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$,称之为角位移.可以证明:有限大角位移 $\Delta\theta$ 不是矢量,因为 $\Delta\theta$ 的合成不满足矢量运算法则;而无限小角位移是矢量,用 $d\theta$ 表示.其方向由右手螺旋法则确定,如图 1-8 所示,即右手四指沿质点运动方向绕行,则大拇指所指即为无限小角位移方向.



定义角速度为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-26)$$

- 8 圆周运动的角量描述

以及角加速度为

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1-27)$$

在圆周运动中,角速度、角加速度的方向都沿转轴,因此一般不用矢量表示,而是写成对转轴的投影式,即设定与运动方向成右手螺旋的转轴方向为坐标轴正向,则当角速度和角加速度方向与坐标轴正向相同时, ω 和 β 取正值,反之取负值.

线量与角量的关系为

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\omega \quad (1-28)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\beta \quad (1-29)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad (1-30)$$

1.4 两类运动学问题

运动学问题大体上可分为两大类:

第一类运动学问题: 已知运动方程, 求速度、加速度. 这类问题要运用求导运算.

第二类运动学问题: 已知加速度函数以及初始条件 r_0 和 v_0 , 求运动方程. 求解这类问题运用积分的方法.

例 1-3 已知运动方程
$$\begin{cases} x=ut \\ y=-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad u, g \text{ 为常量, 求 } a_\tau, a_n.$$

解法一 应用公式求解. 由 $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, 可见要先求出 v, ρ

由
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = u, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt \Rightarrow v = \sqrt{u^2 + g^2 t^2}$$

则
$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{u^2 + g^2 t^2} = \frac{g^2 t}{\sqrt{u^2 + g^2 t^2}}$$

再由曲率半径公式
$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{ug}{(u^2 + g^2 t^2)^{3/2}}$$

代入得
$$a_n = (u^2 + g^2 t^2) \frac{ug}{(u^2 + g^2 t^2)^{3/2}} = \frac{ug}{\sqrt{u^2 + g^2 t^2}}$$

解法二 利用矢量图求解. 如图 1-9 所示, 显然运动方程所描述的是平抛运动, 其加速度为重力加速度 g , 将其分解到切向和法向, 有

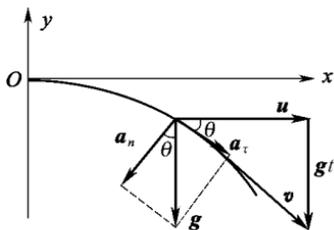


图 1-9 例 1-3 图

$$\begin{cases} a_\tau = g \sin\theta \\ a_n = g \cos\theta \end{cases}$$

而

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{gt}{\sqrt{u^2 + g^2 t^2}} \\ \cos\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + g^2 t^2}} \end{cases}$$

所以

$$a_\tau = \frac{g^2 t}{\sqrt{u^2 + g^2 t^2}}, \quad a_n = \frac{gu}{\sqrt{u^2 + g^2 t^2}}$$

可见矢量图解极其简捷, 物理意义明确.

例 1-4 如图 1-10 所示, 已知滑轮距水平面的高度为 h , 以 v_0 速率收绳, 求离岸距离为 s 的船的运动速度、加速度.

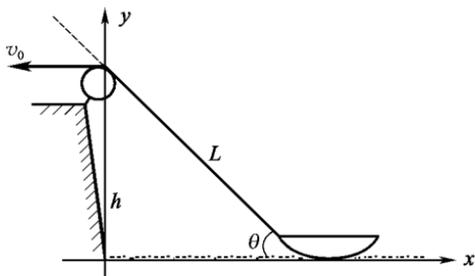


图 1-10 例 1-4 图

解 选地面参考系、选直角坐标系; 作图, 寻找几何关系 (运动学说到底是几何问题)

$$L^2 = h^2 + x^2$$

确认这几何关系中的变量 L, x , 对几何关系式微分

$$2L \frac{dL}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

确认各导数的物理意义 (\because 绳长在缩短 $\frac{dL}{dt} < 0$)

收绳速度
$$v_0 = -v_0 \mathbf{i} = - \left| \frac{dL}{dt} \right| \mathbf{i} = \frac{dL}{dt} \mathbf{i}$$

船速
$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i}$$

[注意: 这里用了矢量的两种表述方法, v_0 是速率, 即 v_0 的大小; v_x 是 \mathbf{v} 在 x 轴上的投影 (带有符号)]

代入微分式
$$L \frac{dL}{dt} = x v_x$$

则
$$v_x = \frac{L}{x} \frac{dL}{dt} = - \frac{L}{x} v_0 = - \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x} v_0$$

令 $x = s$, 得此时船速

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} = - \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{s} v_0 \mathbf{i} \quad (\text{负号说明船速与 } x \text{ 正向相背})$$

进而

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(- \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x} v_0 \right) \mathbf{i} \\ &= \frac{d}{dx} \left(- \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x} v_0 \right) \frac{dx}{dt} \mathbf{i} = \frac{h^2}{x^2 \sqrt{x^2 + h^2}} v_0 v_x \mathbf{i} \end{aligned}$$

当 $x=s$ 时

$$\mathbf{a} = \frac{h^2}{s^2 \sqrt{s^2 + h^2}} v_0 v_s \mathbf{i} = -\frac{h^2}{s^3} v_0^2 \mathbf{i} \quad (v_s = -\frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{s} v_0)$$

现在讨论如何求解第二类运动学问题.

若题型为:已知 $\mathbf{a}=\mathbf{a}(t)$ 及 $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ (初始条件); 求 $\mathbf{v}(t), \mathbf{r}(t)$.

解决办法:首先选定坐标系,将 \mathbf{a} 写成投影式(以二维运动为例)

$$\begin{cases} a_x = a_x(t) \\ a_y = a_y(t) \end{cases}$$

由

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

这是一阶常微分方程形式,数学处理上采用分离变量法.

分离变量 $dv_x = a_x dt$

两边积分 $\int_{v_0}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt$

注意:定积分的下限对应运动的初始时刻和初始状态;上限则对应运动的末时刻和末状态.

$$\therefore v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt \quad (1-31)$$

再由

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

分离变量 $dx = v_x dt$

两边积分,得

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt \quad (1-32)$$

同理

$$v_y = v_{0y} + \int_0^t a_y dt \quad (1-33)$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y dt \quad (1-34)$$

如果质点沿 x 轴作匀加速运动, a_x 为常量,则 $v_x = v_{0x} + a_x t$,这正是匀加速直线运动公式.若 v_x 为常量,则 $x = x_0 + v_x t$,这正是匀速直线运动公式.

在中学物理中,处理的都是不变量或匀变量的问题,这些熟知的公式,不具有一般意义,千万不要随意套用.以后处理运动学问题,要从更一般的式(1-31)~(1-34)出发.

对自然坐标系

$$a_t = \frac{dv}{dt}; \quad v = \frac{ds}{dt}$$

则

$$v = v_0 + \int_0^t a_t dt \quad (1-35)$$

$$s = s_0 + \int_0^t v dt \quad (1-36)$$

可见自然坐标系的妙处,求 s 只用 a_t 分量即可. 至于 a_n , 在动力学问题中用得较多.

在第二类运动学问题的求解过程中,人们注意到,若掌握了质点运动的加速度函数,及其某时刻的运动状态,该质点运动的历史和将来就完全确定了.

$$v = v_0 + \int_0^t a(t) dt \quad r = r_0 + \int_0^t v(t) dt$$

这是历史与现状、现状与将来的一一对应,哲学家们称此为决定论.

第二类运动学问题是第一类运动学问题的逆问题,所以数学方法也正好相反. 从微分、积分的几何意义上讲,微分给出函数曲线的斜率,积分则给出函数曲线与坐标轴围定的面积. 那么第一类运动学问题求的是 $x-t$ 图、 $v-t$ 图上函数曲线的斜率,第二类运动学问题求的是 $v-t$ 图、 $a-t$ 图上函数曲线与坐标轴围定的面积.

例如,一质点沿 x 轴运动,其加速度与时间的关系如图 1-11 所示. 若 $v_0=0$, 则当 $t=4s$ 时质点的速度再次为零. 这是因为加速度曲线与时间轴所包围的面积即质点的速度,而在 $(0, 4)$ 这段时间内曲线下的“净”面积等于零.

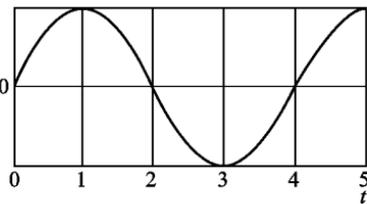


图 1-11 加速度 $a-t$ 曲线

有些问题中,加速度不作为时间的显函数给出,而是关于速度、位矢等变量的函数. 以直线运动为例: $a=a(v)$; 以圆周运动为例: $a=a(\theta)$, 这是有相应的动力学意义的,下一章会详细讨论. 遇到这样的加速度函数,求解也并不困难,只要在分离变量时注意通过一些数学变换,使得等式两边的变量能够统一.

例 1-5 一质点沿 x 轴运动,其加速度 $a=-kv^2$, k 为常数,设 $t=0$ 时, $x=0, v=v_0$. 求 (1) v 和 x 作为 t 的函数; (2) v 作为 x 的函数.

解 这是第二类运动学问题,且加速度是 v 的函数

$$(1) \text{ 由 } a = \frac{dv}{dt} = -kv^2$$

分离变量 $-k dt = \frac{dv}{v^2}$ (等号两边各自函数统一)

两边积分

$$-k \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2}$$

得

$$kt = \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}$$

所以

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 kt}$$

再由

$$v = \frac{dx}{dt}$$

分离变量

$$dx = \frac{v_0}{1 + v_0 kt} dt$$

两边积分

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + v_0 kt} dt$$

得

$$x = \frac{1}{k} \ln(1 + v_0 kt)$$

(2) 由已经得到的 $v(t)$, $x(t)$ 消去时间 t , 即可. 还可以在分离变量时就设法消去时间 t ,

做恒等变换

$$a = -kv^2 = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

分离变量积分

$$-k \int_0^x dx = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$

得

$$-kx = \ln v - \ln v_0$$

所以

$$v = v_0 e^{-kx}$$

例 1-6 一飞轮受摩擦力矩作用做减速转动, 其角加速度与 θ 成正比, 比例系数 $k > 0$. $t=0$ 时 $\omega = \omega_0$, 记 $\theta_0 = 0$. 求 (1) 角速度作为 θ 的函数表达式; (2) 最大角位移.

解 (1) 由题意知 $\beta = -k\theta$ (不显含时间)

而 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \omega$ (通过恒等变换消去时间 t)

所以有 $-k\theta = \frac{d\omega}{d\theta} \omega$

再分离变量 $-k\theta d\theta = \omega d\omega$

两边积分 $-k \int_0^\theta \theta d\theta = \int_{\omega_0}^\omega \omega d\omega$

得 $-\frac{1}{2} k\theta^2 = \frac{1}{2} (\omega^2 - \omega_0^2)$

从而 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k\theta^2}$ (依题意 $\omega > 0$)

(2) 由于飞轮作减速运动, 最大角位移发生在 $\omega = 0$ 时

所以 $\theta_{\max} = \frac{\omega_0}{\sqrt{k}}$

1.5 相对运动

前面曾指出,同一物体在不同参考系中运动状态的描述结论可能不一样. 现在要问:不同参考系上的观察者对运动状态描述结果之间的关系如何? 由于不同观察者可以选取不同参考系,所以弄清楚不同参考系上的观察者,对运动描述结果之间的关系是很重要的.

假设两个观察者 O 与 O' 他们彼此之间作匀速相对平动, 观察者 O 测出 O' 以速度 u 运动, 而 O' 认为 O 以速度 $-u$ 运动. 下面来比较一下, 这两个观察者对同一个物体的运动描述. 例如观察者 O 在站台上, O' 在正通过车站且沿直线匀速运动的火车上, 他们都在观察头顶上一架飞机的飞行. 为简单起见, 取 x 和 x' 轴沿相对运动的直线, y 和 y' , z 和 z' 分别平行. 由于不存在相对转动, 两套坐标轴将永远保持平行 (欧几里德空间的性质). 此外还假定, $t=t'=0$ 时刻, O 与 O' 相重合. 以后称 O 所在的参考系为惯性系 S ; O' 所在的参考系为惯性系 S' .

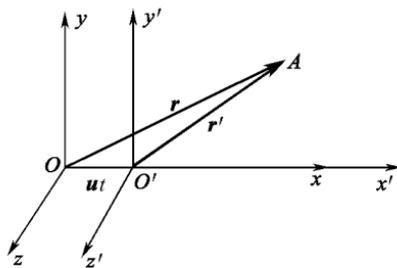


图 1-12 伽利略变换

任意时刻对位于 A 处的质点

$$\overrightarrow{OA} = r, \overrightarrow{O'A} = r'$$

则

$$r = ut + r' \quad (1-37a)$$

或

$$r' = r - ut \quad (1-37b)$$

将其对坐标轴投影, 再加上 $t=t'$, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array} \right. \quad \text{或} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \quad (1-38)$$

这就是伽利略变换. 它给出了两个不同惯性参考系中的观察者对运动描述的相互关系. 在这组变换式中, 时、空坐标的不平权、不对称十分明显.

伽利略变换符合人们的日常经验, 从逻辑上讲“应该”是正确的, 但是仔细追究起来, 问题并不那么简单. 这里涉及到空间的测量、时间的测量与参考系的关系. 式中 r, u 和 r' 是在不同的参考系中测量的, 而矢量相加时, 各个矢量必须在同一参考系中测定. 因此, 伽利略变换式成立的条件是: 空间两点的距离不管从哪个参考系测量, 结果都应相等. 同一段空间距离(长度)的测量结果与参考系的相对运动无关, 这一论断称为长度测量的绝对性, 又称为空间绝对性. 物质的运动不仅涉及空间, 还要涉及时间. 日常经验告诉我们, 同一运动所经历的时间在不同的参考系中观测的结果是相同的. 因此, 同一过程经历的时间间隔的测量结果应与参考系的相对运动无关, 这一论断称为时间测量的绝对性, 又称为时间绝对性.

可见在这组伽利略变换关系中, 实际上包含着两个基本假定:

(1) 空间间隔是绝对不变量: $\Delta L = \Delta L'$. 空间间隔不变性也符合我们的生活经验, 在我们看来, 地面上的一把尺子与做匀速直线运动的飞机上的同样的尺子是完全等长的.

(2) 时间间隔也是绝对不变量: $\Delta t = \Delta t'$. 在伽利略以及同时代的学者们心目中, 时间是绝对的、均匀的、无限流逝着的, 就像一条无限平缓地流淌着的长河. 在这个假定下, 不同惯性参考系上的观察者能够使用相同的时间标度. 也就是说, 时间的测量与运动无关. 这看起来似乎合理, “海上升明月, 天涯共此时”, 地面和飞行中的飞机上, 当然能使用同样的时间标度, 否则我们怎么能够制定飞机、火车、轮船运行时刻表? 从这一假定中我们还可以得出另一观念: 同时性是绝对的. 在 s 系中同时发生的两个事件, 在 s' 系中看来也必定是同时发生的, $\Delta t = 0$ 时, 亦有 $\Delta t' = 0$.

由此, 在任何惯性系中, 两个确定事件 $(r_1, t_1), (r_2, t_2)$ 的时间间隔和空间间隔都是相同的. 时间、空间各自独立, 并且都具有绝对性. 牛顿曾形象地把时间比作流水、空间比作箱子, 时间永远在均匀流逝, 箱子永恒占据着空间.

伽利略变换是绝对时空观的集中体现, 是经典力学的理论基础. 这种时空观是怎样形成的呢? 我们日常生活在一个运动速度远小于光速 c 的宏观世界里,

在这种有局限性的宏观低速环境中,直觉经验告诉我们,关于空间间隔和时间间隔的度量与运动无关.17 世纪的物理学家在建立现在被称为经典力学的理论体系时,正是基于这种直觉经验、以默认(实际上是假定)时钟和量尺不受运动状态的影响为前提.狭义相对论将向我们揭示,当两个惯性参考系之间的相对速度接近光速时,从这样两个参考系上对两个有着因果关系的确定事件 (r_1, t_1) , (r_2, t_2) 的空间间隔和时间间隔的测量,将给出不同的结论.因此在高速世界里,空间绝对性和时间绝对性将由新的观念取代.

关于时空参考系的问题,将在狭义相对论中作更深入的讨论.以下的内容以及在整个牛顿力学范围内,我们默认一切问题所涉及的速度都将限制在远远小于光速的条件下.

将伽利略坐标变换式对时间求一次导数,就可得到伽利略速度变换式.注意:既然 $\Delta t = \Delta t'$,对 t 求导数与对 t' 求导数就没有区别.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \quad (1-39)$$

这就是我们熟知的速度合成法则.再求一阶导数就得到伽利略的加速度变换式

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \quad \text{或} \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} \quad (1-40)$$

可见,在相对作匀速直线运动的参考系中观察同一质点的运动时,所测得的加速度是相同的.

例 1-7 一人骑自行车向东行,速度 $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,觉得有南风.当速度增至 $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时,觉得有东南风.求风速.

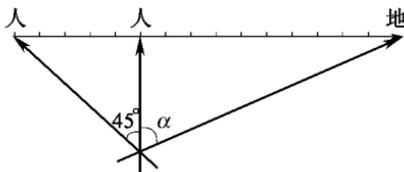


图 1-13 例 1-7 图

解 用矢量法,矢量关系

$$\boldsymbol{v}_{\text{风地}} = \boldsymbol{v}_{\text{风人}} + \boldsymbol{v}_{\text{人地}} \quad (\boldsymbol{v}_{\text{风人}} \text{ 是间接给出的})$$

利用矢量三角形可解 $|\boldsymbol{v}_{\text{风地}}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\tan \alpha = 10/5 = 2 \rightarrow \alpha = \arctan 2 = 63^\circ$$

思考题

1-1 试说明下列符号的物理意义.

$$(1) \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}; (2) \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right|; (3) \frac{\Delta r}{\Delta t}; (4) \frac{dv}{dt}; (5) \frac{d}{dt}(v\hat{\mathbf{r}}); (6) \frac{d\mathbf{v}}{dt}; (7) \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|$$

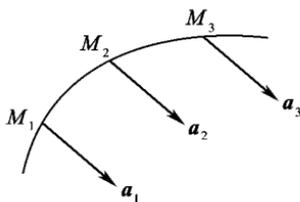
1-2 如图所示,质点做曲线运动,质点的加速度 \mathbf{a} 是恒矢量 ($\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}$). 试问质点是否能做匀变速率运动? 简述理由.

1-3 一质点沿各坐标轴的运动方程分别为:

$$x = A \cos \omega t, y = A \sin \omega t, z = \frac{h}{2\pi} \omega t. \text{ 式中 } A, h, \omega \text{ 都是大于零的}$$

常数. 试定性说明:

- (1) 质点在 xy 平面上分运动的轨迹;
- (2) 质点在 z 轴上分运动的类型;
- (3) 质点在 xyz 空间内运动的轨迹.



思考题 1-2 图

1-4 下雨时,有人在汽车内观察雨点的运动,试说明下列各情况中,他观察到的结果. 设雨点相对于地面匀速竖直下落.

- (1) 车是静止的;
- (2) 车匀速沿平直轨道运动;
- (3) 车匀加速沿平直轨道运动.

习题 1

1-1 有一质点沿 x 轴作直线运动, t 时刻的坐标为 $x = 4.5t^2 - 2t^3$ (SI) 试求:

- (1) 第 2 秒内的平均速度;
- (2) 第 2 秒末的瞬时速度;
- (3) 第 2 秒内的路程.

1-2 对于在 $x-y$ 平面内,以原点 O 为圆心作匀速圆周运动的质点,

- (1) 试用半径 r 、角速度 ω 和单位矢量 i, j 表示其 t 时刻的位置矢量;
- (2) 已知在 $t=0$ 时, $y=0, x=r$, 导出速度 \mathbf{v} 与加速度 \mathbf{a} 的矢量表示式;
- (3) 试证加速度指向圆心.

1-3 由高层窗口以水平初速度 v_0 射出一发子弹,取枪口为原点,沿 v_0 方向为 x 轴,竖直向下为 y 轴,并取发射时 t 为 0,试求:(1) 子弹在任一时刻 t 的位置坐标及轨迹方程;(2) 子弹在 t 时刻的速度,切向加速度和法向加速度.

1-4 一质点沿 x 轴运动,其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a = 2 + 6x^2$ (SI) 如果质点在原点处的速度为零,试求其在任意位置处的速度.

1-5 一物体悬挂在弹簧上做竖直振动,其加速度为 $a = -ky$, 式中 k 为常量, y 是以平衡位置为原点所测得的坐标,假定振动的物体在坐标 y_0 处的速度为 v_0 ,试求速度 v 与坐标 y 的函数关系式.

1-6 质点 m 在水平面内运动轨迹如图所示, OA 段为直线, AB, BC 段分别为不同半径的两个 $1/4$ 圆周. 设 $t=0$ 时, m 在 O 点,已知运动方程为 $s = 30t + 5t^2$ (SI), 求 $t=2$ s 时刻,质点 m 的切向加速度和法向加速度.

1-7 一质点沿半径为 R 的圆周运动. 质点所经过的弧长与时间的关系为

$$s = bt + 0.5ct^2 \text{ (SI)}$$

其中 b, c 是大于零的常量, 求从 $t=0$ 开始到达切向加速度与法向加速度大小相等时所经历的时间.

1-8 质点 P 在水平面内沿一半径为 $R=2 \text{ m}$ 的圆轨道转动. 转动的角速度 ω 与时间 t 的函数关系为 $\omega = kt^2$ (k 为常量). 已知 $t=2 \text{ s}$ 时, 质点 P 的速度值为 $32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 试求 $t=1 \text{ s}$ 时, 质点 P 的速度与加速度的大小.

1-9 质点在重力场中做斜上抛运动, 初速度的大小为 v , 与水平方向成 θ 角. 求质点到达与抛出点同一高度时的切向加速度, 法向加速度以及该时刻质点所在处质点轨迹的曲率半径. (忽略空气阻力)

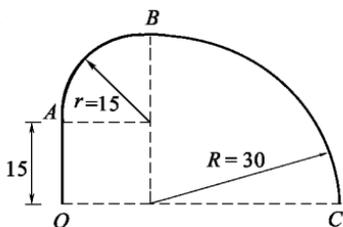
1-10 一质点沿 x 轴运动, 其加速度为 $a = 4t$ (SI), 已知 $t=0$ 时, 质点位于 $x_0 = 10 \text{ m}$ 处, 初速度 $v_0 = 0$. 试求其位置坐标和时间的关系式.

1-11 一做匀变速转动的飞轮在 10 s 内转了 16 圈, 其末角速度为 $15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 它的角加速度的大小等于多少?

1-12 一飞机驾驶员想往正北方向飞行, 而风以 $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 的速度由东向西刮来, 如果飞机的航速(在静止空气中的速率)为 $180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, 试问驾驶员应取什么航向? 飞机相对于地面的速率为多少? 试用矢量图说明.

1-13 当火车静止时, 乘客发现雨滴下落方向偏向车头, 偏角为 30° , 当火车以 $35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率沿水平直路行驶时, 发现雨滴下落方向偏向车尾, 偏角为 45° , 假设雨滴相对于地的速度保持不变, 试计算雨滴相对地的速度大小.

1-14 一敞顶电梯以恒定速率 $v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 上升. 当电梯离地面 $h = 30 \text{ m}$ 时, 一小孩竖直向上抛出一球, 球相对于电梯初速率 $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 试问: (1) 从地面算起, 球能达到的最大高度为多少? (2) 抛出后经过多长时间再回到电梯?



题 1-6 图

第 2 章 牛顿运动定律

运动是物质的固有属性,但是物体如何运动则取决于物体之间的相互作用,即物体的受力情况.研究质点在力作用下运动状态的变化规律,称为质点动力学.牛顿运动定律是质点动力学基础,也是整个经典力学的基础.本章主要讨论牛顿运动定律及其应用,惯性系和非惯性系以及惯性力等.

2.1 牛顿运动定律及其应用

牛顿不仅是历史上伟大的物理学家,也是杰出的数学家和哲学家.他总结了伽利略、开普勒等人的工作,创立了完整的经典力学体系.在他的名著《自然哲学的数学原理》一书中,提出了牛顿运动定律,从而奠定了经典力学的基础.

2.1.1 牛顿运动定律的表述

牛顿运动定律由三条定律组成.

第一定律 任何物体都保持静止或匀速直线运动状态,直到其他物体对它作用的力迫使它改变这种状态为止.

第二定律 物体受到外力作用时,物体所获得加速度的大小与合外力成正比,与物体的质量成反比,加速度的方向与合外力的方向相同.

第三定律 两物体之间的相互作用力总是大小相等,方向相反,且作用在一条直线上.

这三条定律之间有着紧密的内在联系,共同构成了牛顿力学的完整理论体系.

第一定律包含了两个力学的基本概念,即惯性和力.首先,按第一定律,任何物体都有保持静止或匀速直线运动状态不变的“惰性”,这在物理上称为物体的

惯性,它是任何物体在任何情况下都具有的固有属性.因此,牛顿第一定律又称为惯性定律.其次,由于物体具有惯性,要改变一个物体原有的运动状态,必须施加外来作用力.这说明力是改变物体运动状态的原因.

不同物体的惯性大小是不同的.让一辆行驶的汽车停下来相对较容易,而让一列行驶的火车停止运动则要困难得多,这说明火车保持自身运动状态不变的本领较大,即火车惯性要比汽车的惯性大.那么如何来表征物体的惯性呢?物体受到力的作用时运动状态是如何改变呢?牛顿第二运动定律进一步定量地揭示了这些问题.根据牛顿第二定律,物体受到外力 F 的作用时,其加速度 a 与外力 F 和物体质量 m 的关系是

$$a \propto \frac{F}{m}$$

写成等式,则有

$$F = kma \quad (2-1)$$

式中的 k 为比例系数,决定于力、质量和加速度的单位.在国际单位制(SI)中,力的单位为牛顿(N),质量的单位为千克(kg),加速度的单位为米每二次方秒($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$),则 $k=1$.于是上式又写成

$$F = ma \quad (2-2)$$

上式称为牛顿运动方程,它是质点动力学的基本方程.牛顿运动方程定量地给出了物体惯性大小的量度和运动状态改变的实质.从式(2-2)可知:

(1) 质量不同的两个物体分别在相同的外力作用下,两物体产生的加速度大小 a_1, a_2 和它们的质量 m_1, m_2 成反比,即有 $a_1/a_2 = m_2/m_1$.这意味着质量较小的物体加速度较大,它的运动状态较容易改变,其惯性较小;而质量较大的物体加速度较小,它的运动状态不容易改变,其惯性较大.因此物体的质量就是物体惯性大小的量度,牛顿第二定律中的质量通常也被称作惯性质量.物体除了有惯性之外,相互之间还有彼此吸引的属性,称为万有引力,描述这种属性的物理量叫做引力质量.实验表明,物体的惯性质量和引力质量相等,因此今后就不再区分这两种质量,统称为物体的质量.

(2) 若物体(质点)所受外力 $F=0$,则其加速度 $a=0$,即保持作匀速直线运动或静止,这就和第一定律一致.若 $F \neq 0, a \neq 0$,则物体具有加速度,它的运动状态发生了变化,因此,所谓运动状态的改变,实质是物体受力的作用而产生了加速度.

牛顿第三定律反映了物体之间的作用是相互联系和相互制约的.对第三定律的理解应注意以下几点:

(1) 两物体之间的相互作用力(常称为作用力与反作用力)总是成对且同时产生和同时消失.

(2) 作用力与反作用力无主次之分.

(3) 作用力与反作用力是同种性质的力,且作用在两个不同的物体上.

(4) 作用力和反作用力大小相等,方向相反是无条件的,但各自产生的效应不会抵消.

(5) 牛顿第三定律只适用于实际力(力的性质确定,并有施力物体和受力物体),不适用于等效力(力的性质不确定,无确定的施力物体).

此外还要注意作用力和反作用力与通常所说的平衡力的区别.一对平衡力是指作用在同一物体上的两个力大小相等,方向相反;而作用力和反作用力是分别作用在两个不同的物体上.

2.1.2 牛顿运动定律的应用

牛顿运动定律在生产实践和科学研究中有着广泛的运用,本节将通过举例来说明如何运用牛顿运动定律.首先有必要对牛顿运动定律的运用条件以及相关问题的加以阐述.

(1) 牛顿运动定律的适用范围:牛顿运动方程式(2-2)只适用于质点模型,因此实际研究对象是可视作质点的物体;牛顿运动定律只适用惯性参考系(后面将有专门阐述);牛顿运动定律只适用于低速运动(相对光速而言)的宏观物体.

(2) 式(2-2)描述的是物体受外力与物体获得加速度的瞬时对应关系.物体所受外力发生变化,加速度也随即发生变化,外力为零则加速度亦为零.

(3) 力满足叠加性原理,加速度亦满足叠加性原理.即作用在质点上各分力所产生的加速度之和等于合外力作用在质点上所产生的合加速度.

(4) 牛顿运动方程式(2-2)是矢量式.在具体应用时,需要在适当坐标系中表示为坐标分量的形式,然后联立求解.例如,在直角坐标系中方程(2-2)的形式为

$$\begin{aligned} F_x &= m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y &= m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z &= m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \quad (2-3)$$

在自然坐标系中方程(2-2)的形式为

$$\begin{aligned} F_{\tau} &= ma_{\tau} = m \frac{dv}{dt} \\ F_{\eta} &= ma_{\eta} = m \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \quad (2-4)$$

式中的 F_{τ} 和 F_{η} 分别表示物体受到的切向合力和法向合力。

例 2-1 在光滑的水平地面上放一质量为 M 的楔块, 楔块的底角为 θ , 今在其光滑的斜边上放一质量为 m 的小物体见图 2-1, 求小物体沿楔块下滑时对地面和对楔块的加速度。

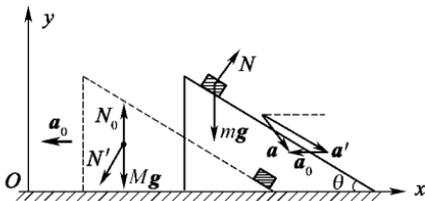


图 2-1 例 2-1 图

解 分别选取 M 和 m 为研究对象, 画出各物体受力情况. 如图所示, 在地面上建立直角坐标系, 设 m 相对地的加速度为 a , m 相对 M 的加速度为 a' , M 相对地的加速度为 a_0 , 由相对运动有

$$a = a' + a_0 \quad (1)$$

$$x \text{ 方向: } a_x = a_x' - a_0 = a' \cos\theta - a_0 \quad (2)$$

$$y \text{ 方向: } a_y = a_y' = -a' \sin\theta \quad (3)$$

对 m 应用牛顿定律:

$$x \text{ 方向: } N \sin\theta = ma_x \quad (4)$$

$$y \text{ 方向: } N \cos\theta - mg = ma_y \quad (5)$$

利用式(2), (3)可得:

$$N \sin\theta = ma' \cos\theta - ma_0 \quad (6)$$

$$N \cos\theta - mg = -ma' \sin\theta \quad (7)$$

对 M 用牛顿定律:

$$x \text{ 方向: } N \sin\theta = Ma_0 \quad (8)$$

由式(6), (7), (8)解得:

$$a' = \frac{(M+m) \sin\theta}{M+m \sin^2\theta} g$$

$$a_0 = \frac{m \sin\theta \cos\theta}{M+m \sin^2\theta} g$$

$$\therefore a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{\sin\theta \sqrt{M^2 + m(2M+m) \sin^2\theta}}{M+m \sin^2\theta} g$$

例 2-2 由地面沿铅直方向发射质量为 m 的宇宙飞船, 见图 2-2. 试求宇宙飞船能脱离地球引力所需的最小初速度. 不计空气阻力及其他作用力.

解 选宇宙飞船为研究对象, 取坐标轴向上为正. 飞船只受地球引力作用, 根据万有引力定律, 地球(质量为 M)对飞船(质量为 m)引力的大小为

$$F = G \frac{Mm}{x^2} \quad (1)$$

用 R 表示地球的半径, 把 $G = \frac{gR^2}{M}$ 代入式(1), 得

$$F = \frac{mgR^2}{x^2} \quad (2)$$

由牛顿运动方程有

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{x^2}$$

即

$$\frac{dv}{dt} = -gR^2 \frac{1}{x^2} \quad (3)$$

将

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

代入式(3)分离变量得

$$v dv = -gR^2 \frac{dx}{x^2}$$

设飞船在地面($x \approx R$)发射时的初速为 v_0 , 在 x 处的速度为 v , 将上式积分

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_R^x -gR^2 \frac{dx}{x^2}$$

得

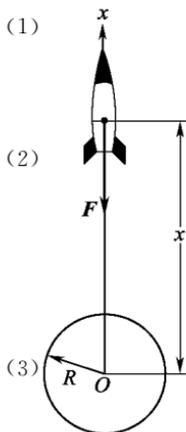
$$v^2 = v_0^2 - 2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x} \right)$$

飞船要脱离地球引力的作用, 即意味着飞船的末位置 x 趋于无限大而 $v \geq 0$. 把 $x \rightarrow \infty$ 时 $v = 0$ 代入上式, 即可求得飞船脱离地球引力所需的最小初速度(取地球的平均半径为 6370 km).

$$v_0 = \sqrt{2gR} = 11.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

这个速度称为第二宇宙速度.

理论计算表明, 物体从地球表面附近以 $v_0 = \sqrt{gR} = 7.9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度沿水平方向发射后, 物体将沿地面而绕地球做圆周运动, 成为人造地球卫星, 这个速度称为第一宇宙速度. 而物体从地球表面附近以 $v = 16.7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率发射时, 物体不仅能脱离地球引力, 而且还能脱离太阳引力, 这速度称为第三宇宙速度.



- 2 例 2-2 图

例 2-3 在实验室测液体的粘滞系数时,将质量为 m ,半径为 r ,密度为 ρ 的小球放入某种液体中由静止落下,设液面无限宽,液体粘滞系数为 η .按照斯托克斯定律,液体对小球的粘滞阻力为

$$f=6\pi\eta rv$$

v 为小球在液体中下落的速度,求小球的运动方程.

解 取小球为研究对象,小球受到重力 mg ,浮力 B ,液体的粘滞力 f ,各力方向如图 2-3 所示.取竖直向下方向为 x 轴的正向,则小球的运动微分方程为

$$mg-B-kv=m\frac{dv}{dt}$$

式中 $k=6\pi\eta r$,分离变量两边积分(注意初始条件 $t=0, v=0$)

$$\int_0^v \frac{dv}{v-K} = \int_0^t -\frac{k}{m} dt$$

式中 $K=\frac{mg-B}{k}$,可得

$$\ln(v-K)-\ln(-K)=-\frac{k}{m}t$$

即有

$$v=K(1-e^{-\frac{k}{m}t}) \quad (1)$$

将 $v=\frac{dx}{dt}$ 代入式(1),分离变量积分(注意初始条件 $t=0, x=0$)

$$\int_0^x dx = \int_0^t K(1-e^{-\frac{k}{m}t}) dt$$

得运动方程

$$x=Kt-K\frac{m}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})=\frac{mg-B}{k}t-\frac{m(mg-B)}{k^2}(1-e^{-\frac{k}{m}t}) \quad (2)$$

由式(1),令 $t \rightarrow \infty$,小球将以 v_m 匀速下落, $v_m=K=\frac{mg-B}{k}$.

例 2-4 如图 2-4 所示,长为 l 的细绳,一端系有质量为 m 的小球,另一端系于定点 O .开始时小球处于最低位置.令其初速度为 v_0 ,使小球在竖直平面内作圆周运动.求小球在任意位置的速率及绳的张力.

解 在任意时刻 t 小球受到重力 mg 和绳的张力 T 作用,绳与竖直方向成 θ 角.应用牛顿第二定律列出运动微分方程:

$$\text{切向:} \quad -mg\sin\theta=m\frac{dv}{dt} \quad (1)$$

$$\text{法向:} \quad T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{l} \quad (2)$$

式(1)和(2)中有四个变量 T, v, t, θ ,先采用变量换元方法消去某些变量,这时宜消去式(1)中的时间变量 t .将



图 2-3 例 2-3 图

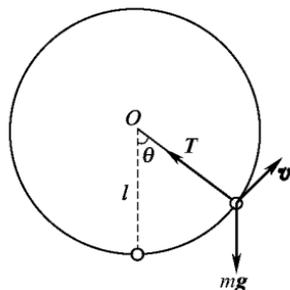


图 2-4 例 2-4 图

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dv}{d\theta} = \frac{v}{l} \frac{dv}{d\theta}$$

代入式(1)并分离变量,得

$$v dv = -gl \sin\theta d\theta$$

利用初始条件 $t=0, v=v_0, \theta=0$ 积分

$$\int_{v_0}^v v dv = - \int_0^\theta gl \sin\theta d\theta$$

得

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gl(\cos\theta - 1)} \quad (3)$$

再将式(3)代入式(2)得

$$T = m \left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g \cos\theta \right)$$

从以上几个应用实例可见,应用牛顿运动定律解题一般遵循以下几个基本步骤和方法:

- (1) 选取所研究对象.
- (2) 对研究对象进行受力分析,往往采用隔离物体法和整体分析法.
- (3) 根据问题的需要,建立相应的坐标系.
- (4) 列出牛顿定律的坐标分量方程.
- (5) 联立方程,根据题中初始条件求解.

值得注意的是受力分析时,要选取物体任意时刻或任意位置(而不是特定的情况)进行分析.由牛顿运动方程求解时往往先求出一般解,然后再代入特定条件(如特定时刻、特定位置)求出特定解.

2.2 惯性系 非惯性系与惯性力

在运动学中,描述一个物体的运动往往要选取另一个物体作为参考系,这里参考系的选择视问题的需要和方便,参考系的选择可以是任意的,尽管同一物体的运动在不同参考系中来描述所得到的运动形式不同,但都是有意义的.然而在动力学中,应用牛顿运动定律研究物体的运动时,参考系不能任意选择,这是因为牛顿运动定律只适用于某些特定的参考系.下面通过例子来说明.

如图 2-5 所示,在车厢内的光滑桌面上放置一小球,显然小球所受合外力 $F=0$.当车厢以加速度 a_0 向右运动时,地面的观察者(以地面为参考系)看到小

球相对地面仍然不动,因为小球受合外力为零,相对地面的加速度为零,故对于地面参考系,牛顿运动定律是成立的($F=0, a_0=0$).但车厢内观察者以车厢为参考系,看到小球以加速度 $a'=-a_0$ 向左运动,而小球受合力依然为零,因此 $F'=0$,而 $a'=-a_0 \neq 0$,这说明以车厢为参考系,牛顿定律是不成立的.

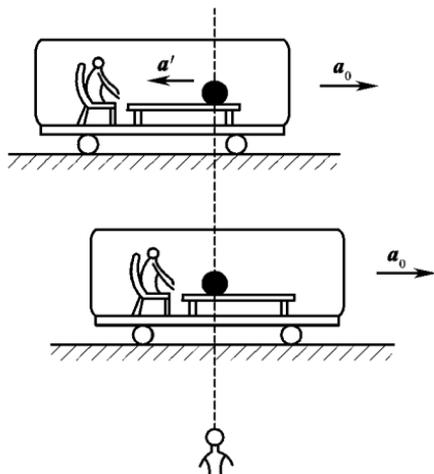


图 2-5 惯性系和非惯性系

凡是牛顿运动定律成立的参考系,称为惯性参考系,简称惯性系;牛顿运动定律不成立的参考系称为非惯性系.一个参考系是否为惯性系,只有通过实验和观察的结果来确定.上例中地面是个惯性系.若车厢相对地面作匀速直线运动,则无论以地面为参考系或是以车厢为参考系来观察小球的运动都符合牛顿定律,此时地面和车厢都是惯性系,这说明相对惯性系做匀速直线运动的参考系都是惯性系,而相对惯性系做变速运动的参考系,是非惯性系.

值得注意的是,虽然地面参考系在研究地面物体运动时得到很好的应用,但是天文学的观察和理论都证明,地面并不是一个严格的惯性系.若以太阳中心作为参考系,应用牛顿定律,将比地面参考系更精确,这是因为地球有自转加速度和绕太阳公转加速度的缘故,因此相对于太阳参考系来说不是一个严格的惯性系.同理,太阳又绕银河系中心转动,因此银河系中心又是比太阳更严格的惯性系.

尽管在非惯性系中牛顿运动定律不成立,但在实际问题中,我们常常遇到非惯性系,并希望能直接在非惯性系中应用牛顿运动定律来分析和解决动力学问题.为此,必须引入惯性力的概念.

如图 2-6 所示,一车厢以加速度 a_0 相对地面(惯性系)运动,车厢内平台上有一质量为 m 的物体,受合外力 F 相对车厢(非惯性系)以加速度 a' 运动,则地面上观察 m 的加速度为

$$a = a_0 + a'$$

在地面参考系中,牛顿定律成立:

$$F = ma = m(a_0 + a') \quad (2-5)$$

由式(2-5)变形可得:

$$F - ma_0 = ma' \quad (2-6)$$

与式(2-2)比较,可以将 $F' = F - ma_0$ 视为物

体在车厢非惯性系中所受的“合力”. 即在非惯性系中,物体除了受那些实际作用力 F 之外,还有惯性力 $F_i = -ma_0$. 惯性力的大小为 ma_0 , 方向与 a_0 方向相反. 特别注意的是,惯性力是非惯性系中观察者所假想的力,不是真实的力,因为找不到施力物体,也无反作用力. 这样在非惯性系中可以直接得到牛顿第二定律的形式:

$$F + F_i = ma' \quad (2-7)$$

可见当要在非惯性系中直接应用牛顿定律形式来处理动力学问题,除了考虑物体受到真实力外,还必须考虑惯性力.

在图(2-5)中,车厢内的观察者看到小球向左加速运动,可认为是由于小球受到惯性力($-ma_0$)的作用. 这就是在车厢参考系中运用牛顿定律所得的结论. 下面讨论几个惯性力实例.

超重与失重 如图 2-7 所示,质量为 m 的人站在升降机内的台秤上,当升降机相对地静止时,台秤的示数为 mg , 台秤对人的支撑力 N (台秤示数)与人的重量 mg 平衡. 当升降机相对地以加速度 a 上升时,在升降机这个非惯性系中的人相对升降机静止,此时人除受到重力和支撑力外,还应考虑一惯性力(方向与 a 反向) $F_i = -ma$, 三力平衡,则有

$$N - mg + (-ma) = 0$$

秤给人的支撑力

$$N = mg + ma > mg$$

即人对台秤的有效重力(台秤示值)大于人的重量,这叫超重;当升降机以 a 向下加速度运动时,同上可得:

$$N = mg - ma < mg$$

台秤的示值小于人的重量,这叫做失重. 若 $a = g$, 人的重量减为零,人处于完全

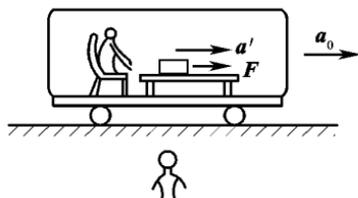


图 2-6 惯性力

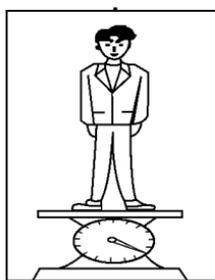


图 2-7 超重和失重

失重状态. 当宇航员在太空站工作和返地过程中处于失重状态. 超重与失重对人体机能有一定影响, 因此模拟超重与失重是训练宇航员的科目之一.

惯性离心力 如图 2-8 所示, 一质量为 m 的小球通过一轻质弹簧与光滑圆盘中心相连, 小球相对圆盘静止, 且随圆盘绕中心轴以角速度 ω 转动. 从地面参考系(惯性系)来看, 小球受到弹簧的拉力就是提供其做匀速圆周运动的向心力, 其大小为 $m\omega^2 R$. 若以圆盘为参考系来看, 小球明显受到弹簧拉力, 但又静止无加速度, 故与牛顿定律相矛盾, 因此转动的圆盘是非惯性系. 在转盘参考系中要使小球平衡(满足牛顿定律), 必须设想一个附加力 f_i , 其大小为 $m\omega^2 R$, 方向与向心加速度方向相反, 如图 2-8 所示, f_i 即称为惯性离心力.

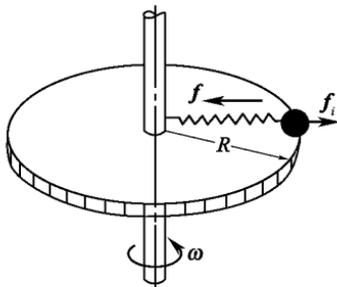


图 2-8 惯性离心力

2.3 SI 中的单位和量纲

物理学中有许多物理量, 用来表征物质的状态属性和描述物质运动规律中的不同特征. 如力学中的长度、时间、质量、速度、加速度、功等, 这些量之间由一定的物理规律相互联系着. 为了计算的严谨和交流方便, 人们从众多的物理量中选取一组彼此独立的物理量, 称作为基本物理量, 将它们的单位称作基本单位, 再由有关定义或定律便可以导出其他的物理量, 这些物理量称为导出量, 导出量的单位都是基本单位的组合, 称为导出单位. 由基本单位和由它们组成的导出单位构成一套完整的单位制. 由于基本量和它们的单位选取不同, 就组成不同的单位制. 1960 年第 11 届国际计量大会通过并确定了世界通用的一套单位制, 称为国际单位制, 简称 SI.

国际单位制中的力学的基本量是长度、质量和时间, 对应的三个基本单位是米(m)、千克(kg)和秒(s), 由它们可导出速度和加速度等物理量的单位, 分别为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 和 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, 等等.

由上述可见, 导出量可用基本量的组合来表示, 我们可以用一套符号语言来定性地且直观地表示一个物理量是由哪些基本量导出的, 如用符号 L, M, T 分别表示长度、质量和时间这三个基本量, 则速度可表示为 LT^{-1} , 加速度可表示

为 LT^{-2} , 等等. 像这样表示一个物理量怎样由基本量组成的式子称为该物理量的量纲. 下面列出速度 (v)、加速度 (a)、动量 (p)、力 (F) 的量纲:

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = LT^{-1}$$

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = LT^{-2}$$

$$[p] = [m][v] = LMT^{-1}$$

$$[F] = [m][a] = LMT^{-2}$$

利用量纲可以确定同一物理量在不同单位制之间的单位换算、检验物理公式和运算结果的正确性.

思考题

2-1 试回答下列问题.

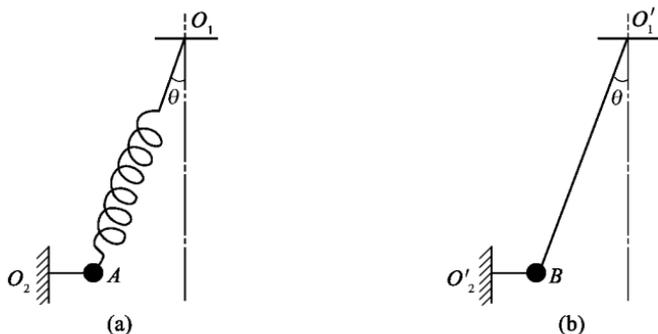
- (1) 物体受到几个力的作用时, 是否一定产生加速度?
- (2) 若物体的速度很大, 是否意味着其他物体对它作用的合外力也一定很大?
- (3) 物体运动的方向和合外力的方向总是相同的, 此结论是否正确?
- (4) 物体运动时, 如果它的速率不改变, 它所受的合外力是否为零?

2-2 有人说:“人推动了车是因为推车的力大于车反推人的力.”这话对吗? 为什么?

2-3 有人认为牛顿第一定律是牛顿第二定律的特例, 即合力为零的情形, 那么为何还要单独的牛顿第一定律呢?

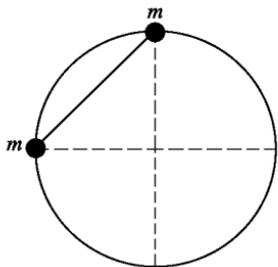
2-4 有人说:“质量是物体惯性的量度”, 也有人说:“质量是物质多少的量度”, 这样理解是否妥当?

2-5 图(a)中小球用轻弹簧 O_1A 与轻绳 O_2A 系住, 图(b)中小球用轻绳 $O_1'B$ 与 $O_2'B$ 系住, 今剪断 O_2A 绳和 $O_2'B$ 绳. 试求在刚剪断的瞬时, A 球与 B 球的加速度量值和方向.

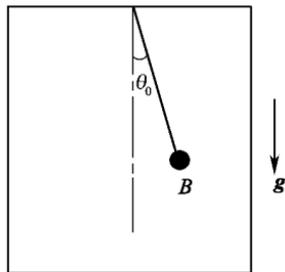


思考题 2-5 图

2-6 两质量均为 m 的小球穿在一光滑圆环上,并由一轻绳相连,环竖直放置,在如图所示位置由静止释放.试问释放瞬时绳上张力为多少?



思考题 2-6 图



思考题 2-7 图

2-7 在升降机的天花板上固定一单摆,当升降机静止时,让摆球 B 从 θ_0 角处摆下.

(1) 当摆球摆到最高点时,升降机以重力加速度 g 下落,问摆球相对于升降机如何运动?

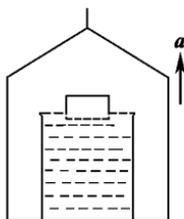
(2) 当摆球摆到最低点时,升降机以 g 下落,问摆球相对升降机如何运动?

(3) 若升降机以 $-g$ 加速度上升,则摆球相对升降机又如何运动?

2-8 惯性力是怎样产生的?它有没有反作用力?为什么要引入惯性力?惯性力的方向和数值取决于什么因素?

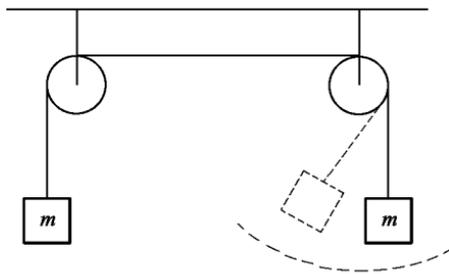
2-9 汽车急转弯时人往往要向外倾倒,有人说这是离心力作用的缘故,这种说法对吗?

2-10 将木块置于盛水银的杯中,水银面与杯口齐平,当杯子由静止开始以加速度 a 上升时,水银是否会溢出,溢出多少?



思考题 2-10 图

2-11 绳子通过两个定滑轮,在绳的两端分别挂着两个完全相同的物体,开始时,它们处在同一高度如图所示.然后给右边的物体一速度,使它在平衡位置来回摆动,试问左边的物体能否保持静止?如果不能保持静止,它将如何运动?

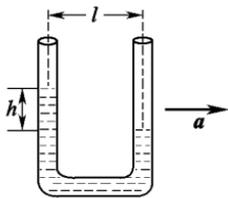


思考题 2-11 图

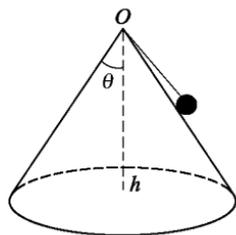
习题 2

2-1 一名宇航员将去月球,他带有一个弹簧秤和一个质量为 1.0 kg 的物体 A ,到达月球上某处时,他拾起一块石头 B ,挂在弹簧秤上,其读数与地面上挂 A 时相同.然后,他把 A 和 B 分别挂在跨过轻滑轮轻绳的两端,若月球表面的重力加速度为 $1.67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,问石块 B 将如何运动?

2-2 竖直而立的细 U 形管里面装有密度均匀的某种液体. U 形管的横截面粗细均匀,两根竖直细管相距为 l ,底下的连通管水平.当 U 形管在如图所示的水平方向上以加速度 a 运动时,两竖直管内的液面将产生高度差 h .若假定竖直管内各自的液面仍然可以认为是水平的,试求两液面的高度差 h .



题 2-2 图



题 2-

4 图

2-3 桌上有一质量 M 的板,板上放一质量为 m 的另一物体,设物体与板、板与桌面之间的摩擦系数均为 μ .要将板从物体下面抽出,至少需要多大的水平力?

2-4 顶角为 2θ 的直圆锥体,底面固定在水平面上,如图所示,质量为 m 的小球系在绳的一端,绳的另一端系在圆锥的顶点,绳长为 l ,且不能伸长,质量不计,圆锥面是光滑的,今使小球在圆锥面上以角速度 ω 绕 Oh 轴匀速转动,求(1)锥面对小球的支持力 N 和细绳的张力 T ; (2)当 ω 增大到某一值 ω_0 时小球将离开锥面,这时 ω_0 及 T 各是多少?

2-5 一桶水以角速度 ω 绕铅直轴做匀速转动,试证明当水与水桶处于相对静止时,桶内水的自由面形状是一个旋转抛物面.

2-6 质量为 m 的质点在合力 $F = F_0 - kt$ (F_0, k 均为常量)的作用下做直线运动,求:

(1) 质点的加速度;

(2) 质点的速度和位置(设质点开始时静止于坐标原点处).

2-7 一滑水运动员在湖面上做滑水表演,设运动员与滑板的质量为 m ,在 $t=0$ 时受到一个随时间变化的力 $F = At$ 的作用,其中 A 是常量.假定 F 与水平面之间的夹角始终保持为 θ ,求:

(1) 滑板离开水面时的速度;

(2) 滑板在这段时间内通过的路程.

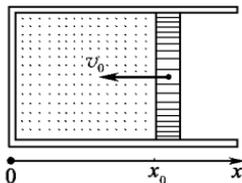
2-8 质量为 m 的质点沿 x 轴正方向运动, 设质点通过坐标 x 位置时速率为 kx (k 为比例系数), 求:

(1) 此时作用于质点的力;

(2) 质点由 $x=x_0$ 处出发, 运动到 $x=x_1$ 处所需要的时间.

2-9 气缸活塞质量为 m (如图所示), 受力 $f(x)$ 沿 x 轴正向, 且 $f(x) = \frac{k}{x}$, k 为常数. 若活塞在 x_0 处以速度 v_0 压缩气体, 问活塞停止在什么地方?

2-10 质量为 m 的质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s = v_0 t + \frac{1}{2} b t^2$ 运动, 其中 s 是路程, t 是时间, v_0, b 均为常量. 求 t 时刻作用于质点的切向力和法向力.



题 2-9 图

2-11 星体自转的最大转速发生在其赤道上的物质所受向心力正好全部由引力提供之时. 求:

(1) 星体可能的最小自转周期, 设星体的密度为 ρ .

(2) 行星密度一般约为 $3.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 求其可能最小自转周期.

(3) 有的中子星自转周期为 $1.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 若它的半径为 10 km , 则该中子星的质量至少多大 (以太阳质量为单位)?

2-12 质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射入沙土中, 设子弹所受阻力与速度反向, 大小与速度成正比, 比例系数为 K , 忽略子弹的重力, 求:

(1) 子弹射入沙土后, 速度随时间变化的函数式;

(2) 子弹进入沙土的最大深度.

2-13 已知一质量为 m 的质点在 x 轴上运动, 质点只受到指向原点的引力的作用, 引力大小与质点离原点的距离 x 的平方成反比, 即 $f = -k/x^2$, k 是比例常数. 设质点在 $x=A$ 时的速度为零, 求 $x=A/4$ 处的速度的大小.

2-14 飞机降落时着地速度 $v_0 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, 方向与地面平行, 飞机与地面间的摩擦系数 $\mu = 0.10$, 迎面空气阻力为 $C_x v^2$, 升力为 $C_y v^2$ (v 是飞机在跑道上的滑行速度, C_x 和 C_y 均为常数). 已知飞机的升阻比 $K = C_y/C_x = 5$, 求飞机从着地到停止这段时间所滑行的距离. (设飞机刚着地时对地面无压力)

2-15 质量为 m 的雨滴下降时, 因受空气阻力, 在落地前已是匀速运动, 其速率为 $5.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 设空气阻力大小与雨滴速率的平方成正比, 问: 当雨滴速率为 $4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 其加速度 a 多大?

2-16 质量为 m 的小球, 在水中受的浮力为常力 F , 当它从静止开始沉降时, 受到水的粘滞阻力为 $f = kv$ (k 为常数). 证明小球在水中竖直沉降的速度 v 与时间 t 的关系为

$$v = \frac{mg - F}{k} (1 - e^{-kt/m}),$$

式中 t 为从沉降开始计算的时间.

第 3 章 动量 动量定理

动量是描述物质动力学性质的基本物理量,动量的概念在牛顿定律建立之前已提出. 牛顿运动定律描述力与物体运动状态的瞬时关系. 若力作用于物体一段时间,物体的动量将发生改变. 本章将从牛顿定律出发,讨论力的时间积累效应,介绍动量、动量定理、质点系的动量定理和动量守恒定律.

3.1 动量 冲量 动量定理

在牛顿运动定律诞生以前,力学已经有一定的发展,特别是对碰撞问题已有比较系统的研究,人们认识到力对物体作用时产生的“时效”与物体的速度成正比,且物体质量越大,物体运动的量就越大. 为了度量物体做机械运动的“运动量”,人们引入了动量的概念,即把物体的质量与速度的乘积称为动量,用 p 来表示.

$$p = mv$$

动量是矢量,它的方向和速度方向相同. 其单位在 SI 中是 $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. 事实上,牛顿在他首次提出牛顿第二定律时是用动量形式表述的:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3-1)$$

上式表明,作用在质点上的合外力等于质点动量随时间的变化率. 式(3-1)即为牛顿第二定律的另一种形式. 当质量不变时,有

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

这就回到了我们常见的形式式(2-2). 可见式(2-2)仅仅适用于质量恒定质点的运动;而式(3-1)还适用于变质量的运动问题,见 3.3 节变质量问题.

式(3-1)反映了质点动量的瞬时变化率与外力的关系. 若外力 F 对物体作用持续一段时间, 可由式(3-1)进一步确定在任意一段时间内物体的动量改变与外力作用的关系. 将式(3-1)改写成

$$Fdt = dp$$

两边积分得

$$\int_{t_0}^t Fdt = \int_{p_0}^p dp = p - p_0 = mv - mv_0 \quad (3-2)$$

p 与 p_0 分别为物体在末时刻 t 与初时刻 t_0 的动量, 将力对时间的积分用一矢量 I 表示, 即

$$I = \int_{t_0}^t Fdt$$

并称为力在该段时间内的冲量. 在 SI 中冲量的单位为 $N \cdot s$. 则有

$$I = p - p_0 \quad (3-3)$$

上式说明, 物体所受外力的冲量, 等于这物体动量的增量. 这就是质点的动量定理. 式(3-2)左边是力对时间的积分, 即所谓力在时间上的积累(是过程量); 右边为在力作用时间段始末时刻物体的动量(是状态量)的改变量. 因此人们常常这样表述动量定理: 力的时间积累效应是使物体动量发生变化.

动量定理尽管由牛顿运动第二定律导出, 但在某些实际应用中, 比直接应用牛顿定律更加方便和有效. 特别是在碰撞和打击问题中, 物体之间的作用时间极短, 但力很大而且是变化的, 这种力通常称为冲力, 冲力随时间的变化非常复杂, 如图3-1所示, 冲力的瞬时值难以测量, 但由于动量的变化有确定值, 物体间作用时间间隔可以测定, 因而用动量定理可以求出一个物体所受冲量或平均冲力:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t Fdt \\ \bar{F}(t - t_0) &= \int_{t_0}^t Fdt = mv - mv_0 \\ \bar{F} &= \frac{\Delta p}{\Delta t} \end{aligned}$$

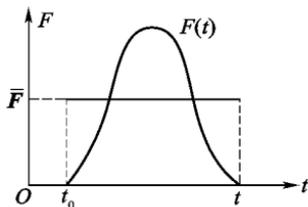


图 3-1 平均冲力

\bar{F} 表示平均冲力, 了解平均冲力在工程设计与计算以及生产安全等问题中都很重要.

值得注意的是式(3-3)是矢量式, 在具体应用时, 往往要把矢量投影到坐标轴方向, 用分量方程计算, 如在直角坐标系中动量定理可写为

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_{t_0}^t F_x dt = mv_x - mv_{0x} \\
 I_y &= \int_{t_0}^t F_y dt = mv_y - mv_{0y} \\
 I_z &= \int_{t_0}^t F_z dt = mv_z - mv_{0z}
 \end{aligned} \tag{3-4}$$

3.2 质点系的动量定理 动量守恒定律

在力学中,经常需要把多个质点当作一个整体来研究,这样由多个质点组成的系统称为质点系.一般情况下,质点系内各质点之间有相互作用力,称为内力,质点系外的其他物体对系统内质点的作用力,称为系统的外力.下面先以两个质点组成的系统为例讨论作用力与系统的动量变化情况,然后将结论推广到一般.

质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点,相互作用内力为 f_{12} 与 f_{21} ,各自同时又受到外力 F_1 与 F_2 的作用,如图 3-2 所示,设在 t_0 时刻两质点的速度分别为 v_{10} 和 v_{20} , t 时刻的速度分别为 v_1 和 v_2 .

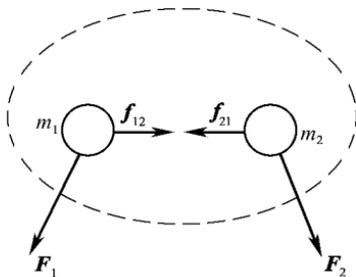


图 3-2 质点系受力图

将动量定理式(3-2)分别应用于这两个质点,得

$$\int_{t_0}^t (F_1 + f_{12}) dt = m_1 v_1 - m_1 v_{10} \tag{3-5}$$

$$\int_{t_0}^t (F_2 + f_{21}) dt = m_2 v_2 - m_2 v_{20} \tag{3-6}$$

考虑到 f_{12} 与 f_{21} 是一对内力,即 $f_{12} = -f_{21}$,将上两式相加得

$$\int_{t_0}^t (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) dt = (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) - (m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20})$$

上式表明,两物体的总动量的改变只决定于合外力的冲量而与内力无关.尽管内力使系统内单个质点的动量变化,但对系统的总动量却没有影响.

上述结果可推广到任意多个质点所组成的系统.设系统由 n 个质点组成,其中第 i 个质点受到的合外力为 \mathbf{F}_i ,受到的合内力为 \mathbf{f}_i ,对质点 i 应用动量定理有

$$\int_{t_0}^t (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) dt = m_i \mathbf{v}_i - m_i \mathbf{v}_{i0} \quad (3-7)$$

对系统中 n 个类似式子求和,得:

$$\int_{t_0}^t (\sum \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{f}_i) dt = \sum (m_i \mathbf{v}_i) - \sum (m_i \mathbf{v}_{i0}) \quad (3-8)$$

由于系统中任意两个质点之间的内力之和为零,因此 $\sum \mathbf{f}_i = 0$,所以对系统有

$$\int_{t_0}^t (\sum \mathbf{F}_i) dt = (\sum m_i \mathbf{v}_i) - (\sum m_i \mathbf{v}_{i0}) \quad (3-9)$$

上式表明,在任意一段时间间隔内,质点系的总动量的改变(或增量)等于在这段时间内作用在系统上合外力的冲量.这就是质点系的动量定理.

在式(3-9)中,若质点系统所受合外力 $\sum \mathbf{F}_i = 0$,则有

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \sum m_i \mathbf{v}_{i0}$$

或

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{恒量} \quad (3-10)$$

这表明,当作用于质点系的合外力为零时,质点系的总动量保持不变.这一结论称为动量守恒定律.

应用动量守恒定律处理问题时,应注意以下几点:

(1) 动量守恒的条件为合外力为零, $\sum \mathbf{F}_i = 0$,而不是合外力的冲量为零,即 $\int_{t_0}^t \sum (\mathbf{F}_i) dt = 0$,这两者是有区别的.合外力的冲量为零,只能说明过程中的始、末两时刻系统的动量相等,并不能保证该过程中每一时刻系统动量都保持不变.例如某小球作一个完整的圆锥摆运动,此过程作用于小球的合外力冲量为零,因此始、末时刻质点的动量相等,但是过程中的每个时刻质点速度方向都在变化,质点动量是不守恒的.

(2) 内力作用不改变系统的总动量,但是却改变系统中各质点的动量,也就是说系统中各质点间动量的转移和交换是通过内力作用完成的.

(3) 通常系统受合外力严格为零的情况很少.在处理实际问题时,若系统内

力远比外力大时,则可近似地用动量守恒定律来处理.例如碰撞、爆炸等过程都属于这种情况.

(4) 动量守恒定律表达式(3-10)是矢量式,实际运算时常用坐标分量式,如在直角坐标系中有:

$$\begin{aligned} \text{当} \quad & \sum F_{ix} = 0, & \sum m_i v_{ix} &= \text{常量} \\ \text{当} \quad & \sum F_{iy} = 0, & \sum m_i v_{iy} &= \text{常量} \\ \text{当} \quad & \sum F_{iz} = 0, & \sum m_i v_{iz} &= \text{常量} \end{aligned} \quad (3-11)$$

从上式可见,即使系统受合外力不为零,如果在某方向上合外力的分量为零,则在该方向上的总动量的分量是守恒的.

(5) 动量守恒定律不适用于非惯性系,因此质点系中各质点的动量应当是相对于同一惯性系而言的.

(6) 尽管动量守恒定律可由牛顿运动定律导出,但它是比牛顿运动定律更普遍适用的规律,不仅适用于宏观低速运动的物体,还适用于微观高速运动的物体.

例 3-1 炮车以 $\theta=30^\circ$ 的仰角发射一颗炮弹,已知炮车质量 $M=5000 \text{ kg}$,炮弹质量 $m=100 \text{ kg}$,炮弹对炮车的出口速度为 $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, (1)求炮车的反冲速度 V (不计炮车与地面的摩擦); (2)设炮车在倒退后与缓冲垫相互作用时间为 2 s ,求垫子受的平均冲力.

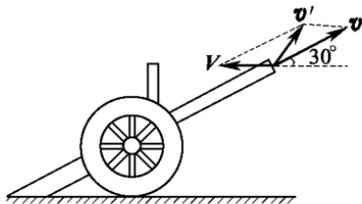


图 3-3 例 3-1 示意图

解 由炮车和炮弹组成的系统,在发射炮弹时,受到的外力有重力和地面对炮车的支承力.

(1) 当炮弹向右上方发射时,炮车有向左下方运动的趋势,但沿竖直方向的运动为地面所阻挡,这时地面对炮车的支承力突然变大而成为冲力,并大于重力,系统沿竖直方向的动量不守恒;在水平方向,系统不受外力作用,故系统水平方向的动量守恒.以地面为参考系来分析炮弹和炮车的速度,发射前,两者速度均为零,炮弹脱离炮口时,已知炮弹相对于炮口的速度为 v ,设炮弹相对于地面的速度为 v' ,炮车的反冲速度为 V ,则它们的矢量关系如图所示,根据相对运动速度合成定理有

$$v' = v + V$$

其水平分量为

$$v'_{\text{水平}} = v \cos \theta - V$$

系统水平方向动量守恒, 即

$$-MV + m(v \cos \theta - V) = 0$$

$$V = \frac{m}{M+m} v \cos \theta = \frac{100}{5000+100} \times 300 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5.09 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 炮车倒退时缓冲垫给与的平均冲力为

$$\bar{F} = \frac{0 - (-MV)}{\Delta t} = \frac{5000 \times 5.09}{2} = 12725 \text{ N}$$

例 3-2 一重锤从高度 $h=1.5 \text{ m}$ 处自静止下落, 锤与被加工的工件碰撞后末速为 0。若打击时间 Δt 分别为 10^{-1} s , 10^{-2} s , 10^{-3} s 和 10^{-4} s , 试计算这几种情形下平均冲击力与重力的比值。

解 选取如图 3-4 所示的 z 坐标。重锤 m 与工件撞击前的速度 $v_0 = -\sqrt{2gh}$, 撞击后的速度 $v_z = 0$ 。在撞击时间 Δt 内, 重锤给工件的冲击力 N 和重力 mg 在起作用。根据质点动量定理, 有

$$\int_0^{\Delta t} (N - mg) dt = mv_z - mv_0 = m \sqrt{2gh}$$

$$\bar{N} \Delta t - mg \Delta t = m \sqrt{2gh}$$

$$\frac{\bar{N}}{mg} = 1 + \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1 + \frac{0.55}{\Delta t}$$

以 Δt 各值代入, 计算结果列表如下:

$\Delta t(\text{s})$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
\bar{N}/mg	6.5	56	5.5×10^2	5.5×10^3

计算结果表明, 撞击作用持续时间愈短, 平均冲击力 \bar{N} 与重力之比就愈大。若持续的时间只有 10^{-4} 秒时, \bar{N} 比 mg 要大 5500 倍, 相比之下重力(系统的外力)微不足道。因此在实际碰撞、打击和爆炸等实际问题中忽略这类有限大小的外力是合理的。

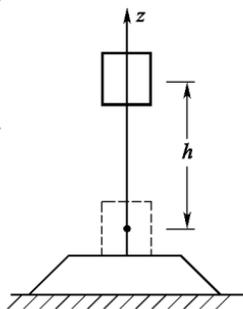


图 3-4 例 3-2 图

3.3 变质量问题(火箭)

系统的动量守恒是质量与速度之积的守恒。若系统的内部质量发生流动或变化时, 则会引起系统内部各部分质量的速度和动量也相应发生变化, 这就是所谓的变质量问题。此类问题在自然界和人们生产实际中很常见, 如雨滴下落过程中与空气中水蒸汽不断凝聚, 码头上煤砂装卸, 火箭在飞行过程中燃料不断减少等。归纳有这样两类变质量物体的运动问题: 一类是某物体在运动中不断地俘获

另外一些物体共同运动,质量越来越大;另一类是物体在运动中不断地释放某些物体,质量越来越小.下面讨论第一类物体的运动且不失一般性.

设物体质量为 m , 速度为 v , 在某段很短时间内俘获另一速度为 u 的微小质量 dm , v 与 u 都是相对同一参考系(如地面)的速度. m 俘获 dm 后质量变为 $m + dm$, 速度为 $v + dv$, 假设此过程中, 系统受外力 F 的作用, 由动量定理有

$$(m + dm)(v + dv) - mv - dm u = F dt$$

展开上式, 略去 $dmdv$ 二阶小量可得

$$\frac{d(mv)}{dt} - u \frac{dm}{dt} = F \quad (3-12)$$

这就是变质量问题的一般公式.

如果不计外力 F 的影响, 系统的动量守恒, 上式变为

$$mdv + (v - u)dm = 0 \quad (3-13)$$

上式中的 u 是 dm 相对于地面的速度, 即绝对速度, v 为牵连速度. 再用 v_r 表示 dm 相对于 m 的速度, 由相对运动公式有

$$u = v + v_r$$

即

$$v_r = u - v$$

则式(3-13)变为

$$mdv = v_r dm \quad (3-14)$$

上面讨论虽然是就俘获质量的情况写出的, 但对于向外释放质量的火箭运动同样适用, 只是俘获质量时 dm 为正, 释放质量时 dm 为负.

现将上面结论应用于火箭飞行过程. 为简单起见, 不计重力和空气阻力的影响. 火箭内部的氧化剂和燃料在极短时间内发生爆炸性燃烧, 产生大量高温高压气体, 从尾部喷出. 喷出气体具有很大的动量, 按动量守恒定律, 火箭就获得数值相等方向相反的动量而向前运动. 随着气体的不断喷出, 火箭的质量越来越小, 它的速度越来越大, 燃料燃尽时就可获得设计的速度, 图 3-5 是三级火箭示意图.

建立图 3-6 所示的坐标系, 由式(3-14)得

$$mdv = -v_r dm$$

v_r 是气体相对火箭的排气速度, 对于使用一定燃料的特定火箭, v_r 为一恒量. 设火箭刚起飞时其质量为 m_0 , 速度为零, 燃料燃烧完毕时火箭的质量为 m , 火箭最终得到的速度即末速为 v , 对上式积分

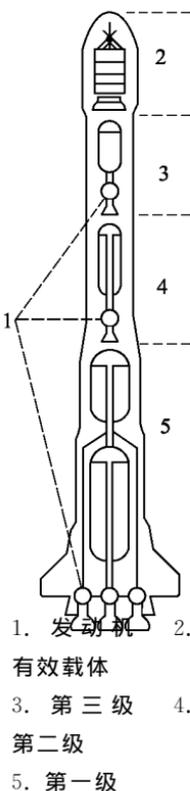


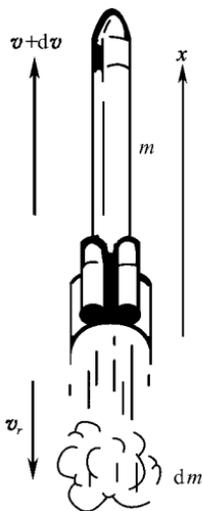
图 3-5 火箭构造

$$\int_0^v dv = -v_r \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} \quad (3-15)$$

得

$$v = v_r \ln \frac{m_0}{m} \quad (3-16)$$

式(3-16)称为齐奥科夫斯基公式,式中 m_0/m 的称为质量比. 上式表明:火箭在不考虑外力条件下得到的末速度决定于两个因素:一是质量比 $z = m_0/m$, 二是排气速度 v_r . 计算表明,提高 z 值对提高火箭速度影响并不显著,而技术上有很大困难. 另一方面,目前所用的液氢和液氧为燃料和氧化剂, v_r 可达到 $4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. 较理想的单级火箭 z 可做到 15, 依此计算,火箭速度的理论值可达到 $11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, 但是由于地球引力、空气阻力的影响,实际上还达不到第一宇宙速度 ($7.9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$). 所以单级火箭不能把人造卫星或其他航天飞行器送入轨道.



3-6 火箭飞行原理

为了获得更大的速度,人们制造了多级火箭(一般为三级). 多级火箭是由构造类似、大小不同的火箭串接而成. 飞行过程中,第一级火箭燃料燃尽时,其火箭躯壳自动脱落,火箭获得速度 v_1 ,接着第二级火箭开始燃烧,第二级火箭燃料燃完自动脱落,火箭在 v_1 的基础上又获得速度 v_2 ,第三级接着开始工作,如此顺次进行下去.

设 z_1 表示整个火箭的质量与第一级火箭燃料用完后质量比, z_2 表示第二级火箭开始工作时的火箭质量与第二级火箭燃完后质量之比,如此类推各级火箭的喷气速度分别为 v_{r1}, v_{r2}, v_{r3} ,利用式(3-15),三级火箭工作完后最终获得的速度为

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = v_{r1} \ln z_1 + v_{r2} \ln z_2 + v_{r3} \ln z_3$$

若各级火箭喷气速度相同, $v_r = v_{r1} = v_{r2} = v_{r3}$

则有

$$v = v_r \ln(z_1 z_2 z_3) \quad (3-17)$$

由式(3-17)代入实际参数计算:取 $z_1 = z_2 = z_3 = 8$, $v_r = 4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 可得: $v = 25 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,火箭可达到所需要的高速度.

例 3-3 一根均质链条,长 l ,质量 m ,竖直提起,一端刚刚触地. 由静止状态释放,求其对地面的作用力.

解 建立如图 3-7 所示的坐标系,坐标原点到地面的距离为 l . 本题可用三种方法求解.

(1) 整体分析: 取链条整体为系统, 无论何时链条整体受到两外力(重力 F 和地面的支承力 N) 的作用, $F=mg$, $N(t)=N(y)$.

在任意时刻 t , 将链条分为两部分: 空中部分的动量为 $\rho(l-y)v$, $\rho=m/l$ 为链条的质量线密度; 地面部分的动量为 0. 由

动量定理的微分形式 $F_{\text{合}} = \frac{dp}{dt}$ 有

$$(mg + N) = \frac{d}{dt} [\rho(l-y)v]$$

对坐标投影 $mg - N = \frac{d}{dt} [\rho(l-y)v]$

所以 $N = \rho gl - y \frac{d}{dt} [\rho(l-y)v] - \rho(l-y)v$

由 $y^2 = v^2 = 2gy$; $\dot{y} = g$

得

$$N = \rho v^2 + \rho yg = 2\rho yg + \rho yg = 3 \frac{mg}{l} y$$

即, 下落过程中链条对地面的作用力是已经落下部分所受重力的 3 倍.

(2) 取微元 dm 分析: 在 t 时刻有 y 段已落地, 设在 dt 时间内又有 dy 段(质量为 dm) 以速度 $v = \sqrt{2gy}$ 与地碰撞, dm 受地面冲力 N_1 (方向向上) 的作用, 速度变为零, dm 的动量改变为 $dp = 0 - vdm$, 由动量定理有

$$-N_1 dt = dp = -vdm$$

所以

$$N_1 = \frac{vdm}{dt} = \frac{v(m/l)dy}{dt} = \frac{m}{l} \cdot v^2 = 2g \frac{m}{l} y$$

那么 dm 对地面冲力的大小也等于 N_1 , 再考虑已落在地面的 y 段的重力 $N_2 = (m/l)gy$, 则链对地面的作用力大小

$$N = N_1 + N_2 = 2 \frac{mg}{l} y + \frac{mg}{l} y = 3 \frac{mg}{l} y$$

(3) 用变质量问题方程求解: 将已落在地面的 y 段作为主体, 不断有 dm 落入主体, 相当于主体俘获 dm . 主体速度 v 为零, dm 的速度 $u = \sqrt{2gy}$, 设地对主体作用力为 N , 由变质量问题方程式(3-12)得

$$-u \frac{dm}{dt} = -N + \frac{m}{l} yg$$

由

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{l} y \right) = \frac{m}{l} u$$

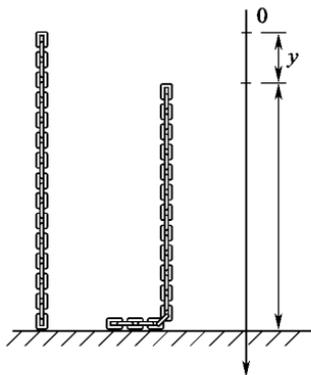


图 3-7 例 3-3 图

同样可求得

$$N = 3 \frac{m}{L} gy$$

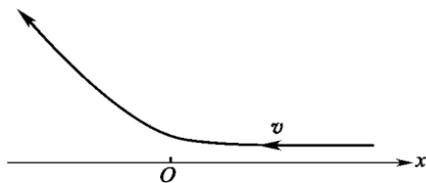
思考题

3-1 一人躺在地上,身上压一块重石板,另一人用重锤猛击石板,但见石板碎裂,而下面的人毫无损伤.何故?

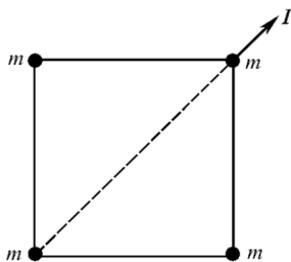
3-2 两个质量相同的物体从同一高度自由下落,与水平地面相碰,一个反弹回去,另一个却贴在地上,问哪一个物体给地面的冲量大?

3-3 在系统的动量变化中内力起什么作用?有人说:因为内力不改变系统的总动量,所以不论系统内各质点有无内力作用,只要外力相同,则各质点的运动情况就相同.这话对吗?

3-4 α 粒子初时沿 x 轴负向以速度 v 运动,后被位于坐标原点的金核所散射,使其沿与 x 轴成 120° 的方向运动(速度大小不变).试用矢量在图上表出 α 粒子所受到的冲量 I 的大小和方向.



思考题 3-4 图



思考题 3-5 图

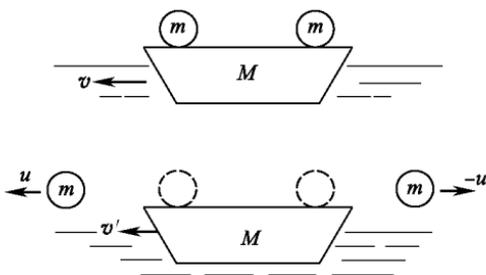
3-5 质量都为 m 的四个质点置于正方形的各顶角,用细线将各质点连接起来形成正方形的各边(如图所示).如果有一质点沿对角线向外的方向在极短时间内受到一冲量 I ,试证明该质点获得的速度为 $I/2m$,其他各质点的速度又如何?

3-6 有人说:“物体在相互作用的过程中,只要选取适当系统,动量守恒定律总是适用的.”这句话对吗?为什么?

3-7 有两只船与堤岸的距离相同,为什么从小船跳上堤岸比较难,而从大船跳上堤岸却比较容易?

3-8 假定月球绕地球做匀速圆周运动,月球的动量是否为恒量?

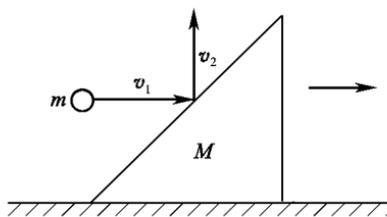
3-9 在匀速直线行驶的船上,分别向前和向后抛出两个质量相等的物体,抛出时两个物体相对于船的速度大小也相同,问船的动量有没有变化?船的速度有没有变化?(水的阻力不计)



思考题 3-9 图

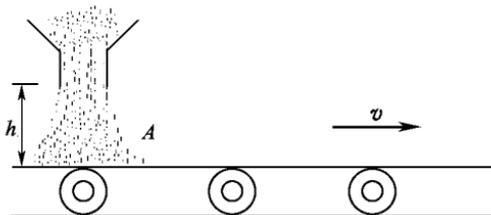
习题 3

3-1 如图所示,质量为 M 的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动.一质量为 m 的小球水平向右飞行,以速度 v_1 (对地)与滑块斜面相碰,碰后竖直向上弹起,速率为 v_2 (对地).若碰撞时间为 Δt ,试计算此过程中滑块对地的平均作用力和滑块速度增量的大小.



题 3-1 图

3-2 有一水平运动的皮带将砂子从一处运到另一处,砂子经一垂直的静止漏斗落到皮带上,皮带以恒定的速率 v 水平运动.忽略机件各部位的摩擦及皮带另一端的其他影响,试问:



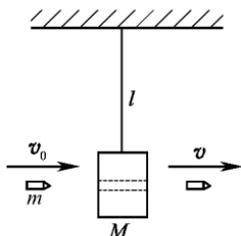
题 3-2 图

(1) 若每秒有质量为 $\Delta M = dM/dt$ 的砂子落到皮带上,要维持皮带以恒定速率 v 运动,需要多大的功率?

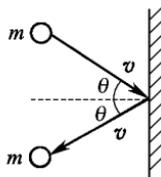
(2) 若 $\Delta M = 20 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $v = 1.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,水平牵引力多大?所需功率多大?

3-3 质量为 $M=1.5\text{ kg}$ 的物体,用一根长为 $l=1.25\text{ m}$ 的细绳悬挂在天花板上.今有一质量为 $m=10\text{ g}$ 的子弹以 $v_0=500\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的水平速度射穿物体,刚穿出物体时子弹的速度大小 $v=30\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,设穿透时间极短,求:

- (1) 子弹刚穿出时绳中张力的的大小;
- (2) 子弹在穿透过程中所受的冲量.



题 3-3 图

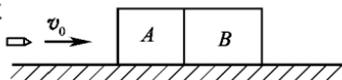


题 3-4 图

3-4 质量为 m ,速率为 v 的小球,以入射角 θ 斜向与墙壁相碰,又以原速率沿反射角 θ 方向从墙壁弹回.设碰撞时间为 t ,求墙壁受到的平均冲力.

3-5 如图所示,有两个长方形的物体 A 和 B 紧靠放在光滑的水平桌面上,已知 $m_A=2\text{ kg}$, $m_B=3\text{ kg}$,有一质量 $m=100\text{ g}$ 的子弹以速率 $v_0=800\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 水平射入长方体 A ,经 0.01 s ,又射入长方体 B ,最后停留在长方体 B 内未射出.设子弹射入 A 时所受的摩擦力为 $3\times 10^3\text{ N}$,求:

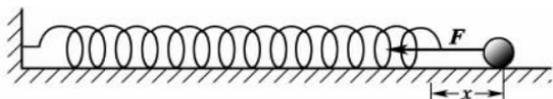
- (1) 子弹在射入 A 的过程中, B 受到 A 的作用力的大小;
- (2) 当子弹留在 B 中时, A 和 B 的速度大小.



题 3-5 图

3-6 在 28 天里,月球沿半径为 $4.0\times 10^8\text{ m}$ 的圆轨道绕地球一周.月球的质量为 $7.35\times 10^{22}\text{ kg}$,地球的半径为 $6.37\times 10^3\text{ km}$.求在地球参考系中观察,在 14 天里,月球动量增量的大小.

3-7 一小球在弹簧作用下做振动,弹力 $F=-kx$,而位移 $x=A\cos\omega t$,其中 k,A,ω 都是常量,求在 $t=\frac{\pi}{(2\omega)}$ 的时间间隔内弹力施于小球的冲量.



题 3-7 图

3-8 一个质量 $m=50\text{ g}$,以速率 $v=20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 作匀速圆周运动的小球,在 $1/4$ 周期内向心力加给它的冲量是多大?

3-9 桌面上堆放一串柔软的长链,今拉住长链的一端竖直向上以恒定速度 v_0 上

提. 试证明: 当提起的长度为 l 时, 所用的向上的力 $F = \rho_l g + \rho_l v_0^2$, 其中 ρ_l 为长链单位长度的质量.

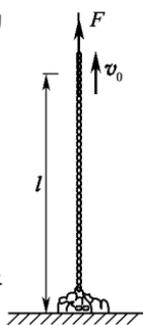
3-10 子弹在枪膛中前进时受到的合力与时间的关系为 $F = 400 - \frac{4 \times 10^5}{3} t$.

式中, F 以 N 计, t 以 s 计. 设子弹的出口速率为 $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 求:

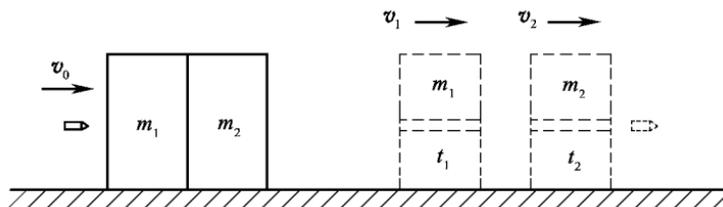
(1) 子弹在枪膛中运动的时间; (2) 子弹受到的冲量; (3) 子弹的质量.

3-11 一子弹水平穿过两个前后并排在光滑水平桌面上的静止木块. 木块的质量分别为 m_1 和 m_2 , 设子弹透过两木块的时间间隔为 t_1 和 t_2 . 设子弹在木块中所受阻力为恒力 f , 求子弹穿过时两木块各以多大的速度运动.

3-12 质量为 M 的大木块是半径为 R 的四分之一弧形槽, 质量为 m

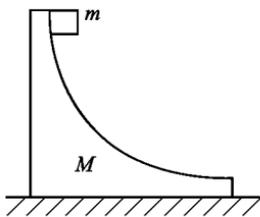


题 3-9 图

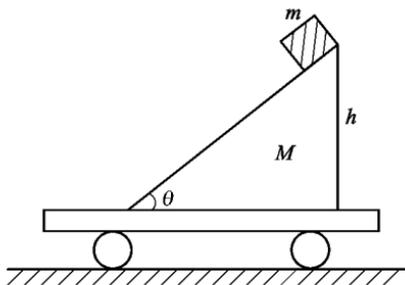


题 3-11 图

的小立方体从曲面的顶端滑下, 大木块放在光滑水平面上, 两者都作无摩擦的运动, 而且都从静止开始, 求小木块脱离大木块时的速度.



题 3-12 图



题 3-13 图

3-13 装有一光滑斜面的小车处于静止状态, 小车质量为 M , 斜面倾角为 θ . 现有一质量为 m 的木块沿斜面滑下, 木块起始高度为 h , 当木块到达斜面底部时, 求:

- (1) 小车移动的距离;
- (2) 小车的速度. (不计小车与地面间的摩擦)

3-14 静水中停着两个质量均为 M 的小船, 当第一只船中的一个质量为 m 的人以水平速度 v (相对于地面) 跳上第二只船后, 两只船运动的速度各多大? (忽略水对船的阻力)

3-15 两球质量分别是 $m_1=20\text{ g}$, $m_2=50\text{ g}$, 在光滑桌面上运动, 速度分别为 $\boldsymbol{v}_1=10i\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$, $\boldsymbol{v}_2=(3.0i+5.0j)\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$. 碰撞后合为一体, 求碰撞后的速度.

3-16 在太空静止的一单级火箭, 点火后, 其质量的减少与初质量之比为多大时, 它喷出的废气将是静止的?

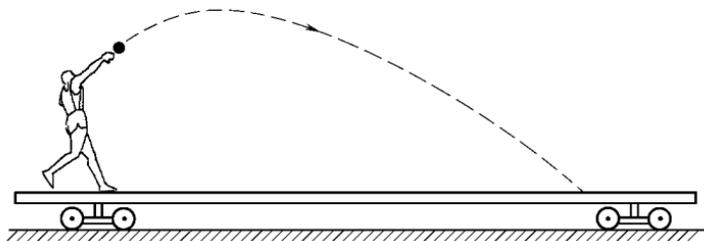
3-17 一架喷气式飞机以 $210\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度飞行, 它的发动机每秒钟吸入 75 kg 空气, 在体内与 3.0 kg 燃料燃烧后以相对于飞机 $490\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度向后喷出. 求发动机对飞机的推力.

3-18 两个相互作用的物体 A 和 B , 无摩擦地在一条水平直线上运动, 物体 A 的动量是时间的函数, 表达式为 $p_A=p_0-bt$, 式中 p_0, b 分别为正常数, t 为时间, 在下列两种情况下, 写出物体 B 的动量作为时间的函数表达式.

(1) 开始时, 若 B 静止时, 求 p_{B1} ;

(2) 开始时, 若 B 的动量为 $-p_0$, 求 p_{B2} .

3-19 一个人站在平板车上掷铅球两次, 出手速度均为 v , 仰角均为 θ , 第一次平板车位置被固定, 第二次平板车可在水平面无摩擦地运动, 已知人和车的总质量为 M , 球的质量为 m , 若不计抛出点与落地点间的高度差, 问两次射程是否相同? 如不相同, 它们之比是多少?



题 3-19 图

第 4 章 功和能及功能原理

力的时间积累使物体的动量发生变化,而力的空间积累使物体的动能发生变化.本章讨论功与物体动能之间的关系,保守力做功,势能,功能原理和机械能守恒定律等.这些重要结论为解决某些力学问题提供了便捷的方法.

4.1 功 动能定理

4.1.1 功与功率

物理学中,一个物体在力的持续作用下发生位移,就称此力对物体做了功.我们定义:力对物体做的功为力在物体位移方向的分量与位移大小之积.

1. 恒力的功

最简单的情况是,在恒力作用下物体做直线运动,如图 4-1 所示,在恒力 F 作用下,物体从 a 沿直线运动到 b ,由上述功的定义

$$A = |\mathbf{F}| \cos\theta |\Delta\mathbf{r}| \quad (4-1)$$

或写成

$$A = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} \quad (4-2)$$

即恒力的功等于力与质点位移的标积.

功是标量,其数值不仅与力和位移的大小有关,而且还与力和位移之间的夹角 θ 有关.当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $A > 0$,

称力对物体做正功;当 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时, $A < 0$,称力对物体做负功;当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,则力对物

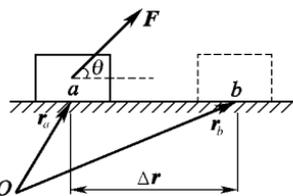


图 4-1 恒力的功

体不做功,即当力与物体位移垂直时,力不做功.在国际单位制中,功的单位是焦耳,简称为焦(J), $1\text{ J}=1\text{ N}\cdot\text{m}$.

2. 变力的功

在一般情况下,力的大小与方向都可能变化,物体的运动轨迹可能是曲线.这时,不能直接用式(4-1)来计算变力做功.但可以利用微积分的思想和上述结果计算变力的功.如图4-2所示,设物体在变力 F 作用下从 a 沿曲线运动到 b .我们把曲线分成很多小弧线段,图中 Δs_i 为其中任意一小段弧,其对应物体的元位移为 Δr_i ,当 Δs_i 足够小时,每一段可近似视为直线,且与其相应的 Δr_i 的大小相等.而且在 Δs_i 上物体受力 F_i 视为恒力,由上述恒力的功的定义,在 Δs_i 段上的功(称为元功) ΔA_i 表示为

$$\Delta A_i = F_i \cdot \Delta r_i$$

变力 F 在全段路径 ab 上做的总功 A 等于各段元功之和,即

$$A = \sum \Delta A_i = \sum F_i \cdot \Delta r_i,$$

当 $\Delta s_i \rightarrow 0$ 时或 $\Delta r_i \rightarrow 0$ 时, Δs_i 段上的元功表示为微分形式

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4-3)$$

整个 ab 段上做的功则为

$$A = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum F_i \cdot \Delta r_i$$

即

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4-4)$$

由于 $ds = |d\mathbf{r}|$, $F \cos\theta = F_\tau$ (切向力), A 又可写成

$$A = \int_a^b F \cos\theta ds = \int_a^b F_\tau ds$$

若在直角坐标系中,功则可写成

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) \\ &= \int_a^b (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \end{aligned} \quad (4-5)$$

3. 功率

功率是描述物体做功快慢的物理量,定义为单位时间内力做的功,用 P 表示.

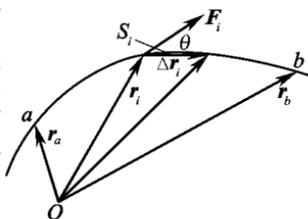


图4-2 变力做功

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

即功率是力与物体速度的标积. 在国际单位制中功率的单位为瓦特(W), $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$.

例 4-1 若将长为 l , 质量为 m 的均质软链, 从地面缓慢地拉起, 求拉力 F 对链所做的功.

解 以地面为坐标原点, 建立如图 4-3 所示坐标系, 随着链的上升, 拉力 F 逐渐增大, 但方向不变, 这是个变力沿直线做功问题. 考虑中间任意时刻链有任意 x 段已被拉起, 此时拉力 $F = (m/l)gx$, 再设在 F 的作用下链上升了极小段距离 dx , 力在 dx 上的元功

$$dA = Fdx = \frac{m}{l}gx dx$$

则

$$A = \int_0^l \frac{m}{l}gx dx = \frac{1}{2} \frac{m}{l}gl^2 = \frac{l}{2}mg$$

此例虽不复杂, 但要注意处理变力做功的思维方法.

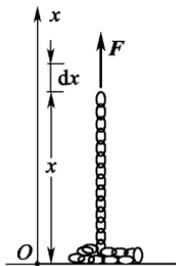


图 4-3 例 4-1 图

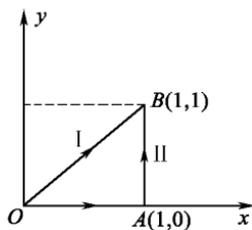


图 4-4 例 4-2 图

例 4-2 设物体受到二维力 $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}$ (SI) 作用. 求物体分别沿路径 I ($O \rightarrow B$) 与路径 II ($O \rightarrow A \rightarrow B$) 运动时, F 对物体所做的功.

解 (1) 如图 4-4 所示, F 沿路径 I 做功, 此路径上有 $x=y$

$$\begin{aligned} A &= \int_I (F_x dx + F_y dy) = \int xy dx + \int (x+y) dy \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2y dy = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \quad (\text{SI}) \end{aligned}$$

(2) F 沿路径 II 做的功

$$\begin{aligned} A &= \int_{II} xy dx + \int_{II} (x+y) dy \\ &= \int_{O \rightarrow A} xy dx + \int_{O \rightarrow A} (x+y) dy + \int_{A \rightarrow B} xy dx + \int_{A \rightarrow B} (x+y) dy \\ &= \int_0^1 (1+y) dy = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (\text{SI}) \end{aligned}$$

结果表明, 物体的始末位置相同, 但沿不同的路径运动时, 力所做的功不相同, 这与力的性质本身有关. 后面将看到, 有些力做功与路径无关, 只与始末位置有关.

4.1.2 动能定理

力对物体做功, 使得物体的运动状态改变, 这种状态的改变引起物体某种能量的改变. 下面分析讨论这个问题.

1. 质点的动能定理

设一质点受到的合外力为 F , 质点沿曲线从 a 点运动到 b 点, 对应于始末两点的速率分别为 v_a, v_b . 由牛顿第二定律, 两边乘上 dr , 得合外力的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

由于 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$, 有 $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = v dv$, 代入上式再积分, 即得合外力做功为

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{v_a}^{v_b} m v dv = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2$$

上式表明, 合外力对质点做功, 其效果使得质点的某个运动量 $\frac{1}{2} m v^2$ 发生变化, 于是称 $\frac{1}{2} m v^2$ 为物体(质点)的动能, 用 E_k 表示, 即

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

于是有

$$A = E_{kb} - E_{ka} \quad (4-6)$$

即: 合外力对质点做的功, 等于质点动能的增量, 这就是质点的动能定理.

2. 质点系的动能定理

为简单起见, 先讨论两个质点所组成的系统, 然后推广到一般情况. 如图 4-5 所示, 系统内两质点 m_1, m_2 , 分别受到外力 F_1 与 F_2 和内力 f_1 与 f_2 的作用, 且 $f_1 = -f_2$. 先看一对内力的元功,

$$\begin{aligned} dA_{\text{内}} &= f_1 \cdot dr_1 + f_2 \cdot dr_2 \\ &= f_1 \cdot (dr_1 - dr_2) = f_1 \cdot d(r_1 - r_2) \\ &= f_1 \cdot dr_{12} \end{aligned} \quad (4-7)$$

式中 dr_{12} 是两质点的相对位移, 可见一对内力尽管

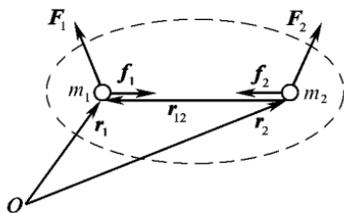


图 4-5 质点系动能定理

大小相等方向相反,但由于一般 $d\mathbf{r}_{12} \neq 0$,故 $dA_{\text{内}} \neq 0$,有

$$A_{\text{内}} = \int \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r}_{12} \neq 0$$

分别对 m_1 与 m_2 利用式(4-6)有

$$m_1: \quad \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = E_{k1} - E_{k10} \quad (4-8)$$

$$m_2: \quad \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \int \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = E_{k2} - E_{k20} \quad (4-9)$$

将上面两式相加得:

$$\left(\int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2\right) + \left(\int \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{r}_2\right) = (E_{k1} + E_{k2}) - (E_{k10} + E_{k20})$$

令:

$$A_{\text{外}} = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$$

$$A_{\text{内}} = \int \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$$

系统初动能 $E_{k0} = E_{k10} + E_{k20}$,末动能 $E_k = E_{k1} + E_{k2}$ 则有

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_k - E_{k0} = \Delta E_k \quad (4-10)$$

式(4-10)也可以推广到任意个质点组成的质点系,得到质点系动能定理:系统所受一切内力与外力的功之和等于系统动能的增量。

式(4-6)和式(4-10)两式表明了做功和动能增量的关系.功和动能具有相同量纲,单位都是焦耳.但是功和动能是两个不同的概念.首先,功是一个过程量,其大小不仅决定于质点的始末位置,还与质点的具体路径有关;而动能是状态量,仅仅取决于质点的运动状态.其次,功和动能通过动能定理相联系,通过做功,质点或质点系与外界进行能量交换:当做正功时,质点和质点系的动能增加,说明通过做功将外界的某种能量形式转化为质点和质点系的动能,因此可以说功是动能变化的一个量度;当做负功时,质点或质点系的动能减少,或者说是质点或质点系反抗外力做了功,这也说明动能反映了物体对外做功的本领。

同牛顿运动定律一样,动能定理也只适用于惯性系。

例 4-3 质量 $m=2$ kg 的物体沿 x 轴做直线运动,所受合外力 $F=10+x^2$ (SI),如果在 $x_0=0$ 处的速度 $v_0=0$,试求该物体运动到 $x=4$ m 处时速度的大小。

解 物体从 $x=0$ 到 $x=4$ m 力做功

$$A = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^4 (10 + 6x^2) dx = 40 + 128 = 168 \text{ J}$$

又由动能定理 $A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

所以 $v = \sqrt{2A/m} = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

4.2 保守力及保守力的功

自然界中物体之间的相互作用形式是多种多样的,相互作用力可根据其做功的特点分为保守力和非保守力.下面以几种常见力做功来讨论.

4.2.1 重力的功

重力的方向垂直指向地面,以地面为原点建立如图 4-6 坐标系,设质量为 m 的物体(质点),从 a 点沿任意曲线经 c 点移到 b 点,则重力对物体做的功为

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \mathbf{mg} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (-mg\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= -mg \int_{y_a}^{y_b} dy = mgy_a - mgy_b \end{aligned} \quad (4-11)$$

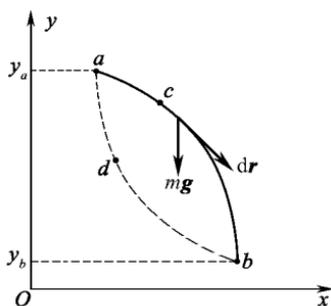


图 4-6 重力的功

上式表明重力做功与路径无关,仅与物体始末位置有关.显然,若让物体从 b 点沿虚线径 d 点回到 a 点,重力做功为 $-m(y_a - y_b)$,即物体在重力场中沿一闭合路径运动一圈,重力做功为零.

4.2.2 弹性力的功

如图4-7所示,将弹性系数为 k 的轻质弹簧一端固定在 O 点,另一端接质量为 m 的小球,小球可在光滑的水平面内从 a 点沿曲线运动到 b 点,弹簧原长为 r_0 ,当小球在任一位置 r 处时,弹簧伸长 $(r-r_0)$,由胡克定律,小球受弹力(指向 O) $f = -k(r-r_0)\hat{r}$, \hat{r} 是 r 方向的单位矢量,从 $a \rightarrow b$ 弹性力做功

$$A = \int_a^b \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_a}^{r_b} -k(r-r_0)\hat{r} \cdot d\mathbf{r}$$

由于 $\hat{r} \cdot d\mathbf{r} = |\hat{r}| \cos\theta |d\mathbf{r}| = \cos\theta |d\mathbf{r}| = dr$

$$A = \int_{r_a}^{r_b} -k(r-r_0) dr$$

$$= \frac{1}{2}k(r_a-r_0)^2 - \frac{1}{2}k(r_b-r_0)^2 \quad (4-12)$$

式中 r_0 是常数.可见弹性力的功只与始末位置有关,与所选的路径无关.同样,若使小球从 b 点沿另外任一路径回到 a 点,整个闭合路径上弹性力做功为零.式(4-12)中 (r_a-r_0) 与 (r_b-r_0) 分别表示弹簧始末时刻的伸长量,若令 $x_a=r_a-r_0$, $x_b=r_b-r_0$,则式(4-12)写为

$$A = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2 \quad (4-13)$$

式(4-13)是常见的弹簧振子作一维运动时弹性力做功的结果.

4.2.3 万有引力的功

设有两质点质量分别为 M, m ,以 M 为原点,两质点间的相对始末位置分别为 r_a 与 r_b .当 m 从 a 点沿任一曲线运动到 b 点(见图4-8),则 M 对 m 的引力

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

做的功为

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_a}^{r_b} G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{r}$$

由 $\hat{r} \cdot d\mathbf{r} = dr$,故有

$$A = - \int_{r_a}^{r_b} G \frac{Mm}{r^2} dr$$

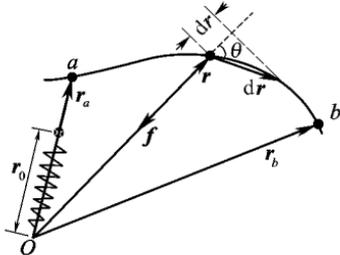


图4-7 弹性力的功

$$= \left(-G \frac{Mm}{r_a}\right) - \left(-G \frac{Mm}{r_b}\right) \quad (4-14)$$

上式说明,引力做功只与两质点的相对始末位置有关,与质点 m 经过的路径无关. 同样可证明,质点 m 沿任意闭合路径运动一周引力做的功为零.

综上所述,重力、弹性力、万有引力做功都有一个共同的特点,做功与路径无关,只与始末位置有关,或者说,物体绕任意闭合路径运动一周时,这些力所做的功为零. 我们把具有这种做功特性的力称为保守力. 用 $F_{\text{保}}$ 表示,其数学语言表述为

$$\oint F_{\text{保}} \cdot dr = 0 \quad (4-15)$$

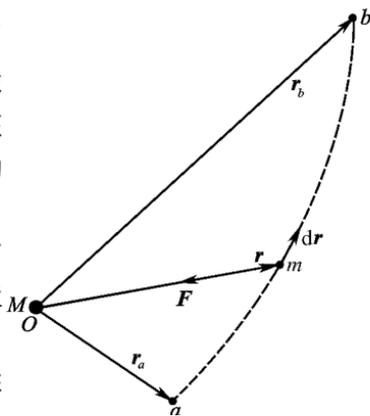


图 4-8 万有引力的功

自然界中具有这种特性的力还有静电力、分子力等. 如果某种力做功与路径有关,则称为非保守力. 例 3-2 中的力就是非保守力,常见的摩擦力、空气阻力、流体内的粘滞力等,其做功与路径有关,它们都是非保守力.

4.3 势能 势能曲线 势能梯度

4.3.1 势能

总结 4.2 节三种保守力(重力、弹性力、万有引力)做功的表达式(4-11), (4-13), (4-14)可知,它们都有共同的表达形式,即保守力做的功总是由某一函数之差来表示,而且这种函数只与位置相关. 重力功的这种函数形式是 mgy , 弹力功的形式是 $\frac{1}{2}kx^2$, 引力功是 $-G \frac{Mm}{r}$. 不失一般性,不论哪种保守力,都把这种与位置有关的函数用符号 E_p 来表示,则保守力的功可写为这种函数的差或增量的形式:

$$A_{\text{保}} = E_p(a) - E_p(b) \quad (4-16)$$

$$\text{或} \quad A_{\text{保}} = -[E_p(b) - E_p(a)] = -\Delta E_p \quad (4-17)$$

这说明,保守力的功由相对始末位置的函数差值来决定,而做功总是伴随着系统

某种能量的改变,这就告诉我们,式(4-16)或式(4-17)中的位置函数 E_p 是某种形式的能量,又由于 E_p 只由物体间相对位置来决定,因此,可以将 E_p 这个由相对位置决定的函数称之为势能函数或位能函数(简称为势能或位能).于是有如下结论:保守力的功等于系统始末位置势能之差,即式(4-16),或保守力的功等于系统势能增量的负值,即式(4-17).

将式(4-16)改写为

$$E_p(a) = A_{\text{保}} + E_p(b) \quad (4-18)$$

或
$$E_p(a) = \int_a^b \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} + E_p(b) \quad (4-19)$$

可见要求空间某点 a 处的势能,必须首先确定参考点 b 处的势能.这说明势能的值具有相对性.式(4-18)或(4-19)称为势能的定义式.参考点以及参考点势能值的选择具有任意性,一般原则是使问题简化,计算方便且满足积分收敛.若取 $E_p(b) = 0$,则式(4-19)为

$$E_p(a) = \int_a^b \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} \quad (4-20)$$

依此,在式(4-11)中,取地面 $y_b = 0$ 处为重力势能零点;在式(4-13)中,取弹簧原长 $x_b = 0$ 处为弹性势能零点;在式(4-14)中,取无穷远 $r_b \rightarrow \infty$ 处为引力势能零点.则分别得到

重力势能:
$$E_{p\text{重}} = mgy$$

弹性势能:
$$E_{p\text{弹}} = \frac{1}{2}kx^2$$

引力势能:
$$E_{p\text{引}} = -G \frac{Mm}{r}$$

例 4-4 如图 4-9 所示,弹性系数为 k 的轻质弹簧挂在天花板上,原长在 O' 处,其下挂一质量为 m 的物体,平衡时物体在 O 处,且设平衡处为坐标原点和所有势能的零点,求当物体处于 O' 处时系统的重力势能、弹性势能及总势能.

解 建立如图所示坐标系,设平衡时弹簧伸长了 x_0 ,即有 $kx_0 = mg$,用势能定义式(4-19)来求解.由题意在参考点 O 处势能为零,则有

$$E_p(O') = \int_{O'}^O \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} + E_p(O) = \int_{O'}^O \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r}$$

(1) O' 处重力势能:

$$E_{p\text{重}}(O') = \int_{x_0}^0 (-mg) dx = -mg \int_{x_0}^0 dx = mgx_0$$

(2) O' 处弹性势能:

$$E_{p\text{弹}}(O') = \int_{x_0}^0 k(x_0 - x)dx = -\frac{1}{2}kx_0^2 = -\frac{1}{2}mgx_0$$

(3) 系统总势能:

$$E_p(O') = E_{p\text{弹}}(O') + E_{p\text{重}}(O') = \frac{1}{2}mgx_0$$

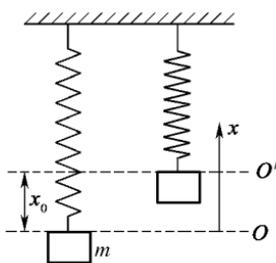


图 4-9 例 4-4 图

值得注意的是,势能与物体间相对位置有关,它实际上是两个或两个以上以保守力相互作用的物体之间的作用能.因此,严格地讲,势能是属于相互作用物体系统共有的能量,通常所说的某物体具有多少势能只是简便的说法.例如重力势能为物体和地球所共有;弹性势能为物体和弹簧所共有,等等.

4.3.2 势能曲线与势能梯度

将势能函数随空间坐标的关系用几何曲线描绘出来,就是势能曲线.图 4-10 中(a),(b),(c)分别为重力势能、弹性势能和引力势能的势能曲线.利用势能曲线能更直观地研究物体间的相互作用和运动特性.

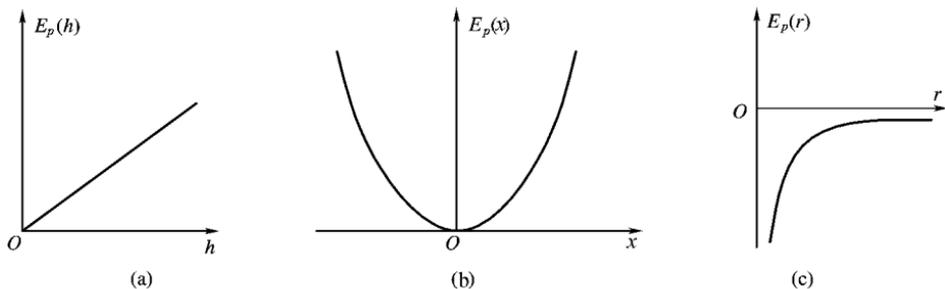


图 4-10 势能曲线

(1) 不同的势能曲线反映了物体之间不同的相互作用形式,如弹性相互作用与引力相互作用的势能曲线大不一样.在实际问题中可以通过势能曲线来研究物体之间相互作用形式与系统的物质结构形式.

(2) 由势能曲线斜率可知道对应位置的保守力.以一维势能为例,利用式(4-19)微分可得到

$$dE_p = -F(x)dx$$

则

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx} \quad (4-21)$$

即:保守力等于势能函数对坐标参量一阶导数的负值. 这也说明了保守力总是指向势能下降的方向, 其大小正比于势能曲线的斜率.

(3) 由势能曲线形式可判断物体平衡的稳定性和可能的运动. 设图 4-11 是某种保守力对应的势能曲线, A, B, C, D 是 E_p 的极值点, 都满足平衡条件 $\frac{dE_p}{dx} = 0$. 显然, B, D 两点为稳定平衡点, 同理, A, C 两点为非稳定平衡点.

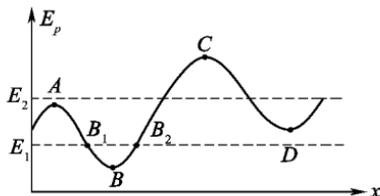


图 4-11 稳定平衡和非稳定平衡

如果系统的总能量(动能与势能之和)一定, 那么质点运动的范围也被限定. 图 4-11 中, E_1, E_2 是两种总能量, 当总能量为 E_1 时, 质点将限定在 B 点凹下的区域即在 B_1 与 B_2 之间(称为势阱)运动, 它不可能翻过 A 或 C 点凸峰(称为势垒); 若总能量为 E_2 , 质点可能越过势垒 A 在更大范围内运动, 实际上, 运动范围的限定是由于系统受到某种能量条件的约束.

(4) 一般说来, E_p 是三维空间的函数, 由式(4-21), 可得到保守力的三个分量:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

因此保守力表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \\ &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= -\nabla E_p \end{aligned}$$

∇E_p 称为势能的梯度, 因此一般来说, 保守力等于相应势能梯度的负值, 即保守力的方向总是与势能增加的方向相反.

4.4 功能原理 机械能守恒定律

4.4.1 功能原理

质点系动能定理表明质点系所受的一切外力与一切内力的功之和等于系统的动能的增量. 由于保守力做功的特点, 可以把系统的内力分为保守内力和非保守内力. 相对应的功分别用 $A_{\text{内保}}$ 和 $A_{\text{内非}}$ 来表示, 则系统的动能定理可表示为

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内保}} + A_{\text{内非}} = \Delta E_k \quad (4-22)$$

由于保守内力的功等于势能增量的负值, 即

$$A_{\text{内保}} = -\Delta E_p \quad (4-23)$$

将式(4-23)代入式(4-22)整理得

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内非}} = \Delta E_p + \Delta E_k = \Delta(E_p + E_k) \quad (4-24)$$

上式中 $E_p + E_k$ 是系统的势能与动能之和, 称之为系统的机械能, 用 E 表示, 则有

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内非}} = \Delta E \quad (4-25)$$

上式表明, 系统外力的功和非保守内力的功之和等于系统的机械能的增量, 这一结论称为功能原理.

功能原理是从动能定理导出, 形式上是动能定理的变形, 但这两者分析问题的思路是有区别的. 动能定理只考虑系统动能的变化, 功能原理考虑系统的机械能的变化, 这样做一方面省去 $A_{\text{内保}}$ 的计算, 另一方面, 则使问题更为清晰简捷. 在机械运动中, 当物体速度一定时, 有确定的动能来表征它的能量状态, 当物体间的相对位置和势能零点确定时, 又可用确定的势能来表征它的能量状态. 因此, 当物体在空间做机械运动时, 可以用机械能来惟一表征它的能量状态, 即机械能是物体系统的状态函数.

4.4.2 机械能守恒定律

在功能原理式(4-25)中, 当外力和非保守内力不做功(或无外力和非保守内力作用)时, 即

$$A_{\text{外}} = 0, A_{\text{内非}} = 0$$

则由式(4-25)有

$$\Delta E = 0$$

或者

$$E = \text{常量}$$

这就是说, 如果外力和非保守内力不做功, 则系统的机械能保持为一常量, 此结论称为机械能守恒定律.

应用此定律时应该注意的是,系统机械能守恒的条件是同时有 $A_{\text{外}} = 0$, $A_{\text{内非}} = 0$. 系统机械能守恒时,系统的动能和势能之间通过保守内力做功可以互相转换.

当 $A_{\text{外}} \neq 0$, $A_{\text{内非}} \neq 0$ 时,系统的机械能不守恒. 例如当 $A_{\text{外}} = 0$, 系统内存在摩擦力做功, $A_{\text{内非}} < 0$, 系统的机械能减少; 又若 $A_{\text{外}} > 0$, $A_{\text{内非}} = 0$, 则系统的机械能增加. 这都说明系统与外界有能量的交换. 这种能量的交换往往对应着物质运动形式的转换, 如摩擦力做功时, 机械能减少, 机械能转换成分子的热能, 机械运动形式转换成分子的热运动形式. 实验表明, 系统机械能的减少与分子热能的增加量值相等. 自然界中无数事实表明, 物质的不同运动形式之间的转换伴随着不同形式能量的转换, 而能量从一种形式转换成另一种形式, 其总量保持不变, 即能量不会创生也不会消亡. 这就是自然界中普遍的能量转换与守恒定律, 而机械能守恒定律是其中基本的规律之一.

例 4-5 用 $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的初速度将一质量为 $m = 0.5 \text{ kg}$ 的小球竖直上抛, 所达到的高度是 $h = 16 \text{ m}$, 求空气对它的平均阻力.

解 选小球和地球为系统, 小球的重力是系统内保守力. 空气的平均阻力是系统受到的外力, 用 f 表示. 根据功能原理, 物体上抛过程中机械能的增量等于空气阻力所做的功

$$A_f = \Delta E = E_2 - E_1$$

$A_f = -fh$, $E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$ 为小球初机械能(设小球出发点为重力势能零点), $E_2 = mgh$ 为小球到达最高点时的机械能, 于是得

$$-fh = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$f = m \left(\frac{v_0^2}{2h} - g \right) = 0.5 \times \left(\frac{20^2}{2 \times 16} - 9.8 \right) = 1.35 \text{ N}$$

例 4-6 一轻质弹簧原长 l_0 , 劲度系数为 k , 上端固定, 下端挂一质量为 m 的物体, 先用手托住弹簧保持原长, 然后突然将物体释放, 物体达到最低位置时弹簧的最大伸长和弹力是多少? 物体经过平衡位置时的速度为多大?

解 把弹簧、物体以及地球作为研究系统, 则系统只受内保守力的作用, 机械能守恒. 设弹簧原长处为弹性势能与重力势能的零点. 考虑任一时刻物体下落了 h 段距离, 此时物体速度为 v , 系统的机械能为

$$E_2 = -mgh + \frac{1}{2}kh^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

系统初始时刻机械能为 $E_1 = 0$, 则由机械能守恒有

$$-mgh + \frac{1}{2}kh^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \quad (1)$$

物体到达最低位置时, $v=0$, $h=h_{\max}$, 由上式可得: $h_{\max}=2mg/k$. 此时弹性力最大:

$$f_{\max}=kh_{\max}=2mg$$

设物体经过平衡位置时, 速度为 v_0 , 弹簧伸长 h_0 , 且 $mg=kh_0$, 又由机械能守恒得

$$-mgh + \frac{1}{2}kh_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 \quad (2)$$

将 h_0 代入上式, 整理得

$$v_0 = \sqrt{h_0 g} = \sqrt{\frac{m}{k}g}$$

此题中若把弹簧与物体作为研究系统, 则物体的重力为系统的外力, 系统的初机械能

$E_1=0$, 末机械能 $E_2 = \frac{1}{2}kh^2 + \frac{1}{2}mv^2$, 设重力的功为 A_g , 由功能原理有

$$A_g = E_2 - E_1$$

而 $A_g = mgh$, 代入上式整理可得上述式(1), 计算结果相同, 不再赘述.

思考题

4-1 有人说:“运动是做功的必要条件,但并不是充分条件.”这句话对吗?

4-2 有人把一物体由静止开始举高到 h 时,使物体获得速度为 v ,在此过程中,人对物体做功为 A ,则有

$$A = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

有人把上式理解为“合外力对物体所做的功等于物体动能的增量和势能的增量之和”,这样岂不与动能定理相矛盾吗?

4-3 用相同的动能从同一地点抛出两个物体,试问在下列两种情况下到达最高点时两物体的动能是否相同?势能是否相同?

- (1) 两个物体的质量不同,但均垂直地向上抛;
- (2) 两个物体的质量相同,但一个垂直向上抛,另一个斜向上抛.

4-4 在一艘大轮船上进行篮球比赛,球的动能是否与轮船的速率有关?参考系的选择是否影响动能的量值?

4-5 质量为 m 千克的炮弹,沿水平飞行,其动能为 A ,突然在空中爆炸成质量相等的两块,其中一块向后,动能为 $A/2$;另一块向前,试问这向前的一块动能是否为 $A/2$?

4-6 按质点动能定理,下列式子:

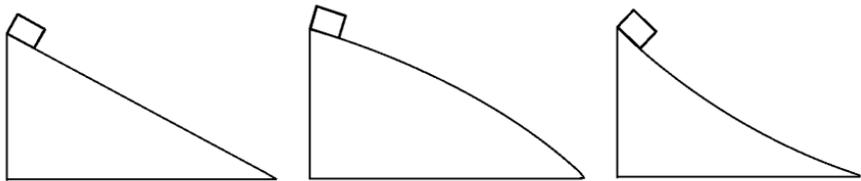
$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \frac{1}{2}mv_{x_2}^2 - \frac{1}{2}mv_{x_1}^2;$$

$$\int_{y_1}^{y_2} F_y dy = \frac{1}{2}mv_{y_2}^2 - \frac{1}{2}mv_{y_1}^2;$$

$$\int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \frac{1}{2}mv_{z_2}^2 - \frac{1}{2}mv_{z_1}^2,$$

是否成立？这三式是否是质点动能定理的三个分量式？试作分析。

4-7 有三个相同的物体分别沿斜面、凸面和凹面滑下。三面的左边离地高度和距右端的水平距离都相同，分别为 h 和 l ，三面与物体间的摩擦系数均相同，等于 μ ，试分析哪个面上的物体滑到地面时的速度最大？



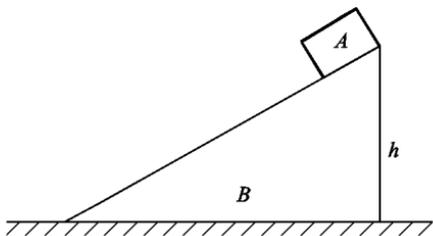
思考题 4-7 图

4-8 (1) 物体 A 放在楔块 B 的粗糙斜面上， B 又放在水平光滑桌面上。若 A 从 B 上滑下，试分析 A, B 间一对摩擦力做的功和一对正压力做的功。

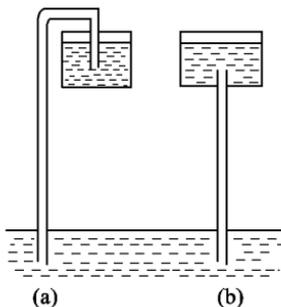
(2) 当 A, B 间也是光滑无摩擦时，在 A 下滑过程中，设 A 滑到桌面时对 B 的速度为 u ，对桌面的速度为 v ， A 的质量为 m ，试分析下列两式是否正确。

$$(1) \quad mgh = \frac{1}{2}mu^2;$$

$$(2) \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$



思考题 4-8 图



思考题 4-9

图

4-9 把水抽上水塔，将它储满，用图中(a)，(b)两种方式所需的功是否相同？

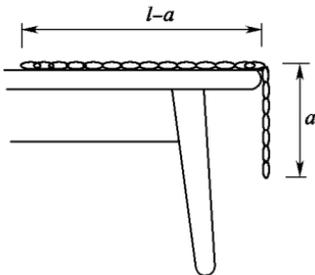
习题 4

4-1 质量 $m=2\text{ kg}$ 的质点在力 $F=12t\text{ i}$ (SI) 的作用下，从静止出发沿 x 轴正向作直线运动，求前三秒内该力所做的功。

4-2 一链条总长为 l ，质量为 m ，放在桌面上，并使其下垂，下垂一端的长度为 a 。设

链条与桌面之间的滑动摩擦系数为 μ 。令链条由静止开始运动，则求：

- (1) 在链条离开桌面的过程中，摩擦力对链条做了多少功？
- (2) 链条离开桌面时的速率是多少？



题 4-2 图

4-3 一物体按规律 $x=ct^3$ 在媒质中做直线运动，式中 c 为常量， t 为时间。设媒质对物体的阻力正比于速度的平方，阻力系数为 k ，试求物体由 $x=0$ 运动到 $x=l$ 时，阻力所做的功。

4-4 一质量为 m 的质点在 xoy 平面上运动，其位置矢量为

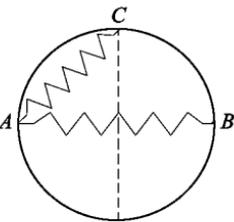
$$\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j} \quad (\text{SI})$$

式中 a, b, ω 是正值常数，且 $a > b$ 。求：

- (1) 质点在 A 点 $(a, 0)$ 时和 B 点 $(0, b)$ 时的动能？
- (2) 质点所受的作用力 \mathbf{F} 以及当质点从 A 点运动到 B 点的过程中的分力 F_x 和 F_y 分别做的功。

4-5 一个弹簧下端挂质量为 0.1 kg 的砝码时长为 0.07 m ，挂 0.2 kg 的砝码时长为 0.09 m 。现在把此弹簧平放在光滑桌面上，并要沿水平方向从长度为 0.10 m 缓慢拉长到 0.14 m ，外力需做功多少？

4-6 劲度系数为 k 、原长为 l 的弹簧，一端固定在圆周上的 A 点，圆周的半径 $R=l$ ，弹簧的另一端从距 A 点 $2l$ 的 B 点沿圆周移动 $1/4$ 周长到 C 点，如图所示，求弹性力在此过程中所作的功。



题 4-6 图

4-7 质量为 10 g 的质点沿半径为 6.4 cm 的水平圆周轨道做匀角加速转动，若由静止开始，转了两周后其动能已达到 $8 \times 10^{-4} \text{ J}$ ，求此质点的切向加速度。

4-8 设合外力为 $\mathbf{F}_{\text{合}} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} \text{ N}$ ，

- (1) 当一质点从原点运动到 $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 16\mathbf{k} \text{ m}$ 时，求 \mathbf{F} 所做的功。
- (2) 如果质点到 \mathbf{r} 处时需 0.6 s ，试求平均功率。
- (3) 如果质点的质量为 1 kg ，试求动能的变化。

4-9 某弹簧不遵守胡克定律，若施力 F ，则相应伸长为 x ，力与伸长量的关系为

$F = 52.8x + 38.4x^2$ (SI), 求:

(1) 将弹簧从定长 $x_1 = 0.5$ m 拉伸到定长 $x_2 = 1.00$ m 时, 外力所需做的功.

(2) 将弹簧横放在水平光滑桌面上, 一端固定, 另一端系一个质量为 2.17 kg 的物体, 然后将弹簧拉伸到一定长 $x_2 = 1.00$ m, 再将物体由静止释放, 求当弹簧回到 $x_1 = 0.50$ m 时, 物体的速率. 此弹簧的弹力是保守力吗?

4-10 处于保守力场中的某一质点被限制在 x 轴上运动, 它的势能 $E_p(x)$ 是 x 的函数, 它的总机械能 E 是一常数, 设 $t=0$ 时, 质点在坐标原点, 求证这一质点从原点运动到坐标 x 时的时间是 $t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2[E - E_p(x)]/m}}$

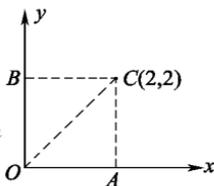
4-11 设两个粒子之间相互作用力是排斥力, 其大小与它们之间的距离 r 的函数关系为 $f = k/r^3$, k 为正常数, 试求这两个粒子相距为 r 时的势能. (设相互作用力为零的地方势能为零.)

4-12 力 $F = (4 - 2y)i$ 作用在一点上, 使质点从 O 点移到 $C(2, 2)$. (1) 质点沿 OAC 移动; (2) 质点沿 OBC 移动; (3) 质点沿 OC 移动. 试分别计算力 F 的功 (SI 制). 从计算结果说明 F 是否为保守力?

4-13 假设地球可以看成是质量为 M 、半径为 R 的球体, 试由

$$W = -G_0 \int_{r_a}^{r_b} \frac{Mm}{r^2} dr = G_0 Mm \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

求以地面为重力势能零点时质量为 m 的物体在距地面高度为 h 处 ($h \ll R$) 的重力势能的表达式, 并将所得结果与 $E_{pa} = mgh$ 式做比较.



题 4-12 图

4-14 在水平的光滑桌面上有一质量为 M_1 的静止小球 A , 桌面上另有一质量为 M_2 的小球 B 以水平速度 v_0 与 A 发生完全非弹性碰撞, 试证明: 它们在碰撞中损失的机械能为

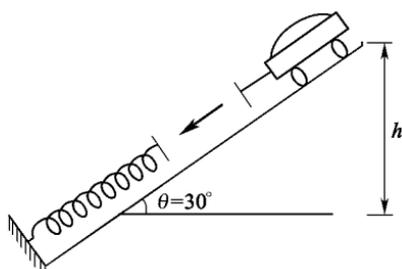
$$|\Delta E| = \frac{M_1 M_2 v_0^2}{2(M_1 + M_2)}$$

4-15 如图所示, 自动卸料车连同料重为 G_1 , 它从静止开始沿着与水平面成 30° 的斜面滑下. 滑到底端时与处于自然状态的轻弹簧相碰, 当弹簧压缩到最大时, 卸料车就自动翻斗卸料, 此时卸料车下降高度为 h . 然后, 依靠被压缩弹簧的弹性力作用又沿斜面回到原有高度. 设空车重量为 G_2 , 另外假定摩擦阻力为车重的 0.2 倍, 求 G_1 与 G_2 的比值.

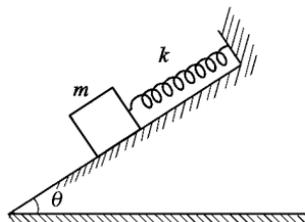
4-16 如图所示, 在与水平面成 θ 角的光滑斜面上放一质量为 m 的物体, 此物体系于一倔强系数为 k 的轻弹簧的一端, 弹簧的另一端固定, 设物体最初静止. 今使物体获得一沿斜面向下的速度, 设起始动能为 E_{k0} , 试证物体在弹簧伸长 x 时的速率 v 由下式得到:

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_{k0} + mgx \sin\theta - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2k}(mg \sin\theta)^2$$

4-17 一物体与斜面间的摩擦系数 $\mu = 0.20$, 斜面固定, 倾角 $\theta = 45^\circ$. 现给予物体初速率 $v_0 = 10$ m \cdot s $^{-1}$, 使它沿斜面向上滑, 如图所示. 求:



题 4-15 图

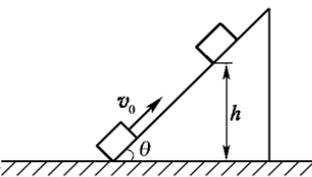


题 4-16 图

(1) 物体能够上升的最大高度 h ;

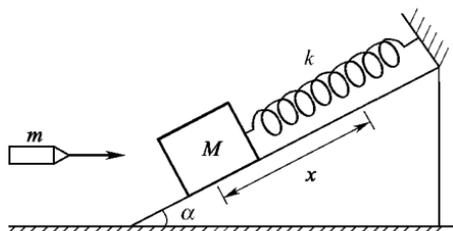
(2) 该物体达到最高点后,沿斜面返回到出发点时的速率 v .

4-18 如图所示,光滑斜面与水平面的夹角为 $\alpha=30^\circ$,轻质弹簧上端固定.今在弹簧的另一端轻轻地挂上质量为 M



题 4-17 图

$= 1.0 \text{ kg}$ 的木块,则木块沿斜面向下滑动.当木块向下滑 $x=30 \text{ cm}$ 时,恰好有一质量 $m=0.01 \text{ kg}$ 的子弹,沿水平方向以速度 $v=200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 射中木块并陷在其中.设弹簧的倔强系数为 $k=25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$,求子弹打入木块后它们的共同速度.



题 4-18 图

4-19 如图所示,在地面上固定一半径为 R 的光滑球面,球面正上方 A 处放一质量为 M 的滑块.一质量为 m 的油灰球,以水平速度 v_0 射向滑块,并粘附在滑块上一起沿球面下滑.问:

(1) 它们滑至何处($\theta=?$)脱离球面?

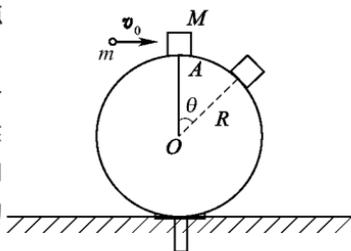
(2) 如欲使两者在 A 处就脱离球面,则油灰球的入射速率至少为多少?

4-20 地球可看作是半径 $R=6400 \text{ km}$ 的球体,一颗人造地球卫星在地面上空 $h=800 \text{ km}$ 的圆形轨道上,以 $7.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度绕地球运动.在卫星的外侧发生一次爆炸,其冲量不影响卫星当时的绕地圆周切向速度 $v_t=7.50201 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$,但却给予卫星一个指向地心的径

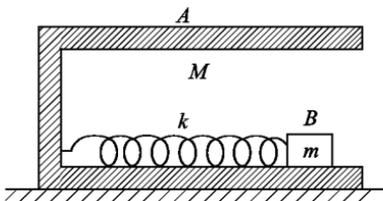
向速度 $v_n = 0.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. 求这次爆炸后卫星轨道的最低点和最高点位于地面上空多少公里?

4-21 在质量为 M 的物体 A 的腔内壁上连接一个倔强系数为 k 的轻弹簧, 另一质量为 m 的小物体 B 紧靠着弹簧但不连接, 如图所示. 开始时有外力作用于 B 和 A , 使弹簧被压缩了 Δx 且处于静止状态, 若各接触面均光滑, 求撤掉外力后物体 A 的反冲速度 u 的大小.

4-22 如图所示, 质量为 m_2 的物体与轻弹簧相连,

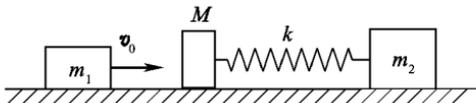


题 4-19 图



题 4-21 图

弹簧另一端用一质量可忽略的支架 M 支起, 静止在光滑的桌面上. 弹簧倔强系数为 k . 今有一质量为 m_1 速度为 v_0 的物体向弹簧运动并与弹簧正碰, 求弹簧被压缩的最大距离.



题 4-22 图

第 5 章 角动量与角动量定理

角动量是描述物体运动状态的重要物理量,对于研究质点、质点系、刚体的运动,尤其是物体转动有重要作用,角动量定理是研究刚体绕固定轴转动的基础,角动量守恒定律是自然界普遍适用的定律之一.本章将介绍质点对点的角动量概念,质点的角动量定理和角动量守恒定律.

5.1 质点的角动量定理

根据质点动量定理的微分形式

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

质点的位置矢量与方程的左右两边的矢积有如下关系

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

由于同方向两矢量的矢积为零,即 $\mathbf{v} \times \mathbf{p} = 0$, 故有

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

于是

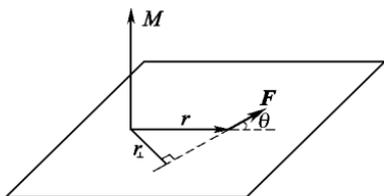
$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) \quad (5-1)$$

式(5-1)的左右两边分别表示什么呢? 物理意义何在?

5.1.1 力 矩

如图 5-1 所示,由矢积的定义,式(5-1)的左边矢积的大小为

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = r \sin \theta F = r_{\perp} F$$

图 5-1 力对 O 点的力矩

式中, r 为质点对 O 点的位置矢量, θ 为 r 与力 F 的夹角, 而 r_{\perp} 是 O 点到力的作用线的垂直距离, 又称为力臂. 力与力臂的乘积显然是一个力矩的概念. 实际上, 力 F 对 O 点的力矩就定义为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \quad (5-2)$$

关于力矩的概念应注意以下几点. 首先, 力矩是一个矢量, 满足平行四边形法则. 它的方向垂直于 r 和 F 的作用线所在的平面, 并遵守右手螺旋法则: 让右手的大拇指与四指垂直, 四指由 r 沿小于 180° 角转向 F , 拇指的指向即为 M 方向. 其次, 力矩与参考点 O 的位置有关. 同一作用力对空间不同的点, 力矩是不同的, 因此讨论力矩时首先要明确是对空间哪个点的力矩. 最后, 如果参考点在力的作用线上, 那么力对该点的力矩为零 (此时 $\theta=0$ 或者 $\theta=\pi$).

在直角坐标系中, F 对原点 O 的力矩表示为

$$\boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (5-3a)$$

M 在各坐标轴的投影被称为 F 对各坐标轴的力矩, 它们分别为

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (5-3b)$$

在国际单位制中, 力矩的单位为牛顿米 ($\text{N} \cdot \text{m}$).

5.1.2 质点的角动量

式(5-1)的右边表达式中, $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 为质点对 O 点的位矢与质点动量的矢积, 我们将其定义为质点对 O 点的角动量 (或称为动量矩), 用 L 表示, 即

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \quad (5-4)$$

如图 5-2 所示, 显然角动量也是矢量, 其方向垂直于 r 和 p 所决定的平面, 且遵

守右手螺旋法则,其大小为

$$L = r \sin \theta p = r \sin \alpha p = r_{\perp} p$$

式中 θ 是 r 与 p 的夹角, r_{\perp} 为 O 点到动量所在直线的距离。

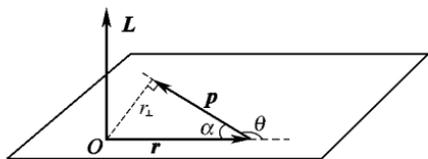


图 5-2 质点对 O 点的角动量

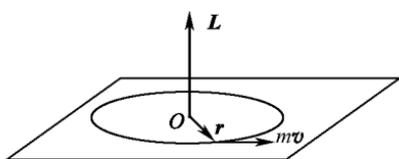


图 5-3 质点对圆心的角动量

作为一个特例,一个质量为 m 速率为 v 的质点沿半径为 r 的圆周运动,如图 5-3 所示,质点相对圆心 O 的角动量的大小

$$L = r p = r m v = m r^2 \omega \quad (5-5)$$

若取 z 轴沿 L 的方向,则质点对于 z 轴的角动量 $L_z = m r^2 \omega$, ω 是质点绕 z 轴转动的角速度. 这就是说,质点绕 z 轴转动的角动量等于质点的质量,转动半径的二次方和角速度三者的乘积.

角动量描述的是质点绕某点转动的状态,因此角动量就不仅与质点的动量有关,也与该点的位置有关. 这就是说,动量一定的质点对不同点有不同角动量. 当讨论质点的角动量时,有必要指出是相对哪一点而言.

与力矩类似,在直角坐标系中,质点相对原点 O 的角动量 L 表示为

$$L = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \quad (5-6a)$$

L 在各个坐标轴的投影被称为质点对各坐标轴的角动量,它们分别为

$$\begin{aligned} L_x &= y p_z - z p_y \\ L_y &= z p_x - x p_z \\ L_z &= x p_y - y p_x \end{aligned} \quad (5-6b)$$

国际单位中,角动量的单位是千克二次方米每秒 ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

例 5-1 质量为 2.0 kg 的质点位于 $x=2.0 \text{ m}$, $y=1.0 \text{ m}$ 处时,速度为 $v=(1.0i-3.0j) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,作用在质点上的力为 $F=(2.0i+3.0j) \text{ N}$,求质点对原点 O 的角动量和力 F 对原点的力矩.

解 该质点的位置矢量

$$r = xi + yj = (2.0i + 1.0j) \text{ m}$$

质点的动量

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = 2.0(1.0\boldsymbol{i} - 3.0\boldsymbol{j}) \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由式(5-6a)

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = 2.0 \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & -3.0 & 0.0 \end{vmatrix} = 2.0(-6-1)\boldsymbol{k} = -14\boldsymbol{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

由式(5-3a)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 2.0 & 3.0 & 0.0 \end{vmatrix} = (6-2)\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

5.1.3 质点的角动量定理

把式(5-2)和式(5-4)代入式(5-1)中,有

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \quad (5-7)$$

这就是质点角动量定理的微分形式,它表明:作用在质点的合外力矩等于质点的角动量对时间的变化率.它是个瞬时关系式,对任意时刻 t 都成立.

如果从 t_0 到 t 这段时间,质点受力矩的持续作用,其角动量从 L_0 变为 L ,则质点角动量定理式(5-7)可写成积分形式

$$\int_{t_0}^t \boldsymbol{M} dt = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}_0 \quad (5-8)$$

式中 $\int_{t_0}^t \boldsymbol{M} dt$ 表示力矩对时间的积累,称为角冲量(或称为冲量矩).式(5-8)表明,质点所受的角冲量等于其角动量的增量.这就是质点角动量定理的积分形式.需要特别指出的是,角动量定理中的力矩 \boldsymbol{M} 和角动量 \boldsymbol{L} 都必须是对同一参考点而言的.

5.2 质点的角动量守恒定律

由式(5-7),相对某固定点,若作用于质点的合力矩 \boldsymbol{M} 始终为零,则质点相对于该点的角动量保持不变.即

$$\boldsymbol{L} = \text{恒矢量}$$

这一结论称为质点的角动量守恒定律. 这里的“不变”意味着大小和方向都不变. 现在讨论两种特例.

(1) 当 $F=0$ 时, 质点对任意固定点的角动量都会保持不变. 如图 5-4 所示, 质量为 m 的质点不受力作用, 将保持匀速直线运动, 动量 $p=mv$ 也保持不变, 直线 AB 为质点运动的轨迹, 质点对任意 O 点的角动量

$$L = r \times mv$$

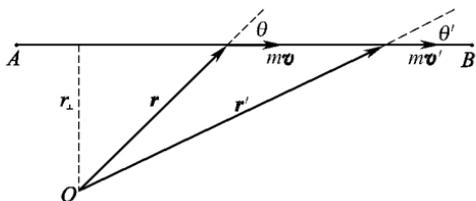


图 5-4 匀速直线运动的质点

根据右手螺旋法则, 无论质点在何位置, 它对 O 点角动量的方向总是垂直于纸面向里; 其大小

$$L = rmv \sin\theta = r' mv \sin\theta' = r_{\perp} mv$$

保持不变. 式中 r_{\perp} 为 O 点到 AB 的垂直距离.

(2) 当质点所受的力总是指向(或背离)某一固定点时, 该力称为有心力, 该点称为有心力的力心. 显然质点相对该点的角动量保持不变. 这是因为相对该点的径矢 r 与 F 共线, $\theta=\pi$ 或 0 , $\sin\theta=0$, 这种情况下总有力矩 $M=0$.

例 5-2 证明行星运动的开普勒第二定律: 行星对太阳的径矢在相等的时间内扫过的面积相等.

解 由于太阳对行星的引力总是指向太阳, 忽略太阳的摄动, 引力就指向空间一固定点——太阳中心. 行星受有心力作用, 行星对太阳中心的角动量 L 守恒. 然而这与开普勒定律有什么关联呢?

如图 5-5 所示, 在时间微元 dt 内, 行星的位矢扫过的面积是以 r 和位移 dr 为边的三角形面积(阴影面积), 其大小为

$$ds = \frac{1}{2} r |dr| \sin\theta = \frac{1}{2} |r \times dr|$$

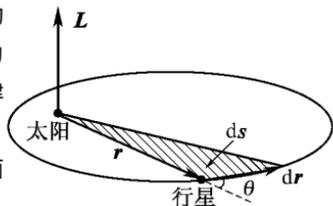


图 5-5 行星的轨道运动

行星的位矢在单位时间内扫过的面积(即掠面速率)为

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \left| r \times \frac{dr}{dt} \right| = \frac{1}{2} |r \times v| = \frac{1}{2m} |r \times p| = \frac{1}{2m} L$$

由于行星对太阳的角动量守恒, L = 恒矢量. 角动量大小不变, 意味着行星对太阳的径矢在相

等的时间内扫过的面积相等,这就得出了开普勒第二定律;角动量方向不变,意味着行星的径矢 r 和速度 v 始终在同一平面内,也就是说行星总在一个与 L 垂直平面内运动,行星轨迹绝不会离开这个平面。

例 5-3 质量为 m 的小木块受细绳约束,在光滑水平面上绕小孔 O 作圆周运动.如图 5-6 所示,圆的半径为 r_0 ,木块的速率为 v_0 .今缓慢地拉动绳子的另一端,使小木块到 O 点的距离逐渐减少,求(1)该距离缩短到 r 后,做圆周运动的小木块的速率 v ; (2)这一过程中绳子对木块的拉力所做的功。

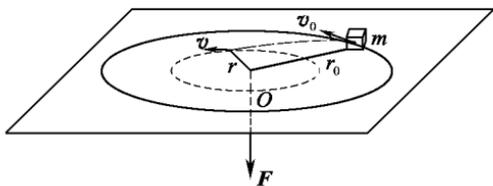


图 5-6 受有心力作用的木块

解 (1) 先进行受力分析:作用在小木块上的竖直方向的力有木块的重力和平面的支撑力,这是一对平衡力;水平方向的力只有细绳的拉力.拉力过固定点 O ,是有心力.故木块对 O 点的角动量守恒,木块在不同位置的角动量相等.又因为拉动前后,木块做圆周运动.
 $r_0 \perp v_0, r \perp v$. 故

$$r_0 m v_0 = r m v$$

即

$$v = \frac{r_0}{r} v_0$$

(2) 根据质点的动能定理,绳子拉力所做的功等于木块的动能增量,于是

$$A = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right) v_0^2$$

思考题

5-1 在惯性系中任取一点,如果运动质点对该点的角动量总能保持不变,此时质点在惯性系中做何种运动?

5-2 质点作匀速圆周运动,对圆周上一定点,它的角动量是否守恒?对过圆心且与圆面垂直轴上的一点,它的角动量是否守恒?

5-3 质点受一有心力作用,该力是否对任一点的力矩都为零?

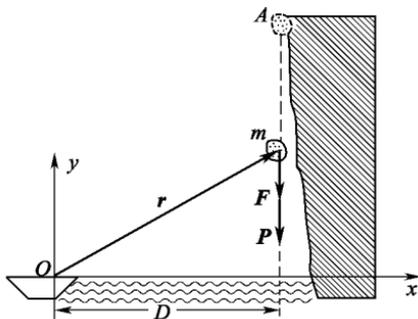
5-4 质量相等的两位学生,通过绕在定滑轮上轻绳的两端进行爬绳比赛.一人抓住绳子不动,另一人努力拉绳,哪一个人先到达定滑轮处?为什么?(不考虑滑轮和绳子的质量,不计轮轴的摩擦)

5-5 地球在以太阳中心为焦点的椭圆轨道上运行. 在这一过程中, 如果在地球的动量、动能和对太阳中心的角动量中选择, 哪些物理量是守恒量?

习题 5

5-1 由于采沙船在河道内乱采乱挖, 造成河岸的崩塌. 图中, 质量为 m 的泥块从 A 点竖直塌落. A 点到采沙船的水平距离为 D , 以正在定点作业的采沙船为坐标原点 O , 建立坐标系 (z 轴的正向垂直于纸面向外), 求:

- (1) 下落的泥块对 O 点的角动量 L .
- (2) 相对 O 点, 泥块重力的力矩.



题 5-1 图

5-2 质量为 0.25 kg 的物体, 在某一瞬时的位置矢量 $\boldsymbol{r} = (2.0\boldsymbol{i} - 2.0\boldsymbol{k}) \text{ m}$, 此时它的速度 $\boldsymbol{v} = (-5.0\boldsymbol{i} + 5.0\boldsymbol{k}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 受到力 $\boldsymbol{F} = 4.0\boldsymbol{j} \text{ N}$ 作用, 那么

- (1) 物体对原点的角动量是多少?
- (2) 作用在物体上的力对原点的力矩是多少?

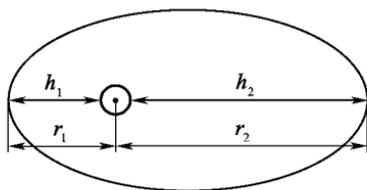
5-3 电子的质量为 $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 在半径为 $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ 的圆周上绕氢核做匀速运动. 已知电子的角动量为 $h/2\pi$ (h 为普朗克常量, 等于 $6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$), 试求其角速度.

5-4 我国发射的通信卫星在椭圆形“转移轨道”上运行. 如图所示, 此“转移轨道”的近地点高度 $h_1 = 205.5 \text{ km}$, 远地点高度 $h_2 = 35835.7 \text{ km}$. 卫星越过近地点时的速率为 $10.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. 取地球 $R = 6378 \text{ km}$, 求:

- (1) 卫星越过远地点时的速率;
- (2) 卫星在此轨道上运行的周期. [提示: 若 r_1 是卫星在近地点离地球中心的距离, r_2

是卫星在远地点离地球中心的距离. 则椭圆轨道的面积 $= \frac{\pi}{2} (r_1 + r_2) \sqrt{r_1 r_2}$]

5-5 质量为 2.0 kg 的质点, $t=0$ 时位于 $\boldsymbol{r}_0 = (4.0\boldsymbol{i} - 2.0\boldsymbol{j}) \text{ m}$, 其速度为 $\boldsymbol{v} = (-6.0\boldsymbol{i}^2\boldsymbol{i})$



题 5-4 图

$m \cdot s^{-1}$, 求:

- (1) t 时刻质点对原点的角动量;
- (2) 此时作用在质点上的力对原点的力矩.

第 6 章 刚体的定轴转动

刚体作为一种特殊的质点系,是物理学的重要物理模型.本章从质点的角动量出发,将介绍刚体的定轴转动,刚体转动惯量,刚体的转动定律,刚体作定轴转动的功能关系,刚体的角动量定理和角动量守恒定律.

6.1 刚体定轴转动的角动量

6.1.1 刚体的运动

众所周知,固体受力后总会产生相应的形变.然而,如果在所研究的问题中,这些形变对研究结果影响不大,从而有可能忽略物体的形变,把这种物体视为刚体.从这种意义上讲,刚体就是形状和大小不发生改变的物质.跟质点一样,刚体也是一种理想化的物理模型.

刚体有两种基本特征:其一,刚体由无数个连续分布的小质元组成,每个质元可视为质点.这意味着质点力学的所有规律都适用于这些质元,适用于刚体这一质点系;其二,刚体又不是一般的质点系,在运动或受力时,刚体中任意两个质点间的距离保持不变.这一特征决定了刚体这一特殊质点系的力学规律具有某些简化形式.

刚体的运动可以分为两种基本形式:平动和转动.刚体的一般运动可以分解为平动和转动.本章主要讨论刚体绕固定轴转动.

1. 平动

刚体做平动时,连接刚体上任意两质点的直线始终保持平行.如图 6-1 所示,尽管刚体上的质点轨迹是曲线,可连结任意两质点 AB 的直线保持平行.故

刚体这时的运动形式是平动。

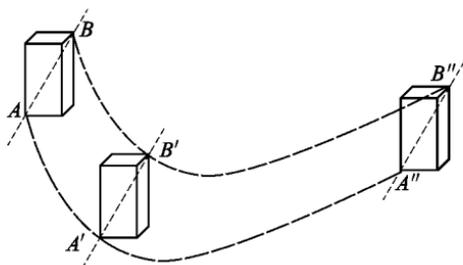


图 6-1 刚体的平动

刚体平动时,刚体上各质点具有相同的运动轨迹,在相同时间内具有相同的位移.在同一时刻,有相同的速度、加速度.也就是说,刚体上所有质点在任何一个时刻都具有相同的运动状态,因此可以把整个刚体平动可作为一个质点来处理。

2. 绕固定轴转动

如果刚体所有质点都绕同一转轴做圆周运动,刚称为刚体的转动,当转轴固定,则称定轴转动.当刚体绕固定轴转动时,由于质点到转轴的距离不同,各质点的速度、加速度就各不相同.然而在相同的时间内,它有相同的角位移.如图 6-2 所示,刚体绕 O 轴(该轴垂直于纸面)转动,各质点(如 p_1 与 p_2 质点)转过了相同的角度,在同一时刻具有相同的角速度 ω 和角加速度 β .这一点是由刚体的特性(运动或受力时,刚体上任意两质点的距离保持不变)所决定的.因此,研究刚体绕固定轴转动时,用角量来描述刚体更为方便。

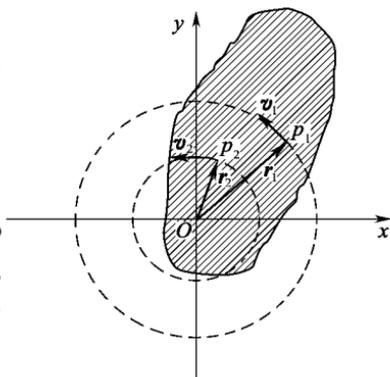


图 6-2 绕固定轴转动的刚体

如果刚体在时间微元 dt 内转过 $d\theta$ 的角位移,则刚体的角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (6-1)$$

受固定转轴约束,刚体的转动只有两种可能的方向,因此角速度可以用标量定义.用正负号表示其方向:在转轴上确定一个正方向,当刚体的转动方向与该方向遵守右手螺旋法则时,角速度为正,否则为负。

同样,刚体的角加速度为

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (6-2)$$

设 r 为刚体内某质点到转轴的距离, 则该质点的线量与角量的关系有

$$\begin{aligned} v &= r\omega \\ a_{\tau} &= r\beta \\ a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \quad (6-3)$$

根据(6-1)和(6-2)两式, 有

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \int_0^t \beta dt \\ \theta &= \theta_0 + \int_0^t \omega dt \end{aligned} \quad (6-4a)$$

当角加速度 β 为一常量时, 刚体做匀加速转动, 这是刚体绕固定轴转动的一种特例. 于是得到与质点做匀加速直线运动相对应的一组公式, 即

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \Delta\theta = \omega t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\ 2\Delta\theta\beta = \omega^2 - \omega_0^2 \end{cases} \quad (6-4b)$$

式中 $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ 为角位移, θ_0, ω_0 是 $t=0$ 时刻的初值. 值得特别指出, 当 β 为一变量时, 刚体做变加速转动, 此时应根据式(6-4a)积分, 不能再套用式(6-4b).

现在引入刚体质量中心(简称质心)的概念. 设坐标系中刚体内质量元 dm 的位矢为 r , 刚体的总质量为 M , 则定义刚体质心的位矢为

$$\mathbf{r}_c = \frac{\int \mathbf{r} dm}{M} \quad (6-5)$$

直角坐标系中, 它由三个分量式表示. 一个质量对称分布的刚体, 其质心就在它的几何对称中心上.

引入质心概念之后, 一般的刚体运动可视为刚体质心的平动与刚体绕质心的转动两者的合成. 如图 6-3 所示, 手榴弹被抛向空中, 若不计阻力, 其质心轨迹为抛物线, 与此同时, 手榴弹又绕其质心转动.

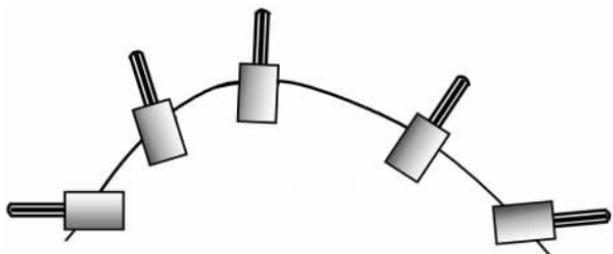


图 6-3 手榴弹的运动

例 6-1 游乐场内,操控旋转木马的工作人员发现有一位乘客感到不适,于是在 20 圈内他把旋转木马的角速度从 $3.40 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 均匀地降到 $2.00 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. 问(1)角速度减少的过程中,角加速度的值为多少?(2)这一减速的过程需要多少时间?

解 如果把乘客和旋转木马视为刚体,角速度均匀地减少意味着刚体的角加速度 β 是一常量,我们就可以利用式(6-4b),把角速度、角加速度和角位移联系起来. 把开始制动的时刻选为 0 时刻,0 到 t 时刻的角位移 $\Delta\theta = \theta - \theta_0 = 20.0 \times 2\pi = 125.7 \text{ rad}$; $\omega_0 = 3.40 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $\omega = 2.00 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. 根据式(6-4b),有

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \beta t \\ 2\Delta\theta\beta &= \omega^2 - \omega_0^2\end{aligned}$$

减速过程中的角加速度

$$\beta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\theta} = \frac{2.00^2 - 3.40^2}{2 \times 125.7} = -0.0301 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

减速过程所需时间

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\beta} = \frac{2.00 - 3.40}{-0.0301} = 46.5 \text{ s}$$

6.1.2 刚体定轴转动的角动量

现在来考虑刚体对固定轴的角动量. 如图 6-4, z 轴过 O 点且垂直于纸面向外,刚体绕 z 轴逆时针方向旋转,设刚体上第 i 个质点的质量为 m_i ,到 z 轴的距离为 r_i . 由于质点做圆周运动,由式(5-5),该质点对 z 轴的角动量为

$$L_{iz} = m_i r_i^2 \omega$$

对刚体上所有的质点的角动量求和,就构成刚体对 z 轴的角动量. 考虑到刚体上各质点有相同的角速度 ω ,刚体对 z 轴的角动量可写成

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega$$

令

$$J = \sum m_i r_i^2 \quad (6-6)$$

则刚体对 z 轴的角动量可表示为

$$L_z = J\omega \quad (6-7)$$

显然,刚体对固定轴的角动量,与质点的动量 $p = m\boldsymbol{v}$ 的形式相类似.

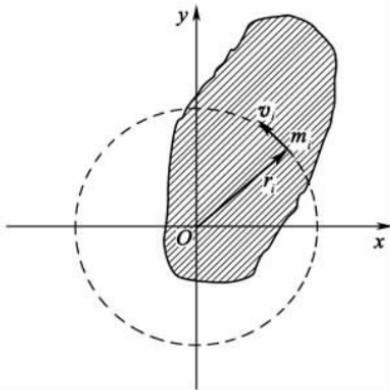


图 6-4 定轴转动刚体的角动量

6.1.3 刚体对固定轴的转动惯量

现在讨论由式(6-6)定义的物理量 J . 它是

由刚体质量及质量相对转轴的分布和轴的位置所决定, 与刚体的转动角速度无关, 与所受外力无关, 对一个绕定轴转动的刚体, 它是一个与运动状态无关的常量. 这个表示刚体质量对转轴分布特征的量, 叫做刚体对该轴的转动惯量.

对于刚体的质量是连续分布的情形, 式(6-6)的求和应写为积分的形式, 即

$$J = \int r^2 dm \quad (6-8)$$

式中 dm 为刚体内质量元的质量, r 为质元到转轴的垂直距离. 积分遍及刚体上所有质元.

在国际单位制中, 转动惯量的单位为千克二次方米 ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

例 6-2 一匀质圆盘, 质量为 M , 半径为 R . 相对通过盘心并垂直于盘面的轴, 求圆盘的转动惯量.

解 如图 6-5 所示, 圆盘可看成由无数个半径不同的同心圆环组成. 任取一个半径为 r , 宽度为 dr 的窄环带, 其面积 $ds = 2\pi r dr$, 该圆盘单位面积上的质量 $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$, 于是, 环带的质量 $dm = \sigma ds = \sigma 2\pi r dr$, 环带对转轴的转动惯量

$$dJ = r^2 \cdot dm = r^2 \cdot \sigma 2\pi r dr$$

据式(6-8), 圆盘对转轴的转动惯量

$$J = \int r^2 dm = \int_0^R \sigma 2\pi r^3 dr = \frac{1}{2} \sigma \pi R^4 = \frac{1}{2} MR^2 \quad (6-9)$$

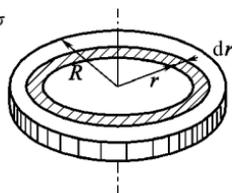


图 6-5 圆盘的转动惯量

例 6-3 求质量为 M , 长度为 L 的均匀细杆相对于下列两轴的转动惯量. (1) 转轴 OO' 过杆的中心并与杆垂直; (2) 转轴 OO' 过杆的端点并与杆垂直.

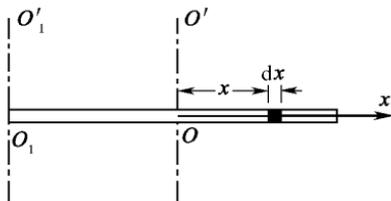


图 6-6 细杆的转动惯量

解 如图 6-6 所示, 以 O 点为原点建立坐标系, 在杆上取一线元 dx , 它到 O 点的距离

为 x , 单位长度上杆的质量 $\lambda = \frac{M}{L}$, 该线元的质量 $dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$, 根据式(6-8), 得到(1)杆相对 OO' 轴的转动惯量

$$J_O = \int_M r^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{12} M \cdot L^2 \quad (6-10)$$

(2) 杆相对 O_1O_1' 轴的转动惯量

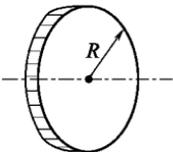
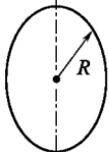
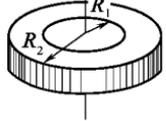
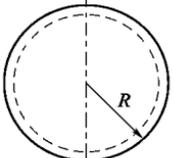
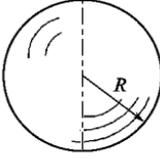
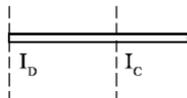
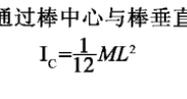
$$J_{O_1} = \int_M r^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(x + \frac{L}{2}\right)^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{3} ML^2 \quad (6-11)$$

从以上的计算结果可以看出, 刚体相对轴的转动惯量不仅与质量的大小有关(其他条件相同时, 刚体质量愈大, 转动惯量愈大); 还与质量对转轴分布有关(质量离转轴分布得愈远, 转动惯量愈大). 即使是同一刚体, 对不同转轴也会有不同的转动惯量, 例题 6-3 中 $J_O \neq J_{O_1}$ 就是一例.

其他一些有规则几何外形的匀质刚体, 可以用同样的方法计算出其转动惯量, 见表 6-1.

表 6-1

常见匀质刚体的转动惯量

<p>细圆环</p>  <p>转轴过环心且与环面垂直 $J = MR^2$</p>	<p>细圆环</p>  <p>转轴沿直径 $J = \frac{1}{2} MR^2$</p>	<p>圆筒</p>  <p>转轴沿几何轴线 $J = \frac{1}{2} M(R_2^2 - R_1^2)$</p>
<p>薄球壳</p>  <p>转轴沿球的直径 $J = \frac{2}{3} MR^2$</p>	<p>实心球体</p>  <p>转轴沿球的直径 $J = \frac{2}{5} MR^2$</p>	<p>细棒</p>  <p>通过棒中心与棒垂直 $I_c = \frac{1}{12} ML^2$</p>  <p>通过端尖与棒垂直 $I_D = \frac{1}{3} ML^2$</p>

对于有不规则外形, 或质量分布不均匀的刚体, 它们的转动惯量是通过实验

来测定的.

指出如下两点,对计算刚体的转动惯量是有益的.

(1) 刚体的转动惯量具有可加性. 如果一个刚体由多个外形规则的匀质刚体构成,那么这个组合刚体对转轴的转动惯量,等于各个匀质刚体对同一转轴的转动惯量之和.

(2) 可运用平行轴定理. 让我们重新审视例题 6-3 的结论: 转轴 OO' 过细杆的质心, 细杆对它的转动惯量 $J_O = \frac{1}{12}ML^2$; 转轴 O_1O_1' 与 OO' 轴平行, 细杆对 O_1O_1' 的转动惯量 $J_{O_1} = \frac{1}{3}ML^2$, 它也可以表示为

$$J_{O_1} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = J_O + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

上式中的 $\frac{L}{2}$ 正好是两平行轴之间的距离. 这一特征是否具有一般性呢?

设刚体的质量为 M , 它对过质心转轴的转动惯量为 J_c . 另有一转轴与该轴平行, 两轴相距 d , 刚体相对后一轴的转动惯量为 J , 则有

$$J = J_c + Md^2 \quad (6-12)$$

上式称为平行轴定理, 证明从略.

例 6-4 如图 6-7 所示, 一组合刚体由质量为 m , 长为 L 的细杆和质量为 M , 半径为 R 的匀质圆盘构成, 转轴过杆的端点 O 且垂直于纸面, 求组合刚体对该轴的转动惯量.

解 首先分别求出细杆和圆盘对转轴的转动惯量. 由式(6-11), 细杆对 O 轴的转动惯量为

$$J_1 = \frac{1}{3}mL^2$$

由式(6-9), 相对过盘心且垂直于盘面的转轴, 圆盘的转动惯量为

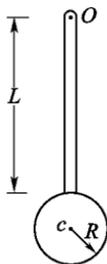
$$J_c = \frac{1}{2}MR^2$$

由平行轴定理, 圆盘对过 O 点的轴的转动惯量为

$$J_2 = J_c + M(R+L)^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M(R+L)^2$$

由刚体转动惯量可加性, 相对过 O 点的转轴, 组合刚体的转动惯量

$$J = J_1 + J_2 = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{2}MR^2 + M(R+L)^2$$



- 7 组合刚

6.2 刚体定轴转动定律

现在讨论刚体所受外力矩与作定轴转动刚体的角加速度之间的关系,即是刚体定轴转动定律.

6.2.1 刚体定轴转动定律

在刚体内任取一质元(可视为质点),质量为 m_i ,质元到固定转轴的距离为 r_i ,质元受到内外力矩的作用. 设对固定轴的内力矩为 M_i^I ,外力矩为 M_i^e . 由式(5-5),该质元对固定轴的角动量为 $m_i r_i^2 \omega$,于是相对该轴,质元对轴的角动量定理可表示成

$$M_i^I + M_i^e = \frac{d}{dt}(m_i r_i^2 \omega)$$

对整个刚体有

$$\sum M_i^I + \sum M_i^e = \frac{d}{dt}(\sum m_i r_i^2) \omega$$

式中 $\sum M_i^I$ 是刚体对转轴的内力矩之和. 内力总是成对出现,每一对内力(作用力与反作用力)等值、反向、共线,它们有着相同的力臂,因此一对内力的力矩之和必为零,从而 $\sum M_i^I = 0$. 又因为绕定轴转动的刚体的转动惯量 $J = \sum m_i r_i^2$ 是一常量,于是

$$\sum M_i^e = J \frac{d\omega}{dt} = J\beta$$

即

$$M = J\beta \quad (6-13)$$

式中 $M = \sum M_i^e$ 是对固定轴的外力矩之和,它和转动惯量必须是相对同一转轴.

上式称为定轴刚体的转动定律,有着与牛顿第二定律类似的形式. 它表明:对绕固定轴转动的刚体,刚体产生的角加速度与作用在刚体上的合外力矩成正比.

必须指出,这里 M 是力对轴的力矩. 因此,如果力的作用线与转轴平行或者相交,那么力对该轴的力矩必为零,也不会产生角加速度. 试想一下,若要转动一

扇门,沿着门轴方向用力或者沿着门所在的平面用力都是不行的,其原因就在于此。

例 6-5 如图 6-8 所示,质量分别为 m 和 $2m$,半径分别为 r 和 $2r$ 的两匀质圆盘,同轴粘贴在一起。它可以绕通过盘心且垂直于盘面的水平轴转动(不计摩擦),大小圆盘边缘都绕有轻绳,绳端分别挂有质量均为 m 的重物 A 和 B,求(1)盘的角加速度大小;(2)两边重物所受的拉力。

解 做平动的两重物可视为质点,两匀质圆盘绕同一固定轴转动,可以运用隔离法分开讨论。

设 A, B 重物上绳子的拉力分别为 T_1, T_2 ,并选定 A 物上重力的方向为正。对两边的重物运用牛顿定律,有

$$mg - T_1 = ma_1 \quad (1)$$

$$T_2 - mg = ma_2 \quad (2)$$

组合圆盘受到的重力、轴的支持力和两端绳子的拉力,其中重力和支持力的作用线通过转轴,对转轴的力矩为零。利用刚体的转动定律,并注意到组合圆盘的转动惯量为

$$J = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}(2m)(2r)^2 = \frac{9}{2}mr^2$$

有

$$T_1 2r - T_2 r = \left(\frac{9}{2}mr^2\right)\beta \quad (3)$$

不考虑绳子的伸长,则存在以下约束方程

$$a_1 = 2r\beta \quad (4)$$

$$a_2 = r\beta \quad (5)$$

联立式(1),(2),(3),(4)和(5),得

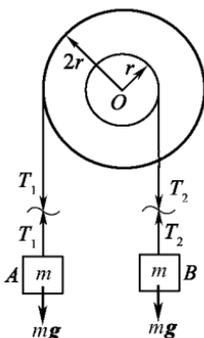
$$\beta = \frac{2g}{19r}$$

$$T_1 = \frac{15}{19}mg$$

$$T_2 = \frac{21}{19}mg$$

例 6-6 矩形薄板边长为 a 和 b ,质量为 m ,绕竖直线 OO' 转动。若它的初角速度为 ω_0 ,转动时各部分均受到空气阻力,阻力的大小与面积大小成正比,与速度的二次方成正比,比例系数为 k ,阻力方向垂直于薄板平面。多少时间后,薄板的角速度变成 $\frac{1}{2}\omega_0$?

解 如图 6-9 所示,建立坐标系,任取与 OO' 轴平行的窄条面元(图中阴影部分),其面积为 $dS = bdr$,该面元上所受的阻力



6-8 重物与圆盘

$$df = -k v^2 dS = -k \omega^2 r^2 b dr$$

它对 OO' 轴的力矩

$$dM = r df = -kb\omega^2 r^3 dr$$

整个薄板对 OO' 轴的力矩

$$M = \int dM = \int_0^a -kb\omega^2 r^3 dr = -\frac{1}{4}kb\omega^2 a^4$$

由式(6-11), 薄板绕板边转动的转动惯量

$$J = \frac{1}{3}ma^2$$

由转动定律得

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{-\frac{1}{4}kba^4\omega^2}{\frac{1}{3}ma^2} = -\frac{3kba^2}{4m}\omega^2$$

显然, 角加速度 β 是角速度 ω 的函数. 当角速度随 t 变化, 角加速度 β 也随 t 变化. 不是常数,

不能依据式(6-4b)计算. 把 $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ 代入上式, 分离变量后积分, 得

$$\int_0^t dt = -\frac{4m}{3kba^2} \int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{d\omega}{\omega^2}$$

于是, 薄板速度从 ω_0 减为 $\frac{\omega_0}{2}$ 所需时间为

$$t = \frac{4m}{3kba^2\omega_0}$$

应该指出, 计算力矩时, 不能先计算整个薄板上的合力, 再求合力的力矩. 想一想, 为什么?

6.2.2 定轴转动中的功和能

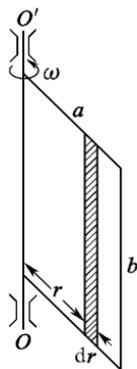
转动定律可做如下变形

$$M = J\beta = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = J \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

即

$$M d\theta = J \omega d\omega = d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) \quad (6-14)$$

式中 $d\theta$ 为时间微元 dt 内刚体的角位移. 式(6-14)具有什么物理含义呢?



- 9 转动的薄板

1. 刚体的转动动能

首先考虑式(6-14)中右边括号中的内容. 把式(6-6)代入其中, 有

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\sum(m_i r_i^2)\omega^2 = \sum\left(\frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2\right) = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)$$

在刚体的定轴转动中, 质量为 m_i 的质点做半径为 r_i 的圆周运动. v_i 是质点的速率, $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ 是质点的动能, 求和遍及刚体上所有质点, 其结果必为刚体定轴转动时的动能. 于是刚体的转动动能可以写为

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (6-15)$$

把刚体的转动动能与质点的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 做比较, 两者形式上非常相似, 只不过转动惯量取代了质量, 角速度取代了线速度.

2. 力矩的功

现在考虑式(6-14)左边 $Md\theta$ 的含义: 我们已经知道式(6-14)的右边是刚体的转动动能变化, 而功是能量转化的量度, 那么 $Md\theta$ 是否为力做的功呢?

如图 6-10 所示, 刚体绕固定轴(该轴过 O 点且垂直于纸面)转动, F 为作用于刚体某质点的外力, r 为质点到 O 轴的距离. 因为 F 沿 r 方向分力对 O 轴的力矩为零(分力的作用线与 O 轴相交), 所以 F 对 O 轴的力矩 $M = rF\cos\varphi$. 于是刚体转动微小角位移 $d\theta$ 的过程中, 有

$$Md\theta = F\cos\varphi r d\theta = F\cos\varphi |dr| = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

式中, $r d\theta$ 为受力点质点运动的路径, 可以认为它等于质点位移的大小 $|dr|$, φ 为 F 与 dr 间夹角. 从力与位移的标积可看出: 在刚体转动 $d\theta$ 过程中, $Md\theta$ 是力对刚体所做的元功. 即

$$dA = Md\theta \quad (6-16)$$

这里, 功与刚体的角位移相联系, 是功的特殊表示形式, 习惯上称为力矩的功. 和力的功 $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 等价. 两者是相对同一物理过程的不同描述形式.

与之对应的功率

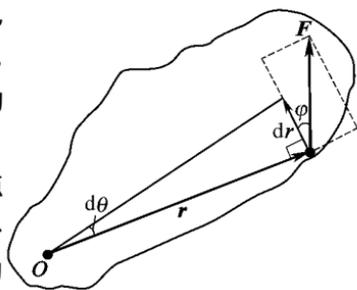


图 6-10 力矩的功

$$P = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega \quad (6-17)$$

有两点应该特别指出：

(1) 图 6-10 中作用在刚体上的力 F ，正好位于与转轴垂直的平面（纸面）内。而在一般情况下， F 与该平面有一夹角。如图 6-11，此时 F 可分解为沿转轴的分力 $F_{//}$ 和垂直于转轴的分力 F_{\perp} ，因为 $F_{//}$ 对 O 轴的力矩为零，所以 F_{\perp} 对转轴的力矩，就是 F 对转轴的力矩。

(2) 上式中 M 应是作用在刚体上的外力矩之和， $M = \sum M_i^e$ ，不包括内力矩，不考虑内力矩的功。这是因为内力是成对出现的，一对内力对轴的力矩之和为零，而刚体内任意质元的角位移都相同，故合内力矩的功也为零。

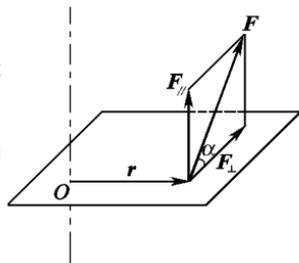


图 6-11 分力的力矩

3. 刚体定轴转动的动能定理

从以上分析不难看出，式(6-14)是刚体做定轴转动时的动能定理，是动能定理的微分形式。即

$$Md\theta = d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) \quad (6-18)$$

设 $t=0$ 时刻刚体的角位置、角速度分别为 θ_0, ω_0 ； t 时刻为 θ, ω ，上式两边积分得

$$\int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$$

由此得到动能定理的积分形式

$$\int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 \quad (6-19)$$

作为上式的特例，当力矩 M 为一常量时，有

$$M(\theta - \theta_0) = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 \quad (6-20)$$

在质点和定轴刚体组成的系统中，引入转动动能和力矩做功的新形式之后，质点力学的功能原理和机械守恒定律仍可在原有条件下成立。其中，刚体的重力势能是各质元重力势能之和。可以证明，一个体积不太大的刚体，其重力势能等于它的全部质量集中在质心时所具有的势能。

例 6-7 如果在例题 6-5 的装置中(如图 6-8 所示)， A, B 两重物在同一高度，当 A 重物从静止下落 h 时，求此时两重物的速度和组合圆盘的角加速度。

解 由于绳子不可伸长,当 A 重物下落 h 时,刚体的角位移 $\Delta\theta = \frac{h}{2r}$,于是 B 重物上升的高度 $h' = \Delta\theta r = \frac{h}{2}$. 以两重物,组合圆盘和地球为系统,在 A 重物下降过程中,没有外力做功,也没有非保守内力做功,因此系统的机械能守恒. 有

$$mgh + mgh = \frac{3}{2}mgh + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

由于 $v_A = 2r\omega$, $v_B = r\omega$, $J = \frac{9}{2}mr^2$, 可得

$$\omega^2 = \frac{2gh}{19r^2}$$

于是

$$v_A = 2r\omega = 2\sqrt{\frac{2gh}{19}}, \quad v_B = r\omega = \sqrt{\frac{2gh}{19}}$$

考虑到作用在刚体上的力矩是常量,根据式(6-4b),有

$$2\Delta\theta\beta = \omega^2 - \omega_0^2 = \omega^2$$

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\Delta\theta} = \frac{2gh}{19r^2} \cdot \frac{1}{2h/2r} = \frac{2g}{19r}$$

6.3 对定轴的角动量守恒

6.3.1 对定轴的角动量定理

质点系中若有离散质点,利用质点的角动量定理式(5-8),对所有质点求和,有

$$\int_{t_0}^t \sum \mathbf{M}_i dt = \sum \mathbf{L}_i - \sum \mathbf{L}_{0i}$$

这里,内力矩的和为零,令外力矩的和 $\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{M}$,质点系的角动量 $\sum \mathbf{L}_i = \mathbf{L}$,初值 $\sum \mathbf{L}_{0i} = \mathbf{L}_0$,得到一般质点系的角动量定理

$$\int_{t_0}^t \mathbf{M} dt = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 \quad (6-21)$$

该矢量式向固定转轴(如 z 轴)投影,得一个标量式,即

$$\int_{t_0}^t M_z dt = L_z - L_{0z} \quad (6-21a)$$

这表明:相对某固定轴,质点系所受的角冲量等于系统角动量的增量.这就是质点系对定轴的角动量定理,它也适用于由离散质点和定轴刚体组成的系统.为简便计,往往省略上式中物理量的下标 z ,而各物理量的含义不变.

例 6-8 运用质点系对定轴的角动量定理,重新求解例 6-5 中组合圆盘的角加速度.

解 以两重物和组合圆盘为系统,两重物所受重力矩为外力矩,轴的反作用力和圆盘的重力都与转轴相交,对转轴的力矩为零.取 A 重物从静止开始下落的瞬间为零时刻, t 时刻圆盘的角速度为 ω ,由对轴的角动量定理式(6-21a),有

$$(2rmg - rmg)t = (2rmv_A + rmv_B + J\omega) - 0$$

又 $v_A = 2r\omega$, $v_B = r\omega$ 和 $J = \frac{9}{2}mr^2$, 于是

$$(2rmg - rmg)t = \left(4mr^2 + mr^2 + \frac{9}{2}mr^2\right)\omega \quad (1)$$

这里,外力矩是常量, β 也是常量,且 $\omega_0 = 0$,由式(6-4b)有

$$\omega = \beta t \quad (2)$$

联立(1),(2)两式,得

$$\beta = \frac{\omega}{t} = \frac{2g}{19r}$$

这一定理存在两种特例:

(1) 如果质点系由离散质点和绕定轴转动的刚体构成,但这些离散质点和刚体的质元对转轴有相同的角速度,即 $\omega_i = \omega$. 如图 6-12 所示,游标 P 和滑尺 A 绕垂直于纸面 O 轴转动,尽管游标与滑尺之间有相对运动,但它们对 O 轴的角速度相同,此时质点系的角动量能用角量 $J\omega$ 来描述,从而对定轴的角动量定理可写成

$$\int_{t_0}^t M dt = J\omega - J_0\omega_0 \quad (6-21b)$$

这里系统的转动惯量是一变量.

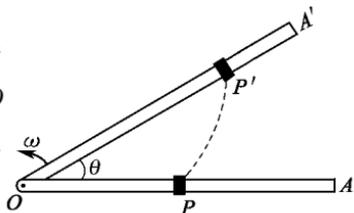


图 6-12 游标和滑尺

(2) 如果质点系是绕定轴转动的刚体,则转动惯量 J 为一常量,于是

$$\int_{t_0}^t M dt = J(\omega - \omega_0) \quad (6-21c)$$

6.3.2 对定轴的角动量守恒

相对固定轴,若质点系的合外力矩始终为零,即 $M=0$,则系统的角动量保

持不变. 有

$$L = \text{常量} \quad (6-22a)$$

这一结论叫对定轴的角动量守恒定律. 对于上面讨论的两种特例, 可写成

$$J\omega = \text{常量} \quad (6-22b)$$

此时, 系统的角速度与转动惯量成反比.

利用角动量守恒定律, 可以解释天体系统的盘形结构. 宇宙中, 类似太阳系、银河系、河外旋涡星系等这样不同层次的天体系统, 都具有旋转的盘状结构, 如图 6-13 所示. 如果承认天体系统是气云受万有引力作用收缩而成. 那么, 为什么形成了旋转的盘状结构, 而不是球形结构呢? 为了讨论这一问题, 现在把天体系统看成是不受外力的孤立系统, 它由弥漫在很大空间范围内的原始气云构成, 有一定的初始角动量 L . 在万有引力作用下, 气云逐渐收缩, 转动惯量减小. 由于角动量守恒, 气云粒子在垂直于 L 方向的速度就会增大, 阻碍了气云在垂直于 L 方向的进一步收缩. 但在平行于 L 方向上却不存在这种阻碍, 收缩快得多, 于是天体系统形成了朝同一方向旋转的盘状结构.

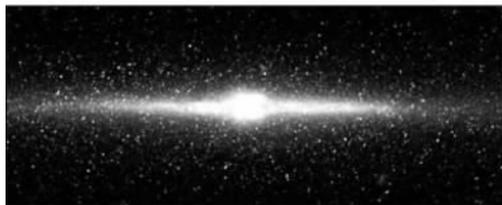


图 6-13 天体系统的盘状结构



图 6-14 滑冰者改变转速

日常生活中也不乏角动量守恒的例子. 花样滑冰运动员总要做很多旋转动作, 他们常利用角动量守恒来改变旋转的速度. 如图 6-14 所示, 当滑冰者伸开自己的四肢时, 转动惯量较大, 初始转动的角速度较小, 一旦她收拢四肢, 让身体的各部分尽量靠近过足尖的竖直轴, 转动惯量就减小. 由于角动量守恒 (忽略冰刀对冰的摩擦), 她的转动角速度就会显著变大.

例 6-9 为招揽顾客, 小贩在匀质圆盘上放置一只小白鼠, 当小鼠靠近转盘的边沿跑动时, 转盘绕过盘心的竖直轴反向转动. 如图 6-15 所示, 设小鼠的质量为 m , 轨迹圆的半径为 r , 转盘质量为 M , 半径为 R . 问小鼠从静止开始相对圆盘跑一圈的过程中, 转盘转动的角度是多少?

解 把小鼠、转盘看成系统, 鼠与圆盘间的作用力是内力, 鼠与圆盘的重力都与转轴平行, 忽略轴的摩擦, 外力矩为零, 系统对转轴的角动量守恒. 注意: 到静止时系统的角动量为

零,故有

$$0 = mr^2 \omega_{mG} + \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \omega_{dG} \quad (1)$$

式中 ω_{mG} 、 ω_{dG} 分别是小鼠、圆盘相对地面惯性系的角速度。考虑到小鼠相对地面的角速度等于它相对圆盘的角速度与圆盘相对地面的角速度之和,即

$$\omega_{mG} = \omega_{md} + \omega_{dG} \quad (2)$$

联立式(1),(2)有

$$\omega_{dG} = - \frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2} MR^2} \omega_{md}$$

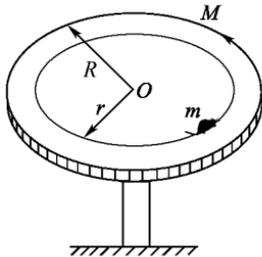


图 6-15 例 6-9 图

这里,负号意味着两者的转动方向相反。根据式(6-2),小鼠在盘上跑一圈的时间($t_1 \sim t_2$)内,圆盘对地的角位移

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{dG} &= \int_{t_1}^{t_2} \omega_{dG} dt = - \frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2} MR^2} \int_{t_1}^{t_2} \omega_{md} dt \\ &= - \frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2} MR^2} \cdot 2\pi = - \frac{4\pi mr^2}{2mr^2 + MR^2} \end{aligned}$$

值得特别指出,角动量定理和角动量守恒定律只适于惯性系。

例 6-10 如图 6-16,质量为 m 的质点沿光滑的表面滑下,下滑 h 高度后,与匀质竖直杆的底部碰撞,并粘贴在杆上。设细杆的质量是 M ,长度是 l ,并可绕过 O 点的水平轴转动,求杆和质点碰撞后向上摆动的最大角度 θ 。

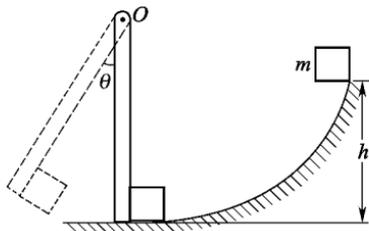


图 6-16 例 6-10 图

解 整个物理过程可分为三个简单阶段:

(1) 质点由高处下滑尚未与杆相撞。以质点和地球为系统,该过程中机械能守恒。选质点与杆碰撞前瞬间的位置为零势能点,有

$$mgh = \frac{1}{2} mv_0^2 \quad (1)$$

(2) 质点与有固定转轴的杆相撞。以细杆和质点为系统,该过程中,由于转轴对细杆的

作用力是外力,系统动量不守恒.但该力对转轴的力矩为零,杆与质点的重力的力矩也为零.于是系统角动量守恒.用 $J = ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2$ 表示碰后系统(包括质点和杆)对轴的转动惯量,有

$$lmv_0 = (ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2)\omega \quad (2)$$

(3) 质点与杆整体向上摆动.以质点、杆和地球为系统.该过程中,系统的机械能守恒.取质点的最低位置为零势能点,则有

$$\frac{1}{2}Mgl + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgl(1 - \cos\theta) + Mgl\left(1 - \frac{1}{2}\cos\theta\right) \quad (3)$$

联立式(1),(2)和(3),解得

$$\theta = \arccos\left[1 - \frac{6m^2h}{l(2m+M)(3m+M)}\right]$$

6.4 守恒律与对称性

6.4.1 对称性与对称操作

对称的概念源于生活,生活中的对称随处可见.人体的外形本身就是左右对称的.雪花有对称的六角形花样,吃饭用的碗、圆盘都有对称的外形,上面的花纹也呈对称分布.凡此种种,都属于物体形状在空间的几何对称.这类对称有下面三种常见的形式:

(1) 空间反射对称

如果形体被某平面分成两半,其中一半正好是另一半的镜像(镜面在该平面处),那么这一形体就具有空间反射对称,也称为镜像对称.人体外形就具有空间反射对称的特征.

(2) 空间平移对称

如果形体做一平移后,仍与原形体重合,该形体就具有空间平移对称.无穷大的平面坐标纸沿横向或纵向平移一个单位格后,能与原坐标纸重合,一条直线沿直线方向平移任意大小,总能与原直线重合.因此,坐标纸、直线都具有平移对称性.

(3) 空间转动对称

形体绕固定轴旋转某一角度后,能与原形体重合,这一形体就具有空间转动对称性.雪花绕其垂直中心轴转动 60° 后,会与原形体重合;球体绕直径转任意

角度后,总会与原球体重合. 它们都具有转动对称的特征,且后者比前者转动对称的级次更高.

对称观念被提炼之后,渗透到物理学领域. 物理学的对称性有如下含义:若物理规律(或物理量)在某种变换或操作下能保持不变,则这个物理规律(或物理量)对该操作是对称的;而这种操作叫对称操作. 从这一意义上讲,物理规律(或物理量)的对称性又称为不变性.

以两质点组成的孤立系统为例,把整个系统做空间平移,两质点的相对间距保持不变,则系统遵从的物理规律(例如系统的势能),不因平移而变化. 这说明系统的物理规律具有空间平移对称性,空间平移操作是物理规律的对称操作. 与此类似,空间转动操作也是它的对称操作.

时间平移对称也是最常见的对称形式之一. 例如牛顿运动定律在过去、现在和将来都是成立的,不会因时间平移而改变. 因此,时间平移操作也是物理规律的对称操作.

6.4.2 对称性与守恒律

20 世纪初叶,对称性与守恒律的关联被揭示出来. 可以证明,一种对称性必然导致一条守恒律. 能量守恒、动量守恒和角动量守恒就分别与下面三种对称性密切相关.

1. 时间平移对称性与能量守恒律

时间平移对称性(即时间均匀性)导致了能量守恒. 现在讨论由两质点组成的孤立系统,设两质点的质量分别为 m_1, m_2 , t 时刻的速度为 v_1, v_2 , 坐标为 x_1, x_2 . 把系统进行时间平移,从 t 时刻移到 $t' = t + \Delta t$ 时刻,时间平移不变性意味着系统的势能与时刻 t 无关,即

$$E_p(x_1, x_2, t + \Delta t) = E_p(x_1, x_2, t)$$

把等式左边用泰勒级数展开

$$E_p(x_1, x_2, t + \Delta t) = E_p(x_1, x_2, t) + \frac{\partial E_p}{\partial t} \Delta t + \text{高次项}$$

若要上两式的右边对任意 Δt 都相等,必有

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = 0$$

即势能函数不能显含时刻 t , 于是势函数

$$E_p = E_p(x_2, x_1)$$

系统的能量(这里限于机械能)可表示为

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + E_p(x_2, x_1)$$

对时间求导,有

$$\frac{dE}{dt} = m_1 v_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 v_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{\partial E_p}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial E_p}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}$$

考虑到

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt}; \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} \text{ 和 } F_1 = -\frac{\partial E_p}{\partial x_1}; \quad F_2 = -\frac{\partial E_p}{\partial x_2}$$

于是

$$\frac{dE}{dt} = \left(m_1 \frac{dv_1}{dt} - F_1 \right) v_1 + \left(m_2 \frac{dv_2}{dt} - F_2 \right) v_2 = 0$$

$$E = \text{常量}$$

即系统的能量守恒.

2. 空间平移对称性与动量守恒律

空间平移对称性(即空间均匀性)导致了动量守恒. 仍以两质点组成的孤立系统为例,如图 6-17 所示,考虑系统沿 x 轴正方向平移 Δx ,两质点的位置从 x_1, x_2 分别移到 $x_1' = x_1 + \Delta x, x_2' = x_2 + \Delta x$. 因为空间平移操作是对称操作,空间平移对称性意味着系统的势能保持不变,势能值与粒子的具体坐标无关,只与两质点的间距有关,即

$$E_p(x_2, x_1) = E_p(x_2', x_1') = E_p(x)$$

式中 $x = x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$

因此,两质点受到的力(保守力)分别为

$$F_1 = -\frac{\partial E_p(x)}{\partial x_1} = -\frac{\partial E_p(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{\partial E_p(x)}{\partial x}$$

$$F_2 = -\frac{\partial E_p(x)}{\partial x_2} = -\frac{\partial E_p(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_2} = -\frac{\partial E_p(x)}{\partial x}$$

系统受到的力 $F = F_1 + F_2 = 0$

利用动量定理的微分形式, $F = \frac{dp}{dt}$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = 0$$

有

$$p = p_1 + p_2 = \text{常量}$$

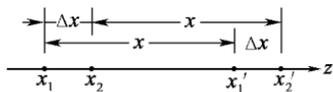


图 6-17 两质点系统的空间平移

即系统的动量守恒.

3. 空间转动对称性与角动量守恒律

空间转动对称性(即空间各向同性)导致了角动量守恒. 如果把两质点组成的系统绕任意轴(比如柱坐标系的 z 轴)转动 $\Delta\theta$, 两质点分别从 θ_1, θ_2 变到 $\theta' = \theta_1 + \Delta\theta, \theta_2' = \theta_2 + \Delta\theta$, 转动前后系统的势函数分别用 $E_p(\theta_1, \theta_2)$ 、 $E_p(\theta_1 + \Delta\theta, \theta_2 + \Delta\theta)$ 表示. 空间转动对称性意味着系统的势函数与转动的角度无关, 即

$$E_p(\theta_1 + \Delta\theta, \theta_2 + \Delta\theta) = E_p(\theta_1, \theta_2)$$

把等式的左边用泰勒级数展开

$$E_p(\theta_1 + \Delta\theta, \theta_2 + \Delta\theta) = E_p(\theta_1, \theta_2) + \left(\frac{\partial E_p}{\partial \theta_1} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} \right) \Delta\theta + \text{高次项}$$

若要以上两式的右边对于任意的 $\Delta\theta$ 都相等, 必有

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial \theta_1} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} \right) = 0$$

为简单计, 在柱坐标系中讨论该问题, 如图 6-18 所示.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

又考虑到 $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$, 对质点 1, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial E_p}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial E_p}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} \\ &= \frac{\partial E_p}{\partial x_1} (-r_1 \sin \theta_1) + \frac{\partial E_p}{\partial y_1} (r_1 \cos \theta_1) \\ &= y_1 F_{1x} - x_1 F_{1y} \\ &= -M_{1z} \end{aligned}$$

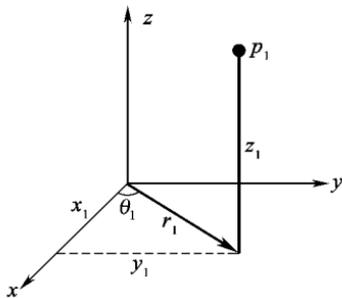


图 6-18 柱坐标系

上式的最后一步用了式(5-3b), M_{1z} 是相对 z 轴质点 1 所受的力矩. 同理, 对质点 2, 有

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} = -M_{2z}$$

系统所受的力矩

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial \theta_1} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} \right) = 0$$

由定轴的角动量定理

$$\frac{dL_z}{dt} = 0$$

于是,相对 z 轴,系统的角动量守恒

$$L_z = \text{恒量}$$

由于空间的各向同性, z 轴可以取任何方向.这就是说对任何轴转动,系统的角动量都守恒.

能量守恒,动量守恒及角动量守恒的根源在于时空的均匀性和各向同性,它不依赖于物质的具体内容.不论是微观的还是宏观的,是粒子还是场,所有在均匀和各向同性时空中运动的物质都必须遵从能量、动量和角动量守恒律.

除了以上三种时空对称外,量子力学中,还有多种对称变换与守恒律相关联.如电磁规范变换导致电荷守恒,空间反演变换导致宇称守恒(近似的),色规范变换导致色荷守恒,等等.由于对称性与守恒定律有如此紧密的联系,又是跨越物理学各领域的普遍法则,因此可以利用它们去探索人类知之甚少的微观领域,寻找物质结构更深层次的奥妙.

6.4.3 对称破缺

如果说对称性反映了自然界的统一性,那么对称破缺就反映了自然界的多样性.在具体了解对称破缺之前,先来看两个对称破缺的例子:正方形沿其对角线具有空间反射对称性,可是,如果这一正方形某一边的中点有一黑点,它的空间反射对称性就遭受破坏,产生了对称破缺;原本具有时间平移对称性的质点系中,若从某时刻起,外力对系统做功,系统的能量就显含时间,系统的时间平移对称遭到破坏,产生了对称破缺,导致系统的能量不再守恒,这也是对称破缺.

物理学中存在两类重要的对称破缺:明显破缺和自发破缺.

1. 对称性明显破缺

由于较弱的相互作用不具备某种对称性,引起对较强的相互作用的对称性的破坏,这类对称破缺叫做明显破缺.在这种情况下,作为整体,对称性是近似的,它只有在可以忽略较弱相互作用时才近似成立.

明显破缺最显著的例子是李政道和杨振宁提出的弱相互作用下宇称不守恒.自然界的力不外乎四类:强相互作用,弱相互作用,电磁作用和引力作用.前两类力是近程力,在原子核内部起作用,后两类力是远程力.而宇称是量子力学中用来描述微观粒子特征的物理量,这里的“宇称”可以理解为空间反射对称性.量子力学中,微观粒子的运动状态用波函数 $\Psi(x, y, z)$ 描述.如果微观粒子的运动规律具有空间反演不变性,则粒子的波函数不是偶函数就是奇函数,波函数是偶函数的粒子具有偶宇称,否则粒子具有奇宇称.如果粒子的波函数既不是偶函

数也不是奇函数,它就没有确定的宇称,当然就不具有空间反射对称性.可以证明,只要微观粒子具有空间反演不变性,由这种微观粒子组成孤立系统就具有确定的宇称,且奇偶性保持不变.这就是宇称守恒律.

在研究粒子衰变的过程中,李政道和杨振宁提出,原本在强相互作用和电磁作用中粒子所具有空间左右对称性遭受弱相互作用的破坏,产生了对称破缺,粒子系的宇称不再守恒.这一预言不久被物理学家吴健雄用实验证实,这一结论对推动物理学的发展产生了深远的影响.

2. 对称性自发破缺

对称性明显破缺不依赖于系统所处的状态,而对称性自发破缺则依赖于系统所处的状态.随着某些条件(例如温度)的变化,处于对称性自发破缺状态的系统常常可以通过相变过渡到对称的状态.

铁磁体的相变就是这方面最好例子.常温下的铁磁体处于对称破缺状态,当温度升到临界温度以上时,它恢复到对称状态.反之,温度降到临界温度以下,系统又过渡到对称破缺状态.这是因为在温度高于居里温度(临界温度)时,铁磁体的分子磁矩是无序的,总和磁矩为 0,磁矩的取向分布呈现各向同性,满足转动对称性.如果温度降到居里温度以下,分子磁矩在单一磁畴范围内取某一方向的有序排列,体系的基态不满足转动对称性,而在空间选择了一个特定的方向,产生了对称自发破缺.

电饭锅正是利用铁磁自发破缺来控制电路.锅内感温磁钢(镍锌铁氧体)的居里温度为 $103^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$,常温下感温磁钢是铁磁质,能吸引硬磁体,接通电路,给饭锅加热.当饭好水干,锅内温度超过 103°C 时,磁钢恢复对称性,是顺磁质.不再被硬磁体吸引,加热电路断开.

概而言之,对称与破缺是不同物质形态运动特征的两个方面,对称体现了它们的共性,而破缺则体现了各自的个性,两者一起构成了既和谐统一又丰富多彩的世界.

思考题

6-1 有两力作用在同一个有固定轴的刚体上,当两力的合力为零时,它们对轴的力矩就一定为零吗?当两力对轴的力矩为零时,它们的合力也一定为零吗?试举例说明.

6-2 当刚体绕轴转动的角速度很大时,作用在刚体上的力或力矩是否一定很大?

6-3 二氧化碳的温室效应直接导致地球极地冰川融化,而冰川融化将产生多种灾难性的后果,试说明两极冰川融化是地球自转速度变化的原因之一.

6-4 用手指顶一根匀质细杆,长的杆容易平衡,而短的杆反而很难保持平衡,这是

为什么？

6-5 在位置矢量、位移、速度、动量、角动量、力和力矩中，哪些物理量是相对一定点(或定轴)的？哪些量与定点(或定轴)选择无关？

6-6 试分析下面论述是否正确：“质点系的动量为零，则质点系的角动量也为零；质点系的角动量为零，则质点系的动量为零。”

6-7 旋转舞台绕垂直中心轴在水平面内做无摩擦自由转动，主持人从台的边缘走向舞台中心，以人与舞台为系统，则系统的转动惯量、角速度、角动量和动能是否变化？怎样变化？

6-8 一根匀质直棒竖直悬挂在光滑的水平轴上，转轴穿过棒的上端。一粒子弹沿水平方向飞来，击中棒的下端，以子弹和棒为系统，两者碰撞的过程中，动量是否守恒？角动量是否守恒？为什么？

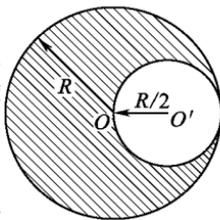
6-9 指出一个正方形所具有的几何对称。如果在正方形一边的中点标上黑点，试讨论其对称破缺的情况。

6-10 就物理规律的时间平移对称、空间平移对称和空间转动对称，试各举一例。

习题 6

6-1 飞轮从静止开始作匀加速转动，在最初 2 分钟转了 3600 转，求飞轮的角加速度和第 2 秒末的角速度。

6-2 如图所示，从一个半径为 R 的均匀薄圆板上挖去一个直径为 R 的小圆板，所形成圆洞的圆心在大圆板半径的中点上，所剩薄板的质量为 m 。求此时薄板对于通过大圆板圆心而与板面垂直的轴的转动惯量。



题 6-2 图

6-3 如果把月亮当成均匀球体，其质量为 7.35×10^{22} kg，半径为 1.74×10^6 m，自转周期为 27.3 天，求月球自转的角动量。

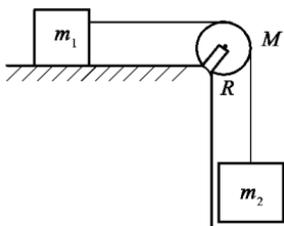
6-4 如图所示，滑轮可视为半径为 R ，质量为 M 的匀质圆盘，滑轮与绳子间无滑动，水平面光滑，若 $m_1 = 50$ kg， $m_2 = 200$ kg， $M = 15$ kg， $R = 0.10$ m，求物体的加速度和绳子中的张力。

6-5 图中半径各为 r_1 和 r_2 ，质量各为 m_1 和 m_2 的两轮用皮带连接起来，在主动轮 1 上作用一转动力矩 M_1 (垂直纸面向内)，在从动轮 2 上有一与 M_1 相反的阻力矩 M_2 ，二轮均可视为匀质圆盘。若皮带不打滑，且忽略皮带的质量，则两轮的角加速度各为多少？

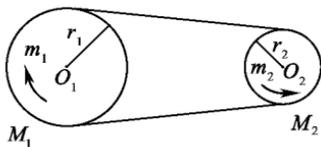
6-6 如图所示，均质圆柱体的质量为 m_1 ，半径为 r ，重物的质量为 m_2 。最初系统处于静止，后释放重物使之下落，并带动圆柱体转动。不计阻力、绳子质量及伸长

(1) 当重物下落 h 高度时，圆柱体的角速度是多少？

(2) 去掉重物，用竖直向下的恒力 $F = m_2 g$ 来取代它，下拉 h 距离后，圆柱体的角速度

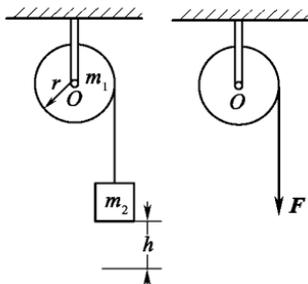


题 6-4 图

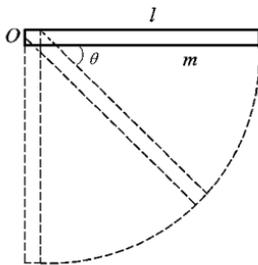


题 6-5 图

又是多少？比较两次的结果。



题 6-6 图



题 6-7 图

6-7 如图,有一匀质细杆,质量为 m , 长为 l , 可绕过杆端 O 点的水平轴自由转动. 若初态静止的细杆从水平位置摆下, 求:

- (1) 初始时刻的角加速度;
- (2) 杆转过 θ 角时的角速度.

6-8 飞轮对自身轴的转动惯量为 J_0 , 初角速度为 ω_0 , 作用在飞轮上的阻力矩为 M (常量). 试求:

- (1) 飞轮的角速度减到 $\frac{\omega_0}{2}$ 时所需的时间 t ;
- (2) 在这一段时间内飞轮转过的圈数 N .

6-9 在习题 6-4 的装置中, 运用系统的角动量定理求解物体的加速度.

6-10 A, B 两个溜冰人, 他们的质量各为 70 kg , 各以 $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率在相距 1.5 m 的平行线上相对滑行. 当 they 要相遇而过时, 两人互相拉起手, 因而绕他们的对称中心做圆周运动, 如图所示. 将二人作为一个系统, 求:

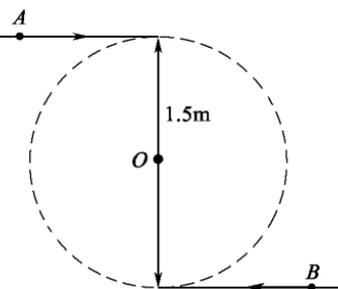
- (1) 该系统的总动量和总角动量;
- (2) 求开始作圆周运动时系统的角速度.

6-11 如图所示, 质量为 0.25 kg 的小球, 在一根细长的匀质管中滑动. 管长 1 m , 质量为 1 kg , 可绕过质心 C 且垂直于管线的铅直轴转动. 设小球通过 C 点时, 管的角速度

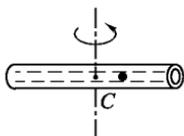
为 $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 试求小球离开管口时管的角速度.

6-12 一匀质细棒的长度为 0.5 m , 质量为 4.0 kg , 可绕铅直轴在水平面内转动, 转轴过棒的中心, 棒的初态静止. 一颗 3.0 g 的子弹在棒所在的水平面上飞行, 射向棒的端点, 从上向下看, 子弹的方向与棒的夹角为 60° (如图所示). 如果子弹射入棒的端点后留在棒中, 且碰后子弹与棒的角速度为 $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 求碰前子弹的速率.

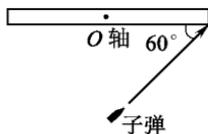
6-13 在习题 6-8 装置中, 假设作用在飞轮上的阻力矩的大小与角速度成正比, 即 $M = a\omega$ (a 是常数), 再次求解该题.



题 6-10 图



题 6-11 图



题 6-12 图

6-14 半径为 R , 质量为 m 的匀质圆盘, 放在粗糙的桌面上, 圆盘可绕其垂直中心轴在水平桌面上转动, 圆盘与桌面间的摩擦系数为 μ , 初始角速度为 ω_0 , 问:

- (1) 经过多长时间后, 圆盘才停止转动?
- (2) 摩擦阻力共做多少功?

第 7 章 相对论

由爱因斯坦创立的相对论是关于时空观的理论,它突破了牛顿绝对时空观,对物理学的发展产生了深远的影响,是研究物质运动规律的重要基础和方法.本章介绍相对论的基础知识,包括相对论产生的历史条件和实验基础、相对论的基本原理及其变换、相对论的时空观及相对论动力学问题等.

牛顿力学建立后被用于各个方面都获得了巨大的成功,被认为是普遍完美的理论.直到 19 世纪末、20 世纪初物理学深入到高速和微观领域,才发现它不再适用,建立新理论成为必要.牛顿力学的基本观念是:空间和时间都是绝对的(绝对时空观),这种观念因符合人们的日常经验和已有实验事实而根深蒂固,很少有人怀疑它的正确性.爱因斯坦(A. Einstein)突破绝对时空观,以“相对性原理”和“光速不变原理”为基本假设,于 1905 年建立了狭义相对论(special relativity),1915 年又将其发展成广义相对论(general relativity).相对论重建了物理理论的基础,使物理理论与新的实验相吻合,对物理学的发展产生了深远的影响.本章介绍相对论的基础知识.

7.1 力学相对性原理 伽利略变换

7.1.1 力学相对性原理

相对论建立的关键是对牛顿力学的基本概念作了深刻的分析和根本性变革,这些概念的正确性长期以来被认为是不言自明的.我们先概括这些基本概念,然后用实验说明它们的局限性.

物体的运动是对某个参考系而言的,有一定的规律.而参考系的选择不是惟

一的,自然就出现一个问题,对于不同的参考系,力学的基本规律还相同吗?早在1632年伽利略(G. Galileo)就回答了这个问题,他在封闭的船舱里仔细观察了力学现象,发现当船做匀速直线运动时船舱里物体的运动与船静止时没有什么不同.对此他作了生动的描述:“设想把你和你的朋友关在一只大船的舱板底下最大的房间里;让你带着几只苍蝇、蝴蝶以及诸如此类的有翅膀的小动物;舱内放一只盛满水的水桶,里面有几只鱼;再把一只瓶子挂起来,让它可以一滴滴把水滴入下面放着的一只窄口罐中.当船静止不动时,你们看到昆虫以等速向舱内各个方向飞行,鱼向各个方向自由游动,水滴滴进下面的罐中.当你把什么东西扔给你的朋友时,只要距离相等,你向某个方向扔不比向另一个方向用更大的力.如果你跳远,向各个方向会跳得同样远.当你仔细观察这些细节以后,再使船以任意速度前进.只要运动是匀速的,也不左右摇摆,你将发现所有上述现象丝毫没有变化.你也无法靠其中任何一个现象来推断船是在运动还是静止不动的.即使船运动得相当快,在跳跃时,你也将和以前一样,在各个方向上跳过相同的距离,跳向船尾也不会比跳向船头来得远些,虽然你跳到空中时,脚下的船底向你跳的相反方向移动.如果你的朋友在船头而你在船尾,不论你扔什么东西给你的朋友,你所用的力并不比你们两个站在相反位置时所用的力大.水滴将像先前一样地滴进下面的罐子,一滴也不会滴向船尾,虽然水滴在空中时,船在行进着.鱼在水中游向桶的前部不比游向后部费力,它们一样悠闲地游向放在水桶边缘任何地方的食饵.最后,蝴蝶和苍蝇自由地四处飞行,它们绝不会向船尾集中,并不因为它们可能长时间留在空中,脱离了船的运动,为了赶上船而显出累的样子.”这段话说明在任何惯性系中观察,力学现象都服从相同的规律.这个结论叫力学相对性原理(relativity principle of mechanics)或伽利略相对性原理(Galileo principle of relativity).它还可以有不同的表述方式:对于力学规律来说,一切惯性系都是等价的,没有哪一个惯性系比其他的惯性系更优越.或者说:不可能在惯性系内进行任何力学实验来确定该系统是静止还是匀速直线运动状态.如果已知力学规律的数学形式,上述结论还可以表述成:在一切惯性系中力学规律都具有相同的数学形式.

7.1.2 伽利略变换

牛顿力学的空间和时间概念是绝对空间和绝对时间,即长度的测量和时间间隔的测量与参考系(或观察者)无关.也就是说,同样两点之间的距离或同样两个事件发生的时刻差,无论在哪个惯性系中测量都是一样的.用牛顿的话说:“绝

对空间,就其本性而言,与外界任何事物无关,而永远是相同的和不动的。”“绝对的、真正的和数学的时间自己流逝着,并由于它的本性而均匀地与外界任何对象无关地流逝着。”牛顿力学中空间的性质是平直、均匀和各向同性(符合欧氏几何),时间的性质是一维、单向、均匀。上述观点叫绝对时空观或经典时空观。

在绝对时空观的基础上可以建立同一事件 p (如一盏灯发一个闪光) 在两个不同惯性系中时空坐标的变换关系。

设 s 和 s' 为两个相对做匀速直线运动的惯性系,为方便计我们约定,两者相应的坐标轴平行,且 x 轴与 x' 轴重合, s' 系相对 s 系以速度 u 沿 x 轴正向运动,当原点 O 与 O' 重合时开始计时,如图 7-1 所示。以后凡提到 s 和 s' 系,如果不加说明,均指这种约定系统。

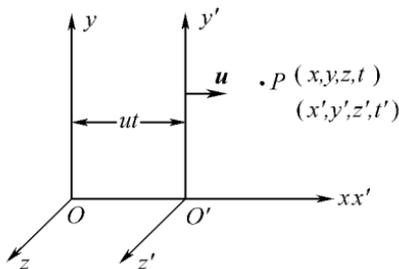


图 7-1 惯性系 s 和 s'

为了测量空间和时间,假设在两惯性系中各处安置了相同的直尺和钟,所有钟经过校准同步。事件发生地点的空间坐标由与坐标轴平行的直尺在该处的刻度读出,事件发生的时刻由该处的钟读出。设同一事件 p 在 s 系和 s' 系中测得的时空坐标分别为 (x, y, z, t) 和 (x', y', z', t') ,由于时间和空间测量的绝对性,有

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad (7-1)$$

式(7-1)中的 x' 是 s' 系中测量的 p 点(事件发生地)到 $y'z'$ 面的垂直距离,等于 s 系中测量的 p 点到 yz 面的垂直距离。所以 s 系中测量的 p 点到 yz 面的垂直距离 $x = ut + x'$ 即(7-1)的第一式。式(7-1)叫伽利略坐标变换($s \rightarrow s'$) (Galileo coordinate transformation),简称伽利略变换,是绝对时空观的数学表述。其逆变换($s' \rightarrow s$)为

$$\begin{aligned}
 x &= x' + ut' \\
 y &= y' \\
 z &= z' \\
 t &= t'
 \end{aligned}
 \tag{7-2}$$

将式(7-2)对时间 t 求导,并考虑 $t=t'$ 可得伽利略速度变换($s \rightarrow s'$)(Galileo velocity transformation)

$$\begin{aligned}
 v_x' &= v_x - u \\
 v_y' &= v_y \\
 v_z' &= v_z
 \end{aligned}
 \tag{7-3}$$

其中 $v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt}$, $v_x = \frac{dx}{dt}$ 等.

将式(7-3)再对时间求导,可得加速度变换($s \rightarrow s'$)

$$\begin{aligned}
 a_x' &= a_x \\
 a_y' &= a_y \\
 a_z' &= a_z \\
 \mathbf{a}' &= \mathbf{a}
 \end{aligned}
 \tag{7-4}$$

即

这说明同一质点对不同的惯性系有相同的加速度.

牛顿力学认为物体的质量是不变的恒量,与参考系的选择无关,有 $m = m'$. 力与参考系的选择也无关. 例如弹簧的弹性力 $F = -kx$, 万有引力 $F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}_o$. 公式中的形变量 x 和距离 r , 由于空间的绝对性,在不同的参考系中测量的值相同,有 $F = F'$. 对惯性系 s 有

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

因质量和力相同,对惯性系 s' 必有

$$\mathbf{F}' = m'\mathbf{a}'$$

即在不同的惯性系中力学规律具有相同的数学形式,或者说牛顿定律经伽利略变换后数学形式不变. 容易推知,由牛顿定律导出的力学规律经伽利略变换后数学形式也不变. 这是牛顿力学对力学相对性原理的理解.

以上是从绝对时空观和牛顿定律导出了力学相对性原理. 而一般说来,相对性原理是更普遍的规律,当牛顿定律失效时,相对性原理仍然成立(见 7.3 节)

绝对时空观、牛顿定律和力学相对性原理构成了牛顿力学的理论体系.

7.2 狭义相对论产生的实验基础和历史条件

7.2.1 产生根源

狭义相对论的产生有深远的历史根源,是电磁理论发展的必然结果.用爱因斯坦的话说:“是一条可以回溯几世纪的路线的自然继续.”“是对麦克斯韦(J. C. Maxwell)和洛伦兹(H. Lorentz)的伟大构思画了最后一笔.”

运动的描述与解释是一个古老的问题,伽利略将研究建立在实验的基础上,为物理理论的发展指明了方向.随后牛顿关于力学现象建立了牛顿力学,回答了时间和空间、物质和物质运动及运动规律等基本问题,成为物理理论的基础.

19 世纪中叶建立了电磁现象的普遍理论——麦克斯韦方程,它预言了光是电磁波,不久也被实验证实.如果相信麦克斯韦方程在所有惯性系中成立,则可以得出两个推论.

1. 光在真空中的速率是一个恒量,与参考系的选择无关

该理论给出 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 其中 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$

是真空的介电常数, $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ 是真空的磁导率. 由于 ϵ_0, μ_0 与参考系无关, 因此 c 也与参考系无关.

2. 电磁现象服从相对性原理

如果麦克斯韦方程在所有惯性系中成立,则电磁现象服从相对性原理. 相信麦克斯韦方程在所有惯性系中成立的理由,首先是麦克斯韦方程的基础——电磁实验定律是在地球上的实验室发现的,所以麦克斯韦方程对地球参考系(惯性系)成立. 进一步有理由相信,在相对地球做匀速直线运动的所有惯性系中麦克斯韦方程仍然成立. 当时已经发现这方面的实例. 例如在电磁感应现象中,只是磁体和线圈的相对运动决定线圈内产生的感应电动势. 即无论以磁体为参考系还是以线圈为参考系,感应电动势都相同. 这说明电磁感应现象在相对做匀速直线运动的不同惯性系中的规律是相同的.

这两个推论与伽利略变换(即牛顿力学)是根本冲突的. 按照伽利略速度

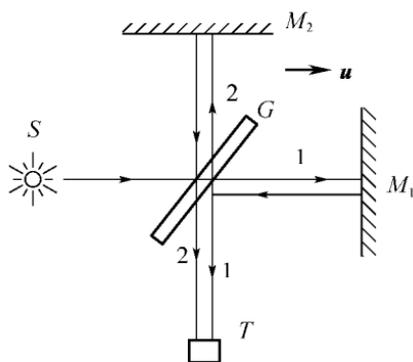
变换式,光速与参考系的选择有关;对麦克斯韦方程作伽利略变换,发现它的数学形式要发生变化.按照牛顿力学对相对性原理的理解,电磁现象就不服从相对性原理.是电磁理论的推论不正确,还是伽利略变换(实际上是绝对时空观)应该修改?这就成为严重的问题(电磁理论与牛顿力学矛盾).解决问题的出路有两条:一条是坚持绝对时空观,在此基础上说明麦克斯韦方程;另一条是坚信电磁理论的正确性,修改绝对时空观,建立新理论.历史上是先走了第一条道路,没有成功.爱因斯坦选择了第二条道路.

7.2.2 实验基础和历史条件

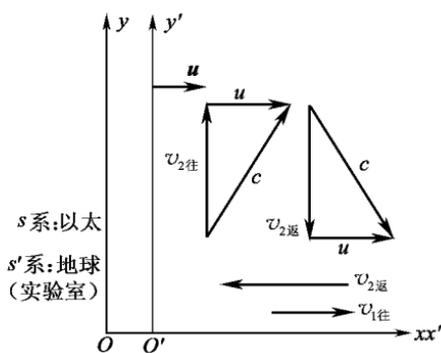
下面举几个历史上的重要事件,说明狭义相对论建立的实验基础和历史条件.

1. 迈克耳孙-莫雷实验

不改变绝对时空观对麦克斯韦方程进行说明的“以太”(aether)学说认为:以太充满宇宙并且是静止的(它实际上是牛顿绝对静止参考系的物质承担者),它是电磁波(包括光)传播的介质.麦克斯韦方程只对以太成立,对其他相对以太做匀速直线运动的惯性系不成立;光速 c 是光对以太的速度,对其他惯性系光的速度不同.也就是说电磁现象(包括光学现象)不服从相对性原理,因此可以用光学实验测出地球相对于以太的“漂移速度”.测出了“漂移速度”也就证明以太存在,以太学说得以成立.



(a) 迈克耳孙干涉仪



(b) 光对地球(实验室)的速度

图 7-2 迈克耳孙-莫雷实验

1881年迈克耳孙(A. A. Michelson)用他自己发明的干涉仪做了以太漂移效应实验.如图 7-2(a)所示,从光源 S 发出的单色钠黄光被分光镜 G 分成 1 和

2 两束, 光束 1 被反射镜 M_1 反射回到 G , 再被 G 反射到 T ; 光束 2 被反射镜 M_2 反射回到 G , 再透过 G 到 T . 光束 1, 2 在 T 相遇产生干涉条纹. 设地球(实验室)相对以太的漂移速度为 u , 干涉仪两臂长度为 L , 按照以太学说, 光对以太的速度为 c , 由伽利略速度变换式得光束 1 往返对地的速度分别为 $c-u$ 和 $c+u$, 如图 7-2(b), 往返一次的时间为

$$t_1 = \frac{L}{c-u} + \frac{L}{c+u} = \frac{2cL}{c^2-u^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

光束 2 往返对地的速度均为 $\sqrt{c^2-u^2}$, 如图 7-2(b), 往返一次的时间为

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

光束 1, 2 从 G 到 T 的时间差为

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c} \left(\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right)$$

将干涉仪转 90° 后, 时间差为

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = t_2 - t_1$$

干涉仪转动前后, 时间差的改变量为

$$\Delta = \Delta t - \Delta t' = 2\Delta t = \frac{4L}{c} \left(\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right)$$

考虑 $\frac{u}{c}$ 是小量, 有

$$\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{u^2}{c^2} \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{u^2}{2c^2} \quad \Delta = \frac{4L}{c} \frac{u^2}{2c^2} = \frac{2Lu^2}{c^3}$$

干涉条纹应移动的数目

$$\Delta N = \frac{c\Delta}{\lambda} = \frac{2Lu^2}{\lambda c^2}$$

上式是以太学说的推论, 测出了条纹移动数就可以得到地球对以太的漂移速度.

迈克耳孙假设漂移速度不小于地球的公转速度, 并根据地球的公转速度 $u = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $L = 1.2 \text{ m}$, $\lambda = 5893 \times 10^{-10} \text{ m}$, 得出 $\Delta N = 0.04$ 条. 实验结果出乎意料, 没有观察到条纹移动. 1887 年他与莫雷(Morley)合作, 进一步改进干涉实验, 光路经过多次反射, L 延长到 11 m , 预计可以测得 0.4 个条纹移动, 但是

仍然没有观察到. 为了避免地球公转速度与太阳对以太运动速度正好抵消这种可能性, 迈克耳孙和莫雷半年后又重复实验, 仍然没有观察到条纹的移动. 之后许多人在地球的不同地点、不同季节里重复迈克耳孙-莫雷实验, 结果都相同, 无法测出地球相对于以太的漂移速度. 这个结果被称为迈克耳孙-莫雷实验的“零结果”, 是以太学说无法解释的(经典理论与实验矛盾), 后来成为狭义相对论的实验基础之一.

2. 洛伦兹的“变换理论”与庞加莱的“相对性原理”

为了消除牛顿力学与电磁理论的矛盾、经典理论与实验的矛盾, 保持理论与实验的统一性, 洛伦兹和庞加莱(J. H. Poincare)在绝对时空观念的前提下做了大量研究.

1892年洛伦兹提出“收缩假设”解释以太漂移实验的零结果. 他假定物体在运动方向上的长度收缩, 如果收缩因子是 $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, 便能得出条纹移动量的零结果, 并认为长度收缩的原因是物体平移改变了分子间的作用力. 从1895年到1904年, 他建立了“变换理论”. 认为麦克斯韦方程在所有惯性系中有相同的数学形式, 得出了时空坐标变换式——洛伦兹变换, 同时认为光在所有惯性系中的速率都相同. 但洛伦兹仍然保留了以太, 认为真实的、普遍的空间和时间坐标是相对于静止以太参考系的坐标 (x, y, z, t) (即绝对时空观念), 他把变换得出的坐标 (x', y', z', t') 中的 t' 叫“地方时”, 并认为它是个数学辅助量. 由于坚持绝对时空观, 洛伦兹引入了大量假设, 理论繁琐、缺乏逻辑性, 没有跳出旧的理论框架. 洛伦兹的理论对爱因斯坦产生了重要影响, 光速不变和洛伦兹变换后来成为爱因斯坦狭义相对论中的重要组成部分.

1895年庞加莱提出了反对绝对运动的观点:“从各种经验事实得出的结论能够断言:要证明物质的绝对运动, 或者更确切地讲要证明物质相对于以太的运动是不可能的.”他认为有意义的是物体的相对运动, 指出建立新理论必须引入新的原理. 1904年他提出了相对性原理:“按照相对性原理, 物理现象的规律对于一个固定的观察者与一个相对他做匀速平移运动的观察者而言是相同的. 所以我们没有任何方法辨别我们是不是处于这样一个匀速运动系统中.”他还断言:“也许我们应该建立一门新的力学, 对这门力学我们只能窥见它的一鳞半爪, 在这门力学中, 惯性随着速度增加, 光速将会成为一个不可逾越的界限.”庞加莱已经很接近构成狭义相对论的基本要素了, 但他下不了决心放弃以太, 他的讨论是以洛伦兹理论为依据的. 他仍坚持“真实时间”与“地方时间”的区别, 认为物体的长度收缩是实际收缩, 而没有认识到这是不同惯性系进行时间测量特别是同

时具有相对性的结果. 由于绝对时空观念的束缚他终未走出困境.

爱因斯坦在回顾相对论的发展时说过“狭义相对论是洛伦兹理论和相对性原理的结合”,“它在 1905 年发现的时机已经成熟.”

7.3 狭义相对论的基本原理 洛伦兹变换

7.3.1 狭义相对论的基本原理

建立在绝对时空观基础上的牛顿力学和其他理论,都不能圆满解释电磁实验和光学实验的结果,在这种背景下爱因斯坦提出了两个基本假设,在此基础上建立了狭义相对论. 从狭义相对论他推出了一系列结论,都被实验证实,这两个假设也就成为狭义相对论的两个基本原理,现叙述如下.

(1) (狭义)相对性原理(special relativity principle) 在一切惯性系中物理规律都相同. 或者说在一切惯性系中物理规律都具有相同的数学形式.

(2) 光速不变原理(principle of constancy of light velocity) 在一切惯性系中,光在真空中的速率都相等,恒为 c .

(狭义)相对性原理是力学相对性原理在整个物理学领域的合理推广,说明在任何惯性系中,不但是力学实验,而且任何物理实验(电磁实验、光学实验等)都不能确定该惯性系是静止还是匀速直线运动状态. 对物理规律来说,一切惯性系都是等价的,因此绝对运动的概念(即以太概念)在物理学中被排除了. 光速不变原理是对伽利略变换的根本否定,说明无论光源或观察者运动与否,真空中光沿任何方向的速率恒为 c .

狭义相对论的建立,解决了电磁理论与牛顿力学的矛盾、经典理论与实验的矛盾. 是物理学史上一次大综合,实现了力学与电磁学的统一,低速运动与高速运动的统一.

7.3.2 洛伦兹变换

1. 洛伦兹坐标变换

由于光速不变原理否定了伽利略变换,因此需要一个满足相对论基本原理

的坐标变换式,爱因斯坦从相对论的两个基本原理推导出了洛伦兹变换.

事件 P 在 s 和 s' 两惯性系中测得的时空坐标 (x, y, z, t) 和 (x', y', z', t') 之间的变换关系为

$$\begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (7-5)$$

$$\begin{cases} x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (7-6)$$

上式叫洛伦兹坐标变换(简称洛伦兹变换),左边叫正变换($s \rightarrow s'$),右边叫逆变换($s' \rightarrow s$).洛伦兹变换正确与否由实验决定,迄今为止,所有实验都直接或间接地证明了洛伦兹变换的正确性.

洛伦兹变换的意义为:

(1) 洛伦兹变换是不同惯性系中时空坐标变换的普遍关系.

当 $u \ll c$ 时, $\frac{u}{c} \rightarrow 0$,洛伦兹变换回到伽利略变换

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

这说明伽利略变换是洛伦兹变换在低速情况下的近似.

(2) 洛伦兹变换揭示了时间和空间的相对性.

伽利略变换中时间坐标和空间坐标是相互独立的、与运动无关的外在参量.洛伦兹变换中时间坐标和空间坐标是相互联系的整体,叫时空坐标.在不同的惯性系中时空坐标不同,说明时空是相对的不是绝对的.时空坐标又与相对速度 u 相联系,说明时间和空间与物质运动密不可分.

(3) 洛伦兹变换揭示了光速是一切物体运动速度的上限.

在洛伦兹变换中,若 $u > c$,则 $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ 为虚数,时空坐标的值失去物理意义,所以 $u \leq c$.在牛顿力学看来,物体的速率可以无限增大,只要能给物体足够的能量.在 高能粒子物理实验中,电子、质子或其他有一定质量的基本粒子被加速到

很高的能量时,它们的速率可能接近光速,但从来没有观察到超过光速的实例。

(4) 相对论要求物理规律经洛伦兹变换后数学形式不变。

洛伦兹变换是相对论基本原理的反映,按照相对论的理解,相对性原理要求物理规律经洛伦兹变换后数学形式不变.符合这个要求的规律才是相对论性的规律,否则就需要修改,使之成为相对论性的规律。

例 7-1 在地面参考系中 $x=1.0\times 10^6$ m 处,于 $t=0.02$ s 时刻爆炸了一颗炸弹.如果有一沿 x 轴正向以 $u=0.75c$ 速率运动的飞船,试求在飞船参考系中测得这颗炸弹爆炸的空间坐标和时间坐标。

解 设地面参考系为 s ,在 s 系中炸弹爆炸的时空坐标已知.设飞船参考系为 s' ,由洛伦兹变换($s\rightarrow s'$)式(7-5),可求出在 s' 系中炸弹爆炸的时空坐标分别为

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1\times 10^6 - 0.75\times 3\times 10^8 \times 0.02}{\sqrt{1-(0.75)^2}} = -5.29\times 10^6 \text{ m}$$

$$t' = \frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{0.02 - \frac{0.75\times 1\times 10^6}{3\times 10^8}}{\sqrt{1-(0.75)^2}} = 0.0625 \text{ s}$$

$x'<0$,说明在 s' 系中观察,爆炸地点在原点 O' 的负侧。 $t'\neq t$,说明在两惯性系中测得的爆炸时间不同。

例 7-2 一短跑选手,在地球上以 10 s 的时间跑完 100 m.设一速率为 $0.98c$ 的飞船,平行地面沿跑道正向飞行,在飞船上的观察者来看,这个选手跑了多长时间和多长时间?

解 设地面为 s 系,飞船为 s' 系.本题要计算起跑(事件 1)和跑到终点(事件 2)这两个事件的时间间隔和空间间隔(两事件发生地点的坐标差).根据题意

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 100 \text{ m} \quad \Delta t = t_2 - t_1 = 10 \text{ s}$$

由洛伦兹变换($s\rightarrow s'$)式(7-5)得

$$\begin{aligned} \Delta x' &= x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{100 - 0.98\times 3\times 10^8 \times 10}{\sqrt{1-0.98^2}} \\ &= -1.48\times 10^{10} \text{ m} = -1.48\times 10^7 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{10 - \frac{0.98\times 100}{3\times 10^8}}{\sqrt{1-0.98^2}} = 50.25 \text{ s}$$

飞船中的观察者看到短跑选手在 50.25 s 的时间内沿 x' 轴负方向倒退跑了 1.47×10^7 km。

洛伦兹变换的推导 仍然设 s 和 s' 两个惯性系,如图 7-1 所示,我们分几步导出洛伦兹变换式。

(1) 变换是线性的

根据相对性原理,若自由质点相对 s 系做匀速直线运动,则相对 s' 系也做匀速直线运动,所以变换是线性的.有

$$x' = ax + bt + c \quad (1)$$

(2) 考虑 a, b, c 为常数

用特殊事件确定 b, c . 当 O, O' 重合时,发生在原点的事件 $x = x' = 0, t = t' = 0$, 所以 $c = 0$. 又在原点 O' 发生的事件 $x' = 0, x = ut$, 有

$$0 = aut + bt \quad b = -au$$

所以

$$x' = a(x - ut) \quad (2)$$

(3) 逆变换式

根据相对性原理,所有惯性系都是等价的,因此由 $s \rightarrow s'$ 和由 $s' \rightarrow s$ 的变换式形式相同. 由于相对运动, s 对 s' 的速度为 $-u$, 所以逆变换式为

$$x = a(x' + ut') \quad (3)$$

(4) 光速不变原理

设计两个特殊事件,由光速不变原理确定常数 a . 事件 1: 在 $t = t' = 0$ 时刻,从 O, O' 发一闪光,坐标 x, t 和 x', t' 均为 $0, 0$. 事件 2: 闪光传到 p 点,在 s 系中坐标为 x, t , 在 s' 系中坐标为 x', t' .

$$\text{有} \quad x = ct \quad x' = ct' \quad (4)$$

由(2)×(3)得

$$xx' = a^2(x - ut)(x' + ut')$$

将式(4)代入上式得

$$c^2 tt' = a^2(c - u)(c + u)tt'$$

所以

$$a = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (5)$$

将式(5)代入式(2)和式(3)得

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (6)$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (7)$$

将式(6)代入式(7)得

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (8)$$

将式(7)代入式(6)得

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (9)$$

总结一下,得到两个惯性系之间的时空坐标变换——洛伦兹坐标变换式(7-5)和式(7-6).

$y' = y, z' = z$ 即垂直运动方向的长度不变,可以用火车钻山洞的假想实验来说明. 设火车静止时与山洞等高,火车开动时高度变小. 以山洞为参考系观察,火车高度变小,可以通过山洞;以火车为参考系,山洞运动高度变低(相对性原理),不能通过火车. 这与前面火车能通过山洞的结论是相矛盾的. 若假设火车开动时高度变大,也会得出矛盾的结论. 所以火车的高度在运动时不变.

* 2. 洛伦兹速度变换式

在讨论速度变换时,我们首先注意到速度分量的定义如下

在 s 系中

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

在 s' 系中

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} \quad v_y' = \frac{dy'}{dt'} \quad v_z' = \frac{dz'}{dt'}$$

取洛伦兹坐标变换式的微分,得

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \frac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt})dt}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

用最后一式除前三式,即得

$$\begin{aligned} v_x' &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\ v_y' &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\ v_z' &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \end{aligned} \quad (7-7)$$

这就是洛伦兹速度变换(Lorentz velocity transformation)($s \rightarrow s'$). 从中可以看出,在时空坐标变换中,与运动方向垂直的坐标保持不变,而速度是变的,这是因为时间发生了变化了.上式的逆变换可根据相对性原理得到(带撇量与不带撇量互换, u 换成 $-u$)

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{v_x' + u}{1 + \frac{u}{c^2} v_x'} \\v_y &= \frac{v_y' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2} v_x'} \\v_z &= \frac{v_z' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2} v_x'}\end{aligned}\quad (7-8)$$

容易看出,当 $u \ll c$ 时洛伦兹速度变换回到伽利略速度变换.在 v 平行于 x, x' 轴的特殊情况下,式(7-7)简化为

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2} v} \quad (7-9)$$

若将 v' 与 v 互换, u 换成 $-u$,便得到逆变换($s' \rightarrow s$)

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'} \quad (7-10)$$

设式(7-10)中 $v' = c$ 为光速,则

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{uc}{c^2}} = c$$

即无论两惯性系相对速度 u 为何值,光在两惯性系中的速度恒为 c ,这正是光速不变原理.

例 7-3 一艘以 $0.9c$ 的速率离开地球的宇宙飞船,以相对于自身 $0.9c$ 的速率向前发射一枚导弹,求该导弹相对于地球的速率.

解 以地球为 s 系,宇宙飞船为 s' 系,则该题是从 s' 系到 s 系的速度变换,由式(7-9)得

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + 0.9 \times 0.9} = 0.994c$$

导弹相对于地球的速率仍然小于 c .

7.4 狭义相对论时空观

牛顿力学认为在一个惯性系中同时发生的两个事件,在另一个惯性系中也

同时发生,即同时是绝对的.同样,两事件的时间间隔和空间间隔也是绝对的,与参考系无关.狭义相对论则认为同时是相对的,两事件的时间间隔与空间间隔也是相对的,与参考系的选择有关.爱因斯坦由洛伦兹变换导出了上述结论,建立了狭义相对论的时空观.这些结论与我们的日常经验大相径庭,却深刻揭示了时间和空间的相对性,并为大量实验所证实.

7.4.1 同时的相对性

我们先做一个理想实验,说明同时是相对的.

设想有一车厢在地面上以高速 u 匀速行驶,如图 7-3 所示.车厢正中有一光源 M 发出一个闪光,光信号向车厢两端传去,根据光速不变原理,在车厢上 (s' 系) 观察者测得光信号同时到达车厢两端 A 和 B ,即光信号到达车厢两端 A 和 B 这两个事件是同时发生的.然而对地面 (s 系) 的观察者来说,光信号离开光源后仍然以光速 c 向前后传播,由于光信号到达车厢两端需要一段时间,在这段时间内车厢向前运动了一段距离,故在地面上来看,光信号先到达 A 端后到达 B 端,两事件不是同时发生的.

如果把车厢固定在地面上 (s 系),地面上的观察者测得光同时到达 A 端和 B 端,在相对地以速度 u 匀速运动的列车上 (s' 系) 的观察者,同样认为光到达 A 端和 B 端不是同时的.

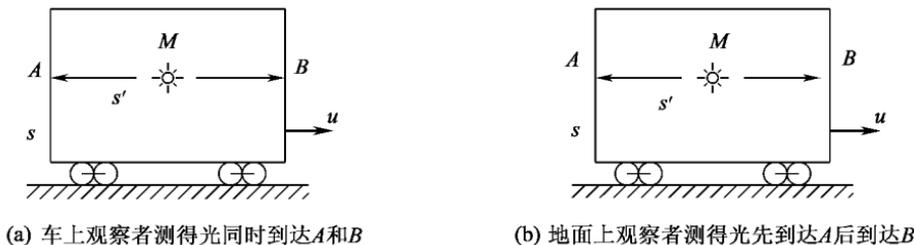


图 7-3

用洛伦兹变换分析.在 s' 系中,事件 A (光到达 A 端) 发生的时空坐标为 x_1', t_1' , 事件 B (光到达 B 端) 发生的时空坐标为 x_2', t_2' , A, B 两事件同时发生表明 $\Delta t' = t_2' - t_1' = 0$. 在 s 系看来,事件 A, B 发生的时空坐标分别为 x_1, t_1 和 x_2, t_2 , 由逆变换 ($s' \rightarrow s$) 式 (7-6) 得

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + \frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} > 0 \quad x_2' > x_1'$$

事件 A 和事件 B 不同时发生, 事件 A 先发生, 事件 B 后发生 ($t_2 > t_1$).

上面讨论说明, 在一个惯性系中不同地点同时发生的两个事件, 在另一个惯性系中是不同时的, 也就是说对异地事件而言, 同时是相对的.

需要说明的是, 当 $x_1' = x_2'$ 时, $\Delta t = 0$. 即在一个惯性系中同一地点同时发生的两个事件, 在另一个惯性系中也是同时的, 即对同地事件而言, 同时是绝对的.

7.4.2 长度收缩

牛顿力学中物体的长度不会因物体运动而改变, 是绝对的. 而狭义相对论认为物体的长度与物体运动速度有关, 是相对的. 为了说明这个问题, 先给长度下一个明确的定义.

物体沿某个方向的长度, 如一把直尺的长度, 是指沿该方向对物体的两端同时进行测量, 所得坐标之差的绝对值. 如图 7-4 所示, 假设直尺固定在 s' 系, 在 s' 系测得它的两端 A, B 的坐标分别为 x_1' 和 x_2' , 它的长度 $L_0 = x_2' - x_1'$ 叫直尺的固有长度 (proper length) (或静止长度, 简称静长). 因为物体两端的坐标在它静止的 s' 系中不会改变, 测量时得出的静止长度实际上是相同的.

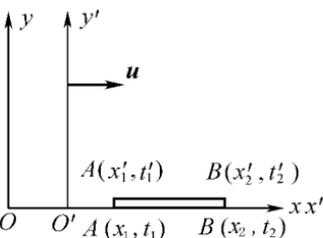


图 7-4 长度收缩效应

在 s 系中观察, 直尺是运动的, 测量直尺两端 A, B 的坐标必须同时, 即测量两端的时刻相同 $t_1 = t_2$. 设 A, B 两端的坐标分别为 x_1 和 x_2 , 所得长度 $L = x_2 - x_1$ 叫直尺的运动长度 (简称动长). 现在的问题是: 运动长度 L 与固有长度 L_0 有怎样的关系?

根据洛伦兹变换 ($s \rightarrow s'$) 式 (7-5) 得

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

即

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (7-11)$$

式(7-11)表明运动长度小于固有长度,固有长度最长.这说明物体沿运动方向的长度缩短了,这个效应叫长度收缩(length contraction).长度收缩效应是相对的,如果在 s 系中有一把沿 x 轴固定的直尺,则 s' 系的观察者认为它的长度因为运动也缩短了.

由式(7-11)可以看出,当 $u \ll c$ 时, $L = L_0$, 同一物体的长度在不同参考系中测得的结果相同,与参考系无关,这回到牛顿的绝对空间概念.由此可知绝对空间概念是相对论空间概念在低速情况下的近似.

例 7-4 固有长度为 5 m 的飞船,以 $u = 9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率相对于地面匀速飞行,问

(1) 地面上测量的飞船长度是多少?

(2) 若飞船的长度收缩一半,飞船以多大速率飞行?

解 (1) 由长度收缩公式(7-11)得地面上测量的飞船长度

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 5 \sqrt{1 - (9 \times 10^3 / 3 \times 10^8)^2} = 4.999999998 \text{ m}$$

这个结果与固有长度 5 m 的差别通常是难以测量出来的.

(2) 根据题设地面上测量的飞船长度为其固有长度的一半,即

$$L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{L_0}{2}$$

得飞船速率

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0.866c$$

例 7-5 飞船上的天线长 1 m,与运动方向成 45° 的夹角.设飞船以 $u = \frac{\sqrt{3}}{2} c$ 的匀速率平行于地面飞行,求地面上测量的天线长度和天线与水平方向的夹角.

解 如图 7-5 所示,设飞船为 s' 系,地面为 s 系.根据长度收缩效应,在地面上观察,天线平行于水平方向的长度缩短,垂直水平方向的长度不变,所以天线变短,与水平方向的夹角变大.

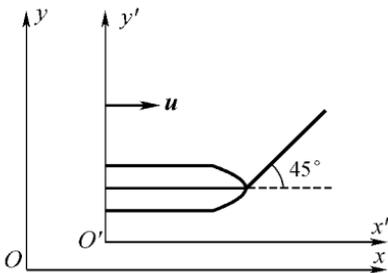


图 7-5

在飞船上测量

$$L_x' = L_0 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} L_0$$

$$L_y' = L_0 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} L_0$$

在地面上测量

$$L_x = L_x' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = L_x' \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} L_x' = \frac{\sqrt{2}}{4} L_0$$

$$L_y = L_y' = \frac{\sqrt{2}}{2} L_0$$

长度

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} L_0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} L_0\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{8}} L_0 = 0.791 \text{ m}$$

与水平方向的夹角

$$\theta = \arctan \frac{L_y}{L_x} = \arctan 2 = 63^\circ 26'$$

7.4.3 时间延缓

现在讨论两个事件的时间间隔,在不同惯性系的测量结果之间的关系.

在一个惯性系(如 s' 系)中同一地点先后发生的两个事件 A 和 B 的时间间隔叫固有时(proper time),用 τ_0 表示. 它是由静止于此参考系中的一只钟测出的. 在另一个惯性系(如 s 系)来看,事件 A 和事件 B 是异地事件,它们的时间间隔叫非固有时(或运动时),用 τ 表示. 它是由静止于此惯性系中的两只同步的钟测出的,如图 7-6 所示.

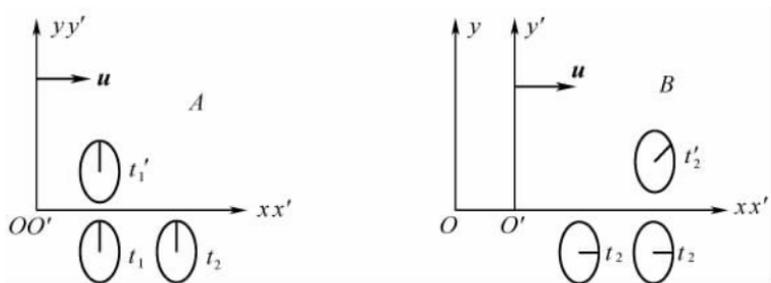


图 7-6

事件 A 发生时, s' 系的钟测的时间为 t_1' , s 系的钟测的时间为 t_1 ; 事件 B 发

生时, s' 系的钟测的时间为 t_2' , s 系的钟测的时间为 t_2 . 因

$$\tau_0 = t_2' - t_1' \quad x_1' = x_2'$$

所以由洛伦兹变换($s' \rightarrow s$)式(7-6)得

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + \frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

即

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (7-12)$$

式(7-12)表明:非固有时大于固有时,固有时最短.这个效应叫时间延缓(time dilation)或运动的时钟变慢.在 s' 系时钟测出的是固有时,在 s 系时钟测出的是非固有时,与 s 系的钟相比, s' 系的钟走慢了($\tau_0 < \tau$).在 s 系的观察者看来 s' 系的钟是运动的,所以说运动的时钟变慢.时钟变慢效应是相对的,在 s' 系的观察者也认为 s 系的钟是运动的,比自己参考系的钟走得慢.

时间延缓或时钟变慢效应说明时间间隔的测量是相对的,与参考系有关.这在粒子物理的研究中得到了大量的实验证明.

由式(7-12)还可以看出,当 $u \ll c$ 时, $\tau = \tau_0$, 同样两个事件的时间间隔在不同参考系中测得的结果相同,与参考系无关,这回到牛顿的绝对时间概念.由此可知绝对时间概念是相对论时间概念在低速情况下的近似.

例 7-6 一飞船以 $u = 9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率相对地面匀速飞行,设飞船上的钟走了 5 s 的时间,问地面上的钟走了多少时间?

解 设地面为 s 系,飞船为 s' 系.飞船上钟走的时间是固有时 $\tau_0 = 5 \text{ s}$,地面上钟走的是非固有时 τ ,由式(7-12)得

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{5}{\sqrt{1 - [9 \times 10^3 / 3 \times 10^8]^2}} \\ &\approx 5 \left[1 + \frac{1}{2} \times (3 \times 10^{-5})^2 \right] = 5.000000002 \text{ s} \end{aligned}$$

这个结果说明对于飞船这样大的速率,时间延缓效应实际上是很难测量出来的.

例 7-7 μ 子是一种不稳定的粒子,在静止的参考系中观察,它的平均寿命为 $2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$,随后就衰变为电子和中微子.高能宇宙射线中 μ 子的速率为 $0.998c$, μ 子可穿透 9000 m 的大气层到达地面实验室.问理论计算与这些观测结果是否一致?

解 用牛顿力学进行计算, μ 子的寿命 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$,速率 $u = 0.998c$,通过的距离

$$L = u\Delta t = 0.998 \times 3 \times 10^8 \times 2.0 \times 10^{-6} = 599 \text{ m}$$

因 $L < 9000 \text{ m}$, μ 子不能通过大气层, 与实验不符合.

考虑相对论的时间延缓效应, μ 子的固有寿命 $\tau_0 = 2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$, 以地面为参考系时 μ 子的“运动寿命”(非固有时)为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{2.0 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0.998^2}} = 3.16 \times 10^{-5} \text{ s}$$

μ 子在地面参考系中通过的距离为

$$L = u\tau = 0.998 \times 3 \times 10^8 \times 3.16 \times 10^{-5} = 9461 \text{ m} > 9000 \text{ m}$$

因 $L > 9000 \text{ m}$, μ 子能够通过大气层, 与实验观测结果很好地符合.

7.4.4 因果律

有因果关系的事件, 它们的因果关系即事件发生的先后次序(时序), 不会因为参考系改变而颠倒, 这就是因果律. 狭义相对论同样符合因果律. 下面做一简要的说明.

所谓 A, B 两个事件有因果关系, 就是说 B 事件是 A 事件引起的. 例如:

- (1) 某处枪口发出子弹(A 事件), 另一处靶被子弹击中(B 事件);
- (2) 地面某处发射电磁波(A 事件), 地面另一处接收到电磁波(B 事件).

A 事件引起 B 事件可看作由 A 事件的发生地向 B 事件的发生地传递了某种“信号”, 如上例中的“子弹”和“电磁波”. 在 s 系观察, “信号”的传递速度为

$$v_s = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \leq c$$

x_1, t_1 和 x_2, t_2 是在 s 系中测量的两事件 A, B 的时空坐标, 设 $t_2 > t_1, x_2 > x_1$. $t_2 - t_1$ 是两事件的时间间隔, 即信号传递所用的时间, $x_2 - x_1$ 是两事件发生地的空间间隔, 即信号传递的路程.

由洛伦兹变换得, 在 s' 系中两事件的时间间隔

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left[1 - \frac{u}{c^2} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right] \\ &= \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left[1 - \frac{uv_s}{c^2} \right] \end{aligned}$$

因 $u < c$ [见式(7-14), $m_0 \neq 0$], 得 $\frac{uv_s}{c^2} < 1$, 所以 $t_2' - t_1'$ 与 $t_2 - t_1$ 是同号的.

也就是说,两事件的先后次序(时序)在 s 系中观察与在 s' 系中观察是一样的.

比较牛顿力学的时空观与狭义相对论的时空观可以发现,它们的根本区别是对“绝对性”与“相对性”的认识不同. 牛顿力学认为时间、空间是绝对的,物体的运动(位矢、位移、速度和加速度等)是相对的;狭义相对论则认为相对性原理和光速不变原理是绝对的,而时间、空间和物体的运动是相对的. 在认识上狭义相对论比牛顿力学更深刻、更具有普遍性.

7.5 相对论的动力学

前面讨论的洛伦兹变换和狭义相对论的时空观,构成了狭义相对论的运动学. 相对论要求,物理规律经洛伦兹变换后数学形式不变,即物理规律对洛伦兹变换具有不变性. 而牛顿定律、动量守恒定律等都不满足这个要求,因此建立狭义相对论的动力学,就要对这些动力学规律进行修改,使之成为相对论性的规律,并要求它们在低速情况下回到牛顿力学中的形式. 研究发现要做到以上两点,必须对质量、动能和能量的表达式进行修改.

7.5.1 相对论质速关系

在牛顿力学中,质点动量的表达式为

$$\boldsymbol{p} = m \boldsymbol{v}$$

当合外力为零时,质点系的动量守恒,即

$$\sum_i \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \text{恒矢量}$$

在牛顿力学中质量是恒量,上式经伽利略变换后形式不变,但对洛伦兹变换不具有不变性,因此需要修改. 通过推导发现要使动量守恒表达式经洛伦兹变换后形式不变,质点的动量表达式应为

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7-13)$$

式中 m_0 为质点静止时的质量,叫静质量, v 为质点相对于惯性系的速度. 当 $v \ll c$ 时, $\boldsymbol{p} = m_0 \boldsymbol{v}$, 回到牛顿力学的动量表达式.

为了不改变动量的定义,将式(7-13)写成

$$p = m v$$

则

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7-14)$$

叫相对论质量,可见相对论质量是随着物体速度的变化而变化的,式(7-14)叫质速关系.

图 7-7 反映了这一关系.当物体速度与光速相比很小时,质量几乎不变;当速度与光速可比拟时,质量随速度的增大而显著增大.

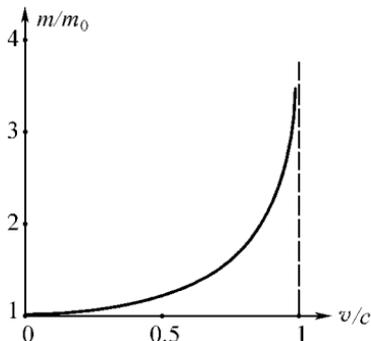


图 7-7

设 $v = 0.98c$, 则

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0.98^2}} = 5.03m_0$$

这时质量随速度的变化就不能不考虑了.

质速关系已为许多实验所证实.早在狭义相对论建立之前,1901年考夫曼在测定快速电子荷质比 e/m 的实验中发现,随着电子速度增大,荷质比 e/m 减小.因为电荷 e 不变,说明电子的质量 m 随速度增大而增大.

由式(7-14)知 $v=c$ 的粒子,静质量 $m_0=0$,否则 m 就没有物理意义.如光速 $v=c$,光子的静质量 $m_0=0$.

质速关系的推导 为了简便起见,我们用一个特殊的力学过程来讨论,这不影响结果的普遍性.

用两个静止质量相同的小球做完全非弹性碰撞实验,并约定,当惯性系 s' 相对惯性系 s 以速度 u 沿 x 轴正向运动时, s 系的观察者沿 x 轴正向以速度 u 抛出 A 球, s' 系的观察者则沿

x' 轴的负向以同样的速率 u 抛出 B 球, 如图 7-8 所示. 两球做完全非弹性碰撞后, 粘连在一起运动.

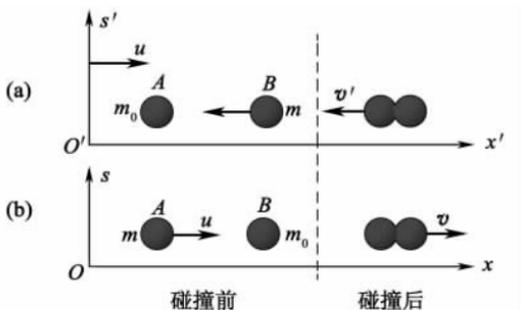


图 7-8 两球的完全非弹性碰撞

根据以上对实验操作的约定, 在碰撞前, s' 系中的观察者测得 A 球静止, B 球以速度 u 去碰撞 A 球[见图 7-8(a)]; 而 s 系的观察者测得 B 球静止, A 球以速度 u 去碰撞 B 球[见图 7-8(b)]. 以 m_0 表示静球的质量, m 表示动球的质量, 并设碰撞后的粘连体相对 s', s 系分别以 v', v 的速度按图示方向运动, 由质量守恒定律知, 粘连体相对 s', s 系的总质量均为 $m_0 + m$. 对 s 系, 由动量守恒定律得

$$(m_0 + m)v = mu$$

对 s' 系, 则有

$$(m_0 + m)v' = -mu$$

由上两式联立可得 $v' = -v$, 根据洛伦兹速度变换有

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v} = -v$$

由此可得

$$\frac{u}{v} - 1 = 1 - \frac{uv}{c^2} = 1 - \left(\frac{v}{u}\right) \frac{u^2}{c^2}$$

将第一式代入上式得

$$\frac{m_0 + m}{m} - 1 = 1 - \frac{m}{m_0 + m} \frac{u^2}{c^2}$$

解之得

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

7.5.2 相对论动力学的基本方程

将动量修改成式(7-14)后, 牛顿第二定律修改成

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (7-15)$$

为相对论动力学的基本方程.

式(7-15)对洛伦兹变换具有不变性,而且在 $v \ll c$ 时就是牛顿第二定律. 需要说明的是,经洛伦兹变换后,质量、速度都发生了变化,因而力在不同惯性系中也是不相同的,可由洛伦兹变换式导出质量、动量和力的变换式.

由式(7-15)得

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v}$$

上式表明,物体在恒力作用下,不会有恒定的加速度,且加速度 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 与力 \mathbf{F} 的方向不一致. 为简单起见,考虑直线运动,随着物体速率的增加,加速度量值不断减小,当 $v \rightarrow c$ 时, $m \rightarrow \infty$, 则 $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow 0$. 这说明,无论使用多大的力,力持续时间有多长,都不可能把物体加速到速度等于或大于光速.

7.5.3 相对论动能

在相对论中,动能定理仍然成立. 设质点速度为 \mathbf{v} , 在外力 \mathbf{F} 作用下发生位移 $d\mathbf{r}$, 质点动能的增量等于外力所做的功,即

$$\begin{aligned} dE_k &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = d(m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = dm\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= dm v^2 + m v dv \end{aligned}$$

由式(7-14)得

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

两边微分得

$$2mc^2 dm - 2mv^2 dm - 2m^2 v dv = 0$$

即

$$c^2 dm = v^2 dm + m v dv$$

所以

$$dE_k = c^2 dm$$

当 $v=0$ 时, $m=m_0$, $E_k=0$, 对上式积分

$$\int_0^{E_k} dE_k = \int_{m_0}^m c^2 dm$$

得

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 \quad (7-16)$$

这就是相对论的动能表达式. 动能等于物体由静止运动到速度为 v 的位置, 力对

物体所做的功.

当 $v \ll c$ 时

$$E_k = m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - m_0 c^2 \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) - m_0 c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

即牛顿力学的动能公式.

7.5.4 静能、总能和质能关系

因 E_k 等于 mc^2 与 $m_0 c^2$ 两项之差, 由量纲分析知 mc^2 和 $m_0 c^2$ 具有能量的量纲, 故定义

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (7-17)$$

为物体静止时的能量, 简称静能 (rest energy). 而 $mc^2 = m_0 c^2 + E_k$ 为物体的静能和动能之和, 称为物体的总能量, 表示为

$$E = mc^2 \quad (7-18)$$

上式便是爱因斯坦质能关系 (mass-energy relation), 是狭义相对论的一个重要推论. 它揭示了物质的两个基本属性——质量和能量之间不可分割的联系和对应关系: 一定的质量相应于一定的能量, 二者的数值只相差一个恒定的因子 c^2 . 当质量发生变化时, 能量也随之发生变化; 反之, 当能量发生变化时, 质量也一定发生变化. 式 (7-18) 已成为原子能利用的理论基础.

由于质能关系, 牛顿力学中的质量 (静止质量) 守恒定律和能量守恒定律在相对论中统一成一个守恒定律. 即在一个孤立系统内, 所有粒子的相对论能量的总和在相互作用过程中保持不变. 这称为质能守恒定律 (law of conservation of mass-energy). 用数学式表示为

$$\sum_i E_i = \sum_i m_i c^2 = \sum_i (m_{0i} c^2 + E_{ki}) = \text{恒量} \quad (7-19)$$

由于真空中的光速是一个常量, 故上式可以写成

$$\sum_i m_i = \text{恒量} \quad (7-20)$$

即粒子在相互作用过程中相对论总质量保持不变, 这称为相对论质量守恒定律.

静能释放是狭义相对论的另一个重要推论. 在核反应中, 以 m_{01} 和 m_{02} 分别表示反应粒子和生成粒子的总质量, 以 E_{k1} 和 E_{k2} 分别表示反应前后它们的总动能. 根据质能守恒定律应有

$$m_{01} c^2 + E_{k1} = m_{02} c^2 + E_{k2}$$

由此可得

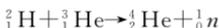
$$E_{k2} - E_{k1} = (m_{01} - m_{02}) c^2$$

上式左边是核反应后粒子总动能的增加 ΔE_k , 也就是核反应释放的能量. $m_{01} - m_{02}$ 表示经过核反应后粒子的总静质量的减少, 我们把系统的静质量减少叫质量亏损, 用 Δm_0 表示, 这样便得到原子核反应中释放的核能与质量亏损的基本关系式

$$\Delta E_k = \Delta m_0 c^2 \quad (7-21)$$

重原子核裂变成中等质量的原子核(原子弹、核裂变反应堆)或轻原子核聚变成中等质量的原子核(氢弹、核聚变反应堆)时, 总静质量减少, 因而释放大量的能量.

例 7-8 试计算氢弹爆炸中一种核聚变反应所释放的能量.



各种粒子的静质量分别为氘核(${}^2_1\text{H}$) $m_D = 3.3437 \times 10^{-27}$ kg, 氦核(${}^3_1\text{He}$) $m_T = 5.0049 \times 10^{-27}$ kg, 氦核(${}^4_2\text{He}$) $m_{\text{He}} = 6.6425 \times 10^{-27}$ kg, 中子 $m_n = 1.6750 \times 10^{-27}$ kg, 求这一热核反应中释放出的能量.

解 这一反应的质量亏损为

$$\begin{aligned} \Delta m_0 &= (m_D + m_T) - (m_{\text{He}} + m_n) \\ &= [(3.3437 + 5.0049) - (6.6425 + 1.6750)] \times 10^{-27} \\ &= 0.0311 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

相应释放的能量 $\Delta E_k = \Delta m_0 c^2 = 0.0311 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} = 2.799 \times 10^{-12}$ J

1 kg 的这种核燃料所释放的能量为

$$\frac{\Delta E_k}{m_D + m_T} = \frac{2.799 \times 10^{-12}}{8.3486 \times 10^{-27}} = 3.35 \times 10^{14} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

这相当 1.145×10^4 t 标准煤燃烧时放出的热量.

例 7-9 两个静质量为 m_0 的粒子, 以速率 v 相向运动, 做完全非弹性碰撞, 求复合粒子的质量和能量. 如图 7-9 所示.

解 设复合粒子的静质量为 M_0 , 速度为 V , 则碰撞前后两粒子的总动量和总能量守恒.

$$\text{由动量守恒} \quad MV = mv - mv = 0$$

得 $V = 0$, 即复合粒子静止, $M = M_0$.

$$\text{由能量守恒} \quad Mc^2 = M_0 c^2 = 2mc^2$$

得 $M_0 = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 2m$, 静质量增加(质量过剩).

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

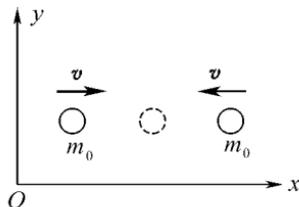


图 7-9

碰撞过程中两粒子的动能转化成复合粒子静能

$$\begin{aligned} \Delta E_0 &= E_k = 2(mc^2 - m_0 c^2) = (2m - 2m_0)c^2 \\ &= (M_0 - 2m_0)c^2 = \Delta m_0' c^2 \end{aligned}$$

$\Delta m_0' = M_0 - 2m_0$ 叫质量过剩.

7.5.5 能量和动量的关系

将相对论动量定义式 $p = mv$ 平方, 得

$$p^2 = m^2 v^2$$

再取质能关系式 $E = mc^2$ 平方, 并运算得

$$\begin{aligned} E^2 &= m^2 c^4 = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 + m^2 v^2 c^2 \\ &= m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + p^2 c^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \end{aligned}$$

$$\text{即 } E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2 \quad (7-22)$$

这就是相对论中总能量和动量的关系式. 可以用一个直角三角形的勾股弦形象地表示这一关系, 如图 7-10 所示.

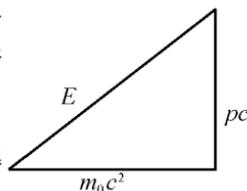


图 7-10 总能量与动量的关系

有些粒子 (如光子) $m_0 = 0$, 则 $E = cp$ 或 $p = \frac{E}{c}$, 我们得

到

$$p = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc$$

这又说明静止质量为零的粒子一定以光速运动.

* 7.6 动力学的变换

由洛伦兹变换可得出不同惯性系中质量、动量、能量和力的变换式.

7.6.1 质量变换式

设质点在 s 系中沿 x 轴运动 $v_x = v$, 则质点在 s' 系中沿 x' 轴运动, 由 (7-9) 式得

$$v' = \frac{v-u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

质点在 s 系中的质量 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, 在 s' 系中的质量

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(v-u)^2}{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)^2 c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

得质量变换式

$$m' = \frac{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (7-23)$$

当 $v=0$ 时, $m=m_0$, 上式为

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

即质速关系.

式(7-23)的逆变换式为

$$m = \frac{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) m'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (7-24)$$

7.6.2 动量-能量变换式

由质量变换式和速度变换式得

$$p_x' = m' v_x' = m \frac{1 - \frac{uv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{uv_x}{c^2}}} \frac{v_x - u}{c^2} = \frac{m(v_x - u)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{mv_x - mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{p_x - \frac{u}{c^2} E}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

上式最后一步用了质能关系.

$$p_y' = m' v_y' = m \frac{1 - \frac{uv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{uv_x}{c^2}}} v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = m v_y = p_y$$

$$p_z' = m' v_z' = m \frac{1 - \frac{uv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{uv_x}{c^2}}} v_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = m v_z = p_z$$

$$E' = m'c^2 = \frac{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right) mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{mc^2 - umv_x}{\sqrt{1 - \frac{uv_x}{c^2}}} = \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - \frac{uv_x}{c^2}}}$$

即

$$\begin{cases} p_x' = \frac{p_x - \frac{u}{c^2}E}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ p_y' = p_y \\ p_z' = p_z \\ E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (7-25)$$

上式叫动量-能量变换式. 可见动量变换与能量变换有关, 而且动量-能量变换式与空间-时间变换式相同, 只需将 x, y, z, t 换成 p_x, p_y, p_z, E 即可.

(7-25)式的逆变换式为

$$\begin{cases} p_x = \frac{p_x' + \frac{u}{c^2}E'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ p_y = p_y' \\ p_z = p_z' \\ E = \frac{E' + up_x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (7-26)$$

7.6.3 力的变换公式

由力的定义

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{dp_x}{dt} & F_y &= \frac{dp_y}{dt} & F_z &= \frac{dp_z}{dt} \\ F_x' &= \frac{dp_x'}{dt'} & F_y' &= \frac{dp_y'}{dt'} & F_z' &= \frac{dp_z'}{dt'} \end{aligned}$$

已给关系

$$dt' = \frac{1 - \frac{uv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} dt$$

和动量变换式得

$$F_x' = \frac{\frac{dp_x'}{dt'}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{p_x - \frac{u}{c^2} E}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right] \bigg/ \frac{1 - \frac{uv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{c^2 \frac{dp_x}{dt} - u \frac{dE}{dt}}{c^2 - uv_x}$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

因为
所以

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} (\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}) = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} (p^2 c^2)}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{c^2 \frac{d}{dt} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{mc^2} \\ &= \frac{1}{2m} (2p_x \frac{dp_x}{dt} + 2p_y \frac{dp_y}{dt} + 2p_z \frac{dp_z}{dt}) \\ &= v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z \end{aligned}$$

得力的变换式

$$\left. \begin{aligned} F_x' &= \frac{c^2 F_x - u(v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z)}{c^2 - uv_x} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} (F_x - \frac{u}{c^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \right\}$$

或者

$$F_x' = F_x - \frac{uv_y}{c^2 - uv_x} F_y - \frac{uv_z}{c^2 - uv_x} F_z$$

同样计算

$$F_y' = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} F_y$$

$$F_z' = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} F_z$$

(7-27)

力的逆变换式为

$$\left\{ \begin{aligned} F_x &= \frac{1}{1 + \frac{uv_x'}{c^2}} (F_x' + \frac{u}{c^2} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}') \\ F_y &= \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv_x'}{c^2}} F_y' \\ F_z &= \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv_x'}{c^2}} F_z' \end{aligned} \right.$$

(7-28)

当 $v \ll c, u \ll c$ 时,力在不同惯性系中是不变量

$$\begin{cases} F_x = F_x' \\ F_y = F_y' \\ F_z = F_z' \end{cases}$$

上式为牛顿力学力的变换式.

* 7.7 广义相对论简介

7.7.1 广义相对论的两条基本原理

狭义相对论相对于牛顿力学来说是一个进步,但从普遍的角度来看仍有局限性.

第一,狭义相对论只对惯性系适用.在一切相对做匀速直线运动的惯性系中物理规律的形式相同.但在加速参考系,即非惯性系中,物理规律的形式与惯性系中并不相同.人们不禁要问,为什么速度只有相对意义而加速度却是“绝对”的?为什么惯性系具有比非惯性系更优越的地位?

第二,在狭义相对论建立以后,许多人致力于研究各种物理规律在洛伦兹变换下的不变形式并取得了很大的成功.但是,企图把牛顿的引力理论纳入狭义相对论的努力却遭到了失败.在牛顿万有引力定律 $F = Gmm'/r^2$ 中, r 为两质点间的距离,即在给定时刻,两个质点间的瞬时距离.然而,从狭义相对论的观点来看,同时是相对的,如果 s 系中的观察者认为太阳和地球某瞬间处在两个确定的位置上,那么相对于 s 系运动的 s' 系中的观察者就会认为它们在这两个位置上并不处于同一时刻.因此,并不存在对所有惯性系都相同的、绝对的“在给定时刻的两个质点间的距离”.而且,由质速关系可知,对于不同惯性系中的观察者,万有引力定律中的质量 m 具有不相同的数值.于是狭义相对论不包容引力定律.

为了解决上述问题,爱因斯坦努力寻求更深刻、更本质的规律,提出了广义相对论的两条基本原理.

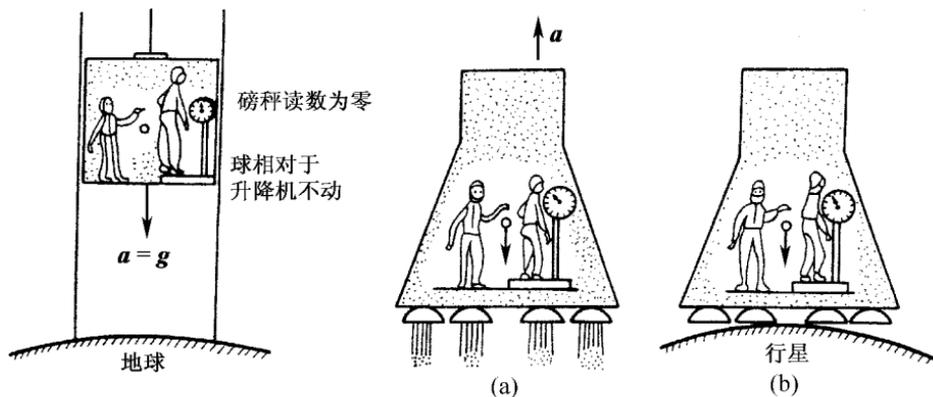
1. 广义相对性原理

一切参考系,无论其运动状态如何,都对物理规律等价.也就是说,无论在惯性系还是非惯性系中,物理规律的数学形式都相同.广义相对性原理取消了惯性系在参考系中的优越地位.

2. 等效原理

对于一切物理过程,引力场与匀加速运动的参考系局部等效.即引力与惯性力局部等效.我们用爱因斯坦升降机的理想实验来说明等效原理.如图 7-11 所示,假定有一个密闭的

升降机,其中有甲、乙两个观察者,他们只能通过内部的物理实验来判断升降机的运动情况。



实验一

对乘客来说,自由下落的升降机是一个惯性系,在此加速参考系中,向上的惯性力与向下的引力平衡,因而不能将它与在无引力空间中自由漂浮的惯性系区分开来

实验二

乘客无法区分自己是处于无引力空间中的一个加速飞船(a)中,还是处在行星引力场里的静止飞船(b)中,当然,一定要选择这样的行星,使得在它表面附近自由下落的加速度 g 与前一艘飞船的加速度 a 相等。

图 7-11 等效原理

实验一:升降机中的观察者看到手中的球被释放后不会落到地板上而是悬浮在空中不动。观察者甲认为球不自由下落的原因是升降机没有处于引力场中,它一定在离各个星球都很远的自由空间做匀速直线运动;而乙认为升降机正在地球引力场中自由下落,球不落下的原因是它既受向下引力,又受向上惯性力,两者平衡。

实验二:升降机中的观察者看到手中的球被释放后加速落向底板。甲认为球加速下落的原因是由于升降机正在离各个星球都很远的自由空间加速上升,球受到向下的惯性力的作用;而乙认为升降机在一个方向向下的引力场中静止或做匀速直线运动,球由于受引力作用而下落。

他们中谁的结论正确呢?他们谁也不能证明对方和自己谁对谁错。总之,在升降机内,人们无论通过哪种实验,都无法区分一个参考系是无引力的惯性参考系,还是有引力的加速参考系(如实验一);同样无法区分一个参考系是无引力的加速参考系,还是有引力的惯性参考系(如实验二)。如果我们把一个在引力作用下自由下落的参考系叫做局部惯性系,爱因斯坦指出:“在一个局部惯性系中,重力的效应消失了,在这样的参考系中,所有物理规律和太空中远离任何引力物体的真正的惯性系中的一样。反过来说,在一个太空中的加速参考系中将会出现表现的引力,在这样的参考系中,物理规律就和该参考系静止在一个引力物体附近一样。”也就是说,我们无法区分引力和惯性力之间的差别,引力场与加速参考系两者等价。由于一般引力场都是非均匀分布的,范围一大,其中各处的引力场强 g 的大小和方向就可能显著

不同. 那么通过参考系的加速运动就不可能同时消除其中所有地方的引力影响. 所以, 引力场与加速参考系的这种等价只能是一种局部的等效.

7.7.2 广义相对论的重要结论

爱因斯坦引力理论使用的数学手段已经超出了本课程的范围, 在此不进一步讨论爱因斯坦的引力场方程, 而直接介绍由此而来的重要结论.

1. 引力使光线弯曲

仍以爱因斯坦升降机为例, 先设升降机在无引力空间中静止, 此时升降机为一个惯性系. 设有一束光从 A' 处水平射入, 则光将沿着水平线到达 A 点, 轨迹为一条直线 $A'A$, 如图 7-12a 所示. 然后设升降机加速上升, 由于光以有限速率传播, 这时从 A' 处水平射入的光线将不再到达 A 点, 而是到达 B 点, 如图 7-12b 所示. 我们看到, 在加速上升的升降机参考系中观察, 真空中的光线弯曲了. 根据等效原理, 由加速升降机中光线的弯曲, 可以肯定在引力场中光线也弯曲. 我们还可以这样理解: 因为光具有能量, 从而也具有质量. 而任何质量都要受到引力场的吸引, 所以光在引力场中轨道弯曲. 这正如地面上平抛物体的路径会弯曲一样. 科学家们利用日全蚀的机会观测了约 380 颗恒星, 用正巧落在昏暗太阳圆面附近的恒星的表观视角位置与六个月以前它在夜间的视角位置相比较, 测得由于太阳引力引起的光线偏折角为 $1.70'' \pm 0.10''$. 近年来测得类星体发射的无线电波经过太阳表面附近时发生的偏折 $1.761'' \pm 0.016''$ 与广义相对论预言值 $1.75''$ 符合得相当好, 如图 7-12c 所示.

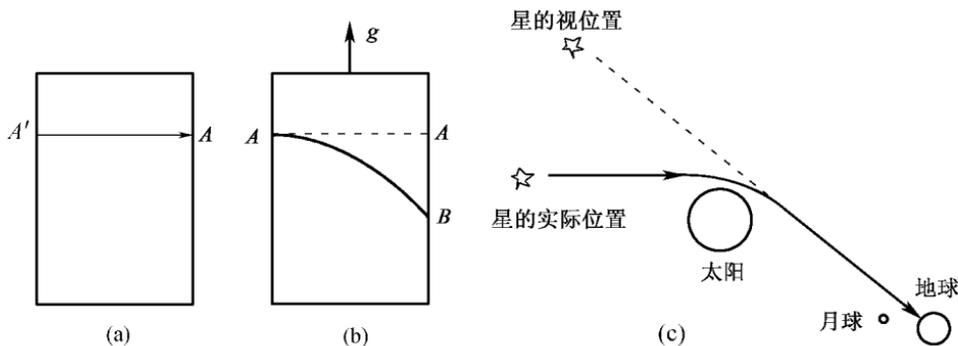


图 7-12 光线弯曲

2. 引力对时间的影响 引力红移

我们用旋转着的圆盘来说明加速参考系中的时间测量. 在图 7-13 中, 放在转盘中心处的钟相对地面不动, 所以它与地面上的钟快慢相同. 但边缘上的钟相对地球在运动, 所以它比地面上的钟走得慢些. 于是, 图中的两个钟并不同步运行. 在地面观察者看来, 边缘的钟走慢是由于它相对地面运动的结果. 而在圆盘上的观察者看来, 两个钟都没有运动, 两个钟快慢不

同是由于它们所处的环境不同:边缘上的钟要受惯性离心力的作用,而且,在离中心越远的地方,惯性离心力越大,钟就越慢.根据加速参考系与引力场等效原理,惯性离心力越大相当引力场越强.因而得出,强引力场中的钟比弱引力场中的钟走得慢.这种效应叫做引力时间延缓,也叫做“时间弯曲”.

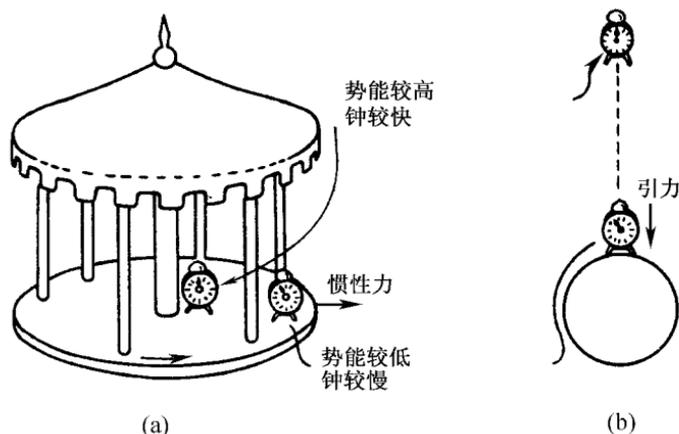


图 7-13 引力时间延缓

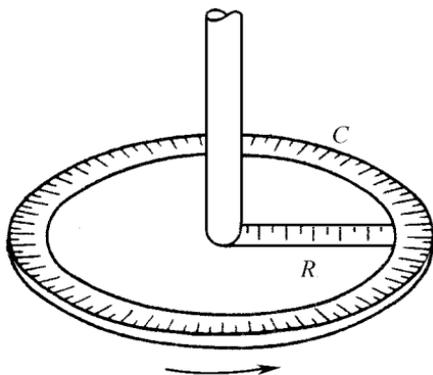
引力时间延缓效应已经得到实验的证实.1971年由哈弗尔和吉丁完成了铯原子钟环球飞行实验:他们将一只铯原子钟放在地球的赤道上,将另外四只铯钟分别放在赤道上空约1万米处由西向东和由东向西的喷气式飞机上.飞机绕地球飞行一周后,将高空的钟与地面的钟进行比较,扣除由于运动引起的狭义相对论时间延缓效应,得到高空的钟比地面的钟快 1.5×10^{-7} 秒,与广义相对论引力时间延缓的计算结果相符.1976年还进行了用火箭把原子钟带到 10^7 米高空来测引力时间效应的实验,在这一高度的钟比地面的钟快 $\frac{4.5}{10^{10}}$ 秒,与理论值只相差0.01%.

引力时间延缓的一个可观测的效应是光频率的引力红移.当光波在稳定的引力场中传播,不同地点静止的观察者测得不同的频率,离星体越远光的频率越小,这叫光频率的引力红移.说明如下:从星体表面处(引力场最强)物体发出周期为 T 频率为 ν 的光波,光传播至远处时(引力场较弱),周期变长为 $T' > T$,频率变小 $\nu' < \nu$,即波长变长,发生红移.离星体越远,光的频率越低、波长越长.对太阳光谱的分析看到了这一效应.由于原子发光时的反冲也要引起发光频率降低,这为定量观测引力红移现象带来很大困难.直到1958年穆斯堡尔发现了完全消除反冲红移的方法才使得确切地验证引力红移现象成为可能,次年庞德等人完成了第一个地面上的引力红移实验.他们把钴(Co)放射性衰变发出的14.4 keV的 γ 射线从 $H=22.6$ m的哈佛塔顶射向塔底,在塔底测量频率的增加(确切地说,他们做的是“引力蓝移”实验).在此实验中理论计算频率相对移动的绝对值 $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2.46 \times 10^{-15}$,测得的结果是 $\frac{\Delta\nu}{\nu} = (2.57 \pm 0.26) \times 10^{-15}$,两者十分吻合.这个小得几乎不可想象的影响相当于在1500万年后下面的钟比上

面落后 1 秒,这是实验科学史上所测量过的最微小的效应.

3. 引力对空间的影响 空间弯曲

用旋转着的圆盘可以说明引力对长度测量的影响. 在地面的观察者来看,沿圆盘周边放置的尺发生收缩,而靠近中心的尺运动速度慢得多,其长度几乎不受影响,即在离中心距离 r 越大处,周长缩短得越多. 但圆盘半径 R 与运动方向垂直,其测量结果不受影响. 于是,周长 $L = 2\pi R$ 的关系不再成立如图 7-14 所示. 那么,圆盘不再是一个平面,而是发生了弯曲. 根据等效原理,圆盘边缘加速度大,相当于强引力场,而靠近中心处相当于弱引力场. 所以,引力使空间发生弯曲. 引力场越强,弯曲越厉害. 在引力空间中,欧几里德空间不再成立.



在转动参考系中(或者在含有非均匀引力场的空间区域内)欧氏几何方程 $L = 2\pi R$ 不再严格成立.

图 7-14 空间弯曲

图 7-15 水星近日点的进动

对太阳和地球来说,广义相对论所预言的空间弯曲是太小了,无法用直接测量来验证,而只能通过它的影响间接地显示出来. 显示空间弯曲的一个典型现象是水星近日点的进动. 人们早已发现水星绕日的运动轨迹不是严格的在一个平面上的椭圆,在计算其他行星对水星运动的摄动效应以后,还有每百年 $43''$ 的剩余旋进是无法用牛顿引力理论加以解释的. 广义相对论用空间弯曲对这一现象做了模拟说明,如图 7-15 所示,并从理论上算出水星近日点方位角的变化率是每百年 $43''$. 1967 年发现太阳不是理想的球体,日扁率对水星旋进率的贡献是 $3''$. 所以广义相对论的计算值与实际观测值稍有偏离.

反映空间弯曲的另一个现象是雷达回波延迟. 1964—1968 年,美国科学家向金星发射雷达波并接收其反射波,当太阳行将跨过金星和地球之间时,雷达波在往返的路上都要经过太阳附近,测出在这种情况下,雷达波往返所用的时间比雷达波不经过太阳附近时要长一些. 这

是因为雷达波经过太阳附近时,由于空间弯曲距离变长了,而光速不变,所得的数据在 10% 的误差范围内与广义相对论预言的数值相符。

4. 引力波

早在 1918 年,爱因斯坦就预言了引力波的存在。他认为正如带电物体加速运动时会辐射电磁波那样,具有质量的物体加速运动时也会辐射引力波。广义相对论预言的引力波的主要特征为:是横波,在真空中以光速传播,辐射强度极弱,贯穿性极强等。

由于引力波与物质的相互作用极弱,因而极难探测。美国的韦伯设计了一种引力波探测器,这是一对长 1.5 米、质量 1.4 吨的圆筒形天线,用铜线将它们悬挂起来,可以检测出为普通原子核尺度的 1/10 的波振幅。1969 年曾发现天线的异常振动,他们认为是来自银河系中心的引力波引起的,但未得到科学界的公认。在这以后,世界各地架设了几十台这样的装置,并作了许多改进。如采用 4K 的冷冻天线,利用超导技术来检测微小信号,可以检测到振幅为原子核尺度的 1/1000 至 1/10000 的引力波。直至 20 世纪 70 年代,引力波仍未被探测到。

然而,在地球实验室中无法施行的实验,在天然的“宇宙实验室”中,却有可能实现。宇宙间大致有三种类型的引力波:第一种是引力波背景辐射,它由宇宙各时期中各种物理过程遗留下来的引力辐射叠加而成。这种引力波的作用有如一种“噪声”,它与其他噪声极难区分。第二种是脉冲式或扰动式引力波。超新星爆发、致密天体坍塌、活动星系核中的剧烈扰动都可以发出这种引力波。其特征是强度较大但时间短暂,频带很宽。1987 年 2 月 23 日在离我们最近的河外星系“大麦哲伦云”中出现一颗超新星(SN1987A),它距离地球 16 万光年,其内核坍塌时发出的引力辐射理应能被人们探测到,国外的一个研究小组也曾宣称接收到了来自 SN1987A 的引力辐射,可惜当时世界上其余引力波探测器均未处于理想工作状态,无法对此结果作出旁证。第三种是稳定的、频率确定的引力波,例如:双星的两颗子星互相绕转时发生的引力辐射。倘若双星的两颗子星质量都足够大,彼此距离足够近,那么它们互相绕转的速度和加速度就很大,由于辐射引力波而失去能量,从而轨道缩小、周期变短的效果就会相当明显。观测此类双星轨道周期变化率,就能间接地检验引力波的存在及其特征。美国天文学家泰勒和赫尔斯发现了脉冲双星(双星中有一颗子星为脉冲星)PSR1913+16,并测出其脉冲周期和轨道运动周期,从而为引力波的探测提供了新的机会,他们因此获得 1993 年诺贝尔物理学奖。若引力波探测成功,不但可以进一步证实广义相对论的正确性,还将极大地推进现代天文学、宇宙学的研究。

5. 广义相对论的宇宙模型

随着科学技术的发展,人类的观测水平不断提高,视界不断扩大,对我们生活的宇宙的认识也不断发展。哥白尼的宇宙是有限有边的,它就是我们的太阳系;牛顿的宇宙是无限无边且高度均匀的;1917 年,爱因斯坦发表他的第一篇宇宙论文《根据广义相对论对宇宙的考察》,提出了有限无边的宇宙模型,即宇宙的体积有限而又没有边界。最初人们很难接受这种观念,认为它自相矛盾。既然大小有限,为什么又没有边界呢?在这个有限的宇宙外又是什么呢?但是爱因斯坦的宇宙是没有外面的,因为若有外面,就有里面,里外之间就是边界,然而爱因

斯坦的宇宙模型是无边界的. 在这种模型中, 任何空间的点都彼此平等, 没有哪些点更靠近边缘, 也没有哪些点更接近中心. 因为既不存在边缘, 也就不存在中心. 如何理解爱因斯坦的宇宙模型呢? 可以设想一个肥皂泡, 爱因斯坦的宇宙既不是肥皂泡的内部, 也不是它的外部, 而是它的表面. 普通的肥皂泡是二维的, 而爱因斯坦的宇宙是四维的. 尽管它比普通肥皂泡多了二维, 但在几何性质上非常相似, 都具有非欧几何的性质和有限无边的特点. 当然, 我们很难想象这个四维肥皂泡的实际样子.

爱因斯坦认为宇宙是静态的, 这是为了使模型尽量简单化. 为此他不惜修改引力场方程, 在其中加入了使宇宙稳定的项. 后来, 弗里德曼和勒梅特对爱因斯坦引力场方程进行研究, 分别发现当把方程用于均匀各向同性的物质分布空间时可以找到一个不稳定的方程解, 说明爱因斯坦的有限无边宇宙具有不断膨胀的性质. 哈勃等人的天文观测证明了这个结论. 1948年伽莫夫在此基础上提出宇宙起源的大爆炸学说, 1965年彭齐亚斯和威尔逊发现了大爆炸学说预言的剩余物——微波背景辐射. 另一方面, 克尔、霍金、彭罗塞等人又从广义相对论出发, 提出和证明了一系列关于黑洞的定理. 所谓黑洞, 是引力场极强的区域, 连光进入这个区域也不能再逃逸出来. 现已发现了第一个黑洞天鹅座 X-1. 可以说, 广义相对论开创了黑洞物理学和相对论宇宙学这两门崭新的物理学分支.

总之, 由广义相对论的基本原理得出了引力导致时空弯曲, 时空弯曲取决于物质的分布和运动并可以用引力场来描述. 引力场方程指出每一时空点的曲率与该处物质的动量—能量密度成正比, 揭示了时间、空间与物质运动的相互关联. 寻求爱因斯坦引力场方程的解十分艰巨, 至今只找到少数几个特殊解, 广义相对论还处在不断地接受验证和发展完善的过程之中.

思考题

7-1 根据力学相对性原理判断下列说法哪些是正确的.

- (1) 在一切惯性系中, 力学现象完全相同, 即描述运动的各运动学量和各动力学量都相同;
- (2) 在一切惯性系中, 力学规律是相同的, 即运动学规律和动力学规律都是相同的;
- (3) 在一切惯性系中, 动力学规律都是相同的;
- (4) 在一切惯性系中, 动力学规律的数学形式都是相同的.

7-2 根据力学相对性原理证明, 对于两个质点组成的系统, 动量守恒定律经过伽利略变换后数学形式不变.

7-3 你能用狭义相对论的两个基本原理说明迈克耳孙-莫雷实验吗?

7-4 狭义相对论中同时是相对的, 为什么会有这种相对性? 如果光速是无限大, 是否还有同时的相对性?

7-5 前进中的一列火车的车头和车尾各遭到一次闪电轰击, 据车内观察者测定这两次轰击是同时发生的. 试问, 据地面上的观察者测定它们是否仍然同时? 如果不同时, 何处先遭到轰击?

7-6 (1) 物体的长度与空间间隔有何不同? 它们分别是怎样测量的? (2) 固有的时间间隔与时间间隔有何不同? 它们又分别是怎样测量的?

7-7 在例 7-2 中, (1) 跑道长 100 m, 在飞船中的观察者观测此跑道多长? 你的结论与此例中的计算 $\Delta x' = -1.47 \times 10^{10}$ m 是否矛盾? 为什么 $\Delta x'$ 没有沿运动方向收缩? 试解释之? (2) 在飞船中的观察者测量该选手所跑的时间可用时间延缓公式计算吗? 为什么?

7-8 为了使牛顿力学的规律符合相对论的要求, 对动力学公式和有关物理量做了哪些修改?

7-9 经典力学的动能定理与相对论的动能定理有什么相同和不同之处?

7-10 一个具有能量的粒子是否一定具有动量? 如果粒子没有静质量, 情况如何?

7-11 什么叫质量亏损? 它和原子能的释放有何关系?

7-12 什么是广义相对论的基本原理? 其主要结论及实验证据是什么?

习题 7

7-1 地面上的人以初速 v_0 竖直上抛一物, 其运动学方程为

$$x=0, y=v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

证明对于以速度 v 向东(设为 x 轴正向)高速行驶的列车中的乘客来说, 该物体的运动学方程为

$$x' = -vt', y' = \sqrt{1-\beta^2} v_0 t' - \frac{1}{2} g(1-\beta^2) t'^2$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$.

7-2 s' 系相对 s 系运动的速率为 $0.6c$, s 系中测得一事件发生在 $t_1 = 2 \times 10^{-7}$ s, $x_1 = 50$ m, $y_1 = z_1 = 0$ 处, 第二事件发生在 $t_2 = 3 \times 10^{-7}$ s, $x_2 = 10$ m, $y_2 = z_2 = 0$ 处, 求 s' 系中的观察者测得两事件发生的时间间隔和空间间隔.

7-3 北京和长沙直线相距 1200 km, 在某一时刻从两地同时向对方飞出直航班机, 现有一艘飞船从北京到长沙方向在高空掠过, 速率恒为 $u = 0.999c$. 求宇航员测得: (1) 两班机发出的时间间隔; (2) 哪一班机先启航?

7-4 在惯性系 s 中观察到有两个事件发生在同一地点, 其时间间隔为 4.0 s, 从另一惯性系 s' 中观察到这两个事件的时间间隔为 6.0 s, 试问从 s' 系测量到这两个事件的空间间隔是多少? 设 s' 系以恒定速率相对 s 系沿 xx' 轴运动.

7-5 设在 s 系中边长为 a 的正方形, 在 s' 系中观察者测得是 1:2 的长方形, 试求 s' 系相对于 s 系的运动速度.

7-6 长度 $L_0 = 1$ m 的米尺静止于 s' 系中, 与 x' 轴的夹角 $\theta' = 30^\circ$, s' 系相对 s 系沿 x 轴运动, 在 s 系中观测者测得米尺与 x 轴夹角为 $\theta = 45^\circ$. 试求: (1) s' 系和 s 系的相对运动

速度;(2) s 系中测得的米尺长度.

7-7 一静止长度为 l_0 的火箭以速度 v 相对地面运动,从火箭前端发出一个光信号,对火箭和地面上的观察者来说,光信号从前端到尾端各用多少时间?

7-8 一固有长度为 100 m 的火箭相对地球以 $v=0.8c$ 的速度向右飞行,一流星从火箭头部到达尾部,火箭上的观察者测得时间间隔为 10^{-6} s,求:(1)地面上观测者测得的时间间隔;(2)在此时间内流星经过的距离;(3)流星对地面的速度.

7-9 飞船 A 中的观察者测得飞船 B 正以 $0.4c$ 的速率尾随而来,已知地面站测得飞船 A 的速率为 $0.5c$,求

(1) 地面站测得 B 船的速率.

(2) 飞船 B 测得飞船 A 的速率.

7-10 静止的 π 介子,其平均寿命为 2.6×10^{-8} s,在 高能加速器中 π 介子获得了 $0.75c$ 的速度(相对实验室),分别按经典理论和狭义相对论计算实验室测得的 π 介子所通过的距离.

7-11 实验测得一质子的速率为 $0.995c$,求该质子的质量、总能量、动量、动能.(质子的静质量 $m_p=1.673 \times 10^{-27}$ kg)

7-12 在正负电子对撞机中,电子可以被加速到动能 $E_k=4.59 \times 10^6$ eV,求:(1)该电子总能量为多少?(2)运动中电子的相对论质量是静质量的多少倍?(3)该电子速率与光速相差多少?

7-13 欲将静质量为 m_0 的粒子从速度 $0.6c$ 增加到 $0.8c$,需对它做多少功?

7-14 一个静质量为 m_0 的质点在恒力 $F=Fi$ (N) 的作用下开始运动,经过时间 t ,它的速度 v 和位移 x 各是多少?在时间很短 ($t \ll m_0 c/F$) 和时间很长 ($t \gg m_0 c/F$) 的两种极限情况下, v 和 x 的值又各是多少?

7-15 一静止质量为 m_0 的粒子速度为零,裂变成两个粒子,速度分别为 $0.6c$ 和 $0.8c$.求裂变过程的静质量亏损和释放出的能量.

7-16 质子静质量 $m_p=1.67262 \times 10^{-27}$ kg,中子静质量 $m_n=1.67495 \times 10^{-27}$ kg,中子和质子结合成氦核的静质量为 $m_0=3.34365 \times 10^{-27}$ kg.求结合过程中放出的能量是多少 MeV?这能量叫氦核结合能,它是氦核静能的百分之几?

7-17 太阳的辐射能来自其内部的核聚变反应,太阳每秒钟向周围空间辐射出的能量约为 5×10^{26} J \cdot s $^{-1}$,由于这个原因,太阳每秒钟减少多少质量?把这个质量同太阳目前的质量 2×10^{30} kg 作比较.

7-18 (1)证明:相对论中的动能与动量的关系为 $E_k=p^2/(m+m_0)$, m_0 为粒子的静质量, m 为粒子的相对论质量.(2)证明: $E^2=p^2c^2+E_0^2$,在 $v \ll c$ 时,可以转化成经典表达式 $E_k=p^2/2m_0$.(3)证明:一粒子的相对论动量可以写成 $p=\frac{(2E_0E_k+E_k^2)^{1/2}}{c}$.

第二篇 机械振动与机械波

第 8 章 机械振动

振动是常见的自然现象之一,是物体基本的运动形式.振动除了机械振动,还有电磁振动.一般任何复杂的振动都是简单基本的振动的叠加.本章主要讨论最基本的简谐振动及其合成,并简要介绍阻尼振动、受迫振动和共振现象以及非线性振动.

物体在其平衡位置附近做来回往复的运动,称为机械振动.振动是常见的自然现象,如钟摆的振动、乐器的弦振动、工程结构物因风力、地震及机器设备等原因引起的振动等.除了机械振动外,还有电磁振动.如交流电路中电流或电压的振动(又称振荡),无线电波中电场和磁场的振荡等.

一般说来,一个物理量随时间作周期性变化,都可称为振动.振动现象多种多样,但遵从的规律却是相同的.在振动中,最简单最基本的振动是简谐振动(又称自由振动),其他任何复杂的振动都可以分解为若干简谐振动的叠加.振动学是波动学的基础.下面从讨论最简单最基本的简谐振动出发,介绍机械振动的现象、特性和规律.

8.1 简谐振动

简谐振动是振动中最简单最基本的振动形式,任何一个复杂的振动都可以看成是若干个简谐振动的叠加.

一个做往复运动的物体,如果在其平衡位置附近的位移按余弦函数(或正弦函数)的规律随时间变化,这种运动称为简谐振动.其运动学方程(也称为简谐振

动的振动表达式)为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (8-1)$$

8.1.1 简谐振动

取一根弹簧,一端固定,另一端系一物体组成系统,一旦受到扰动,物体将在弹性力作用下往复运动,为了简化问题,假设弹簧的质量忽略不计,并可将物体做质点处理,构成的系统称之为弹簧振子.显然,这是一个理想模型,它在研究振动问题中具有普遍的代表性.如图 8-1 所示,物体在水平光滑面上与弹簧相连,此时系统处于平衡状态,物体质心所在位置为坐标原点 O ,当物体离开平衡位置的位移为 x 时,受到弹簧的弹性力 F 作用,其关系为:

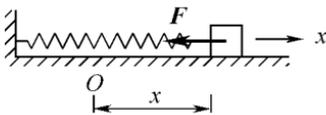


图 8-1 弹簧振子

$$F = -kx \quad (8-2)$$

其中 k 为弹簧的劲度系数.若物体的质量为 m ,在不计摩擦和阻力的情况下,由牛顿运动定律有

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

弹性力的大小与物体离开平衡位置的距离成正比,方向指向平衡位置,这种力称为回复力.

令 $\omega^2 = k/m$,则

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

即

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (8-3)$$

式(8-3),说明简谐振动的加速度和位移成正比且方向相反,它描述了物体作简谐振动的普遍规律.

由微分方程理论知,式(8-3)的解具有如下形式

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

可见弹簧振子中物体的运动是简谐振动.其中 A, φ 为由初始条件决定的积分常数.式(8-3)称为简谐振动的微分方程.将式(8-1)对时间求导数,得简谐振动物体的速度

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (8-4)$$

式(8-4)为简谐振动物体的速度.

当 $t=0$ 时, $x=x_0, v=v_0$, 代入上两式, 得

$$x_0 = A\cos\varphi, v_0 = -A\sin\varphi$$

由此解得

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \end{cases} \quad (8-5)$$

将式(8-4)对时间求导数, 得物体的加速度

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi) \quad (8-6)$$

式(8-6)为简谐振动物体的加速度. 比较式(8-1)和式(8-6)也可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

由上述讨论可知, 作简谐振动的物体的速度和加速度也都是简谐运动.

8.1.2 描述简谐振动的特征量

1. 振幅 A

由简谐振动运动学方程可知, 物体的最大位移不能超过 A , 物体偏离平衡位置的最大位移的绝对值叫做振幅. 由式(8-5)知振幅 A 是由初始条件决定的, 它给出了物体运动的范围, 同时也与振动系统的能量相联系.

2. 周期 T 、频率 ν 和角频率 ω

做简谐振动的物体从某振动状态发生周而复始的一次变化称为一次全振动, 完成一次全振动所需的时间称为振动的周期, 用 T 表示. 即

$$A\cos[\omega(t+T) + \varphi] = A\cos(\omega t + \varphi)$$

所以

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (8-7)$$

周期 T 的倒数 $\nu = 1/T$ 代表物体在单位时间内发生全振动的次数, 称为振动的频率. 因为

$$\omega = 2\pi\nu \quad (8-8)$$

故称 ω 为振动的角频率, 也称圆频率.

T, ν 和 ω 完全由简谐振动系统本身的性质决定. 对于弹簧振子, 有

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8-9)$$

T, ν 和 ω 分别称为简谐振动物体的固有周期、固有频率和固有角频率. 在 SI 中, ν 的单位是 Hz(赫兹), ω 的单位是 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (弧度每秒). T, ν 和 ω 都反映简谐振动的固有特性, 是描述简谐振动的周期性的重要物理量.

3. 相位

频率或周期描述振动的快慢, 振幅描述振动的范围. 此外还有一个重要的物理量 $(\omega t + \varphi)$, 为相位. 由式(8-1)和式(8-4)可知, 在已知 A 和 φ 的条件下, 相位 $(\omega t + \varphi)$ 确定了振动物体的位置和速度, 即振动状态, 即使不具体计算振动物体的位置和速度, 仅由相位值也能大体上判断出物体的振动状态. 如当 $(\omega t + \varphi) = 0$ 时, 则对应物体位于 x 正向最大值、速度为零的状态. 不难看出, φ 是 $t=0$ 时的相位, 称为初相位或初相. 由式(8-5)知 φ 由初始条件决定.

例 8-1 一轻弹簧, 原长 l_0 , 上端固定, 下端悬挂一质量 $m=2 \times 10^{-2} \text{ kg}$ 的重物后伸长了 $\Delta l=9.8 \text{ cm}$, Δl 称为形变. 若手托重物使弹簧缩回原长, 然后放手, 则物体上下振动. (1) 求证该系统的振动是简谐振动, 并写出振动表达式(取开始振动时为计时零点); (2) 若取物体经平衡位置向下运动时刻开始计时, 写出简谐振动的运动学方程, 并计算振动频率.

解 (1) 如图 8-2 所示, 设弹簧劲度系数为 k , 重物质量为 m , 物体未开始运动时处于 O 位置, 此时物体所受重力和弹力平衡, 可见 O 位置为其平衡位置. 取平衡位置为坐标原点, 向下为 x 轴正方向, 则有

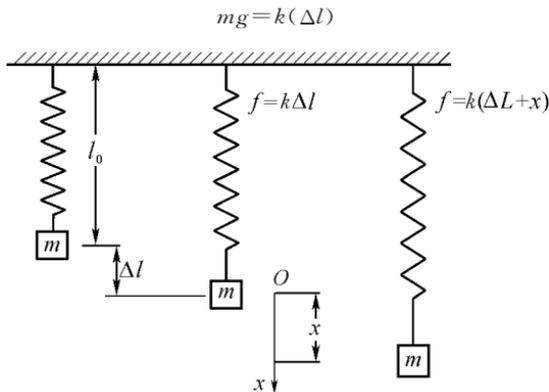


图 8-2 例 8-1 图

当物体运动至某一位置 x 时, 弹簧的总伸长量为 $\Delta l + x$, 故物体位移为 x 时所受的合外力为

$$F = mg - k(\Delta l + x) = -kx$$

根据牛顿第二定律, 有

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k\Delta l - kx = -kx$$

于是

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

若令

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

则上式可改写为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

此为简谐振动的微分方程, 故可判断物体的振动是简谐振动, 其振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.098}} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

按题意给出的初始条件: $t=0$ 时, $x_0 = -\Delta l$, $v_0 = 0$, 可求出振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0.098 \text{ m}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = 0, \pi$$

利用 $x_0 = A \cos \varphi < 0$, 故取 $\varphi = \pi$, 所以物体振动的运动学方程为

$$x = 9.8 \times 10^{-2} \cos(10t + \pi) \text{ m}$$

(2) 按题意 $t=0$ 时, $x_0 = 0$, $v_0 > 0$, 可求得

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

根据 $t=0$ 时, $v_0 > 0$ 条件, 故取 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, 因此, 物体振动方程为

$$x = 9.8 \times 10^{-2} \cos\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$$

通过上述分析可知, 同一简谐振动, 若取不同的计时起点, 则有不同的初相位, 但简谐振动的角频率和振幅不变. 若取向上为 x 轴的正方向, 则振动方程为

$$x = 9.8 \times 10^{-2} \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

弹簧振子的固有频率为:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = 1.6 \text{ Hz}$$

8.1.3 旋转矢量法

在研究简谐振动时,常采用旋转矢量法描述简谐振动,这是一种直观的几何方法,有助于我们理解和掌握简谐振动.

从坐标原点 O (平衡位置)画一矢量 A ,其长度等于振幅 A ,并以 A 为半径,画一参考圆.在 $t=0$ 时, A 与 x 轴正向夹角等于初相位 φ ,然后使 A 以角频率 ω 为角速度做逆时针匀速旋转,如图 8-3 所示.显见,在任一时刻 t ,旋转矢量 A 与 x 轴的夹角为 $(\omega t + \varphi)$ 就是简谐振动的相位,此时振幅矢量 A 在 x 轴上的投影

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

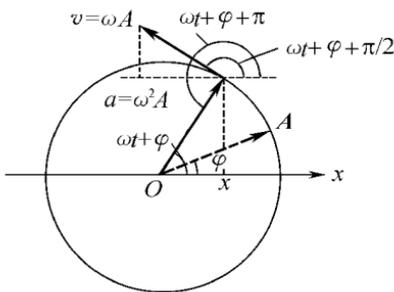


图 8-3 旋转矢量示意图

正是简谐振动的运动学方程式(8-1);矢量端点沿圆周运动的速度大小等于 ωA ,其方向与 x 轴的夹角等于 $(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$,在 x 轴上的投影为

$$\begin{aligned} v &= \omega A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

这就是简谐振动的速度方程式(8-4);矢量端点沿圆周运动的加速度大小等于 $\omega^2 A$,其方向与 x 轴的夹角为 $(\omega t + \varphi + \pi)$,所以加速度在 x 轴上的投影为

$$\begin{aligned} a &= \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi) \\ &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

这就是简谐振动的加速度方程式(8-6).

旋转矢量 A 每旋转一周,它的端点在 x 轴上的投影点就做一次完全简谐振动,所以简谐振动的周期 T ,即为旋转矢量旋转一周所需的时间.

以上讨论表明简谐振动速度的相位比位移的相位超前 $\pi/2$,加速度的相位比速度的相位超前 $\pi/2$,比位移的相位超前 π .图 8-4 是 $\varphi=0$ 情况下的 $x-t$,

$v-t, a-t$ 曲线. 其中表示 $x-t$ 关系的曲线称为简谐振动的振动曲线.

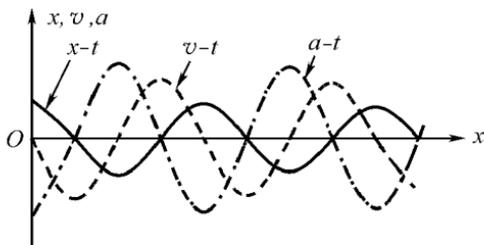


图 8-4 简谐振动的 $x-t, v-t, a-t$ 曲线

例 8-2 一物体沿 x 轴做简谐振动, 振幅为 0.12 m , 周期为 2 s . 当 $t=0$ 时, 物体的位移为 0.06 m , 且向 x 轴正方向运动. 求:

- (1) 简谐振动的初相位;
- (2) $t=0.5 \text{ s}$ 时, 物体的位置、速度及加速度;
- (3) 在 $x=-0.06 \text{ m}$ 处, 且向 x 轴负方向运动时物体的速度和加速度, 以及从这一位置回到平衡位置时所需的最短时间.

解 (1) 由题意知 $A=0.12 \text{ m}$, $\omega=2\pi/T=\pi$, 故物体的简谐振动方程及初始位移为

$$x=0.12\cos(\pi t+\varphi)$$

$$x_0=0.12\cos\varphi=0.06$$

解得

$$\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$$

因此时物体向 x 轴正方向运动, $v_0=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-A\omega\sin\varphi>0$, 故 φ 在第四象限, $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

(2) 由(1)知, 物体的位移、速度及加速度分别为

$$x=0.12\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=-0.12\pi\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-0.12\pi^2\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$$

将 $t=0.5 \text{ s}$ 代入上述三式, 得

$$x=0.12\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0.104 \text{ m}$$

$$v=-0.12\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-0.19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a=-0.12\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-1.03 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(3) 设相应于 $x = -0.06 \text{ m}$ 的时间为 t_1 , 则有:

$$-0.06 = 0.12 \cos\left(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}\right)$$

即:

$$\cos\left(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}\right) = \pm \frac{2\pi}{3}$$

但此时物体向 x 轴负方向运动, $v = -0.12\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) < 0$, 所以相位位于第二象限, 即

$$\varphi = \pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

解得

$$t_1 = 1 \text{ s}$$

此时的速度和加速度分别为

$$v = -0.12\pi \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -0.33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = -0.12\pi^2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 0.59 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

从 $x = -0.06 \text{ m}$ 处回到平衡位置, 意味着回到相位 $3\pi/2$ 处, 设相应时刻为 t_2 , 则有

$$\pi t_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$$

解得:

$$t_2 = \frac{11}{6} \text{ s}$$

故从 $x = -0.06 \text{ m}$ 处回到平衡位置所需的最短时间为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6} = 0.83 \text{ s}$$

此题也可用旋转矢量法求解。

8.1.4 简谐振动的实例

前面讨论了弹簧振子物体做简谐振动, 下面讨论单摆和扭摆的运动. 通过实例分析加深对简谐振动特征的认识和理解。

1. 单摆

图 8-5 所示一单摆, 摆锤质量为 m , 摆长为 l (不计质量), 当单摆作微振动时, 其对 A 点的力矩为

$$M = -mgl \sin\theta$$

当 θ 很小时, $\sin\theta \approx \theta$, 有

$$M = -mgl\theta$$

若以 Ax 轴为界, θ 在右边为正、左边为负, 则当

$$\theta > 0 \text{ 时}, M < 0;$$

$$\theta < 0 \text{ 时}, M > 0$$

所以力矩 M 总是使小球趋向到平衡位置, 称回复力矩.

不考虑阻力, 根据转动定律 $M = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$, 得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\theta = 0$$

令

$$\omega^2 = \frac{mgl}{J}$$

则

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

这就是单摆的振动微分方程, 与式 (8-3) 具有完全相同的形式, 所以单摆微振动也是简谐振动. 因为单摆绕 A 点的转动惯量 $J = ml^2$, 所以它的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

单摆振动的周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (8-10)$$

2. 扭摆

图 8-6 所示为一扭摆振动系统, 简称扭摆, 它由一弹簧杆和一圆盘组成. 如把圆盘扭转一微小角度, 然后松开, 圆盘将绕轴线做来回往复扭转运动, 这一运动也是简谐振动, 分析如下:

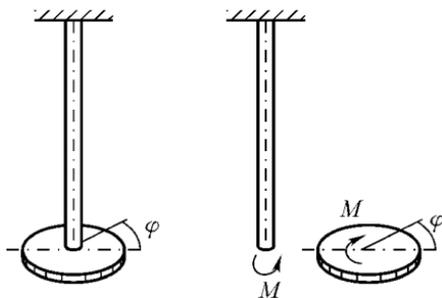


图 8-6 扭摆

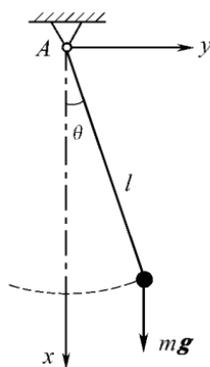


图 8-5 单摆

设在某一时刻,圆盘扭转角为 φ ,如图 8-6 所示,则作用在圆盘上的外力对弹性杆轴线的力矩就是该杆对圆盘作用的弹性力矩,表示为

$$M = -k_l \varphi$$

其中 k_l 为扭转刚度系数,它是使杆扭转一单位角度时所需的力矩,负号表示弹性力矩与扭角的符号相反,这个力矩有使圆盘回到平衡位置的趋势,亦为回复力矩. 设圆盘对轴线的转动惯量为 J ,杆的质量不计,则由转动定律有

$$-k_l \varphi = J \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

即

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{k_l}{J} \theta = 0$$

这就是扭摆的振动方程,与微分方程式(8-3)具有完全相同的形式,所以扭摆微振动也是简谐振动. 其角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k_l}{J}}$$

从以上例子可见,许多单自由度系统(指系统的位置可用一个独立坐标完全决定)的振动问题,都可应用解决弹簧振子的方法来求解. 通常将做简谐振动的系统称为谐振动系统或谐振子.

例 8-3 如图 8-7 所示,长为 l ,质量为 m 的均质细杆一端悬挂在水平轴 O 上,杆可在竖直面内自由摆动,当摆幅很小时,证明杆的运动为简谐振动,并求其周期.

解 以铅直线 OO' 为参考轴线,当杆在某一时刻处于角坐标 θ (θ 很小)处时,重力 mg 对 O 轴的力矩为

$$M = -mg \frac{l}{2} \sin \theta \approx -\frac{1}{2} mgl \theta$$

式中负号表示力矩与角坐标反向.

根据转动定律 $M = J \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ 有

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{2J} \theta$$

若令

$$\omega^2 = \frac{mgl}{2J}$$

则上式可改写为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

因此,当杆在竖直面内做小角度摆动时,杆做简谐振动,其周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2J}{mgl}}$$

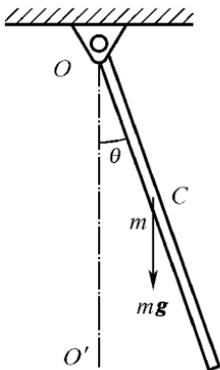


图 8-7 例 8-3 图

杆绕一端的转动惯量 $J = \frac{1}{3} ml^2$, 其振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2J}{3g}}$$

8.1.5 简谐振动的能量

系统做简谐振动时, 每一时刻都具有确定的能量. 以水平方向振动的弹簧振子为例. 设 t 时刻振子所在位置坐标为 x , 速度为 v , 则系统的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

若选坐标原点 $x=0$ 处为势能零点, 则系统的弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

系统的机械能

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = k/m,$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (8-11)$$

由 E_k 及 E_p 的表达式可以看出, 系统的动能和势能都随时间周期性变化, 当系统动能达到最大时, 势能为零; 当系统势能达到最大时, 动能为零, 在整个振动过程中, 动能和势能互相转换, 系统的总机械能守恒(见图 8-8).

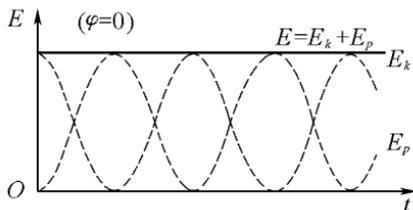


图 8-8 简谐振动的能量

由式(8-11)知, 振动系统的能量与振动频率的平方、振幅的平方成正比.

例 8-4 从能量观点求解例 8-3.

解 设 t 时刻杆的角坐标为 θ (参见图 8-7), 则杆的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

式中, $J = \frac{1}{3} ml^2$ 是杆对悬挂轴的转动惯量. 选取杆处于平衡位置时其质心(质量中心) C 所在处为重力势能零点, 则当杆处于角坐标 θ (θ 很小) 处时的重力势能为

$$E_p = mg \frac{l}{2} (1 - \cos\theta) = mg \frac{l}{2} [1 - (1 - \theta^2)^{1/2}] \approx \frac{1}{4} mgl\theta^2$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{4} mgl\theta^2$$

由于系统的机械能守恒, 所以 E 不随时间变化. 将上式等号两边分别对时间 t 求导, 得

$$\frac{1}{3} ml^2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2} mgl\theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

即
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2l}\theta = 0$$

令 $\omega^2 = \frac{3g}{2l}$, 代入上式, 得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

此即简谐振动的微分方程, 其振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

与例 8-3 解法的结果相同.

8.2 简谐振动的合成

在实际问题中经常会碰到一个物体同时参与两个或两个以上的简谐振动的情况, 如两列声波同时传播到空间某处, 该处的空气质元将同时参与两个振动, 根据运动叠加原理, 质点的运动就是两个振动的合成. 一般的振动合成问题比较复杂, 本节只讨论几种简单情况.

8.2.1 两个同方向同频率简谐振动的合成

设一质点同时参与两个同方向同频率的简谐振动, 振动沿 x 轴, 质点的平衡位置为坐标原点 O , 对两个振动同时开始计时, 则两简谐振动的振动方程分别为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

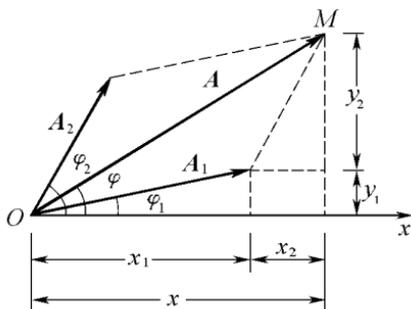
故合成运动的位置坐标为

$$x = x_1 + x_2$$

研究两个同方向同频率简谐振动的合成可用三角函数法(即将 x_1, x_2 按两个角之和的三角函数展开后合并),也可用旋转矢量法. 相比之下,后一种方法要简便一些. 现用旋转矢量法来讨论简谐振动的合成.

如图 8-9 所示,令 A_1, A_2 同以角速度 ω 绕 O 点逆时针旋转,在 $t=0$ 时, A_1, A_2 与 x 轴的夹角分别为 φ_1, φ_2 ,则 A_1, A_2 代表两简谐振动的旋转矢量. 当 A_1, A_2 以相同的角速度转动时,以 A_1, A_2 为邻边的平行四边形的对角线 OM ,即 A_1, A_2 的合矢量 A 也以同一角速度绕 O 点旋转,而保持形状不变,设 $t=0$ 时 A 与 x 轴的夹角为 φ ,则 t 时刻 A 的末端在 x 轴上的投影为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = x_1 + x_2$$



— 9 两个同方向同频率简谐振动的合成

可见,合矢量 A 的末端在 x 轴上的投影表示两个同方向同频率简谐振动的合成.

由上式可以看出,两个同方向同频率简谐振动的合成仍为同一频率的简谐振动,其合振幅的大小可由平行四边形法则求得,即

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (8-12)$$

合振动的初相位为

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \quad (8-13)$$

对于同方向同频率的两个简谐振动来说,无论何时 $(\varphi_2 - \varphi_1)$ 均不变. 因此,合振动的振幅与计时起始时刻无关,而合振动的初相 φ 则与计时起始时刻有关. 对于两个同方向同频率简谐振动的合成,判定合成后的振动是振动加强还是振动减弱,这主要取决于合振幅 A . 下面讨论两种特殊情况.

1. 两个分振动相位相同(同相)

当两分振动的相位差: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi (k=0, 1, 2, \dots)$ 时, 有 $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, 合振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

合振动的振幅为两个分振动的振幅之和, 这表明合振幅达到最大值.

2. 两个分振动相位相反(反相)

当两分振动的相位差: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2k + 1)\pi (k=0, 1, 2, \dots)$ 时, 有 $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, 合振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$$

合振动的振幅为两个分振动振幅之差的绝对值 (A 恒为正), 表明合振幅为最小值, 如果 $A_1 = A_2$, 则合振幅 $A = 0$, 这表明两个分振动相互抵消, 物体处于静止状态.

如果 $\varphi_2 - \varphi_1$ 为其他数值, 由式(8-12)可知, 合振幅 A 的值在 $(A_1 + A_2)$ 与 $|A_1 - A_2|$ 之间. 以上讨论的两种特殊情况十分重要, 在以后研究机械波和光波的干涉、衍射时都要用到.

例 8-5 已知两个同方向同频率简谐振动的振动方程分别为

$$x_1 = 0.05 \cos\left(10t + \frac{3}{5}\pi\right) \text{ m}$$

$$x_2 = 0.06 \cos\left(10t + \frac{1}{5}\pi\right) \text{ m}$$

(1) 求其合振动的振幅及初相位;

(2) 设另一同方向同频率简谐振动的振动方程为 $x_3 = 0.07 \cos(10t + \varphi_3) \text{ m}$, 问 φ_3 为何值时 $x_1 + x_3$ 的振幅为最大? φ_3 为何值时 $x_2 + x_3$ 的振幅为最小?

解 (1) 由题意知 $A_1 = 0.05 \text{ m}$, $\varphi_1 = \frac{3}{5}\pi$, $A_2 = 0.06 \text{ m}$, $\varphi_2 = \frac{1}{5}\pi$, 将上述各值代入式(8-12), 得合振动的振幅

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ &= \sqrt{0.05^2 + 0.06^2 + 2 \times 0.05 \times 0.06 \cos\left(-\frac{2}{5}\pi\right)} \\ &= 8.92 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

代入式(8-13), 得合振动的初相位为

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \arctan \frac{0.05 \sin \frac{3}{5} \pi + 0.06 \sin \frac{\pi}{5}}{0.05 \cos \frac{3}{5} \pi + 0.06 \cos \frac{\pi}{5}} \\
 &= 68^{\circ} 12' \text{ 或 } 248^{\circ} 12'
 \end{aligned}$$

由于 φ_1, φ_2 分别位于第二及第一象限, 而 $248^{\circ} 12'$ 位于第三象限不合题意, 故知合振动的初相位 $\varphi = 68^{\circ} 12'$.

(2) 由式(8-12)可知, 当 $\varphi_3 - \varphi_1 = \varphi_3 - \frac{3}{5} \pi = \pm 2k\pi$ 时, $(x_1 + x_3)$ 的振幅最大, 得

$$\varphi_3 = \frac{3}{5} \pi \pm 2k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

当 $\varphi_3 - \varphi_1 = \varphi_3 - \frac{1}{5} \pi = \pm (2k+1)\pi$, $(x_2 + x_3)$ 的振幅最小, 得

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{5} \pm (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

8.2.2 两个同方向不同频率简谐振动的合成

如果一个质点同时参与两个同方向不同频率的简谐振动, 则其合振动较为复杂. 下面仅讨论两个简谐振动的频率之差不大(即 $\omega_1 + \omega_2 \gg \omega_2 - \omega_1$) 且振幅相等(即 $A_1 = A_2 = A$) 的特殊情况. 若在两个分振动都达到正向最大位置时开始计时(如图 8-10 中的 t_0 时刻), 则两个谐振动的振动方程分别为

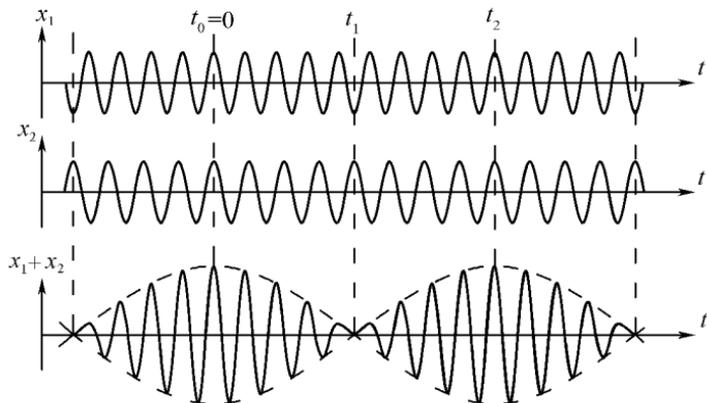


图 8-10 两个同方向不同频率简谐振动的合成

$$x_1 = A \cos \omega_1 t = A \cos 2\pi \nu_1 t$$

$$x_2 = A \cos \omega_2 t = A \cos 2\pi \nu_2 t$$

用三角学中差化积公式, 可得合振动表达式

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A\cos 2\pi\nu_1 t + A\cos 2\pi\nu_2 t \\ &= 2A\cos 2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \end{aligned}$$

即

$$x = \left[2A\cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right] \cos 2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t \quad (8-14)$$

由于 $\nu_2 + \nu_1 \gg \nu_2 - \nu_1$, 所以式中括号内的量随时间变化很慢, 可看作缓慢变化的振幅. 式(8-14)仍然具有振动的特征, 但不是简谐振动. 其 $\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}$ 为合振动的频率 ν , 它表明合振动的频率为两个分振动的频率的平均值, 合振动的振幅 $\left(2A\cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right)$ 是时间 t 的周期函数, 若以 T' 代表合振幅变化的周期, 由于振幅是正值, 所以一个周期内的振幅变化相当于相位增加 π , 即

$$\cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} (t + T') = \cos \left[2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t + \pi \right]$$

故有

$$2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} T' = \pi$$

即

$$T' = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$$

振幅变化的频率

$$\nu' = \frac{1}{T'} = \nu_2 - \nu_1$$

合振幅做周期性变化的现象称为拍, ν' 称为拍频, 其值为两个分振动的频率之差. 在图 8-10 中, 设 $t_2 - t_0 = 1$ s, 则第一个分振动的频率 $\nu_1 = 9$ Hz, 第二个分振动的频率 $\nu_2 = 8$ Hz, 而拍频 $\nu' = \nu_1 - \nu_2 = 1$ Hz, 即合振动每秒钟做一次周期性变化, 这种变化从图中也可清楚地看出. 拍频现象在科学技术中应用广泛, 例如, 可以利用拍现象来校准乐器, 也可用来测定超声波及无线电波的频率等.

8.2.3 相互垂直的简谐振动的合成

当一个质点同时参与两个不同方向的振动时, 在一般情况下, 质点将做平面曲线运动, 其运动轨迹的形状将由两个分振动的周期、振幅和它们的相位差决定.

1. 同频率相互垂直简谐振动的合成

两个振动的方向分别沿 x, y 轴, 并以质点的平衡位置作为坐标原点, 则这两个分振动可分别表示为

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

在 t 时刻, 质点的位置可由坐标 x, y 确定. 上述方程是以时间 t 为参变量的运动轨迹的参数方程, 从中消去 t , 便得轨迹方程

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (8-15)$$

式(8-15)是椭圆方程, 它表明两个相互垂直且同频率的简谐振动合成的轨迹为一椭圆. 下面讨论几种特殊情况.

(1) $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ 或 $\pm 2k\pi (k=1, 2, \dots)$, 即两个振动同相位, $\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi_0$, 由式(8-15)可得

$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

这表明质点的运动轨迹是一条直线, 其斜率为两个分振动的振幅之比, 如图8-11a所示.

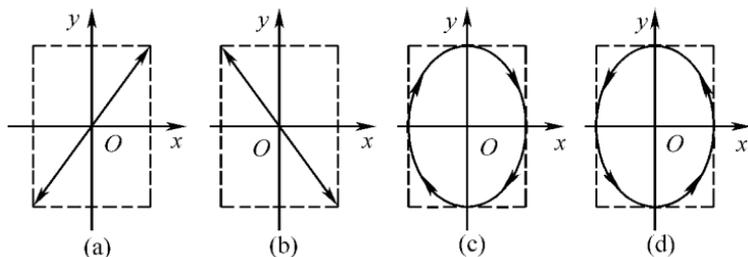


图 8-11 同频率相互垂直简谐振动的合成

在某一时刻 t 质点的位矢 r 的大小为

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + A_2^2 \cos^2(\omega t + \varphi)} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

这表明质点仍做简谐振动, 角频率为 ω , 振幅为 $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

(2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ 或 $\pm (2k+1)\pi (k=1, 2, \dots)$, 即两个分振动反相. 由式(8-15)可得

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x$$

这表明质点仍在直线上做简谐振动,其斜率为 $-\frac{A_2}{A_1}$,其角频率、振幅与情况(1)相同,如图 8-11b 所示.

(3) $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$,由式(8-15)可得

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

即质点的运动轨迹为以坐标轴为主轴,半短轴为 A_1 ,半长轴为 A_2 的椭圆,如图 8-11c 所示,椭圆上的箭头表示质点运动的方向.

若 $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ (或 $\frac{3}{2}\pi$),则质点的轨迹仍如上述椭圆,只是运动方向与前者相反,如图 8-11d 所示.如果两个振动的振幅相等,即 $A_1 = A_2 = A$,则质点的运动轨迹为圆.

2. 不同频率相互垂直简谐振动的合成

如果两振动的频率只有微小差别,则可近似看作同频率简谐振动的合成,相位差会随时间变化,合振动运动轨迹将不断由直线变成椭圆,再由椭圆变成直线.

如果两振动的频率相差较大,但恰成简单的整数比,则合振动运动轨迹总能构成封闭曲线形的稳定轨道,这些曲线称为李萨如图.

图 8-12 分别表示周期为(1:2),(2:3),(3:4)时的李萨如图.

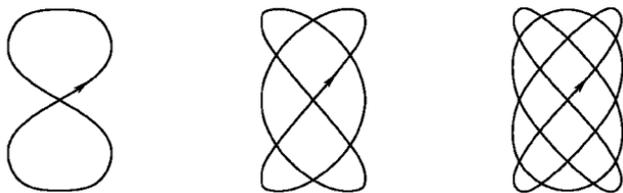


图 8-12 李萨如图形

如果已知一个振动的周期,就可以根据李萨如图求出另一个振动的周期.这是一种比较方便也是比较常用的测定频率的方法.

8.3 阻尼振动 受迫振动 共振

8.3.1 阻尼振动

以上讨论的简谐振动是在不计阻力的理想情况下的一种等幅振动,这种振动又称为无阻尼自由振动.实际上,任何振动系统都要受到阻力作用,这种振动称为阻尼振动,在阻尼振动过程中,系统在振动中要克服阻力做功并消耗系统的能量,系统的振幅将随能量的不断消耗而逐渐减小,直至停止振动.故阻尼振动又称为减幅振动.形成阻尼振动的原因有两个:一是系统在振动时所受的摩擦阻力做功,使机械能转化为热;二是振动系统通过与周围介质互相作用,将振动能量向四周传播出去.这都使得振动系统的能量减少,从而振幅也相应减小,我们主要讨论第一种原因所引起的阻尼振动.

做阻尼振动的物体,除受弹性力或准弹性力外,还受到摩擦阻力作用.在振动速度不太大时,摩擦力的大小与速度成正比,即

$$f = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

式中, γ 为阻力系数,负号表示阻力与速度反向,以弹簧振子为例,此时振子受力为 $-kx - \gamma \frac{dx}{dt}$,其动力学方程为

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$$

即:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt}$$

令 $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{\gamma}{m} = 2\beta$,将之代入上式,整理后得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

式中, ω_0 为振动系统的固有角频率, β 称为阻尼系数,如果 β 较小,即 $\beta^2 < \omega_0^2$,则上述微分方程的解

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (8-16)$$

式中, A_0 和 φ 为积分常量, 其值取决于初始状态; ω 为振动的角频率, 它与系统的固有角频率 ω_0 的关系为 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; $A_0 e^{-\beta t}$ 为阻尼振动的振幅, 其值随时间的增大而减小, 当 β 很小时, 振幅衰减很慢, 式(8-16)表示的振动可视为简谐振动. 根据式(8-16)可绘出阻尼振动的曲线如图 8-13 所示.

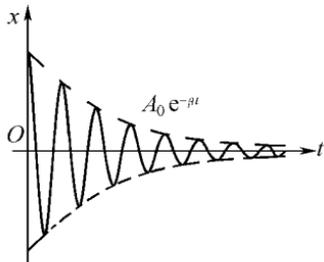


图 8-13 小阻尼振动

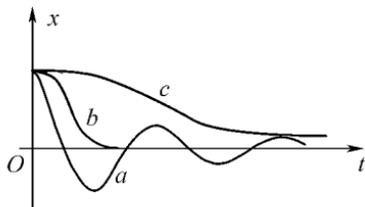


图 8-14 三种阻尼振动比较

式(8-16)表明, 阻尼振动不同于简谐振动, 但在阻尼很小, $e^{-\beta t} \rightarrow 1$ 的情况下, 可近似地看作简谐振动, 如图 8-14 中的曲线 a 所示. 如果阻尼过大, 以致 $\beta^2 > \omega_0^2$, 则式(8-16)不再是阻尼振动微分方程的解. 此时, 振子从开始的最大位置缓慢地回到平衡位置, 而不能做周期运动, 这种情况称为过阻尼, 如图 8-14 中的曲线 c 所示. 如果阻尼的大小恰好使振子开始做非周期运动, 这种情况称为临界阻尼(此时 $\beta^2 = \omega_0^2$), 如图 8-14 中的曲线 b 所示, 从图中可以看出, 当振动处于临界阻尼状态时, 系统从开始振动到静止($x=0$)所经过的时间最短.

阻尼在工程技术中有着重要的应用. 例如, 在某些精密仪器(如陀螺经纬仪、灵敏电流计、精密天平等)中常常附有阻尼装置, 如果使仪器的偏转系统处在临界阻尼状态下工作, 便可扼制仪器的振动, 减少操作时间, 以便尽快进行读数.

8.3.2 受迫振动 共振

在实际振动中, 阻尼是不可避免的, 要维持系统做等幅振动, 则必须对系统施加周期性的强迫力, 以使系统的振幅不随时间衰减. 系统在周期性外力的作用下所做的等幅振动称为受迫振动.

如果一个振动系统在弹性力 $-kx$, 阻力 $-\gamma v$ 和周期性外力 $H \cos pt$ 的作用下做受迫振动, (其中 H 是强迫力的幅值, p 是强迫力的角频率), 则其动力学方程为:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + H \cos pt$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{\gamma}{m}$, $h = \frac{H}{m}$, 将之代入上式, 整理后得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = h \cos pt$$

此式即为受迫振动的微分方程. 其解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta) + A \cos(pt + \varphi) \quad (8-17)$$

式(8-17)说明, 受迫振动是由阻尼振动与简谐振动两部分组成. 开始振动时, 系统的运动情况很复杂, 经过一段时间, 阻尼振动部分衰减到可以忽略不计时, 振动便达到稳定状态, 即只剩下式(8-17)的第二项. 此时受迫振动的振动方程为

$$x = A \cos(pt + \varphi)$$

因而可视为简谐振动, 其频率为周期性外力的频率, 其振幅 A 和初相 φ 分别为

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{-2\beta p}{\omega_0^2 - p^2} \quad (8-18)$$

在受迫振动时, 振幅 A 的大小与周期性外力的角频率 p 、阻尼系数 β 及振动系统的固有角频率 ω_0 有关. 图 8-15 是根据式(8-18)做出的 $A-p$ 曲线, 图中 β 值较大者对应的 A 值较小. 如果系统的阻尼已定, 则当外力的角频率与系统的固有角频率相差很大, 即 $p \gg \omega_0$, 或 $p \ll \omega_0$ 时, 从图中可以看出, 受迫振动的振幅较小; 当外力的角频率 p 接近系统的固有角频率 ω_0 时, 受迫振动振幅变大. 为了求出受迫振动振幅的极大值, 可以令式(8-18)对 p 的导数等于零, 即

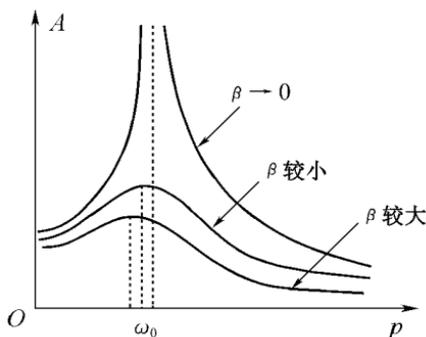


图 8-15 共振

$$\frac{dA}{dp} = \frac{2ph}{[(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2]^{3/2}} (\omega_0^2 - 2\beta^2 - p^2) = 0$$

由此解可知,当 $p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时,受迫振动的振幅有极大值.受拍振动的振幅出现极大的现象称为共振, $p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 称为共振角频率.将此值代入式(8-18),得共振时的振幅为

$$A = \frac{h}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

由此可见,阻尼系数 β 越小,共振时的振幅越大,共振越强烈.从理论上讲,如果阻尼系数为零(或 $\beta^2 \ll \omega_0^2$),则共振频率 $p = \omega_0$,即周期性外力的频率与系统的固有频率相同,将引起共振,且振幅 A 趋于无限大.但实际上, β 不可能为零,共振振幅也不会是无限大.

共振有利有弊,在工程建设中,我们要用其利而防其弊.

* 8.4 振动的分解

在前面的学习中我们知道两个同方向的简谐振动可以合成一个简谐振动(当 $\omega_1 = \omega_2$ 时),也可以合成一个较复杂的一般振动(当 $\omega_1 \neq \omega_2$ 时),就是说一个复杂的振动可由两个频率不同的简谐振动组成.实践和理论分析表明,任何一个复杂的周期性振动,都可看作由频率不同、振幅不同的若干个简谐振动组成.把一个较复杂的周期性振动分解成若干个简谐振动的叠加的方法称为振动的分解(也称为谐振分析).

根据实际振动曲线的形状或其位移函数关系,求出它所包含的各种简谐振动的频率和振幅的数学方法称为傅里叶分析.它指出,一个周期为 T 的周期性函数 $f(t)$ 可以表示为傅里叶级数:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cos(n\omega t + \varphi_n)]$$

式中的分振动振幅 A_n 与初相位 φ_n 可用数学方法根据 $f(t)$ 求出.这些分振动中频率最低的称为基频振动,该频率称为基频.其他分振动的频率都是基频的整数倍,依次分别为二次、三次、……谐频.

不仅周期性振动可以分解为一系列频率为最低频率整数倍的简谐振动,而且任一非周期性振动也可以分解为许多简谐振动.这种情况下的振动的分解要用傅里叶变换处理.

* 8.5 非线性振动简介

我们知道,当单摆的摆角 θ 很小时,其运动学方程 $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0$, 可近似地写成

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (8-19)$$

这是一个线性微分方程,其解为

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

表示一个线性振动. 如果摆角较大,则单摆的运动方程可近似写为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots \right) = 0 \quad (8-20)$$

这是一个非线性微分方程,它的解不再代表线性振动,而是一种非线性振动.

一般地说,自然界的实际振动都是非线性振动,仅仅在一定的条件下可近似地认为是线性振动(例如,上述单摆的振动就是这样). 非线性振动与线性振动的主要区别在于线性振动系统服从叠加原理,其方程是线性的,任意两个解的线性叠加仍为方程的解(例如,若 θ_1, θ_2 是方程(8-19)的解,则 $c_1\theta_1 + c_2\theta_2$ 也是该方程的解),但对非线性方程(8-20)来说,叠加原理不适用. 事实上,对于单摆的微小振动,其振动周期(或频率)与振幅无关,但当摆幅增大时,单摆的振动周期却随振幅的加大而增大,且不再做简谐振动.

对于在非线性的弹性回复力 $F = -k_1x - k_3x^3$ 作用下的弹簧振子来说,仅当 $k_3 = 0$ 时(胡克定律成立),方程

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k_1x + k_3x^3 = 0$$

才成为线性微分方程,这时弹簧振子的角频率为

$$\omega_0 = \sqrt{k_1/m}$$

但对于“硬弹簧”($k_3 > 0$),弹性回复力比胡克定律所预期的大,振动周期变小,对于“软弹簧”($k_3 < 0$),弹性回复力比胡克定律所预期的小,振动周期变大,弹簧的振动都不是简谐振动. 当振动加强时,会出现种种复杂现象.

以在周期性外力(简称策动力)作用下,弹簧的受迫振动为例,来说明非线性振动的某些特性.

当弹簧振子为角频率 ω_0 的线性振子,阻尼力与速度成正比时,在角频率为 ω 的余弦策动力作用下,其运动方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos\omega t$$

是线性的,这时,在稳定状态下,质点的位移 x 做余弦式的振动,其振动频率与策动力频率相

等,而振幅则与策动力的振幅 F_0 成正比. 这时,振动系统对策动力的响应是线性的,其数学表示可写成

$$x(t) = kF(t)$$

其中 k 为常数,即“输出” $x(t)$ 和“输入” $F(t)$ 呈线性关系.但在非线性振动系统情况下, $x(t)$ 和 $F(t)$ 呈非线性关系,这种“非线性响应”可以写成:

$$x(t) = k[F(t) + \varepsilon F^2(t)] \quad (8-21)$$

式中, ε 是一个小参数.

设策动力 $F(t) = A \cos \omega t$, 将其代入式(8-21), 得

$$\begin{aligned} x(t) &= kA(\cos \omega t + \varepsilon A \cos^2 \omega t) \\ &= kA \left(\frac{1}{2} \varepsilon A + \cos \omega t + \frac{1}{2} \varepsilon A \cos 2\omega t \right) \end{aligned}$$

于是“输出”项 $x(t)$ 中除基频 ω 的简谐振动外还出现常数项(整流项)和倍频 2ω 的简谐振动(倍频项).

如果策动力是角频率各为 ω_1 与 ω_2 的两种策动力的叠加, 即设 $F(t) = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$, 将其代入式(8-21), 则可得到 $x(t)$ 中除了包括常数项, 基频各为 ω_1, ω_2 的基频项, 角频率各为 $2\omega_1, 2\omega_2$ 的倍频项外, 还出现一个交叉项 $2k\varepsilon AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$, 当 $\omega_1 \gg \omega_2$ 时, 它可以看成振幅为 $2k\varepsilon AB \cos \omega_2 t$ 的调幅振动(振幅值以角频率 ω_2 缓慢地做周期性变化). 也可以将交叉项改写成 $k\varepsilon AB [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]$. 这表明, 在响应项 $x(t)$ 中还出现角频率为 $\omega_1 + \omega_2$ 的和频项和角频率为 $|\omega_1 - \omega_2|$ 的差频项.

综上所述, 非线性系统在外来策动力的作用下, 可以产生整流、倍频、和频、差频(或调幅振动)等效应, 且非线性效应越强, 则这些效应就越显著.

非线性效应有弊也有利, 需按情况进行避免或者加以利用. 例如, 音响设备中, 为避免“失真”, 要减弱非线性效应; 在外差式发送和收音中, 可用调幅器将音频信号(频率约为千赫兹量级)与载波频率(频率约为兆赫兹量级)在非线性电路中合在一起发送, 而在接收时, 则用非线性电路产生和频、差频, 以复现音频信号.

对于光强很强的激光, 因为场强振幅很大, 可以在介质中产生倍频效应, 使介质受激而产生频率为入射光两倍的出射光, 结果, 很强的红色(或近红外)激光通过玻璃后便出现蓝色的光.

思考题

8-1 试判断下列几种运动是否为简谐振动.

(1) 拍皮球时的运动; (2) 一小球在半径很大的光滑凹球面底部做小幅度摆动; (3) 锥摆的运动.

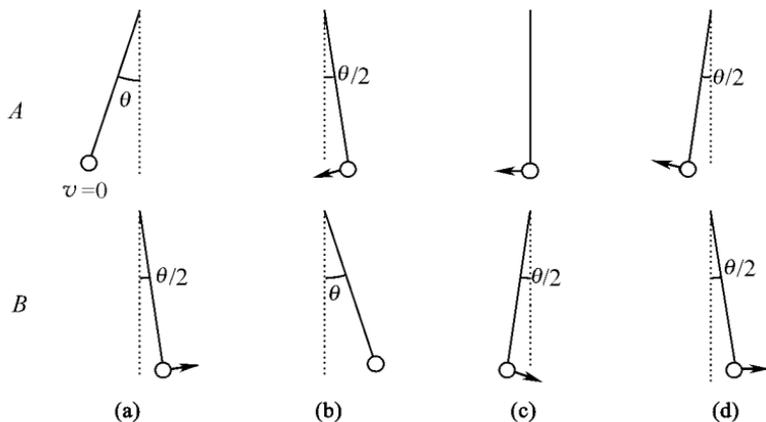
8-2 把单摆的摆球从平衡位置拉开一些, 使摆线与竖直方向成 θ_0 角, 然后放手任其摆动, 那么单摆做简谐振动的初相位是否就是 θ_0 呢? 单摆摆动的角速度是否就是角频率?

8-3 一弹簧振子,先后把它拉到离开平衡位置 2 cm 和 4 cm 处放手,任其自由振动,先后两次振动的振幅、周期、初相位是否相同?为什么?

8-4 能量公式 $E = \frac{1}{2}kA^2$ 是否只适用于弹簧振子?对单摆而言, k 等于什么?

8-5 一个弹簧振子的振幅增大到两倍时,它的振动周期、最大速度和振动能量将如何改变?

8-6 A, B 两摆摆长相同,振幅相同(θ_0),试分别就题 8-6 图中四种情况,写出 A, B 两摆的相位差.



思考题 8-6 图

8-7 在简谐振动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 中,相应于初相位 $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 时,对水平放置的弹簧振子来说,其物体的初位置分别在哪?初速度如何?

8-8 一弹簧的劲度系数为 k ,一质量为 m 的物体挂在它的下面,若把弹簧分割成两半,物体挂在分割后的一根弹簧上,问在弹簧分割前后的振动频率是否一样,它的关系怎样?

8-9 两个简谐振动的合运动是圆周运动,这两个简谐振动必须具备什么条件?

8-10 阻尼振动的特征是什么?受迫振动在什么条件下也是简谐振动,其频率决定什么?共振产生的条件是什么?

8-11 何谓拍?形成拍的条件如何?拍的振幅最大值是多少?拍的频率如何确定?

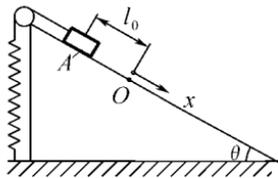
习题 8

8-1 一远洋货轮,质量为 $M = 2 \times 10^4$ t,浮在水面时其水平截面积为 $S = 2 \times 10^3$ m². 设在水面附近货轮的截面积与货轮高度无关,试证明此货轮在水中的铅直自由运动是简谐

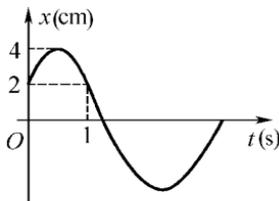
振动, 并求其自由振动的周期.

8-2 重物 A 质量 $m=1\text{ kg}$, 放在倾角 $\theta=30^\circ$ 的光滑斜面上, 并用绳跨过定滑轮与劲度系数 $k=49\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ 的轻弹簧连接, 如题 8-2 图所示. 将物体由弹簧未形变的位置静止释放, 并开始计时, 试求:

- (1) 不计滑轮质量, 物体 A 的运动方程;
- (2) 滑轮为质量 M , 半径 r 的均质圆盘, 物体 A 的运动方程.



题 8-2 图



题 8-3 图

8-3 质点做简谐振动的振动曲线如题 8-3 图所示, 试根据题 8-3 图得出该质点的振动表达式.

8-4 在一个电量为 Q , 半径为 R 的均匀带电球中, 沿某一直径挖一条隧道, 另一质量为 m , 电量为 $-q$ 的微粒在这个隧道中运动. 试求证该微粒的运动是简谐振动, 并求出振动周期(设带电球体介电常数为 ϵ_0).

8-5 如题 8-5 图所示, 有一轻质弹簧, 其劲度系数 $k=500\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, 上端固定, 下端挂一质量 $M=4.0\text{ kg}$ 的物体 A , 在物体 A 的正下方 $h=0.6\text{ m}$ 处, 以初速度 $v_{01}=4.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度向上抛出一质量 $m=1.0\text{ kg}$ 的油灰团 B , 击中 A 并附着于 A 上.

- (1) 证明 A 与 B 简谐振动;
- (2) 写出它们共同做简谐振动的振动表达式;
- (3) 弹簧所受的最大拉力是多少? (取 $g=10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, 弹簧未

挂重物时, 其下端端点位于 O' 点)

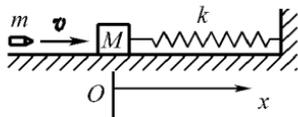
8-6 一物体竖直悬挂在劲度系数 k 的弹簧上做简谐振动, v_{01} 设振幅 $A=0.24\text{ m}$, 周期 $T=4.0\text{ s}$, 开始时在平衡位置上方 0.12 m 处向上运动. 求:

- (1) 物体做简谐振动的振动表达式;
- (2) 物体由初始位置运动到平衡位置上方 0.12 m 处所需的最短时间;
- (3) 物体在平衡位置上方 0.12 m 处所受到的合外力的大小及方向(设物体的质量为 1.0 kg).

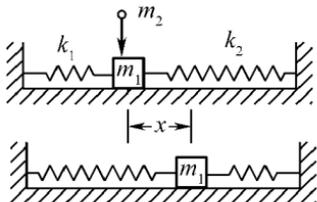
题 8-5 图

8-7 如题 8-7 图所示, 质量 $m=10\text{ g}$ 的子弹, 以 $v=1000\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度射入一在光滑平面上与弹簧相连的木块, 并嵌入其中, 致使弹簧压缩而做简谐振动, 若木块质量

$M=4.99 \text{ kg}$, 弹簧的劲度系数 $k=8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 求简谐振动的振动表达式.



题 8-7 图

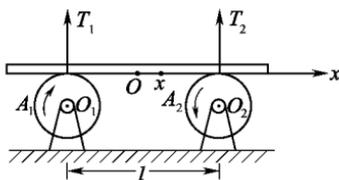


题 8-8 图

8-8 如题 8-8 图所示, 质量为 m_1 的光滑物块和弹簧构成振动系统, 已知两弹簧的劲度系数分别为 $k_1=3.0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $k_2=1.0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 此系统沿弹簧的长度方向振动, 周期 $T_1=1.0 \text{ s}$, 振幅 $A_1=0.05 \text{ m}$, 当物块经过平衡位置时有质量为 $m_2=0.10 \text{ kg}$ 的油泥块竖直落到物体上并立即粘住, 求新的振动周期 T_2 和振幅 A .

8-9 如题 8-9 图所示, 一质量为 m 的匀质直杆放在两个迅速旋转的轮上, 两轮旋转方向相反, 轮间距 $l=20 \text{ cm}$, 杆与轮之间的摩擦系数 $\mu=0.18$, 证明在此情况下直杆做简谐振动, 并求其振动周期.

8-10 质量为 0.2 kg 的质点做简谐振动, 其振动方程为 $x=0.60\sin\left(5t-\frac{\pi}{2}\right)$, 式中, x 的单位为 m , t 的单位为 s , 求:



题 8-9 图

- (1) 振动周期;
- (2) 质点初始位置, 初始速度;
- (3) 质点在经过 $\frac{A}{2}$ 且向正向运动时的速度和加速度以及此时质点所受的力;
- (4) 质点在何位置时其动能、势能相等?

8-11 手持一块平板, 平板上放一质量 $m=0.5 \text{ kg}$ 的砝码, 现使平板在竖直方向上振动, 设这振动为简谐振动, 频率 $\nu=2 \text{ Hz}$, 振幅 $A=0.04 \text{ m}$, 问:

- (1) 位移最大时, 砝码对平板的正压力多大?
- (2) 以多大振幅振动时, 会使砝码脱离平板?
- (3) 如果振动频率加快一倍, 则砝码随板保持一起振动的振幅上限如何?

8-12 有一在光滑水平面上做简谐振动的弹簧振子, 劲度系数为 k , 物体质量为 m , 振幅为 A . 当物体通过平衡位置时, 有一质量为 m' 的泥团竖直落在物体上, 并与之粘在一起. 求:

- (1) 系统的振动周期和振幅.
- (2) 振动总能量损失了多少?
- (3) 如果当物体达到振幅 A 时, 泥团竖直落在物体上, 则系统的周期和振幅又是多

少?振动的总能量是否改变?物体系统通过平衡位置的速度又是多少?

8-13 一水平放置的简谐振子,如题8-13a图所示,当其从 $\frac{A}{2}$ 运动到A的位置处(A是振幅)需要的最短时间为 $\Delta t=1.0\text{ s}$,现将振子竖直悬挂,如题8-13b图所示,现由平衡位置向下拉0.1 m,然后放手,让其做简谐振动,已知 $m=5.0\text{ kg}$,以向上方向为 x 轴正方向, $t=0$ 时, m 在平衡位置下方且向 x 轴负方向运动,其势能为总能量的0.25倍,试求:

- (1) 振动的周期、圆频率、振幅;
- (2) $t=0$ 时,振子的位置,速度和加速度;
- (3) $t=0$ 时,振子系统的势能、动能和总能量;
- (4) 振动的位移表达式.



题8-13图

8-14 做简谐振动的 P, Q 两质点,它们的振幅分别为 $A_P=5.00\times 10^{-2}\text{ m}$,
 $A_Q=2.00\times 10^{-2}\text{ m}$,圆频率都为 $\pi\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$,初相位分别为: $\varphi_P=\frac{\pi}{3}$, $\varphi_Q=-\frac{\pi}{3}$,求:

- (1) 它们各自的振动表达式;
- (2) 当 $t=1\text{ s}$ 时,它们的 x, v, a 各是多少?
- (3) 判断哪一个质点振动超前?

8-15 一质量 $m=1.00\times 10^{-2}\text{ kg}$ 的质点做振幅为 $A=5.00\times 10^{-2}\text{ m}$ 的简谐振动,初始位置在位移 $\frac{1}{2}A$ 处并向着平衡位置运动,当它通过平衡位置时的动能 $E_k=3.8\times 10^{-5}\text{ J}$.

- (1) 写出质点的振动表达式;
- (2) 求出初始位置的势能.

8-16 质量 $m=10\text{ g}$ 的小球做简谐振动,其 $A=0.24\text{ m}$, $\nu=0.25\text{ Hz}$,当 $t=0$ 时,初位移为 $1.2\times 10^{-1}\text{ m}$,并向着平衡位置运动,求:

- (1) $t=0.5\text{ s}$ 时,小球的位置;
- (2) $t=0.5\text{ s}$ 时,小球所受力的大小与方向;
- (3) 从起始位置到 $x=-12\text{ cm}$ 处所需的最短时间;
- (4) 在 $x=-12\text{ cm}$ 处小球的速度与加速度;
- (5) $t=4\text{ s}$ 时, E_k, E_p 以及系统的总能量.

8-17 两质点沿同一直线做同频率、同振幅的简谐振动,在振动过程中,当它们经过振幅一半时相遇,而运动方向相反,求它们的相位差,并用旋转矢量表示。

8-18 已知两个简谐振动的 $x-t$ 曲线如题 8-18 图所示,它们的频率相同,求它们的合振动的振动表达式。

8-19 已知两个同方向、同频率的简谐振动如下:

$$x_1 = 0.05 \cos\left(10t + \frac{3}{5}\pi\right)$$

$$x_2 = 0.06 \cos\left(10t + \frac{\pi}{5}\right)$$

式中, x 单位为 m , t 单位为 s 。

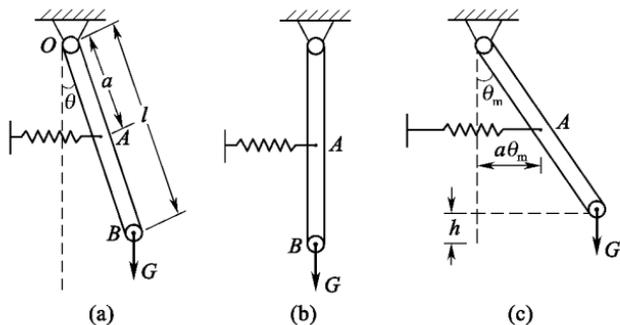
(1) 求它们合振动的振幅与初相位;

(2) 另有一同方向简谐振动 $x_3 = 0.07 \cos(10t + \varphi)$, 问 φ 为何值时, $x_1 + x_3$ 的振幅最大? φ 为何值时, $x_2 + x_3$ 的振幅最小?

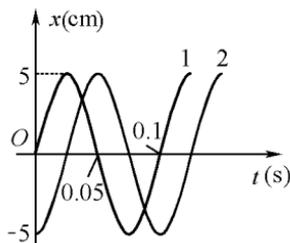
(3) 用旋转矢量法表示(1),(2)的结果。

8-20 两个同方向、同频率的简谐振动,其合振动的振幅 $A = 0.20 m$, 合振动的相位与第一个振动的相位差为 30° , 若第一个振动的振幅 $A_1 = 0.173 m$, 求第二个振动的振幅及第一、第二两个振动的相位为多少?

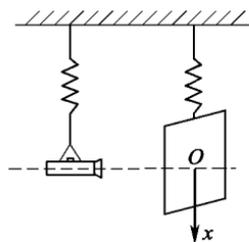
8-21 如题 8-21 图所示,一简谐振动系统,平衡位置时,弹簧为原长,已知 $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = l$, 小球重 G , 弹簧劲度系数为 k , 弹簧及杆 OB 的质量不计, 求该系统做微振动的固有角频率。



题 8-21 图



题 8-18 图



题 8-22 图

8-22 如题 8-22 图所示,手电筒与屏的质量均为 m , 两个弹簧的劲度系数为 k , 当平衡时手电筒的光恰好照在屏幕的中心, 已知手电筒和屏的振动分别为:

$$x_1 = A \cos(\omega t + \varphi_1), x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_2)$$

问:(1)在屏上的光点相对于屏静止不动;(2)光点相对于屏做振幅 $A' = 2A$ 的振动, 则初相位 φ_1, φ_2 应满足什么条件? 用什么方式启动, 才能得到上述结果?

第 9 章 机械波

波动是物理学最重要、最普遍的概念之一,也是物质运动的基本形式.包括机械波,电磁波,物质波等.这些本质不同的波动过程,都有一些共同的特征及规律.

本章主要讨论机械波的基本概念及规律,重点介绍平面波的波动方程,波的叠加原理及驻波现象,并简要介绍多普勒效应.

振动的传播过程称为波动,简称波,是一种常见的物质运动形式.机械振动在媒质中的传播形成机械波,如声波、水波等;变化的电场和变化的磁场在空间的传播形成电磁波,如无线电波、光波等;近代物理中还有表示几率的波,它们在量子力学中被用来描述电子、原子或更复杂的物质形式的变化.这些本质不同的波动过程,都伴随着能量的传播,都能产生反射、折射、干涉和衍射等波动现象.都有一些共同的特征及规律.

本章主要讨论机械波的基本概念及规律.

9.1 机械波的产生和传播

9.1.1 机械波的形成

机械波是机械振动在媒质中的传播.机械波的形成要具备两个条件,首先要有做机械振动的波源,然后要有能够传播这种机械振动的媒质.通常,在媒质内部机械波是靠物体中各个质点间的弹性力来传播的,这些媒质统称为弹性媒质.

在机械波传播的过程中,媒质中的各个质点并不随着波动而发生迁移,只是在其平衡位置附近做振动.且沿着波的传播方向各质点的振动相位依次落后于波源的振动相位.

根据质点振动方向与波的传播方向的关系,将机械波分为横波和纵波两种基本类型:一类是质点的振动方向与波的传播方向垂直的波,称为横波,例如,拉紧一根绳子,使绳的一端做垂直于绳子的振动,可以看到振动沿着绳子向另一端传播,形成高低起伏的横波;另一类是质点的振动方向与波的传播方向平行形成疏密相间的波,称为纵波,例如,在空气中传播的声波就是纵波.横波是由切变弹性所引起的,而纵波是由长变弹性或容变弹性所引起的.由于通常的气体 and 液体没有切变弹性,所以在气体和液体内部仅能传播纵波,而固体内部既能够传播纵波也能够传播横波.

通常媒质中各质点的振动情况是很复杂的,由此产生的波也很复杂.当波源做简谐振动,且在各向同性、均匀的、无限大、无吸收的连续弹性媒质中传播时,媒质中各质点的振动都是简谐振动,这种波称为简谐波.简谐波是最简单、最基本的波动,任何复杂的波都可以看成由若干个简谐波叠加而成.因此研究简谐波具有特别重要的意义.

为了形象地描述波在空间的传播,通常引入波面、波前和波线的概念.在三维空间中,从波源发出的波一般均向各个方向传播.在传播过程中,所有振动相位相同的点连成的面称为波面,最前面的波面称为波前,也叫波阵面.显然,任一时刻一列波中波面有无限多个,而波前则只有一个.波面是平面的波叫平面波;波面为球面的波叫球面波.在远离发射中心的球面波波面上任何一个小部分均可视为平面波.波的传播方向称为波射线,简称为波线.在各向同性的媒质中,波线恒与波面垂直.不难理解,平面波的波线为一系列垂直于波面的平行直线,球面波的波线为一系列沿半径方向的射线,如图 9-1 所示.

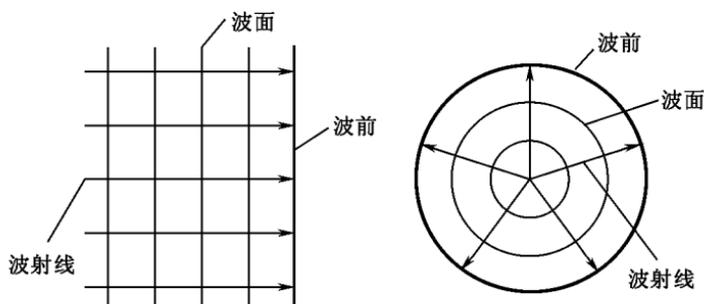


图 9-1 平面波、球面波

9.1.2 描述波动的物理量

波动与振动不同,振动状态仅与时间有关,而波动状态则既与时间有关,也与空间有关,因而波动的描述较为复杂,需引入相关的物理量来进行描述.

1. 波速 u

波动是振动状态(即相位)的传播,振动状态在单位时间内传播的距离称为波速,也称相速,用 u 表示. 对于机械波,波速的大小由媒质的性质决定.

简谐波在固体媒质中传播的横波和纵波的波速分别由式(9-1), (9-2)确定,即

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (9-1)$$

$$u_{//} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9-2)$$

式中 G 和 E 分别是媒质的切变弹性模量和杨氏模量, ρ 为媒质的密度. 对于同一种固体媒质,一般有 $G < E$, 所以 $u_{//} > u_{\perp}$. 顺便指出,只有纵波在均匀细长棒中传播时,式(9-2)才能准确成立,在非细长棒中,纵向长变过程中引起的横向形变不能忽略. 因此,容变不能简化成长变,式(9-2)只能近似成立.

在弦中传播的横波波速为

$$u_{//} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (9-3)$$

式中 T 是弦中张力, μ 为弦的线密度.

在液体或气体中只能传播纵波,其波速为

$$u_{//} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (9-4)$$

式中 B 为媒质的容变弹性模量.

对于理想气体,若把波的传播过程视为绝热过程,则由分子运动理论及热力学方程可导出理想气体中的声波波速公式为

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M_{\text{mol}}}} \quad (9-5)$$

式中 γ 为气体的摩尔热容比, p 为气体的压强, ρ 为气体的密度, T 是气体的热力学温度, R 是普适气体恒量, M_{mol} 是气体的摩尔质量.

在这里要注意的是,波速与媒质中质点的振动速度是两个不同的概念,一定

要加以区分.

固体、液体和气体在受到外力作用时,不仅运动状态会发生变化,而且其形状和体积也会发生改变,这种改变称为形变.如果外力不超过一定限度,在外力撤去后,物体的形状和体积能完全恢复原状,这种形变称为弹性形变.这个外力限度称为弹性限度.形变有以下几种基本形式:

(1) 长变 如图 9-2 所示,在一棒的两端沿轴向作用两个大小相等、方向相反的一对外力 F 时,其长度发生变化,由 l 变为 $l + \Delta l$,伸长量 Δl 的正负(伸长或压缩)由外力方向决定, $\frac{\Delta l}{l}$ 表示棒长的相对改变,称为应变或胁变.设棒的横截面积为 S ,则 $\frac{F}{S}$ 称为应力或胁强.胡克定律指出,在弹性限度范围内,应力与应变成正比,即

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

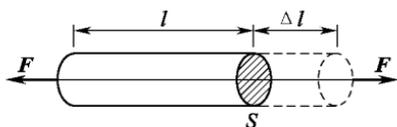


图 9-2 长变

式中比例系数 E 只与材料的性质有关,称为杨氏弹性模量,其定义为

$$E = \frac{F/S}{\Delta l/l}$$

(2) 切变 如图 9-3 所示,在一块材料的两个相对面上各施加一个与平面平行、且大小相等而方向相反的外力 F 时,则块状材料将发生图中所示的形变,即相对面发生相对滑动,称为切变.设施力的平面面积为 S ,则 $\frac{F}{S}$ 称为切变的应力或胁强,两个施力的相对面相互错开的角度 $\varphi = \arctan \frac{\Delta d}{b}$ 称为切变的应变或胁变.根据胡克定律,在弹性限度内,切变的应力和切应变成正比,即

$$\frac{F}{S} = G\varphi$$

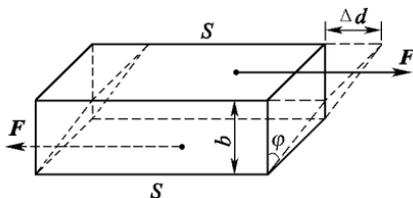


图 9-3 切变

式中 G 是比例系数,只与材料性质有关,称为切变弹性模量,其定义式如下:

$$G = \frac{F/S}{\varphi}$$

(3) 容变 当物体(固体、液体或气体)周围受到的压力改变时,其体积也会发生改变,这种形变称为容变.如图 9-4 所示,物体受到的压强由 p 变为 $p + \Delta p$,相应地物体的体积由 V 变为 $V + \Delta V$,显然, ΔV 与 Δp 的符号恒相反. $\frac{\Delta V}{V}$ 表示体积的相对变化,称为容变的应变.实验表明,在弹性限度内,压强的改变与容变的应变的大小成正比,即

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$$

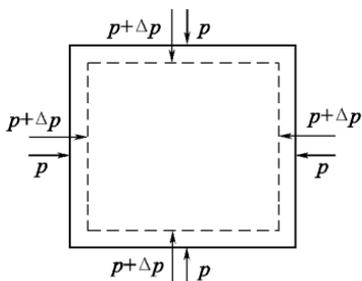


图 9-4 容变

式中比例系数 B 只与材料性质有关,称为容变弹性模量,其定义为

$$B = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V}$$

2. 波动的周期 T 和频率 ν

由于波源振动具有时间周期性,因而波动过程也具有时间上的周期性.波动的周期是指一个完整波形通过媒质中某一固定点所需的时间,用 T 表示.周期的倒数称为频率,波动的频率是指单位时间内通过媒质中某固定点完整波的数目,用 ν 表示.由于波源每完成一次全振动,就有一个完整的波形发送出去,所以,当波源相对于媒质静止时,波动的周期即为波源振动的周期,波动的频率即为波源振动的频率.因此波动的周期和频率由波源决定.波动的周期和频率之间也有

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \quad (9-6)$$

3. 波长 λ

同一时刻沿波线上各质点的振动相位是依次落后的,则同一波线上相邻的相位差为 2π 的两质点之间的距离称为波长,用 λ 表示.当波源完成一次全振动,波在媒质传播的距离就为一个波长.因此波长反映了波在空间上的周期性.

波长、波速与波动的周期、频率的关系为

$$\lambda = uT = \frac{u}{\nu} \quad (9-7)$$

由于波速由媒质决定,波动的周期和频率由波源决定,则波长由媒质和波源共同决定.不同频率的波在同一媒质中传播具有相同的波速,而同一频率的波在不同媒质中传播其波长不同.

9.2 平面简谐波的波动方程

前面介绍了简谐波的概念,若简谐波的波面是平面,这样的简谐波称为平面简谐波.用数学函数式来描述媒质中各质点位移随空间和时间变化的关系式称为波动方程.下面来讨论平面简谐波的波动方程.

如图 9-5 所示,设有一平面余弦波在无吸收的均匀无限大媒质中沿 x 轴正方向传播,波速为 u .设 O 为波线上任选的一点,并取 O 为坐标原点.为了清楚地描述波线上各点的振动,用 x 表示各个质点在波线上的平衡位置,用 y 表示它们的振动位移,每一质点的振动位移都是对自己的平衡位置而言的.假定 O 点处 ($x=0$) 质点的振动方程为

$$y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

式中 A 是振幅, ω 是角频率, y_0 是 O 点处质点在 t 时刻离开其平衡位置的位移(横波的位移方向与 Ox 轴垂直;纵波的位移方向与 Ox 轴平行).设 P 为波线上任一点,离 O 点的距离为 x .现在要确定 P 点处质点在 t 时刻的位移.因为波沿 x 轴正方向从 O 点传播到 P 点,所以 P 点处质点的振动将落后于 O 点处质点的振动.这段落后的时间就是振动从 O 点传到 P 点所需的时间 x/u ,所以 P 点处质点在 t 时刻的位移等于 O 点处质点在 $(t-x/u)$ 时刻的位移.由于讨论的是平面简谐波,所以沿 x 轴上各点振幅相等,则由 O 点处质点的振动方程相应地得出 P 点处质点的振动方程为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (9-8)$$

因为 P 点是任意的,所以式(9-8)表示出波线上任一点(距原点 x)处的质点在任一瞬时的位移,这就是沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的波动方程.它表明

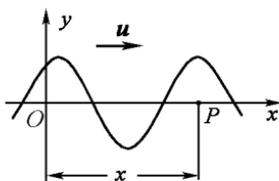


图 9-5 平面简谐波

了在波线上距坐标原点 x 处的质点在 t 时刻的位移. 若将式(9-8)两边分别对时间 t 求偏导, 可得出 x 处质点的振动速度. 所以式(9-8)可以确定波线上任一 x 处质点在 t 时刻的振动状态. 如平面简谐波沿轴负方向传播, 则 P 点处质点在 t 时刻的位移等于 O 点处质点在 $(t+x/u)$ 时刻的位移, 相应的波动方程为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (9-9)$$

此为沿 x 轴负方向传播的平面简谐波的波动方程. 综合(9-8), (9-9)两式, 沿轴方向传播的平面简谐波的波动方程为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (9-10)$$

因为 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$, 又 $uT = \lambda$, 所以式(9-10)也可写为

$$\begin{aligned} y &= A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right] \\ &= A \cos \left(2\pi\nu t \mp \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi \right) \\ &= A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ut \mp x) + \varphi \right] = A \cos [k(ut \mp x) + \varphi] \end{aligned}$$

式中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, 称为波矢, 它表示在 2π 长度内所具有的完整波的数目.

下面分三种情况来讨论波动方程的物理意义. (以沿 x 轴正向传播的平面简谐波为例)

(1) 当 $x = x_0$, 即 x 为给定值时, 位移 y 仅是时间 t 的函数, 这时波动方程为距离坐标原点 x 处给定质点的振动方程, 即

$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x_0}{u} \right) + \varphi \right] = A \cos \left[\omega t + \left(\varphi - \frac{2\pi x_0}{\lambda} \right) \right] \quad (9-11)$$

式中 $(\varphi - \frac{2\pi x_0}{\lambda})$ 为该点振动的初相位. 显然 x_0 处质点的振动相位比原点 O 处质点的振动相位始终落后 $\frac{2\pi x_0}{\lambda}$. x_0 处质点在两时刻振动的相位差为

$$\Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t \quad (9-12)$$

(2) 当 $t = t_0$, 即 t 为给定值时, 位移 y 仅是时间 x 的函数 $y = y(x)$, 这时波动方程变为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t_0 - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (9-13)$$

这时方程给出了在 t_0 时刻波线上各质点离开各自平衡位置的位移分布情况,称为 t_0 时刻的波形方程. 对横波而言, t_0 时刻的波形方程对应的曲线就是该时刻的波形; 对纵波而言, 则只是表示该时刻所有质点的位移分布. t_0 时刻波线上两质点之间的相位差为

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \quad (9-14)$$

(3) 如果 x, t 都在变化, 则波动方程 $y = y(x, t)$ 给出了波线上各个不同质点在不同时刻的位移, 即体现了各个不同时刻的波形, 反映了波形不断向前推进的波动传播的全过程. 根据波动方程知, t 时刻的波形方程为

$$y(x) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

而 $t + \Delta t$ 时刻的波动方程为

$$y(x) = A\cos\left[\omega\left(t + \Delta t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

如图 9-6 所示实线和虚线分别表示 t 时刻和 $t + \Delta t$ 时刻的波形曲线, 很形象地体现了波形的传播, 波形向前传播的速度就等于波速.

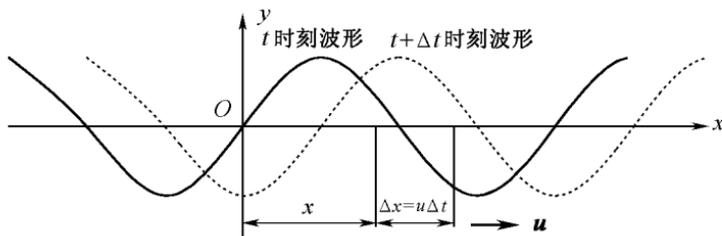


图 9-6 简谐波波形曲线及其传播

若 t 时刻、 x 处的某个振动状态经过 Δt 的时间间隔, 传播了 $\Delta x = u\Delta t$ 的距离, 用波动方程表示为

$$A\cos\left[\omega\left(t + \Delta t - \frac{x + u\Delta t}{u}\right) + \varphi\right] = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

即 $y(x + \Delta x, t + \Delta t) = y(x, t)$, 要获得 $t + \Delta t$ 时刻的波形, 只要将 t 时刻的波形沿波的传播方向移动 $\Delta x (= u\Delta t)$ 距离即可. 故波动方程反映了波形的传播, 它所描述的波称为行波.

平面波的波动微分方程

将平面简谐波的波动方程 $y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$ 分别对 t 和 x 求二阶偏导数, 有

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A \frac{\omega^2}{u^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

比较以上两式,可得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

对于任一沿 x 方向传播的平面波,如果不是简谐波,可以认为是由许多不同频率的平面简谐波的合成,将其对 t 和 x 求二阶导数之后,所得结果仍然是式(1),所以式(1)所反应的是一切平面波所必须满足的微分方程,称为沿 x 方向传播的平面波动微分方程,它不仅适用于机械波,也适用于电磁波等,是物理学中的一个具有普遍意义的方程。

一般情况下,物理量 $\Psi(x, y, z)$ 在三维空间中以波的形式传播,其波动微分方程一般形式为

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

u 为波的传播速度,采用拉普拉斯算符

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

由上式可表述为

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (3)$$

式(3)就是三维波动微分方程,可适用于描述任何波动过程,通过对具有特定的边界条件的波动方程求解,就得到运动方程。

例 9-1 一平面谐波,波动方程为 $y = 0.03 \cos(4\pi t - 0.05x)$ m, t 的单位是 s,试问该列波向哪个方向传播?其波长、频率、振幅、传播速度各为多少?

解 因为 x 前的符号为“ $-$ ”,所以,此波向 x 轴正方向传播,将此列波的波动方程与标准方程进行比较,对应求出相应的物理量

$$\begin{aligned} y &= A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \\ &= 0.03 \cos \left[4\pi \left(t - \frac{x}{80\pi} \right) \right] \text{ m} \end{aligned}$$

比较可知,

$$\text{振幅: } A = 0.03 \text{ m}$$

$$\text{频率: } \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} \text{ Hz} = 2 \text{ Hz}$$

$$\text{波速: } u = 80\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{波长: } \lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{251.2}{2} \text{ m} = 12.6 \text{ m}$$

例 9-2 如图 9-7 所示的为一平面简谐波在 $t = 0.5$ s 时的波形,此时 P 点振动速度 $v_P = 4\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,求波动方程。

解 由图 9-4 可知: $A = 1 \text{ m}$, $\lambda = 4 \text{ m}$, 且 $|v_p| = \omega A = 4\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

求得 $\omega = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 且

$$u = \lambda v = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

设波动方程为 $y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$

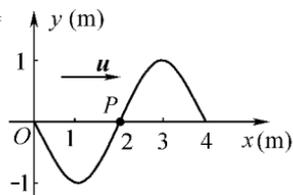


图 9-7 例 9-2 图

在图 9-4 中 O 点: $x=0, y=0, t=0.5 \text{ s}$, 求得 $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

由传播方向可知, 下一时刻 O 点处质点将向 y 轴正方向运动, 则取 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

求得波动方程为 $y = \cos 4\pi \left[\left(t - \frac{x}{8} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \text{ m}$

9.3 波的能量

在波的传播过程中, 媒质中各质点并不随波的传播方向向前移动, 波源的振动能量通过媒质各质点间的相互作用而传播出去, 媒质中各质点都在各自的平衡位置附近振动, 因此具有动能, 同时在波动过程中由于媒质的形变, 因而又具有势能.

9.3.1 波的能量和能量密度

设有一平面简谐波在密度为 ρ 的弹性媒质中沿 x 轴正方向传播, 设其波动方程为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

在坐标为 x 处取一体积元 dV , 其质量为 $dm = \rho dV$, 视该体积元为质点, 当波传播到该体积元时, 其振动速度为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

则该体积元的动能为

$$dE_k = \frac{1}{2} (dm) v^2 = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (9-15)$$

同时该体积元因形变而具有弹性势能, 可以证明, 该体积元的弹性势能为

$$dE_p = \frac{1}{2} \rho dVA^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (9-16)$$

于是该体积元内总的波动能量为

$$dE = dE_k + dE_p = \rho dVA^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (9-17)$$

由式(9-17)知,波动在媒质中传播时,媒质中任一体积元的总能量随时间做周期性变化.这说明该体积元和相邻的媒质中体积元之间有能量的交换.体积元能量增加时,它从相邻媒质体积元中吸收能量;体积元能量减少时,它向相邻媒质体积元释放能量.于是,能量不断地从媒质中的一部分传递到另一部分.因此,波动过程也是能量的传播过程.

应当注意,波动的能量和简谐振动的能量有显著的区别.在一个孤立的简谐振动系统中,它和外界没有能量交换,是保守系统,因而系统总的机械能守恒,在系统内部只有动能和势能的相互转换.在波动中,体积元的总能量不守恒,且同一体积元内的动能和势能是同步变化的.

为了确切地表示出能量的分布情况,下面引入能量密度的概念,定义单位体积媒质所具有的能量为波的能量密度,用 w 表示,单位为 $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$.由式(9-17)可得波的能量密度为

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (9-18)$$

可见能量密度 w 随时间做周期性变化,在实际应用中取其一个周期内的平均值.能量密度在一个周期内的平均值称为波的平均能量密度,用 \bar{w} 表示,有

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (9-19)$$

可见波的平均能量密度与波的振幅的平方、角频率的平方及媒质密度成正比.

9.3.2 波的能量和能流密度

波动过程伴随着能量的传播.为了描述波动过程中能量的传播,还需引入能流和能流密度的概念.定义单位时间内通过与波的传播方向垂直的某个面的能量为通过该面的波的能流,在实际应用中多用平均能流的概念,即一个周期内通过与波的传播方向垂直的某个面的能量,用 \bar{P} 表示.如图9-8所示,在媒质中作一与波的传播方向垂直的截面 ΔS 为底、长度为 u 的长方体,则单位时

间内, 体积为 $u\Delta S$ 的长方体内的波的能量都要通过 ΔS 面, 因此通过 ΔS 的平均能流为

$$\bar{P} = \bar{\omega} u \Delta S \quad (9-20)$$

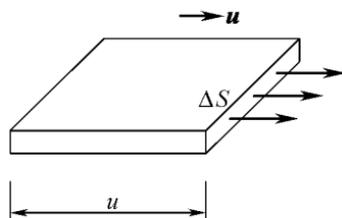


图 9-8 波的能流

可见波的平均能流与截面 ΔS 有关. 定义单位时间通过与波的传播方向垂直的单位面积的平均能量为平均能流密度(也称为波的强度), 用 I 表示, 单位为 $W \cdot m^{-2}$. 则有

$$I = \frac{\bar{P}}{\Delta S} = \bar{\omega} u \quad (9-21)$$

波的平均能流密度是一个矢量, 在各项同性的媒质中, 其方向与波的传播方向相同, 矢量式为

$$\mathbf{I} = \bar{\omega} \mathbf{u}$$

波的平均能流密度等于波的平均能量密度与波速的乘积. 平面简谐波的平均能流密度大小为

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u \quad (9-22)$$

若平面简谐波在各项同性、均匀无吸收的理想媒质中传播, 可以证明其波的振幅在传播过程中保持不变.

设一平面简谐波的传播方向如图 9-9 所示, 在垂直于波的传播方向上取两个相等面积的平行平面 S_1, S_2 , 其平均能流分别为 \bar{P}_1 和 \bar{P}_2 , 因能量无损失, 有

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_2$$

即:

$$I_1 S_1 = I_2 S_2$$

由式(9-22), 有

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 A_1^2 u S_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_2^2 u S_2$$

即

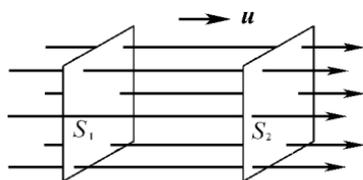


图 9-9 平面波的能量传播

$$A_1 = A_2$$

波面是球面的波称为球面波. 若球面波在各项同性、均匀无吸收的理想媒质中传播, 设 O 点为波源, 在距离波源 O 点 r_1 和 r_2 处分别取两个球面, 面积分别为 S_1 和 S_2 , 如图 9-10 所示. 由于媒质无能量吸收, 则单位时间通过 S_1 的能量必然等于单位时间通过 S_2 的能量, 即

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 A_1^2 u S_1 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A_2^2 u S_2$$

式中 A_1 和 A_2 分别为两球面所在处的振幅.

由上式得

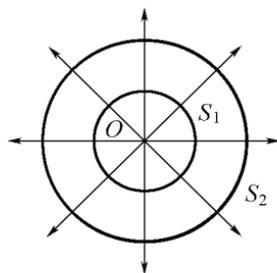
$$A_1^2 4\pi r_1^2 = A_2^2 4\pi r_2^2$$

即:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

表明球面波在传播过程中, 各处的振幅 A 与该处离开波源的距离 r 成反比. 类比平面简谐波的波动方程, 球面简谐波的波动方程可表示为

$$y = \frac{A}{r} \cos\left[\omega\left(t_0 - \frac{r}{u}\right) + \varphi\right] \quad (9-23)$$



9-10 球面波的能量传播

9.3.3 波的吸收

波在媒质中传播时, 媒质总要吸收部分能量, 因而波的强度将逐渐减弱. 这种现象称为波的吸收.

实验指出, 当波通过厚度为 dx 的一薄层媒质时, 若波的强度增量为 dI ($dI < 0$), dI 正比于入射波的强度 I , 也正比于媒质层的厚度 dx , 则

$$dI = -\alpha I dx$$

α 为比例系数, 是一个与媒质的性质、温度及波的频率有关的常量, 称为媒质的吸收系数. 上式积分后得

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

式中 I_0 和 I 分别为 $x=0$ 和 $x=x$ 处的波的强度.

9.4 波的衍射 干涉

9.4.1 惠更斯原理 波的衍射

当波在弹性媒质中传播时,由于媒质质点间的弹性力作用,媒质中任何一点的振动都会引起邻近各质点的振动,因此,波动达到的任一点都可看作是新的波源,如水面波的传播.如图 9-11 所示,当一块开有小孔的隔板挡在波的前面,则不论原来的波面是什么形状,只要小孔的线度远小于波长,都可以看到穿过小孔的波是圆形波,就好象是以小孔为点波源发出的一样,这说明小孔可以看作新的波源,其发出的波称为子波.

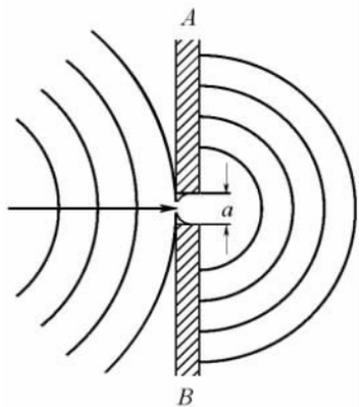


图 9-11 惠更斯原理

荷兰物理学家惠更斯观察研究了大量类似现象,于 1690 年提出了一条描述波传播特性的重要原理:媒质中波前上的各点,都可以看作是发射子波的波源,其后任一时刻这些子波的包迹就是新的波前.这就是惠更斯原理.根据这一原理,只要知道了某一时刻的波面,就可以用几何作图的方法来确定下一时刻的波面,因而解决了波的传播问题.

如图 9-12a 所示,设球面波的波源为 O , 波速为 u , t 时刻的波面为以 R_1 为半径的球面 S_1 , 以 S_1 上的点为子波源, 以 $r = u\Delta t$ 为半径做半球面子波, 求出各子波的包络面 S_2 , 则 S_2 便是以 O 为波源的球面波在 $t + \Delta t$ 时刻的波面. 对于平面波, 也可以用类似的方法求得任意时刻的波面, 如图 9-12b 所示.

惠更斯原理能够定性地说明衍射现象. 当波在传播过程中遇到障碍物时, 其传播方向发生改变, 并能绕过障碍物的边缘继续向前传播, 这种现象称为波的衍射. 如图 9-13 所示, 平面波到达一宽度与波长相近的缝时, 缝上各点都可看

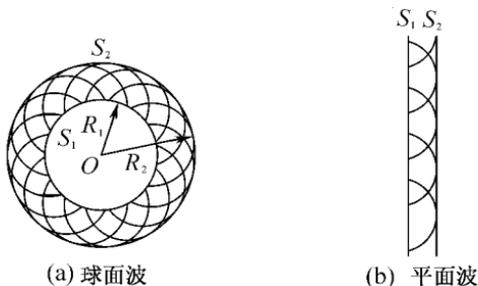


图 9-12 用惠更斯原理求波面

作是子波的波源. 做这些子波的包络面就得出新的波前. 很明显, 此时波前与原来的平面略有不同, 靠近边缘处的波前弯曲, 即波绕过了障碍物而继续向前传播. 衍射现象显著与否, 是与障碍物的大小与波长之比有关. 若障碍物的宽度远大于波长, 衍射现象不明显; 若障碍物的宽度与波长相差不多, 衍射现象就比较明显; 若障碍物的宽度小于波长, 则衍射现象更加明显. 在声学中, 由于声音的波长与所遇到的障碍物的大小差不多, 故声波的衍射较明显, 如在屋内能够听到室外的声音, 就是声波能绕过障碍物的缘故.

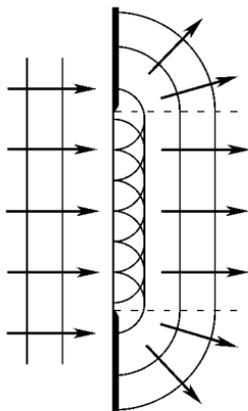


图 9-13 波的衍射

9.4.2 波的叠加原理 波的干涉

观察和研究表明, 当几列波在空间某点相遇时, 相遇处质点的振动为各波到达该点所引起振动的叠加, 相遇后各波仍保持它们各自原有的特征(如频率、波长、振动方向等), 继续沿原方向传播. 这一规律称为波的叠加原理. 应该注意的是只有当波强较小时, 波的叠加原理才成立, 如果波强较大, 叠加原理将不成立. 满足叠加原理的波称为线性波, 否则就叫非线性波.

波的叠加中最重要的情形是各波源频率相同、振动方向相同以及相位差恒定的简谐振动的叠加, 这样的波源叫相干波源, 它们发出的波叫相干波. 在波的叠加区域, 各点振动的振幅不尽相等, 由该点与波源距离的差及波源的相位差来决定.

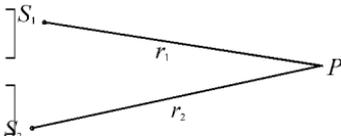
如图 9-14 所示, 设两个相干波源 S_1, S_2 的振动方程分别为

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

这两列波在叠加区域中的某处 P 点到两波源的距离分别为 r_1, r_2 , S_1 和 S_2 激起的波分别引起 P 点的振动为

$$y_1 = A_1 \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_1}{u} \right) + \varphi_1 \right] = A_1 \cos \left[\omega t + \left(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda} \right) \right]$$

$$y_2 = A_2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_2}{u} \right) + \varphi_2 \right] = A_2 \cos \left[\omega t + \left(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda} \right) \right]$$


由于 y_1 和 y_2 的振动方向相同, 在 P 点的合振动为 图 9-14 两列波叠加

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

式中 ω 仍与 S_1, S_2 两列波的角频率相同, 这两个振动的相位差为

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} + \varphi_1 - \varphi_2 \quad (9-24)$$

合振动的振幅为 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi}$

由于相位差取决于 P 点到两波源的距离差及波源的相位差, 当波源初相位相同时, 则 P 点的振幅取决于波程差 $\delta = r_2 - r_1$. 当 $\varphi_1 = \varphi_2$ 时, 相位差简化为

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

当 $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$ (9-25)

时, 合振动的振幅最大, 为两分振动振幅之和. 得到合振动振幅最大的条件是

$$r_2 - r_1 = k\lambda = \pm 2k \frac{\lambda}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (9-26)$$

即距离两波源的波程差等于零或波长的整数倍 (理解为半个波长的偶数倍) 时, 合振动的振幅最大, 为

$$A = A_1 + A_2$$

当 $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm(2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$ (9-27)

时, 合振动的振幅最小, 为两分振动振幅之差. 得到合振动振幅最小的条件是

$$r_2 - r_1 = \pm(2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (9-28)$$

即距离两波源的波程差等于半个波长的奇数倍时, 合振动的振幅最小, 为

$$A = |A_1 - A_2|$$

两列波发生干涉时, 在合振幅最大的地方, 相应有最大的波强, 称为干涉相长; 在合振幅最小的地方, 波强最小, 称为干涉相消.

例 9-3 B, C 为同一媒质中的两个相干波源, 相距 30 m, 它们产生的相干波频率为 $\nu = 100$ Hz, 波速 $u = 400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 且振幅都相同. 已知 B 点为波峰时, C 点恰为波谷. 求 BC 连线上因干涉而静止的各点的位置.

解 由题意知,两波源 B, C 的振动相位正好相反,即 $\varphi_{CO} - \varphi_{BO} = \pi$, 而 $\lambda = \frac{u}{\nu} = 4 \text{ m}$. 设 BC 连线上任一点 P 与两个波源的距离分别为 $\overline{BP} = r_B, \overline{CP} = r_C$, 要使两列波传到 P 点叠加干涉而使 P 点静止, 则两列波传到 P 点的相位必须满足

$$\Delta\varphi = \left(-\frac{2\pi r_C}{\lambda} + \varphi_{CO} \right) - \left(-\frac{2\pi r_B}{\lambda} + \varphi_{BO} \right) = (2k+1)\pi$$

可得:

$$r_B - r_C = \pm k\lambda \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

进一步具体讨论:

(1) 若 P 点在 B 点外侧, 则 $r_B - r_C = r_B - (r_B + \overline{BC}) = -30 \text{ m}$, 它不可能为 $\lambda = 4 \text{ m}$ 的整数倍, 即不满足式(1)的要求, 故在 B 点外侧不存在因干涉而静止的点;

(2) 若 P 点在 C 点外侧, 与上面类似的讨论可知, C 点外侧也不存在因干涉而静止的点;

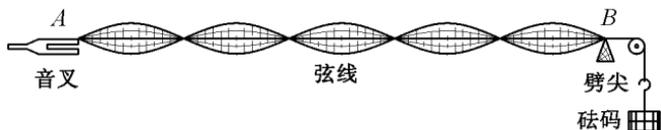
(3) 若 P 点在 B, C 两波源之间, 则 $r_B - r_C = 2r_B - (r_B + r_C) = 2r_B - \overline{BC}$, 由式(1)可得 $2r_B - \overline{BC} = k\lambda$, 即 $2r_B - 30 = \pm k\lambda (k=0, 1, 2, \dots)$.

所以在 B, C 之间与波源 B 相距 $r_B = 1 \text{ m}, 3 \text{ m}, 5 \text{ m}, \dots, 29 \text{ m}$ 的各点会因干涉而静止.

9.5 驻波

9.5.1 驻波的形成

驻波是干涉的特例. 如图 9-15 是用弦线作驻波实验的示意图. 弦线的一端系在音叉上, 另一端系着砝码使弦线拉紧, 当音叉振动时, 调节劈尖至适当位置, 可以看到 AB 段弦线被分成几段长度相等的做稳定振动的部分, 即在整个弦线上, 并没有波形的传播, 线上各点的振幅不同, 有些点始终不动, 即振幅为零, 而另一些点则振动最强, 即振幅为最大. 这就是驻波. 驻波是怎样形成的呢? 当音叉带动 A 端振动所引起的波向右传播到 B 点时, 产生的反射波沿弦线向左传播. 这样, 由向右的入射波和向左的反射波干涉的结果, 在弦线上就产生驻波.



9-15 弦线驻波

如图 9-16 所示, 虚线和细实线分别表示沿沿正、负方向传播的简谐波, 粗

实线表示两波叠加。设 $t=0$ 时,入射波和反射波的波形刚好重合,其合成波形为两波形在各点相加所得,表明各点振动加强了,如图 9-16a 所示。在 $t=T/8$ 时,两波分别向右、左传播了 $\lambda/8$ 的距离,其合成波形仍为一余弦曲线如图 9-16b 所示。在 $t=T/4$ 时,两列波向右、左传播了 $\lambda/4$,合成波形为一合振幅为零的直线如图 9-16c 所示。在 $t=3T/8$ 和 $t=T/2$ 时,其合成波形在各点的合位移分别与 $t=T/8$ 和 $t=0$ 时的合位移大小相等,但方向相反,如图 9-16d,e 所示。

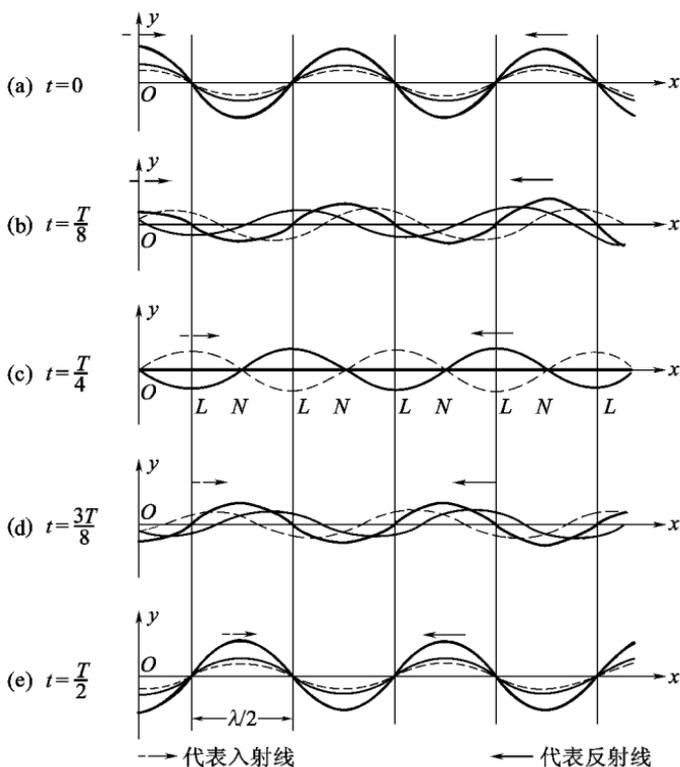


图 9-16 驻波形成

9.5.2 驻波方程

两个振幅相同、频率相同、初相位为零且分别沿 Ox 轴正、负方向传播的简谐波的波动方程分别为

$$y_1 = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right)$$

式中 A 为波的振幅, ν 为频率, λ 为波长. 两波在任意点处任意时刻叠加产生的合位移为

$$y = y_1 + y_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right)$$

应用三角关系式, 上式可化为:

$$y = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t \quad (9-29)$$

这就是驻波方程. 式中 $2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 是各点的振幅, 它与 x 有关, 即各点的振幅随其与原点的距离 x 的不同而不同. 上式表明, 当驻波形成时, 弦线上的各点作振幅为 $\left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$ 、频率都为 ν 的简谐振动.

下面就图 9-16 所示弦线上的驻波做进一步的讨论.

1. 波节和波腹

因弦线上各点做振幅为 $\left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$ 的简谐振动, 所以凡满足 $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$ 的点振幅都为零, 这些点始终静止不动, 叫波节(图9-16中由 L 表示的各点); 而满足 $\left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = 1$ 的点振幅最大, 等于 $2A$, 这些点振动最强, 叫波腹(图9-16中由 N 表示的各点); 弦线上其余各点的振幅在零与最大值之间.

在波节处有
$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$$

则:
$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

所以波节的位置为

$$x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (9-30)$$

相邻两波节之间的距离为

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$$

即相邻两波节之间的距离为半个波长, 如图 9-16 所示.

类似的讨论知波腹的位置为

$$x = \pm k \frac{\lambda}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (9-31)$$

相邻两波腹之间的距离也为半个波长如图 9-16 所示. 不满足 (9-30) 和 (9-31) 两式的各点, 其振幅在 0 与 $2A$ 之间. 由此可见, 只要从实验中测得波节或波腹间的距离就可以确定波长.

2. 各点的相位

从图 9-16 可以看出, 两波节之间各点沿相同方向达到各自位移的最大值, 又同时沿相同方向通过平衡位置, 所以在两波节之间各点的振动相位相同; 而在波节两边各点, 同时沿反方向达到各自位移的最大值, 又同时沿相反方向通过平衡位置, 所以波节两边的点相位相反. 可见, 弦线不仅做分段振动, 而且各段作为一个整体, 一齐同步振动. 在每一时刻, 驻波都有一定的波形, 但此时波形既不左移、也不右移, 各点以确定的振幅在各自的平衡位置附近振动, 因此叫做驻波.

3. 驻波的能量

如图 9-15 所示, 当弦线上各点达到各自的最大位移时, 振动速度都为零, 因而动能都为零, 但此时弦线各段都有了不同程度的形变, 且越靠近波节处的形变就越大, 因此, 这时驻波具有势能, 基本上集中于波节附近. 当弦线上各点同时回到平衡位置时, 弦线的形变完全消失, 势能为零, 但此时驻波具有动能, 基本上集中于波腹附近. 至于其他时刻, 则动能和势能同时存在. 可见, 在弦线上形成驻波时, 动能和势能不断相互转换, 形成了能量交替: 由波腹附近向波节附近, 再由波节附近转回到波腹附近的情形, 说明驻波并没有做定向的传播, 驻波不传播能量. 这是驻波与行波的又一重要区别. 因此驻波也是整个物体进行的一种特殊形式的振动.

9.5.3 半波损失

在图 9-15 所示的实验中, 波在固定点 B 处反射, 并形成波节. 实验还表明, 如果波是在自由端反射的, 则反射处是波腹. 一般情况下, 在两种媒质分界处是形成波节还是形成波腹, 与波的种类、两种媒质的性质等有关. 定量研究证实, 对机械波而言, 它由媒质密度 ρ 和波速 u 的乘积决定. ρu 较大的媒质叫波密媒质; ρu 较小的媒质叫波疏媒质. 波从波疏媒质射向波密媒质界面反射时, 在反射处形成波节, 否则形成波腹. 在两种媒质界面上若形成波节, 说明入射波与反射波在此处的相位相反, 即反射波在界面处的相位发生了 π 的突变, 相当于出现了半个波长的波程差, 通常把这种现象称为半波损失.

* 9.5.4 弦线振动的简正模式

从驻波的特征可以了解到,并不是任意波长的波都能在有一定线度的媒质中形成驻波.对于具有一定长度且两端固定的弦线来说,形成驻波时,弦线两端为波节,由图 9-17 可见,此时波长 λ_n 和弦线长度 l 之间应满足的关系为

$$l = n \frac{\lambda_n}{2} \quad (n=1,2,\dots) \quad (9-32)$$

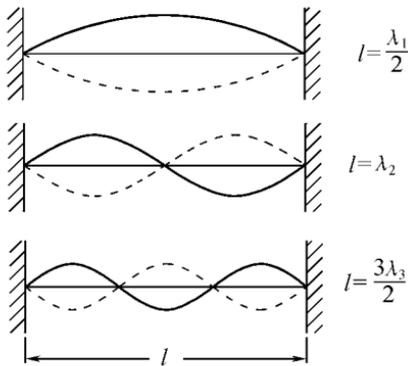


图 9-17 两端固定弦的简正模

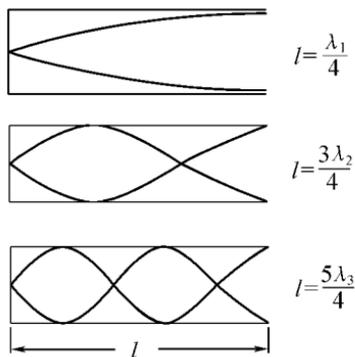


图 9-18 一端开口一端封闭的玻璃管内的简正模

即只有当弦线长度 l 等于半波长的整数倍时,才能在两端固定的弦线上形成驻波,由关系 $\nu = \frac{u}{\lambda}$ 和式(9-32)可知弦线驻波的频率应满足的关系为

$$\nu_n = n \frac{u}{2l} \quad (n=1,2,\dots) \quad (9-33)$$

其中每一频率对应于整个弦线的一种可能的振动方式,而这些频率就叫作弦线振动的简正频率.各种允许频率所对应的简谐振动方式,统称为弦线振动的简正模式.各个简正频率中,最低频率 ν_1 常称为基频,其他较高频率 ν_2, ν_3, \dots 各为基频的某一整数倍,并常称为二次、三次……谐频.另外,管子里的空气柱、各种形式的膜片、电磁波和反映微观粒子性质的物质波等也能形成驻波.图 9-18 展示了一端开口一端封闭的玻璃管内空气柱振动形成驻波时的几种简正模式.由于封闭端为波节,开口端为波腹,所以可知其对应的基频为 $\nu_1 = \frac{u}{4l}$ 而谐频则为 ν_1 的奇数倍.

应当指出,当外界策动源的频率与振动系统的某个简正频率相同时,就会激起高强度的驻波,这种现象叫谐振.乐器中弦、管、锣和鼓等实质上都是驻波系统,它们的振动都是按各自相应的某些简正模式进行并发生谐振,从而发出具有特定音色(谐频)的音调(基频).

9.6 多普勒效应

在媒质中距波源一定远处,有一检测振动的观察者.如果波源和观察者相对于媒质都是静止的,观察者检测到振动的频率就是波源的振动频率.如果波源、或观察者,或两者同时相对于媒质运动($v_s = 0, v_r \neq 0$),那么观察者检测到的频率 ν 不同于波源的振动频率 ν_0 .这种现象称为多普勒效应.例如当高速行驶的火车鸣笛驶来时,将听到的汽笛音调变高;当它驶离时,将听到汽笛音调变低.这就是声学中的多普勒效应.

下面讨论多普勒效应的一般规律.为了简单起见,假定波源与观察者在同一条直线上,设波源相对于媒质的运动速度为 v_s ,观察者相对于媒质的速度为 v_r ,波速用 u 表示,波源的频率用 ν_s 表示,注意波源的频率 ν_s 是振动的频率,检测的频率是检测点的振动频率,而波的频率为 $\nu_0 = u/\lambda$.下面分四种情况讨论.

(1) 波源和观测者相对于媒质静止($v_s = 0, v_r = 0$).观察者在单位时间内检测到的振动频率等于波在行进中单位时间内通过观察者处的波长的数目.单位时间内传递的距离为 u ,周期为 T ,所以检测到的频率为

$$\nu_r = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{uT} = \nu_s \quad (9-34)$$

即观察者检测到的振动频率就是波源的频率.

(2) 波源不动,观察者以 v_r 相对于媒质运动($v_s = 0, v_r \neq 0$).当观察者向波源运动时,在单位时间内,波传过原来观察者所在处的距离仍为 u ,由于观察者同时运动,则波在单位时间里相对于观察者传过的距离为 $(u + v_r)$,因此通过观察者的波长数目为

$$\nu_r = \frac{u + v_r}{\lambda} = \frac{u + v_r}{uT} = \left(1 + \frac{v_r}{u}\right)\nu_s \quad (9-35)$$

即观察者检测到的频率是波源振动频率的 $\left(1 + \frac{v_r}{u}\right)$ 倍.

当观察者离开波源运动时,单位时间内相对于观察者传过的距离为 $(u - v_r)$,因此有

$$\nu_r = \frac{u - v_r}{\lambda} = \left(1 - \frac{v_r}{u}\right)\nu_s \quad (9-36)$$

这时检测到的频率变小,特别当速度与波速 u 相等时,检测频率 $\nu_r = 0$,也就是观

察不到振动了。

(3) 观察者不动,波源相对媒质以 v_s 的速度运动($v_s \neq 0, v_r = 0$)。波在媒质中的传播速度与波源是否运动无关。一个周期 T 内,波源沿传播方向运动了 $v_s T$ 距离,两个相邻波阵面的距离(即相应的波长 λ')为 $\lambda' = \lambda - v_s T$ 。而在单位时间内波传过的距离仍为 u ,所以观察者检测到的频率为

$$\nu_r = \frac{u}{\lambda - v_s T} = \frac{u}{u - v_s} \nu_s \quad (9-37)$$

此时观察者检测到的频率也增加了。

如果波源背离观察者运动,则

$$\nu_r = \frac{u}{u + v_s} \nu_s \quad (9-38)$$

(4) 波源和观察者同时相对于媒质运动($v_s \neq 0, v_r \neq 0$)。这时检测到的频率改变,一方面是由于波源运动使波长改变($\lambda' = \lambda - v_s T$);另一方面是观察者运动,使单位时间通过观察者的波的数目改变。所以检测到的频率为

$$\nu_r = \frac{u + v_r}{\lambda - v_s T} = \frac{u + v_r}{u - v_s} \nu_s$$

上式中,当观察者向着波源运动, $v_r > 0$; 当观察者背离波源运动, $v_r < 0$; 波源向着观察者运动时, $v_s > 0$; 波源背离观察者运动时, $v_s < 0$ 。从上面的讨论可知,波源相对媒质运动和观察者相对媒质运动两者产生的多普勒效应是不同的。正是根据这个特点,通过实验可以区别究竟是那一个相对于媒质运动。水声探测站发出的声波在运动的潜艇上反射回来时,检测的频率有改变,以此测定潜艇的速度。超声诊断技术利用多普勒效应测定血的流量。多普勒效应是波动所具有的共同特性。光波的多普勒效应能够产生运动光源的光谱线的移动,由此可测定星球对于地球的运动速度。

* 9.7 非线性波简介

非线性波就是由非线性方程所描述的波。和所有非线性现象一样,非线性波也不遵从叠加原理。非线性波的传播速度不仅与媒质有关还与质点的振动状态有关。

前面讨论中认为媒质是理想媒质,即认为媒质中的回复力始终是线性的,这就导出了波动的动力学方程是线性的。线性波动方程的解就是线性波,这种波在媒质中传播速度只与媒质的性质有关,而与媒质内各点振动的振幅、振动速度无关。实际的媒质都有非线性因素。不过在振

幅小时,非线性项也很小,它的影响因没有显现出来而可以忽略,这时波动方程可用线性波动方程近似.但振幅较大时,媒质中的非线性项就不能忽视了,这时的波动方程就是非线性的.

1834年,英国科学家罗素在一条运河边观察到了一种奇特的现象:一快速行驶的船突然停止时,河道内被带动的水因在船头周围剧烈地扰动而激起一孤立水波,光滑圆润,形如驼峰,传播了数千米之远,波形仍保持不变.这种波与一般水波有明显区别:一般水波波形总是一半低于水平面,一半高于水平面,但此波波形却总是高于水平面;此外,一般水波的波形在传播过程中会因逐渐弥散而消失,但此波波形却在传播过程中保持不变.罗素将这种奇特的波称为孤波.孤波实际上是大扰动非线性效应和媒质的色散效应共同作用下形成的一种特殊波.

如图9-19所示,设一抛物线形状的脉冲沿 x 轴方向传播,由于脉冲波中水的各质元横向位移各不相同,不同水位的波扰动的传播速度各不相同, y 值最大的扰动的传播速度最大, $y=0$ 附近的扰动的传播速度最小,结果使孤波在传播过程中变形,抛物线波变成锯齿形波,使波前变陡,波形变窄.另一方面,水具有色散性,即孤立脉冲波中各种不同频率的简谐波成分因水的色散而以不同速度传播,水位低的扰动的传播速度快,从而使得脉冲波形扩散变宽.在一定条件下,当水波中的色散效应和非线性效应相互抵消时,波形在传播过程中便保持不变,形成孤波.孤波是非线性波,不遵守叠加原理,但用数值模拟法研究等离子体中孤波的碰撞过程发现,两孤波相遇分开后,仍各自保持各自的波形及速度继续传播,说明孤波既有稳定性又有完整性,这些特征与粒子特征相似,所以又将这样的孤波称为孤子.

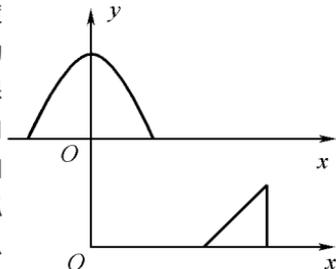


图9-19 孤波

思考题

9-1 什么是波动?波动和振动有什么区别和联系?

机械波产生的条件是什么?简谐振动方程与平面简谐波波动方程有什么不同和联系?振动曲线和波动曲线又有什么不同?

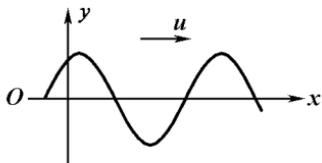
9-2 在波动方程中,坐标轴原点是否一定要选在波源处? $t=0$ 时刻是否是波源开始振动的时刻?波动方程写成 $y=A\cos\left(t-\frac{x}{u}\right)$ 时,波源在什么地方?波向什么方向传播?如果波源分别在 $x=5\text{ m}$, 0 m , -5 m 处,则对于波动方程的适用范围有怎样的限制?

9-3 波源的振动周期与波的周期的数值是否相同?波源的振动速度与波速是否相同?

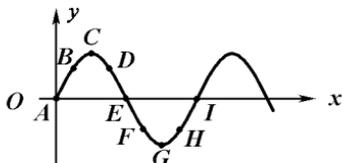
9-4 波动方程 $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$ 中的 $\frac{x}{u}$ 表示什么? φ 表示什么? $\frac{\omega x}{u}$ 又表示

什么? 如果 t 增加, x 也增加, 但相应的 $\left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$ 值并没有变化, 由此能从波动方程说明什么现象?

9-5 一列弹性纵波, t 时刻 $y-x$ 曲线如图 9-5 所示. 试判断疏部中心、密部中心的位置在哪里? 相邻两个密部(或疏部)中心的运动状态相同吗? 为什么? 势能密度、动能密度最大值的位置在哪里?



思考题 9-5 图



思考题 9-6 图

9-6 某时刻向右传播的横波波形如图 9-6 图所示, 试画出图中 $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ 各质点在该时刻的运动方向, 并画出经过 $1/4$ 周期后的波形曲线.

9-7 波在媒质中传播时, 为什么质元的动能和势能具有相同的相位? 而弹簧振子的动能和势能的相位却没有这样的特点?

9-8 两个振幅相同的相干波在某处的相长干涉点, 其合振幅为原来的几倍? 能量为原来的几倍? 是否与能量守恒定律矛盾?

9-9 在驻波中, 某一时刻波线上各点的位移都为零, 此时波的能量是否为零?

9-10 驻波的波形随时间是如何变化的? 它和行波有什么区别?

9-11 在驻波的相邻波节间的同一半波长上, 描述各质点振动的物理量有什么不同? 哪些物理量是相同的?

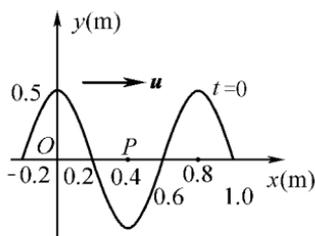
9-12 波源向观察者运动和观察者向波源运动都会产生频率增高的多普勒效应, 这两种情况有何区别?

习题 9

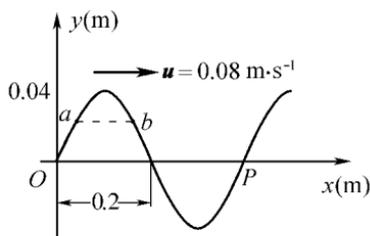
9-1 有一平面简谐波, 在空间以速度 u 沿 x 轴正向传播, 已知波线上某一点 S 的振动振幅为 0.02 m , 圆频率为 ω , 初始时刻, S 点从平衡位置下方 0.01 m 处向上运动, 建立此波的波动方程.

9-2 一平面简谐波沿 x 轴正向传播, 波速 $u = 100 \text{ m} \cdot \text{s}$, $t = 0$ 时的波形图如题 9-2 图所示, 根据波形图, 求:

- (1) 波长 λ 、振幅 A 、频率 ν 、周期 T ;
- (2) 任一时刻的波动表达式;
- (3) 写出 $x = 0.4 \text{ m}$ 处质点的振动表达式.



题 9-2 图



题 9-3 图

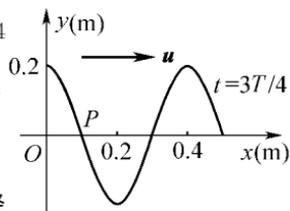
9-3 题 9-3 图所示为 $t=0$ 时刻某平面简谐波的波形. 求:

- (1) O 点的振动方程;
- (2) 该平面简谐波波动方程;
- (3) P 点的振动方程;
- (4) $t=0$ 时刻, a, b 两点处质点的振动方向.

9-4 一平面简谐波在 $t=\frac{3}{4}T$ 时刻的波形曲线如题 9-4

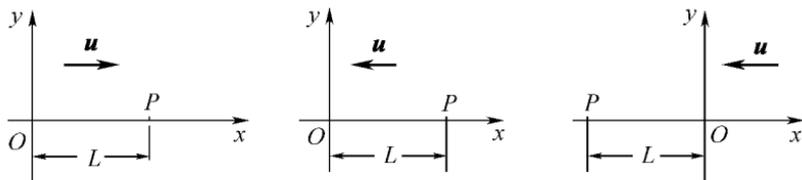
图所示, 该波以 $u=36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度沿 x 轴的正方向传播. 求:

- (1) $t=0$ 时刻 O 点与 P 点的相位;
- (2) 写出该平面简谐波的波动方程.



题 9-4 图

9-5 一平面简谐波在媒质中以速度 u 传播, 其传播路径上一点 P 的振动方程为 $y_P = A \cos \omega t$, 试按照题 9-5 图所示的几种坐标分别写出波动方程 (P 点到原点的距离为 L).



题 9-5 图

9-6 已知一平面简谐波的波动方程为 $y = A \cos \pi(4t + 2x)$, x, y 的单位是 m , t 的单位是 s .

- (1) 求该波的波长、频率和波速;
- (2) 写出 $t=4.2 \text{ s}$ 时刻各波峰位置的坐标表达式, 并求出此时离坐标原点最近的波峰的位置;
- (3) 求 $t=4.2 \text{ s}$ 时, 离坐标原点最近的波峰何时通过坐标原点.

9-7 一平面简谐波在介质中以 $u=20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度自左向右传播, 已知传播路径上的某一点 A 的振动方程为: $y = 3 \cos(4\pi t - \pi) \text{ m}$, t 的单位为 s , 另一点 B 在 A 点右方 9 m 处.

- (1) 若取 x 轴正方向向左, 并以 A 点为坐标原点, 求波动方程及 B 点的振动方程;

(2) 若取 x 轴正方向向右, 以 A 点左方 5 m 处的 O 点为 x 轴原点, 重新写出波动方程及 B 点的振动方程.

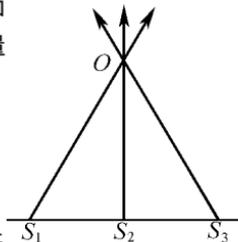
9-8 一空气正弦波沿直径为 0.14 m 的圆柱形管行进, 波的强度为 $9 \times 10^{-3}\text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, 频率为 300 Hz , 波速为 $300\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 求:

- (1) 波的平均能量密度和最大能量密度;
- (2) 两相邻的同相面间的波中平均含有的能量.

9-9 一平面简谐波的频率 $\nu=300\text{ Hz}$, 波速 $u=340\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 在截面面积 $S=3.00 \times 10^{-2}\text{ m}^2$ 的管内的空气中传播, 若在 10 s 内通过截面的能量 $W=2.70 \times 10^{-2}\text{ J}$, 求:

- (1) 通过截面的平均能流 \bar{P} ;
- (2) 波的平均能流密度 I ;
- (3) 波的平均能量密度 \bar{w} .

9-10 如题 9-10 图所示, 三个同频率、同振动方向(垂直纸面)的简谐波, 在传播过程中在 O 点相遇; 若三个简谐波各自单独在 S_1, S_2 和 S_3 的振动方程分别为:



题 9-10 图

$$y_1 = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad y_2 = A \cos \omega t, \quad y_3 = 2A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

且 $\overline{S_2O} = 4\lambda$, $\overline{S_1O} = \overline{S_3O} = 5\lambda$ (λ 为波长), 求 O 点合振动方程(假定传播过程中波的振幅不变).

9-11 如题 9-11 图所示, S_1, S_2 为两个相干波源, 相互间距为 $\frac{\lambda}{4}$, S_1 的相位比 S_2 超前 $\frac{\pi}{2}$, 若两波在 S_1 和 S_2 连线方向上各点强度相同, 均为 I_0 , 求 S_1, S_2 的连线上及 S_1, S_2 外侧各点合成波的强度.



题 9-11 图

9-12 两列波在一根很长的细绳上传播, 其波动方程为

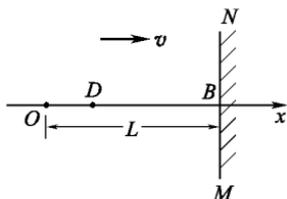
$$y_1 = 0.06 \cos \pi(x - 4t) \text{ m}, \quad y_2 = 0.06 \cos \pi(x + 4t) \text{ m}$$

- (1) 证明细绳上的振动为驻波式振动;
- (2) 求波节和波腹的位置;
- (3) 波腹处的振幅有多大? 在 $x=1.2\text{ m}$ 处的振幅是多少?

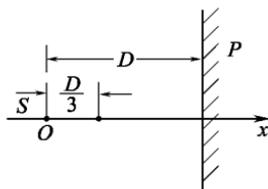
9-13 如题 9-13 图所示, 一平面余弦横波沿 x 轴正方向传播, 在两种媒质的界面 MN 的 B 点发生反射, 并在该处形成波节. 已知波长为 1.4 m , $\overline{OB} = 2.1\text{ m} = L$, 设入射波

在坐标原点 O 处的振动方程为 $y = 5 \times 10^{-3} \cos\left(500\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ m. 求:

- (1) 反射波的波动方程;
- (2) OB 之间形成驻波的波节位置;
- (3) 离原点 0.175 m 处的点 D 的振幅.



题 9-13 图

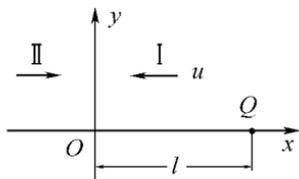


题 9-14 图

9-14 波源与金属反射板 P 之间的距离为 D , 如题 9-14 图所示, S 发出圆频率为 ω 、初始相位为零, 振幅为 A 的平面波, 其波速为 u , 假设坐标原点选在 S 处, 求:

- (1) 平面波的表达式;
- (2) 反射波的表达式;
- (3) 合成波的表达式;
- (4) 距 O 点为 $\frac{D}{3}$ 处的一点的合振动方程.

9-15 如题 9-15 图所示, 在同一媒质中有两列振幅均为 A , 圆频率均为 ω , 波长均为 λ 的相干平面余弦波, 沿同一直线相向传播. 第一列波由右向左传播, 它在 Q 点引起的振动为 $y_Q = A \cos \omega t$; 第二列波由左向右传播, 它在 O 点 (x 坐标的原点) 引起振动的相位比同一时刻第一列波在 Q 点引起的振动的相位超前 π , O 与 Q 之间的距离为 $l = 1$ m, 求:

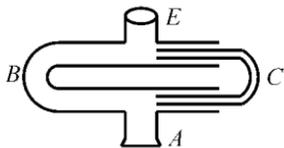


题 9-15 图

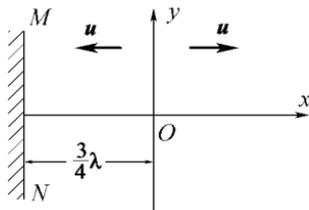
- (1) O 与 Q 之间任一点 P 的合振动表达式;

(2) 若波的频率 $\nu = 400$ Hz, 波速 $u = 400$ m \cdot s $^{-1}$, O 与 Q 之间(包括 O, Q 在内)因干涉而静止的点的位置.

9-16 如题 9-16 图所示, 它是一种声波干涉仪, 声波从入口 E 处进入仪器, 分 B, C 两路在管中传播至喇叭口 A 会合, 然后传出去, 弯管 C 可以伸缩, 当它逐渐伸长时, 从喇叭口发出的声音周期性地增强或减弱, 设 C 管伸长 8 cm, 声音减弱一次, 求此声音的频率(设空气中的声速为 340 m \cdot s $^{-1}$).



题 9-16 图



题 9-17 图

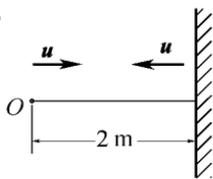
9-17 在 x 轴的原点 O 上,其振动方程为 $y=A\cos\omega t$,波源发出的平面简谐波沿 x 轴的正、负两个方向传播,如题 9-17 图所示,在 x 轴负方向距原点 O 为 $\frac{3}{4}\lambda$ 的位置有一块由波密媒质做成的反射面 MN ,试求:

- (1) 由 O 点向反射面发出的波的波动表达式和沿 x 轴正方向传播的波的波动表达式;
- (2) 反射波的波动表达式;
- (3) 在 $MN-yO$ 区域内,入射波和反射波叠加后的波动表达式,并讨论它们干涉的情况;
- (4) $x>0$ 的区域内,波源发出的波与反射波叠加后的波动表达式,并讨论它们干涉的情况.

9-18 如题 9-18 图所示,有一根长 2 m 的弦线,一端固定在墙上,另一端做简谐振动,规律为 $y=0.5\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$ m,振动状态沿弦线传播,传到墙壁形成反射波.

- (1) 分别写出入射波与反射波的波动表达式(假设波长 $\lambda=0.5$ m);
- (2) 驻波方程表达式;
- (3) 波节与波腹的位置.

9-19 一报警器发射频率为 100 Hz 的声波,离观察者向一悬崖运动,其速度为 $10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,求:



题 9-18 图

- (1) 观察者直接从报警器听到的声音频率为多少?
- (2) 从悬崖反射的声音频率为多少?
- (3) 听到的拍频为多少(空气中声速为 $340\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$)?

第二篇 热学

第 10 章 气体动理论

气体动理论是统计物理学的初级理论. 统计物理从物质的微观结构出发, 应用统计的方法研究物质的性质, 由此解释宏观现象的微观本质. 本章将讨论物质最简单的聚集态—气体的热学性质, 讨论气体的压强、温度、内能等宏观物理量的微观本质, 从而了解统计的方法、建立统计的概念.

10.1 热学的基本概念

10.1.1 系统与外界

系统是热学研究对象的抽象概括. 热学讨论的具体对象统称为系统, 例如, 讨论一个容器内的气体, 则这容器内的气体就是一个热学系统; 讨论一个容器内的液体, 则这容器内的液体就是一个热学系统. 通常把热学系统简称为系统.

一个热学系统必须由大量的粒子(原子、分子或分子团)组成. 例如, 视一个气体系统为热学系统, 它所包含的气体分子数目的数量级通常是 10^{23} .

与系统发生相互作用的外部环境, 称为外界. 通俗地讲, 外界就是系统以外的部分. 例如, 讨论容器内的气体, 则气体为系统, 而容器的器壁为外界. 外界可能是有形的, 也可能是无形的. 例如, 盛有气体的容器置于外场(电场或磁场等)中, 当讨论气体的行为时, 则容器壁和外场都是外界. 电场和磁场是无形的.

系统与外界的划分是相对的. 盛有气体的容器置于外场和大气中, 仅讨论容

器内的气体的行为,容器的器壁、外场和大气为外界;当讨论容器内的气体以及容器的行为时,气体和容器为系统,而外场和与容器外壁接触的大气为外界。

按照系统与外界的相互作用来划分,系统可以分为三类:孤立系统、封闭系统、开放系统。与外界既无能量交换也无质量交换的系统称为孤立系统;与外界有能量交换无质量交换的系统称为封闭系统;与外界既有能量交换又有质量交换的系统称为开放系统。例如:气体置于用绝热性能良好材料做成的坚固容器(不产生形变)中,且容器的密闭性能良好,可视气体为孤立系统;如果上面所说的容器的绝热性能不佳或者容易形变但密闭性能良好,则可视气体为封闭系统;如果上面所说的容器不但绝热性能不佳或者容易形变而且密闭性能也不好,则可视气体为开放系统。

此外,系统只含一种化学纯组元,称为单元系,例如单纯的氦气;系统含两种化学纯组元,称为二元系,例如氦与氩混合气体,以此类推;二元以上的系统也称为多元系。系统中物理性质均匀的部分称为“相”,例如系统由液氦和氦气两部分组成,则液氦部分为液相,氦气部分为气相,整个系统称为二相系;不难看出,液氦或者氦气单独组成的系统称为单相系,而两相以上的系统称为多相系。

10.1.2 平衡态

讨论热学问题离不开对系统的描述。热学系统的描述可分为宏观描述和微观描述,相应描述所用的物理量称为宏观参量和微观参量,简称为宏观量和微观量。宏观量描述系统的整体行为,例如气体的压强、体积等;微观量描述组成系统的粒子的个体行为,例如某一个气体分子的位置、速度、质量、动量等。

当一个系统在不受外界影响的条件下,系统的宏观性质不随时间变化,称这个系统处于平衡态。这里的“外界影响”是一个泛指,例如当系统与外界有能量或质量的交换时,就说系统受到了外界的“影响”。系统的宏观性质由系统的宏观参量描述,因此可以这样说,所谓平衡态就是在不受外界影响的条件下系统的宏观参量不随时间变化的状态。

严格地讲,一个热学系统不可能不受到外界的影响,所以严格地不随时间变化的平衡态是不存在的,平衡态只是一个理想的状态。但是在实际问题中热学系统的许多状态往往可以近似地认为是平衡态,从而可以比较简单地得出与实际情况基本相符的结论,既抓住了问题的物理实质,又简化了问题的讨论。因此,平衡态是热学的一个重要基本概念。

热学里平衡态中的“平衡”二字与力学中的“平衡”二字的意义是不同的。力

学中的“平衡”通常对个体而言,而热学中的“平衡”是对整体而言.对个体而言力学平衡意味着静止或匀速直线运动状态,而热学系统整体处于平衡态时,组成系统的大量粒子的单个粒子本身仍然处于剧烈的杂乱无章的运动之中(在 10.2 节中讨论这个问题),所以热学系统的平衡态是一种动态平衡.

10.1.3 状态参量

系统的平衡态可用多个宏观参量来描述.一般来说,这些宏观参量是相互关联的,只需选择其中的几个参量作为独立参量来描述系统即可,所选用的独立参量称为状态参量.一个系统究竟需要几个状态参量,根据所讨论问题的性质的不同而不同.在本书的讨论中,根据由简到繁的原则,从最简单的情况入手,一般选用两个状态参量,例如压强 p 、体积 V .在 SI 制中,压强的单位为帕斯卡,用 Pa 表示, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$;帕斯卡与大气压(atm)及毫米汞高(mmHg)的关系为: $1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 101325 \text{ Pa}$;体积的单位为立方米(m^3),立方米与升的关系为: $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ L}$.

10.1.4 温度

系统的状态参量大致可以分为力学参量、几何参量、电磁参量、化学参量四类.这四类参量都不是热学中所定义的,下面讨论热学中所定义的参量温度.

温度的通俗定义是物体的冷热程度,温度的严格定义依赖于热平衡的概念,首先讨论热平衡的概念.

设想两系统用刚性板隔开,由于刚性板不会形变,所以可以隔绝两系统之间的机械相互作用,因而阻断了两系统以机械功的形式交换能量,但两系统之间总可以或多或少、或快或慢地以其他形式交换能量.这种仅能阻断机械功交换而不能隔绝其他形式能量交换的板称为导能板.用导能板隔开的两系统相互影响,一个系统的变化必然引起另一个系统的变化.现在引入一种理想的刚性板,它可以完全隔绝两系统之间的任何相互作用,称为隔能板.当两系统用隔能板隔开时,两系统可以独立变化,互不影响.

当两个系统与外界隔绝时,但两系统之间通过导能板相接触或者两系统直接通过边界接触,两系统的状态都会发生变化,经过足够长的时间后,两系统的状态不再变化,达到一个共同的平衡态.此后,如果没有外界的影响,两个系统的状态都不变.此时称两系统处于热平衡.处于热平衡的两系统即使分开后,若没

有外界的影响,它们各自的状态也不会改变。

实验表明,当系统 A 与系统 B 处于热平衡,同时系统 A 与系统 C 也处于热平衡,则系统 B 与系统 C 也处于热平衡.这一规律称为热力学第零定律。

热力学第零定律是一个实验规律而不是逻辑推理的结果,它表明互为热平衡的系统必有一个共同的物理性质.描述互为热平衡的热学系统的共同物理性质的物理量定义为温度。

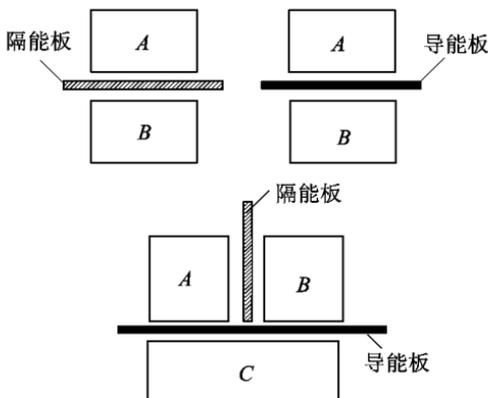


图 10-1 导热板与隔能板

温度的这个定义与“物体的冷热程度”的提法是相容的,却避免了逻辑上的循环.根据这个定义,互为热平衡的系统具有相同的温度,温度相同的系统也必然处于热平衡.温度是判断不同的系统是否处于热平衡的物理量,这是从宏观上对温度这个物理量的认识,温度的物理本质会在后续章节讨论。

热力学第零定律也给出了测量温度的方法,选择一个合适的系统作为标准,这个作为标准的系统称为温度计.让温度计与待测系统接触,当达到热平衡时,温度计的温度就是待测系统的温度.当然,温度还需要用数值来表示。

10.1.5 温 标

温度的数值表示方法称为温标.按照标定温度的方法划分,温标可以分为经验温标、理想气体温标和热力学温标。

经验温标通常选择一个可观测的随温度单调变化并且变化显著的物理量来标志温度,这个物理量称为测温参量;测温参量随温度变化的关系人为规定;还要选择一个标准点并规定标准点温度的数值。

经验温标规定:测温参量 X 与温度 θ 之间满足线性关系 $\theta = \alpha X$, 其中 α 是待定常数; 选择水的三相点(冰、水和水蒸气平衡共存状态)为标准点, 规定标准点的温度为 273.16 K ; 根据以上规定可得经验温标的温度公式为

$$\theta = 273.16 \text{ K} \times \frac{X}{X_3} \quad (10-1)$$

其中 X_3 表示测温参量在水的三相点的数值.

通常测温参量随温度变化的关系并不满足线性关系, 不同物质的同一测温参量随温度变化的关系也不一样. 于是, 使用不同测温物质的两支温度计同时测量同一物体的温度, 除了标准点外, 会得到不同的结果, 这是经验温标的缺陷.

实验表明, 理想气体温标可以克服经验温标的缺陷. 使用不同测温物质的两支理想气体温度计同时测量同一物体的温度, 得到的结果相同. 各种气体在压强较低的情况下都可以近似地认为是理想气体.

定体气体温度计以压强为测温参量, 定体理想气体温标为

$$T(p) = 273.16 \text{ K} \times \lim_{p_3 \rightarrow 0} \frac{p}{p_3} \quad (10-2)$$

定压气体温度计以体积为测温参量, 定压理想气体温标为

$$T(V) = 273.16 \text{ K} \times \lim_{V_3 \rightarrow 0} \frac{V}{V_3} \quad (10-3)$$

热力学温标是一种理论温标, 它不依赖于任何测温物质, 因而没有经验温标的缺陷, 被称为绝对温标. 可以证明, 在理想气体温标可以实现的范围内, 热力学温标与理想气体温标是一致的. 以后本书中不再区别热力学温标和理想气体温标, 统一用 T 表示热力学温度, 单位为开尔文, 用 K 表示. 热力学温度与常用的摄氏温度的关系为

$$T = t + 273.15 \quad (10-4)$$

这实际上是规定热力学温度的 273.15 K 为摄氏温标的零度.

10.1.6 状态方程

实验表明, 对于给定的热学系统的一个确定的状态, 它的状态参量之间总是满足一定的关系. 热学系统的状态参量之间的关系称为该系统的状态方程. 状态方程的一般形式为

$$f(T, p, V) = 0 \quad (10-5)$$

例如理想气体的状态参量之间的关系式为

$$pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}}RT \quad (10-6)$$

就是理想气体的状态方程. 方程中的 R 是普适气体常数, $R=8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; M_{mol} 为气体的摩尔质量; M 为气体质量; p 为气体压强; V 为气体活动的空间; T 为热力学温度.

热学系统的状态方程由实验确定, 例如, 理想气体的状态方程式(10-6)就是由玻意尔(Boyle)定律、查理(Charles)定律和盖-吕萨克(Goy-Lussac)定律三个实验定律得出.

热学系统的状态方程也可用统计力学的方法导出, 这超出了本书的讨论范围.

例 10-1 求大气压强 p 随高度 h 的变化规律. 设空气的温度不随高度而变化.

解 如图 10-2 所示, 在高为 h 处取一薄气层, 其底面积为 S , 厚度为 dh , 气层上表面的压强为 $p + dp$, 下表面的压强为 p ; 气层所在处空气密度为 ρ , 薄气层所受的重力为 $(dm)g = \rho g S dh$, 根据力学平衡条件, 有

$$(p + dp)S + \rho g S dh = pS$$

得
$$dp = -\rho g dh$$

空气可视为理想气体, 由(10-6)式, 可得: $\rho = \frac{pM_{\text{mol}}}{RT}$

所以

$$dp = -\frac{pM_{\text{mol}}g}{RT}dh$$

即:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gM_{\text{mol}}}{RT}dh$$

积分:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^h \frac{gM_{\text{mol}}}{RT}dh$$

得:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{gM_{\text{mol}}}{RT}h$$

或:

$$p = p_0 e^{-\frac{gM_{\text{mol}}}{RT}h} \quad (10-7)$$

此即大气压强随高度变化的规律, 也称等温气压公式. 可见大气压随高度按指数规律减小. 要注意的是这里假定温度不随高度变化, 与实际有出入, 使用时要修正.

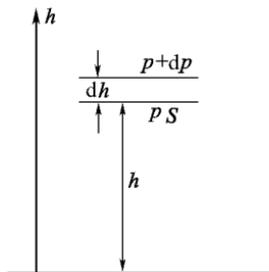


图 10-2 例 10-1 用图

10.2 气体动理论的基本观点

10.2.1 物质微观结构的物理图像

物质的微观结构在物理学中是一个很大的课题,这里仅从气体动理论的需要出发做简单介绍.

1. 物质由大量粒子(分子或原子)所组成

物质由大量分子或原子这样的微粒组成,现在已能用高分辨率的显微镜直接观察到原子结构的图像;分子之间存在空隙,气体容易压缩,酒精与水混合后的总体积小于两者原来体积之和就是例证.分子的线度在 $10^{-7} \text{ m} \sim 10^{-10} \text{ m}$ 之间,一个热学系统所包含粒子的数目是非常大的,1 mol 气体在标准状态(温度为 0°C 、压强为 1 atm)下 1 cm^3 内的分子数目略为 3×10^{19} .

2. 分子在不停地做无规则运动,其运动的剧烈程度与物质的温度有关

组成物质的大量分子总是在不停地做无规则运动,布朗(R. Brown)运动——悬浮在液体中的微粒表现出的无规则运动——就是由大量液体分子的无规则运动撞击微粒所引起.实验表明,无规则运动的剧烈程度与温度有关,温度越高,无规则运动越剧烈.因此,大量分子的无规则运动称为热运动.

3. 分子之间有相互作用力

大量生活现象和实验表明,分子之间存在相互作用力.分子间的相互作用力为短程力,只有当分子十分接近时才发生相互作用力.当分子间距极小时(10^{-10} m 左右)分子力表现为斥力;距离较大时表现为引力,但随距离的增大而很快减小.当分子间距大于 10^{-9} m 时,相互作用力可忽略;分子力的本性十分复杂,与分子的电性结构有关.

分子力使分子聚集在一起,而分子的无规则的热运动使分子分散开来.这种相互对立的作用使物质分子在不同的温度下表现为固态、液态和气态这三种不同的聚集态.

10.2.2 统计观点简介

1. 统计规律与涨落现象

热学系统由大量粒子组成,组成系统的单个粒子的运动属于机械运动,遵守牛顿力学规律;大量粒子的整体行为遵守统计规律而不是力学规律。

统计规律是与力学规律根本不同的规律。根据牛顿力学规律,只要知道粒子的初始状态和运动方程,就可以确定任意时刻粒子的运动状态(位置、速度、加速度等);而统计规律只能给出粒子在任意时刻取各种可能的运动状态的可能性(即粒子取各种可能的运动状态的概率分布),而不能确定它处于哪一种运动状态。粒子处于哪一种运动状态是随机的。因此,统计物理的基本观点是,宏观量是相应微观量的统计平均值。例如,气体的压强(宏观量)就是大量气体分子在单位时间内作用于单位面积器壁的平均冲量(微观量的统计平均值)。

宏观量既然是统计平均值,任意时刻宏观量的取值与统计平均值之间就会有差异,这种现象称为涨落。理论和实验表明,系统处于平衡态时,只要组成系统的粒子数目足够大,这种涨落是可以忽略的。粒子数目越大,涨落越小。

2. 统计平均值

仅以计算平均成绩为例介绍统计平均值的计算。

学生总人数为 N ,以 X_i 表示某一分数的值,以 N_i 表示成绩为 X_i 的学生人数,学生总人数可表示为 $N = \sum_i N_i$; 学生平均成绩可表示为

$$\bar{X} = \frac{X_1 N_1 + X_2 N_2 + \cdots + X_i N_i + \cdots}{N_1 + N_2 + \cdots + N_i + \cdots} = \frac{\sum_i X_i N_i}{\sum_i N_i} = \sum_i X_i \frac{N_i}{N} \quad (10-8)$$

其中 $\frac{N_i}{N}$ 表示学生成绩为 X_i 的百分比,当 $N \rightarrow \infty$ 时,它就是学生成绩为 X_i 的概率,表示为

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad (10-9)$$

故平均成绩可表示为

$$\bar{X} = \sum_i X_i p_i \quad (10-10)$$

上式也可用于对任何物理量求平均值,其中 p_i 为物理量 X 取值为 X_i 的概率,只要知道了概率 p_i ,就可计算出物理量的平均值。

10.3 理想气体的压强公式

10.3.1 理想气体模型

理想气体模型是依据实验现象和规律所做的假设,可分为个体和集体两部分.

1. 理想气体分子模型

① 与分子之间的距离相比,分子本身的大小可以忽略.

液体可视为分子紧密排列而成,气体的体积是液体的 1000 倍左右,可粗略地认为分子之间的距离是分子本身线度的 10 倍,与分子之间的距离相比分子本身的大小可以忽略.

② 除碰撞外,分子之间、分子与器壁之间无相互作用.

分子力是短程力,气体分子间的平均距离超出分子力的作用范围,可认为无相互作用.

③ 分子之间、分子与器壁之间的碰撞是完全弹性碰撞.

气体处于平衡态时,其温度 T 和压强 p 都不随时间变化,表明分子之间的碰撞和分子与器壁之间的碰撞无能量损失,故可认为碰撞是完全弹性碰撞.

综上,理想气体分子模型是:除碰撞外无相互作用、遵守牛顿力学规律的弹性质点.

2. 分子集体行为的统计假设

以下假设的前提是系统处于平衡态.

① 每个分子的运动速度各不相同,并且通过碰撞不断变化.

气体分子不停地做无规则运动,运动速度各不相同;运动中分子之间频繁地碰撞,通过碰撞,各分子的速度不断变化.

② 分子按位置的分布是均匀的,分子数密度处处相同.

设气体的体积为 V ,气体分子总数为 N ,气体分子数密度为 n ,则:

$$n = \frac{dN}{dV} = \frac{N}{V}$$

在体积 V 内各处 n 都有相同的数值。

③ 分子速度按方向的分布是均匀的,因此速度各分量的平方的平均值相等. 在直角坐标系中,设某分子 i 的速度为 $\boldsymbol{v}_i = v_{ix}\boldsymbol{i} + v_{iy}\boldsymbol{j} + v_{iz}\boldsymbol{k}$,这个分子在直角坐标系三个坐标轴上的速度分量分别为 v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} . 根据统计假设,所有分子在三个坐标轴上的速度分量平方的平均值相等,即 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$,其中

$$\overline{v_x^2} = \sum_i p_i v_{ix}^2 = \sum_i \frac{N_i}{N} v_{ix}^2 = \frac{N_1 v_{1x}^2 + N_2 v_{2x}^2 + \cdots + N_i v_{ix}^2 + \cdots}{N} \quad (10-11)$$

N_i 是速度为 \boldsymbol{v}_i 的分子数,总分子数为 $N = \sum_i N_i$.

这个假设的依据是,平衡态时,每个分子速度指向任何方向的机会应该是均等的,因为没有理由表明某一方向是特殊的. 若存在一特殊方向,朝此方向运动的分子数多于其他方向,则平衡态将被破坏.

这个假设还可以表示为另一形式

$$\begin{aligned} \overline{v^2} &= \sum_i p_i v_i^2 = \sum_i p_i (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2) = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3 \overline{v_x^2} \\ \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} &= \frac{1}{3} \overline{v^2} \end{aligned} \quad (10-12)$$

假设②③只适用于大量分子组成的系统,是统计性假设,对少数分子不成立. $n, \overline{v^2}, \overline{v_x^2}$ 等都是统计平均值,仅对大量分子组成的系统才有意义. 因此,分子数密度定义中的 dV 是所谓宏观小微观大的体积元. 为了精确描述体积 V 内各点的数密度,它应该是非常小的体积元, dV 取 10^{-9} cm^3 (边长为 0.001 cm 的正方体),宏观上已足够小,其中仍然包含 10^{10} 个分子,从微观上看仍然非常大. 由于分子热运动,分子不断进出体积元 dV , n 只是分子数目的统计平均值,各时刻 dN/dV 的值与 n 有差异,这就是所谓涨落. 由于 dV 微观大,这种涨落是可以忽略不计的.

10.3.2 理想气体压强公式

1. 理想气体压强的定性解释

在大雨中撑伞感到有一股压力,这是由于大量密集的雨滴不断撞击雨伞的原因. 形成气体压强的原因与此类似,是大量气体分子不断碰撞器壁的结果.

2. 公式推导

体积为 V 的容器内有质量为 M 的理想气体,分子总数为 N ,每个分子的质

量为 m .

分子热运动的速度各不相同,但速度在 v_i 到 $v_i + dv_i$ 之间的分子不止一个. 为了讨论方便,把所有分子按速度区间分组. 令速度在 v_i 到 $v_i + dv_i$ 之间的分子为第 i 组,组内的气体分子的速度都可以用 v_i 表示;以 n_i 表示这一组分子的数密度. 气体总的分子数密度为 $n = \sum_i n_i$

平衡态下,容器内各处的压强是一致的,任取一面元讨论即可. 任取面元 dA ,沿垂直于面元方向建立 x 坐标轴,如图 10-3 所示.

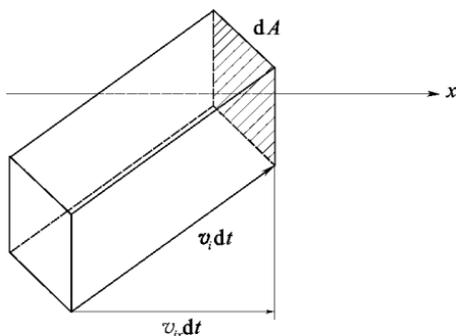


图 10-3 速度在 $v_i + dv_i$ 区间的分子对 dA 的碰撞

① 单个速度为 v_i 分子与器壁的碰撞.

一个速度为 v_i 的分子与面元 dA 碰撞,因为是完全弹性碰撞,所以碰撞前后分子在 y, z 方向的速度分量不变,在 x 方向的速度分量由 v_{ix} 变为 $-v_{ix}$. 分子动量的变化为

$$m(-v_{ix}) - mv_{ix} = -2mv_{ix}$$

根据动量定理,这是一次碰撞后器壁作用于一个分子的冲量. 根据牛顿第三定律,这个分子对器壁的冲量应该是 $2mv_{ix}$,方向与面元 dA 垂直.

② dt 时间内所有速度为 v_i 的分子与器壁的碰撞.

dt 时间内速度为 v_i 的分子能够与面元 dA 碰撞的,必在底面积为 dA 、斜高为 $v_i dt$ 、高为 $v_{ix} dt$ 的斜柱体内,如图 10-3 所示. 斜柱体的体积为 $v_{ix} dt dA$,斜柱体内速度为 v_i 的分子数目为 $n_i v_{ix} dt dA$,这些分子中能与 dA 碰撞的必须是 $v_{ix} > 0$ 的分子,而 $v_{ix} < 0$ 的分子无法与 dA 碰撞. 由统计假设,这两类分子应各占一半,故 dt 时间内能与 dA 碰撞的速度为 v_i 的分子数为 $\frac{1}{2} n_i v_{ix} dt dA$. dt 时间内速度为 v_i 的分子作用于面元 dA 的总冲量是 $\frac{1}{2} n_i v_{ix} dt dA (2mv_{ix}) =$

$$mn_i v_{ix}^2 dt dA.$$

③ dt 时间内所有各种速度的分子与器壁的碰撞.

设 dt 时间内所有各种速度的分子作用于面元 dA 的总冲量为 dI , 把前式对各个速度区间内的分子求和, 即可求出 dI

$$dI = \sum_i mn_i v_{ix}^2 dt dA$$

④ 压强公式.

根据牛顿第二定律, 气体对面元 dA 的作用力为 $dF = \frac{dI}{dt}$, 气体对器壁的宏观压强

$$p = \frac{dF}{dA} = \frac{dI}{dt dA} = \sum_i mn_i v_{ix}^2 = m \sum_i n_i v_{ix}^2$$

$$\text{由于} \quad \overline{v_x^2} = \sum_i \frac{N_i}{N} v_{ix}^2 = \frac{\sum_i N_i v_{ix}^2}{N} = \frac{\sum_i n_i v_{ix}^2}{n}$$

所以

$$p = nm \overline{v_x^2}$$

再由(10-12)式

$$p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} \quad (10-13)$$

$$\text{令分子平均平动动能为} \quad \bar{\epsilon}_t = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$$

$$\text{有} \quad p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_t \quad (10-14)$$

上式即为理想气体的压强公式.

10.3.3 压强公式的物理意义

压强公式把宏观量(压强 p)与微观量(分子平动动能)的统计平均值联系起来, 清晰地显示了宏观量与微观量之间的关系.

公式(10-14)揭示了气体压强的物理本质, 即气体压强是大量气体分子不断与器壁碰撞的结果. 分子数密度越大, 气体压强越大, 这是由于分子数密度越大与器壁碰撞的分子越多, 作用于器壁的冲量越大的缘故; 当分子数密度一定时, 分子平均平动动能越大, 气体压强越大. 这是由于分子平均平动动能大, 与器壁碰撞时作用于器壁的冲量越大的缘故. 分子的速率从两方面影响压强, 速率大, 单位时间与器壁碰撞的分子就多; 速率大, 分子平均平动动能就大, 与器壁碰

撞时作用于器壁的冲量就大. 所以气体压强与气体分子速率的平方成正比.

推导过程中对单个气体分子使用了质点动量定理, 但仅靠力学规律是得不到压强公式的, 因为推导过程采用了统计假设, 并且应用了求统计平均值的方法, 才最终得到理想气体的压强公式. 因此压强公式是统计规律, 而不是力学规律.

压强公式既然是统计规律, 只有对大量气体分子而言, 压强才有明确的意义. 对单个分子而言是没有压强概念的.

压强公式不能直接为实验所验证, 但由压强公式推导出的结论已广泛为实验所验证, 间接证明了压强公式.

10.4 温度的统计解释

10.4.1 温度的统计解释

把理想气体的状态方程变形为

$$pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}}RT \Rightarrow p = \frac{1}{V} \frac{Nm}{N_A m} RT$$

其中, N 为气体分子总数; 阿伏伽德罗常数 $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

注意到 $n = \frac{N}{V}$, $k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, 称 k 为玻尔兹曼常量, 可得

$$p = nkT \quad (10-15)$$

这是理想气体状态方程的另一种形式. 与公式 $p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_t$ 比较可得 $nkT = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_t$, 即

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT \quad (10-16)$$

上式为温度公式, 它给出了宏观量温度与微观量分子平动动能的统计平均值之间的关系, 揭示了温度的物理本质.

温度是气体分子平均平动动能的量度. 分子的平均平动动能越大, 表明分子热运动越剧烈, 温度就越高, 温度反映了系统内分子热运动的剧烈程度.

温度是一个统计概念, 分子平均平动动能是对大量分子的统计结果, 因此对

少量分子而言,温度是没有意义的.

10.4.2 方均根速率

由温度公式可得到分子速率的一种统计平均值——方均根速率.

$$\text{由:} \quad \bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$\text{可得:} \quad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (10-17)$$

上式为气体分子的方均根速率的表达式,表明气体分子的方均根速率与气体的热力学温度的平方根成正比,与气体摩尔质量的平方根成反比.方均根速率反映了气体热运动的状态,对同一气体,方均根速率越大,此时气体的温度越高.不同气体温度相同时,方均根速率大的,气体分子质量小.

例 10-2 一容器内储有氧气,其压强为 $p=1.0 \text{ atm}$,温度为 27°C ,求:

- (1) 单位体积的分子数;
- (2) 氧气的质量密度;
- (3) 氧分子的质量;
- (4) 分子间的距离;
- (5) 分子的平均平动能.

解 (1) 视氧气为理想气体,由理想气体压强公式 $p=nkT$ 可得

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 2.45 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

(2) 由理想气体状态方程 $pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT$ 可得

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{pM_{\text{mol}}}{RT} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 32 \times 10^{-3}}{8.31 \times 300} = 1.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

(3) 由 $\rho = nm$, 得

$$m = \frac{\rho}{n} = \frac{1.3}{2.45 \times 10^{25}} = 5.31 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

(4) 分子间的平均距离 l 指两个分子中心间的距离,它与数密度的关系为

$$l = \sqrt[3]{\frac{V}{N}} = \sqrt[3]{\frac{1}{N/V}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2.45 \times 10^{25}}} = 3.44 \times 10^{-9} \text{ m}$$

(5) $\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$

10.5 能量均分定理 理想气体的内能

10.5.1 自由度

在讨论理想气体压强时,视分子为质点,不影响问题的物理实质并且简化了讨论.为了确定各种运动形式能量的统计规律,不能再把分子当作质点.实际上分子有单原子分子(如 He, Ne)、双原子分子(如 O_2 , N_2)和多原子分子(如 CH_4 , H_2O)之分,分子除了平动之外,还有振动和转动,讨论各种运动形式能量的统计规律需要引入自由度的概念.

确定一个物体位置的独立坐标数称为自由度.

单原子分子可视为质点,其运动形式只有平动,确定它的位置需要三个独立坐标,所以单原子分子的自由度为 3,为 3 个平动自由度,如图 10-4a 所示.

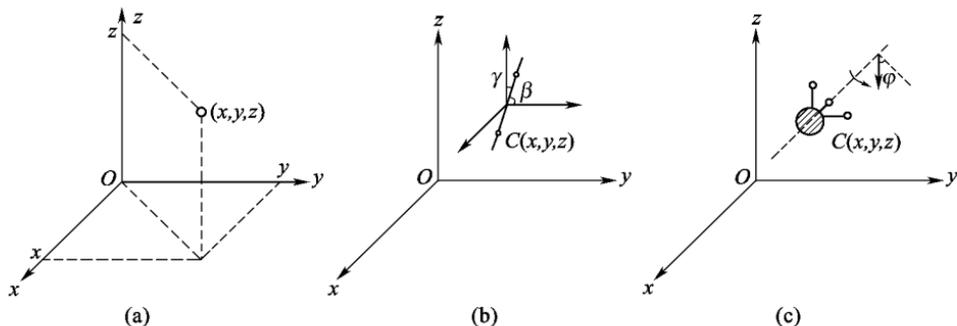


图 10-4 分子自由度示意图

两个以上原子组成的分子,当分子内原子间的距离保持不变(不振动)时,称为刚性分子,否则称为非刚性分子,非刚性分子的准确讨论涉及量子力学故暂时不提,以下讨论中只涉及刚性分子.

刚性双原子分子,确定其质心的位置需要 3 个独立坐标;确定两原子的连线在空间的取向需要三个坐标,但这 3 个坐标要满足一个约束条件($\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta = 1$),故只有 2 个坐标是独立的;于是,确定刚性双原子分子在空间的位置需要 5 个独立坐标,即刚性双原子分子的自由度为 5,3 个平动自由度,2 个转

动自由度,如图 10-4b 所示.

对于刚性多原子分子,除了 3 个平动自由度和 2 个转动自由度外,还需要增加一个绕轴自转的自由度,常用转角 φ 表示. 因此,刚性多原子分子的自由度为 6,如图 10-4c 所示.

规定用 i 表示刚性分子的自由度,用 t 表示平动自由度,用 r 表示转动自由度,有

$$i = t + r \quad (10-18)$$

10.5.2 能量均分定理

现在讨论气体分子每一自由度的平均动能,首先从只存在平动自由度的情况入手. 前面已讨论,一个分子的平均平动动能为

$$\bar{\epsilon}_t = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

而

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) = \frac{3}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{3}{2} m \overline{v_y^2} = \frac{3}{2} m \overline{v_z^2} = \frac{3}{2} kT$$

因此
$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_y^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_z^2} = \frac{1}{2} kT$$

上式前三个平方项的平均值各和一个平动自由度相对应,可认为每一个平动自由度平均动能都相等,其数值为 $\frac{1}{2} kT$.

上式所表达的是一统计规律,只对大量分子组成的系统成立. 从物理上看,各自由度的平均动能相等,是大量分子在热运动中频繁碰撞的结果. 由于碰撞的无规则性,碰撞过程中动能的交换不但在各分子间进行,也在各平动自由度之间交换. 由于各平动自由度是平权的,没有哪一个平动自由度具有特权,平均而言,各平动自由度就具有相等的平均动能.

放开思维,分子的转动自由度也应与平动自由度平权. 也就是说,在分子存在转动自由度的情况时,由于大量分子热运动中频繁碰撞的无规则性,碰撞过程中动能的交换也可以在转动自由度与平动自由度之间进行. 就能量分配而言,没有哪个自由度可以特殊. 因此,可以得出更一般的结论:所有自由度的平均动能都相等.

综上所述,可得能量均分定理:在温度为 T 的平衡态下,气体分子每个自由度的平均动能都相等,并且等于 $\frac{1}{2} kT$.

在经典统计物理理论中,能量均分定理可以得到严格的证明,并且适用于液体和固体分子的无规则运动.

由能量均分定理不难得到,分子总自由度为 i ,其平均总动能为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{i}{2} kT \quad (10-19)$$

对单原子分子,自由度 $i=3$,分子平均总动能 $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT$;

刚性双原子分子,自由度 $i=5$,分子平均总动能 $\bar{\epsilon}_k = \frac{5}{2} kT$;

刚性多原子分子,自由度 $i=6$,分子平均总动能 $\bar{\epsilon}_k = \frac{6}{2} kT = 3kT$;

10.5.3 理想气体的内能

气体的内能是它所包含的所有分子的动能和分子之间相互作用势能之和.由于理想气体分子之间没有相互作用,故理想气体的内能就是所有分子的动能之和.

设理想气体的分子总数为 N ,分子的平均总动能为 $\bar{\epsilon}_k = \frac{i}{2} kT$,理想气体内能为 E ,则 $E = N\bar{\epsilon}_k = N \frac{i}{2} kT$,令 $\mu = \frac{M}{M_{\text{mol}}}$ 为气体的摩尔数,有 $N = \frac{M}{M_{\text{mol}}} N_A = \mu N_A$

$$E = \mu N_A \frac{i}{2} kT = \mu \frac{i}{2} RT \quad (10-20)$$

上式为理想气体内能的一般表达式.可见理想气体的内能只与温度有关,当其状态变化后,内能的变化

$$\Delta E = \mu \frac{i}{2} R \Delta T \quad (10-21)$$

只与初态与末态的温度有关,与过程无关.

10.6 麦克斯韦速率分布律

10.6.1 麦克斯韦速率分布函数

根据统计的观点,平衡态下气体分子热运动的速度各不相同.就某一分子而

言,它的速度不断在变化,无法确定它在某一时刻的速度.但就大量气体分子整体而言,气体分子的速度还是有规律的.麦克斯韦根据概率统计理论导出了平衡态下理想气体分子按速度的分布规律——麦克斯韦速度分布律.若不考虑速度的方向,麦克斯韦速度分布律过渡到麦克斯韦速率分布律.相应的速率分布函数称为麦克斯韦速率分布函数.

由于理想气体系统包含的气体分子数目巨大,并且各分子的速率在不断变化,不可能对每个分子的速率给出描述.合乎逻辑的作法是指出在总分子数为 N 的分子中,具有各种速率的分子数是多少或它们各占总分子数的百分比是多大.例如把所有分子按速率区间分组,假定以 $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 为间隔划分为 $(0, 5)$, $(5, 10)$, $(10, 15)$, $(15, 20) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的区间,然后说明各区间的分子数是多少或者各区间的分子数占总分子数的百分比是多少.

规定以 dN_v 表示速率在 $v \sim v + dv$ 区间的分子数,则 $\frac{dN_v}{N}$ 表示速率在 $v \sim v + dv$ 区间的分子数占总分子数的百分比.显然,这个百分比应该与速率区间的宽度 dv 成正比,即 $\frac{dN_v}{N} \propto dv$,同时这个百分比在各个速率区间是不同的,即它应该是速率 v 的函数.故

$$\frac{dN_v}{N} = f(v) dv \quad (10-22)$$

$$f(v) = \frac{dN_v}{N dv} \quad (10-23)$$

上式中的函数 $f(v)$ 就叫做速率分布函数.它的物理意义是在速率 v 附近,单位速率间隔内的分子数占总分子数的百分比(比率).

把所有速率区间的分子数占总分子数的百分比 $\frac{dN_v}{N}$ 加起来之和显然为 1,即:

$$\int_0^{\infty} \frac{dN_v}{N} = \int_0^{\infty} f(v) dv = 1 \quad (10-24)$$

上式是所有分布函数必须满足的条件,叫做归一化条件.右边的积分上限选为 ∞ 是因为经典力学对气体分子的速率没有限制.

从概率的观点来讲, $\frac{dN_v}{N}$ 就是一个分子的速率在 v 附近 dv 区间内的概率;而 $f(v)$ 就是一个分子在速率 v 附近单位速率区间内的概率.在概率论中, $f(v)$ 叫做分子速率分布的概率密度函数.归一化条件可以这样来理解,它是在计算一

个分子不管取什么速率(所有可能的速率都可以)的概率,这个概率当然是百分之百(也就是1). 概率为1的事件称为必然事件.

麦克斯韦依据经典统计理论推导出,在平衡态下,气体分子速率在 $v \sim v + dv$ 区间的分子数占总分子数的百分比为

$$\frac{dN_v}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \quad (10-25)$$

上式就是麦克斯韦速率分布律的表达式. 与式(10-23)比较,可得

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (10-26)$$

称为麦克斯韦速率分布函数. 其中 T 是热力学温度, m 是一个分子的质量, k 是玻尔兹曼常数.

10.6.2 麦克斯韦速率分布曲线

由麦克斯韦速率分布函数可以看出,对给定气体,麦克斯韦速率分布函数只与温度有关. 以速率 v 为横轴,以 $f(v)$ 为纵轴,画出 $f(v)$ 的曲线称为麦克斯韦速率分布曲线. 如图 10-5 所示.

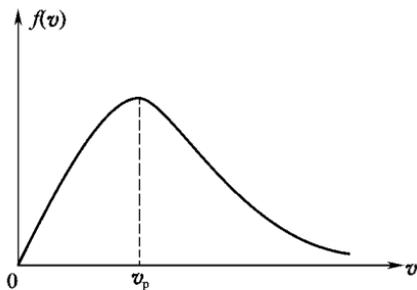


图 10-5 麦克斯韦速率分布曲线

从图中可以看出,由速率分布函数确定的速率很大和很小的分子都很少. 速率分布函数存在一极大值,对应的速率称为最概然速率,用 v_p 表示. 它的物理意义是速率在 v_p 附近的分子数占总分子数的百分比最大. 根据极值存在的条件

$\frac{df(v)}{dv} = 0$, 可求出最概然速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\text{mol}}}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (10-27)$$

从上式可看出,最概然速率随温度升高而增大,随温度降低而减小. 由于麦

克斯韦速率分布曲线下的总面积为 1, 所以当温度上升, v_p 增大时, 曲线会趋于平坦而保持总面积不变. 整个曲线向高速区域扩展, 也就是说, 温度越高, 速率较大的分子数越多. 温度越高, 分子热运动越剧烈的结论, 再次获得证明.

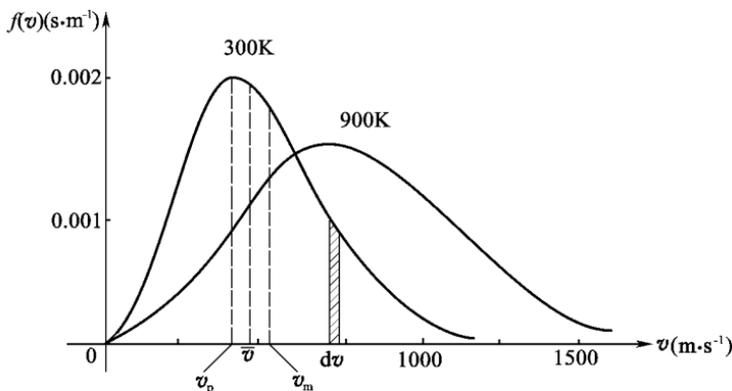


图 10-6 不同温度下的麦克斯韦速率分布曲线

10.6.3 应用速率分布函数求统计平均值

前面利用温度公式求出了方均根速率, 下面用速率分布函数计算 $\overline{v^2}$, 从而得出方均根速率.

$$\begin{aligned}\overline{v^2} &= \sum_i \frac{N_i}{N} v_i^2 = \frac{\sum_i N_i v_i^2}{N} = \frac{\int_0^\infty (dN_v) v^2}{N} = \int_0^\infty \frac{dN_v}{N} v^2 \\ &= \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^4 dv \\ &= \frac{3kT}{m}\end{aligned}$$

方均根速率为

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{mol}}}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (10-28)$$

同理可计算平均速率

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \int_0^\infty v f(v) dv = \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv \\ &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (10-29)\end{aligned}$$

平均速率、方均根速率和最概然速率都是统计意义上说明大量分子速率的典型值. 它们都与 \sqrt{T} 成正比, 与 \sqrt{m} 成反比. 三种速率在不同的情况下有不同的应用.

例 10-3 有 N 个粒子, 其速率分布函数为:

$$\begin{cases} f(v) = \frac{dN}{Ndv} = C & (v_0 > v > 0) \\ f(v) = 0 & (v > v_0) \end{cases}$$

- (1) 画出速率分布曲线;
- (2) 由 N 和 v_0 求常数 C ;
- (3) 求粒子的平均速率.

解 (1) 速率分布曲线如右图 (10-7) 所示.

(2) 速率分布函数必须满足归一化条件, 即

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = \int_0^{v_0} C dv = Cv_0 = 1$$

$$C = 1/v_0$$

(3) 根据平均值的定义, 有

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{v_0} v C dv = \int_0^{v_0} v \frac{1}{v_0} dv = \left(\frac{1}{2} v_0^2 \right) \frac{1}{v_0} = \frac{1}{2} v_0$$

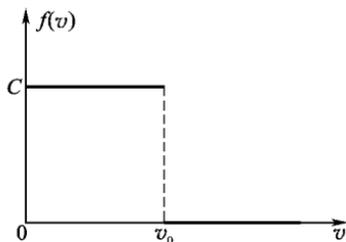


图 10-7 例 10-3 用图

10.7 麦克斯韦速度分布率和玻尔兹曼分布率简介

10.7.1 麦克斯韦速度分布率

速率分布率没有考虑分子速度的方向, 而速度分布率则考虑分子按速度是如何分布的.

以速度的三个分量为坐标轴建立的直角坐标系, 可以看成速度空间, 而 $dv_x dv_y dv_z$ 可看成速度空间的体积元, 也可视为速度区间. 要指出分子按速度是如何分布的, 就是要指出速度分量在 $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, $(v_z, v_z + dv_z)$ 区间的分子数或分子数占总分子数的百分比. 麦克斯韦用经典统计理论推导出速度分布率为

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \quad (10-30)$$

仿照速率分布的讨论, 应该有 $\frac{dN}{N} = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$, 所以

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} \quad (10-31)$$

上式称麦克斯韦速度分布函数. 同时

$$f(v_x, v_y, v_z) = \frac{dN}{N dv_x dv_y dv_z} \quad (10-32)$$

所以, 气体分子的速度分布函数表示在速度空间单位体积元内的分子数占总分子数的百分比. 即速度概率密度.

10.7.2 玻尔兹曼分布率

平衡态下气体分子按速度的分布规律已经讨论, 再进一步, 气体分子在空间是如何分布的呢? 在前面的讨论中, 没有考虑外场, 气体分子在空间的分布是均匀的, 即气体分子数密度处处相同. 当有保守力作用时, 分子在不同的位置有不同的势能, 气体分子在空间的分布不再是均匀的, 需要指明气体分子按空间位置的分布, 即指出位置坐标在 $x \sim x + dx, y \sim y + dy, z \sim z + dz$ 区间的分子数或分子数占总分子数的百分比, 这里, $dx dy dz$ 是几何空间的体积元, 也叫位置区间. 于是, 考虑分子速度和位置的分布率就需要指出其分子在 $dv_x dv_y dv_z dx dy dz$ 所限定的各个状态区间(包含速度区间与位置区间)的分子数或分子数占总分子数的百分比.

注意到分子的平动动能 $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$, 麦克斯韦速度分布率可写为

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_k}{kT}} dv_x dv_y dv_z$$

故速度区间 $dv_x dv_y dv_z$ 内的分子数与该区间内一个分子的平动动能 E_k 有关, 并且与 $e^{-\frac{E_k}{kT}}$ 成正比. 玻尔兹曼推广为位置区间 $dx dy dz$ 内的分子数与该区间内一个分子的势能 E_p 有关, 并且与 $e^{-\frac{E_p}{kT}}$ 成正比; 而状态区间 $dv_x dv_y dv_z dx dy dz$ 内的分子数与该区间内的一个分子的能量 $E = E_k + E_p$ 有关, 并且与 $e^{-\frac{E}{kT}}$ 成正比.

玻尔兹曼得出: 在温度为 T 的平衡态下, 任何系统的粒子按状态的分布, 即在某一状态区间内的粒子数与该状态区间的粒子的能量 E 有关, 并且与 $e^{-\frac{E}{kT}}$ 成正比. 这个结论叫做玻尔兹曼分布律, 而 $e^{-\frac{E}{kT}}$ 称为玻尔兹曼因子.

作为例子, 讨论理想气体在重力场中按位置的分布.

影响位置分布的是重力,一个气体分子的重力势能 $E_p = mgz$ (选 z 为纵坐标),令空间某一体积元 $dx dy dz$ 内的分子数为 dN ,根据玻尔兹曼分布律,有 $dN \propto e^{-\frac{E}{kT}} dx dy dz$; 所以

$$dN = C e^{-\frac{E}{kT}} dx dy dz$$

体元内分子数密度 $n = \frac{dN}{dx dy dz} = C e^{-\frac{E_p}{kT}} = C e^{-\frac{mgz}{kT}}$; 令地面的气体分子数密度为 n_0 , 并且令地面重力势能为零, 可得 $n_0 = C$. 所以

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (10-33)$$

$$\text{或:} \quad n = n_0 e^{-\frac{M_{\text{mol}}gz}{RT}} \quad (10-34)$$

上式为重力场中粒子按高度的分布公式. 这一公式于 1909 年由皮兰 (M. J. Perrin) 在实验中所证实. 皮兰的这个实验也被认为是确立分子存在真实性的实验.

由理想气体压强公式 $p = nkT$ 和 $n = n_0 e^{-\frac{M_{\text{mol}}gz}{RT}}$, 可得

$$p = p_0 e^{-\frac{M_{\text{mol}}gz}{RT}} \quad (10-35)$$

式中 $p_0 = n_0 kT$ 是高度为零处(地面)的气压, 这是等温气压公式. 表达式给出, 每升高 10 m, 大气压强约降低 133 Pa, 这是一种高度计的原理.

10.8 气体分子的平均自由程和平均碰撞频率

由气体分子平均速率公式可算出室温下分子的平均速率为几百米每秒, 依照这个速率, 在房间内一侧打开一瓶香水, 另一侧应该立即闻到香味, 但事实并非如此. 这是因为所有气体分子都在不停地运动, 分子在运动中会发生频繁的碰撞, 行进路线曲折的缘故. 如图 10-8 所示.

分子两次碰撞之间自由行进的路程称为自由程. 单位时间内一个分子与其他分子的碰撞次数称为分子的碰撞频率. 如图 10-8 所示, 分子的自由程长短不等, 因而分子的碰撞频率也大小不等, 并且是随机变化的. 但是大量分子的无规则运动使得分子的自由程和碰撞频率服从一定的统计规律, 可以采用求统计平均值的办法分别计算平均自由程和平均碰撞频率.

10.8.1 平均碰撞频率

在研究分子碰撞时, 视气体分子为有效直径为 d 的刚性球比较方便. 为了计

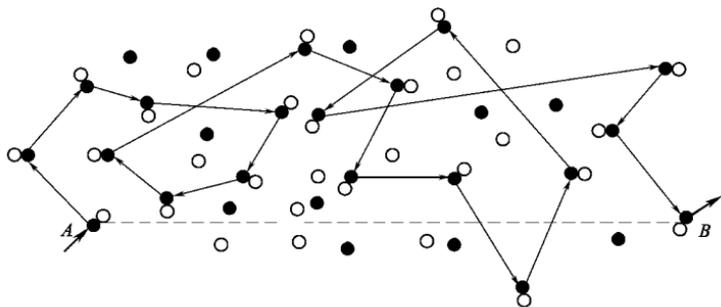


图 10-8 分子碰撞示意图

算平均碰撞频率,设想一个分子 A 以平均速率 \bar{v} 运动,其余分子都静止.跟踪 A 分子,计算它在一段时间 Δt 内与多少个分子碰撞,即可得平均碰撞频率.为计算与 A 分子碰撞的分子数,以 A 分子中心的运动轨迹为轴线,以分子有效直径 d 为半径做曲折圆柱体如图 10-9 所示.显然,凡是分子中心在圆柱体内的分子都将与 A 分子相撞.计算这个圆柱体内有多少个分子,则 A 分子就要碰撞多少次.

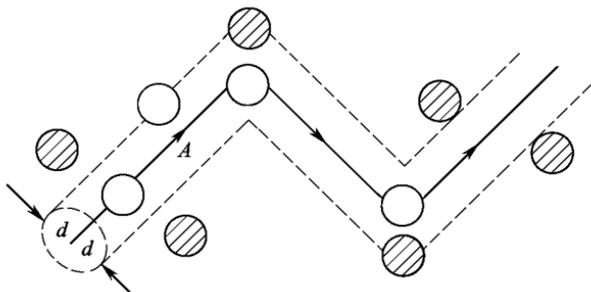


图 10-9 分子碰撞区域示意图

设单位体积分子数为 n ,曲折圆柱体的截面积 $\sigma = \pi d^2$ (也称为碰撞截面),曲折圆柱体的高为 $\bar{v}\Delta t$,圆柱体内的分子数为 $n\pi d^2 \bar{v}\Delta t$;即 Δt 时间内 A 分子的碰撞次数为 $n\pi d^2 \bar{v}\Delta t$.设平均碰撞频率为 \bar{z} ,则

$$\bar{z} = \frac{n\pi d^2 \bar{v}\Delta t}{\Delta t} = n\pi d^2 \bar{v} \quad (10-36)$$

上式是在 A 分子一个分子运动其余分子静止的前提下得到的,实际上所有分子都在运动,上式应加以修正.麦克斯韦从理论上得出修正后的平均碰撞频率为

$$\bar{z} = \sqrt{2} n\pi d^2 \bar{v} \quad (10-37)$$

可见平均碰撞频率与分子数密度成正比、与分子有效直径的平方成正比、还与分子的平均速率成正比.从物理上看,这是合理的.

在标准状态下,平均碰撞频率 \bar{z} 的数量级为 10^9 s^{-1} . 平均而言,一个分子在 1 秒内要与其他分子碰撞几十亿次,这样频繁的碰撞是日常生活中难以想象的,可见分子热运动中的极大的无规则性,频繁的碰撞是大量分子整体出现统计规律的基础.

10.8.2 气体分子的平均自由程

一个分子在 Δt 时间内走过的路程除以它在这段时间内的碰撞次数就是它的平均自由程. 设气体分子的平均自由程为 $\bar{\lambda}$, 则

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}\Delta t}{\bar{z}\Delta t} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} \quad (10-38)$$

可见气体分子的平均自由程与分子数密度成反比、与分子有效直径的平方成反比,从物理上看,这也是合理的.

利用 $p = nkT$ 可得

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}n\pi d^2 p} \quad (10-39)$$

可见,当温度恒定时,平均自由程与气体的压强成反比.

例 10-4 试计算氮气在标准状态下的分子平均碰撞频率和平均自由程. 设氮气可视为理想气体,已知氮分子有效直径 $d = 3.76 \times 10^{-10} \text{ m}$.

解 先求单位体积的分子数,由理想气体压强公式 $p = nkT$ 可得

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 273} = 2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

再求氮分子的平均速率

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 273}{3.14 \times 28 \times 10^{-3}}} = 454 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

平均碰撞频率为

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v} \\ &= 1.41 \times 3.14 \times (3.76 \times 10^{-10})^2 \times 2.69 \times 10^{25} \times 4.54 \\ &= 7.67 \times 10^9 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

平均自由程为

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \\ &= \frac{1}{1.41 \times 3.14 \times (3.76 \times 10^{-10})^2 \times 2.69 \times 10^{25}} \end{aligned}$$

$$= 5.9 \times 10^{-8} \text{ m}$$

思考题

10-1 对热力学系统的宏观描述和微观描述的方法有何不同？有何联系？

10-2 什么是热力学系统的平衡态？气体在平衡态时有何特征？当气体处于平衡态时还有分子热运动吗？

10-3 什么是热平衡？怎样根据热平衡来引进温度的概念？对于非平衡态能否用温度概念？

10-4 平衡态与热平衡态的意义有何异同？

10-5 用温度计测量温度是根据什么原理？

10-6 理想气体温标是利用气体的什么性质建立的？

10-7 理想气体状态方程是根据什么定律导出的？

10-8 温度的高低与人的感觉的冷热之间有必然的联系吗？或者，温度高表示更热只是一种约定俗成的说法吗？如果像当初摄氏本人的规定把水的沸点定为 0°C 而冰点定为 100°C ，则温度高低与冷热的关系又将如何？如果将水的三相点温度定为 -273.16°C ，则温度高低与冷热的关系又如何？

10-10 在大气中随着高度的增加，氮气分子数密度与氧气分子数密度的比值也增大，为什么？

10-11 对一定量的气体来说，当温度不变时，气体的压强随体积的减小而增大；当体积不变时，压强随温度的升高而增大。从宏观来看，这两种变化同样使压强增大，从微观来看它们有何区别？

10-12 试用关于平衡态下理想气体分子运动的统计假设说明 $\bar{v}_x = \bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$

10-13 在铁路上开行的火车，在海面上航行的船只，在空中飞行的飞机各有几个自由度？

10-14 尖端固定在一端正做运动的陀螺有几个自由度？

10-15 CO_2 （两个氧原子对称地附在碳原子的两侧）和 NH_3 分子各有几个自由度（不考虑分子内原子的振动）？

10-16 试指出下列各式所表示的物理意义。

$$(1) \frac{1}{2}kT \quad (2) \frac{i}{2}RT \quad (3) \frac{i}{2}\mu RT \quad (4) \frac{3}{2}kT$$

10-17 如果盛有气体的容器相对某坐标系做匀速运动，容器内的分子速度相对这坐标系也增大了，温度也因此升高了吗？

10-18 最概然速率和平均速率的物理意义各是什么？有人认为最概然速率就是速率分布中的最大速率，对不对？

10-19 一定质量的气体,保持容积不变.当温度增加时分子运动得更剧烈,因而平均碰撞次数增多,平均自由程是否因此而减小?为什么?

习题 10

10-1 定体气体温度计的测温气泡放入水的三相点的管槽内时,气体的压强为 $6.65 \times 10^3 \text{ Pa}$.

(1) 用此温度计测量 373.15 K 的温度时,气体的压强是多大?

(2) 当气体压强为 $2.20 \times 10^3 \text{ Pa}$ 时,待测温度是多少 K ? 多少 $^\circ\text{C}$?

10-2 打开空调后某房间温度从 7.0°C 上升到 27.0°C ,试计算打开空调前后房间内空气密度之比(房间内的压强可以认为不变).

10-3 一个大热气球的容积为 $2.1 \times 10^4 \text{ m}^3$,气球本身和负载质量共 $4.5 \times 10^3 \text{ kg}$,若其外部空气温度为 20°C ,要想使气球上升,其内部空气最低要加热到多少度?

10-4 某柴油机的气缸内充满空气,压缩前其中空气的温度为 47°C ,压强为 $8.61 \times 10^4 \text{ Pa}$.当活塞急剧上升时,可把空气压缩到原体积的 $1/17$,其时压强增大到 $4.25 \times 10^6 \text{ Pa}$,求这时空气的温度(分别以 K 和 $^\circ\text{C}$ 表示).

10-5 从压强公式和温度公式出发推证理想气体的物态方程为 $pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT$.

10-6 最新测量资料表明,我国珠穆朗玛峰高度为 8848.85 m .若将大气温度近似看作 0°C ,问顶峰的气压是多少?(空气分子量为 28.9)

10-7 某人测得一山顶的压强只有地面压强的 $3/4$.问该山顶的相对高度为多少?(设山顶和地面的温度均为 0°C ,空气的摩尔质量为 $2.89 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$)

10-8 1909年,皮兰利用显微镜观察液体中悬浮乳胶微粒随高度的变化的实验求出了阿伏伽德罗常数量 N_A .实验中,皮兰使两层乳胶的高度差为 $100 \mu\text{m}$ 时测得一层乳胶(温度为 27.0°C)的微粒密度恰好是另一层的两倍.已知乳胶微粒的直径为 $0.36 \mu\text{m}$,乳胶的密度比液体的密度大 $1.5 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,求 N_A .

10-9 某容器储有氧气,其压强为 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$,温度为 27.0°C ,求:

(1) 分子的 v_p , \bar{v} 及 $\sqrt{v^2}$; (2) 分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}_k$.

10-10 求处于平衡态下的理想气体分子速率在 $(v_p - \frac{v_p}{100}) \sim (v_p + \frac{v_p}{100})$ 之间的分子所占的比率.

10-11 设氢气的温度为 27.0°C ,求氢气分子速率在 $3000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \sim 3010 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 及 $1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \sim 1510 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 之间的分子数的比率.

10-12 有 N 个粒子,其速率分布函数为

$$f(v) = av/v_0 \quad (0 \leq v \leq v_0)$$

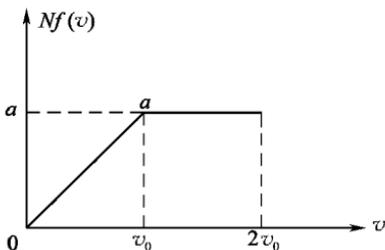
$$f(v) = a \quad (v_0 \leq v \leq 2v_0)$$

$$f(v) = 0 \quad (2v_0 < v)$$

- (1) 画出速率分布曲线并求常数 a ;
- (2) 分别求速率大于 v_0 和小于 v_0 的粒子数;
- (3) 求粒子的平均速率.

10-13 设有 N 个假想的分子, 其速率分布如图所示, 当 $v > 2v_0$ 时, 分子数为零, 求:

- (1) a 的大小;
- (2) 速率在 $1.5v_0 \sim 2.0v_0$ 之间的分子数;
- (3) 分子的平均速率. (N, v_0 为已知)



题 10-13 图

10-14 若对一容器中的气体进行压缩, 并同时对它加热, 当气体温度从 27°C 上升到 177.0°C 时, 其体积减少了一半, 求:

- (1) 气体压强的变化;
- (2) 分子的平均动能和方均根速率的变化.

10-15 储有氧气的容器以速率 $v = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 运动. 若该容器突然停止, 且全部定向运动的动能均转变成分子热运动的动能, 求容器中氧气温度的变化值.

10-16 求温度为 200°C 的氮气分子 (共有 2×10^{19} 个) 的自由度、平均平动动能、平均转动动能以及气体的内能.

10-17 一质量为 16.0 克的氧气, 温度为 27.0°C , 求其分子的平均平动动能、平均转动动能以及气体的内能. 若温度上升到 127.0°C 气体的内能变化为多少?

10-18 一篮球充气后, 其中有氮气 8.5 g , 温度为 17°C , 在空中以 $65 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 的高速飞行. 求:

- (1) 一个氮分子 (设为刚性分子) 的热运动平均平动动能、平均转动动能和平均总动能.
- (2) 球内氮气的内能.

(3) 球内氮气的轨道动能.

10-19 当容器中的氧气温度为 $17.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时, 其分子的平均自由程 $\bar{\lambda}=9.46\times 10^{-8}\text{ m}$.

若在温度不变的情况下对该容器抽气, 使压强降到原来的 $\frac{1}{1000}$. 问此时氧气分子的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 及平均碰撞频率 \bar{z} 将如何变化? 其值为多少?

10-20 求温度为 273K 、压强为 $1.013\times 10^5\text{ Pa}$ 的空气分子的平均自由程及平均碰撞频率. (空气分子的平均分子量为 28.9 , 有效直径为 $3.50\times 10^{-10}\text{ m}$)

10-21 风速为 $60\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, 考虑此风中有一氮分子, 它的热运动平均速率约为 $500\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. 连续两次与其他分子碰撞之间的自由飞行时间平均为 $1\times 10^{-10}\text{ s}$. 当此分子顺风移动 1 cm 时, 它经历了多少个自由程? 总共运动了多少路程?

第 11 章 热力学基础

本章从能量的观点出发,以实验为基础,研究热力学系统的在状态变化的过程中功能转换的宏观规律,主要介绍热力学第一定律及其应用、热力学第二定律及其统计意义,并介绍熵的概念.

在第 10 章中讨论了热学系统平衡态,以及热学系统在平衡态下所遵守的一些基本的统计规律.基本统计规律的讨论是从物质的微观结构出发,用统计的概念和方法进行的,这种方式的特点是可以解释宏观现象的微观本质.但是,由于微观模型是针对具体物质抽象出来的,因此它的结论的适用范围较窄;同时由于微观模型的近似性,导致其结论也往往是近似的.热学系统还可以从宏观规律出发进行讨论.从适用范围广、可靠性高的宏观规律出发,采用严密的逻辑推理和数学演绎的方法对热学系统进行讨论正好可以弥补统计方法的缺陷.本章将介绍描述热力学系统的宏观规律,主要是热力学第一定律、热力学第二定律以及相关的讨论.讨论仍然主要以物质系统最简单的聚集态气体为例进行.

11.1 准静态过程 功 内能和热量

11.1.1 准静态过程

实际热学系统总是要变化的.热学系统从一个平衡态过渡到另一个平衡态,称系统经历了一个热力学过程.例如活塞气缸内的气体系统由初始状态 (T_1, p_1, V_1) (简称初态)过渡到最终状态 (T_2, p_2, V_2) (简称末态),就说系统经历了一个热力学过程,如图 11-1 所示.

一个实际热力学过程从初态到末态包含许多中间状态,这些中间状态都不



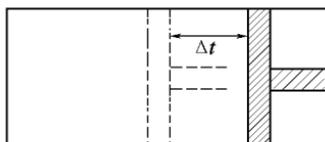
图 11-1 热力学过程示意图

是平衡态. 由于这些中间态不是平衡态, 整个系统没有统一的参量, 所以无法用系统本身的状态参量来描述一个实际热力学过程. 为了克服这一缺陷, 引入一个理想化的过程——准静态过程: 在热力学过程进行的每一时刻, 系统都处于平衡态, 这样的过程称为准静态过程. 于是, 对于准静态过程可以采用系统本身的状态参量来描述过程的变化. 热力学过程中只要有一个时刻不处于平衡态, 整个过程就不是准静态过程, 而称为非静态过程.

准静态过程的引入对于热力学理论是十分重要的, 由于它的引入, 系统状态的变化可以用系统本身的状态参量来描述, 使得讨论热力学问题的数学手段更为丰富.

虽然绝对的准静态过程并不存在, 但是很多实际热力学过程可以近似地认为是准静态过程. 那么什么情况下实际过程可以被认为是准静态过程呢?

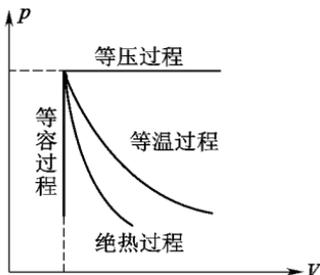
系统从平衡态被破坏开始到恢复平衡态所需要的时间称为驰豫时间, 记为 τ ; 设系统一个变化经历的时间为 Δt , 如图 11-2 所示, 如果驰豫时间 $\tau \ll \Delta t$, 就可以称过程为准静态过程. 例如, 汽车发动机活塞气缸内的气体系统经历一次压缩的时间 Δt 大约为 10^{-2} 秒或更大, 而实验表明活塞气缸内的气体系统的驰豫时间为 10^{-3} 秒或更小, Δt 是 τ 的 10 倍以上. 所以, 汽车发动机气缸内的气体的变化过程可以认为是准静态过程.



11-2 活塞压缩气体示意图

为了便于讨论, 以压强 p 和体积 V 为变量建立直角坐标系, 称为 $p-V$ 图. 图上的一个点, 具有确定的压强和体积, 并且不随时间变化, 所以表示系统的一个平衡态; 图上的一条曲线, 代表一个准静态过程, 因为曲线上的各点都是平衡态. 非静态过程不能用 $p-V$ 图上的曲线表示. 图 11-3 是 $p-V$ 图示例, 图上还画出了由同一状态出发的准静态等压过程、准静态等温过程、准静态绝热过程和

准静态等容过程曲线.



— $p-V$ 图及准静态过程曲线示意例

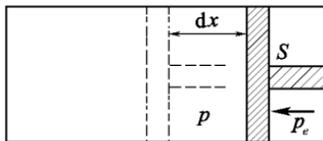
11.1.2 功

外界对系统做功是引起系统状态变化的重要原因,例如活塞压缩气体,活塞对气体做功,气体状态发生变化.

力学中功的定义为 $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$,即作用在物体上的力与物体在力的方向上位移的乘积.形式上可表为 $dA = YdX$ 的表达式在热学中都可以称为功,叫做广义功, Y 称为广义力,而 dX 称为广义位移.

以活塞压缩气体为例,讨论热学中功的表达式.如图 11-4 所示,活塞面积为 S ,气缸内气体压强为 p ,活塞外侧压强为 p_e ,在它的作用下活塞向内移动距离 dx ,外界(活塞)对系统(缸内气体)所做的元功 dA' 为

$$dA' = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Fdx = p_e S dx$$



1-4 活塞压缩气体做功示意图

若活塞与气缸缸壁之间的摩擦可以忽略不计,同时把压缩过程看成准静态过程,则气缸内的压强与外界压强相等,即 $p = p_e$;而 Sdx 是系统体积的减少量,即 $dV = -Sdx$,故外界(活塞)对系统(缸内气体)所做的元功为

$$dA' = -pdV \quad (11-1)$$

这是用系统本身的状态参量表示的外界对系统所做的元功.

外界对系统做的元功用 dA' 表示,系统对外界所做的元功用 dA 表示,它们

的关系为

$$dA = -dA'$$

所以,系统对外所做的功为

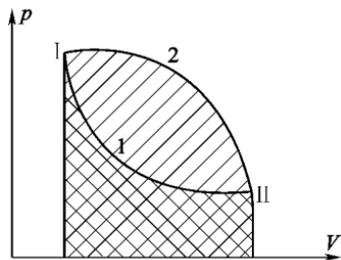
$$dA = -dA' = p dV \quad (11-2)$$

后一个等号是用系统本身的状态参量表示的系统对外界所做的元功,只对无摩擦的准静态过程成立. 显见: 当 $dV > 0$ 时, $dA > 0$, 系统对外做正功; 当 $dV < 0$ 时, $dA < 0$, 系统对外做负功; 当 $dV = 0$ 时, 系统对外不做功.

系统经有限过程(准静态), 体积由 V_1 变为 V_2 , 系统对外所做的功为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (11-3)$$

依据定积分的几何意义, 上式表示 $p-V$ 图上过程曲线与横坐标轴之间的曲边梯形的面积. 如图 11-5 所示. 只要知道了函数关系 $p(V)$, 就可以计算曲边梯形的面积, 也就是功的数值. 显然, 当初态与末态确定后(如图 11-5 中的状态 I 和状态 II), 经不同路径(如图 11-5 中的路径 1 和 2)从初态到末态, 曲边梯形的面积不同, 表明功与具体路径有关, 也就是与过程有关. 功是过程量, 是过程的特征不是状态的特征.



11-5 不同过程的功示意图

式(11-2)和(11-3)虽然从活塞气缸内气体的特例导出, 但可以证明它适用于一切因体积变化所引起的功, 俗称体积功. 热学系统中, 除了体积功外, 还有表面张力的功、电场力的功、磁力的功等.

11.1.3 内 能

内能可以通过绝热过程的功来定义.

1. 绝热过程及其特点

绝热过程顾名思义就是在系统与外界之间没有热量交换的过程, 但是从逻

辑上说,在没有定义热量之前,绝热过程中不应包含热量的概念,故定义绝热过程如下:

在纯粹机械相互作用或纯粹电磁相互作用下,系统由状态 I 过渡到状态 II,称系统经历了一个绝热过程.

实验表明,当初态和末态给定以后,无论经历什么样的绝热过程,所需要的绝热功的数值是相同的.例如,使相同质量相同温度的水升高相同的温度,无论是使用机械做功的方法还是使用电磁做功的方法,所需功的数值相同.

2. 内能

绝热过程的特点实际上是,当初态和末态给定以后,绝热功的数值与具体的绝热过程无关,而只与初态和末态有关.仿照力学中重力做功与路径无关,只与初态和末态的高度有关,从而定义了重力势能的做法,令 E 表示内能,定义内能增量为

$$E_2 - E_1 = A_Q' \quad (11-4)$$

其中, E_2, E_1 分别是末态和初态的内能, A_Q' 是外界对系统所做的绝热功.

从定义可以看出,一个状态只能有一个内能值,即内能是状态的单值函数,了解这一点对于内能的计算是有帮助的.需要注意的是,不同的状态可以有相同的内能值.

统计物理的研究表明,内能的物理本质是系统内所有粒子的无规则运动能量与粒子间相互作用势能的总和.

11.1.4 热 量

1. 热量的定义

由式(11-4),对于绝热过程有 $E_2 - E_1 - A_Q' = 0$. 对于非绝热过程,外界对系统所做的功 A' 自然不等于过程前后系统内能的变化,则

$$E_2 - E_1 - A' \neq 0$$

两者之差,应该是系统以热量的形式吸收的能量,令 Q 表示热量

$$E_2 - E_1 - A' = Q \quad (11-5)$$

上式就是热量的定义式.热量的单位也是焦耳,用符号 J 表示.

当两个系统通过导能壁接触,两者因温度差而引起的相互作用称为热相互作用或者热传递,热量就是这种热相互作用的度量或者说是热传递所传递的能量.因此,离开相互作用、离开过程说热量是没有意义的.热量的定义也清晰地反

映了这一点, 没有非绝热过程就没有热量的定义.

由于内能是态函数, 从式(11-5)可以看出, 做功和传热是改变系统状态的两种方式.

2. 热容量

热量是热传递过程中所传递的能量, 不同系统容纳这种能量的能力不一样, 热学中用热容量来描述系统的这种能力. 热容量的定量表达式为

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{dQ}{dT} \quad (11-6)$$

即系统升高单位温度所吸收的热量. 热容量的单位是 $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

每摩尔物质的热容量, 叫做摩尔热容, 记为 C_{mol} .

$$C_{\text{mol}} = \frac{C}{M/M_{\text{mol}}} = C/\mu \quad (11-7)$$

摩尔热容量的单位是 $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

热量是与过程有关的物理量, 因此热容量也是与过程有关的量. 系统经历不同的非绝热过程, 热容量不相同. 常见的等压过程和等容过程的摩尔热容为

$$C_{p, \text{mol}} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p \quad (11-8)$$

表示系统在等压过程中升高单位温度所吸收的热量.

$$C_{V, \text{mol}} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V \quad (11-9)$$

表示系统在等容过程中升高单位温度所吸收的热量.

11.2 热力学第一定律

11.2.1 热力学第一定律

注意到系统对外所做的功为 $A = -A'$, 式(11-5)可改写为

$$Q = E_2 - E_1 + A \quad (11-10)$$

上式为热力学第一定律的数学表达式. 可以看出, 系统在过程中吸收的热量一部分转化为内能, 另外一部分用来做功, 这是能量守恒定律在热学中的表达.

热力学第一定律给出了内能、功和热量三者之间的定量关系. 任何过程, 只要系统的初态和终态是平衡态, 它都适用.

对于元过程, 式(11-10)变为

$$dQ = dE + dA \quad (11-11)$$

由于内能是态函数, 式中 dE 只与状态有关; 热量和功是过程量, 故 dQ 和 dA 是元过程中的无限小量, 与具体路径有关.

在准静态过程中, $dA = p dV$, 热力学第一定律可写为

$$dQ = dE + p dV \quad (11-12)$$

热力学第一定律表明, 系统要对外输出功, 必须要消耗内能或者从外部吸收热量. 历史上曾经有人试图制造一种对外输出功并且不消耗能量的机器, 结果都以失败而告终. 这种不消耗能量又对外输出功的机器称为第一类永动机, 所以热力学第一定律还有一种说法就是: 第一类永动机是不可能制造的.

11.2.2 热力学第一定律在理想气体等值过程中的应用

在以后的讨论中, 除非说明, 系统经历的过程都是准静态过程.

1. 等容过程

气体等容过程的特点是体积不变, 在 $p-V$ 图上过程曲线是平行于 p 轴的一条直线, 如图 11-3 所示. 由于体积不变, 即 $V = \text{常数}$, 故 $dV = 0$, 同时 $dA = p dV = 0$, 由热力学第一定律, 有 $dQ_V = dE$ (下标 V 表示体积不变). 即

$$Q_V = E_2 - E_1 \quad (11-13)$$

可见, 等容过程中系统吸收的热量全部用于增加系统内能, 系统对外不做功.

2. 等压过程

气体等压过程的特点是压强不变, 在 $p-V$ 图上过程曲线是平行于 V 轴的一条直线 (参见图 11-3). 由于压强不变, 即 $p = \text{常数}$, 故系统对外所做的功为

$$A_p = \int dA_p = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) \quad (11-14)$$

由热力学第一定律有

$$Q_p = \int dQ = \int (dE + p dV) = E_2 - E_1 + p(V_2 - V_1) \quad (11-15)$$

可见, 等压过程中系统吸收的热量一部分用于增加系统内能, 另一部分用于对外做功.

3. 等温过程

气体等温过程的特点是温度不变,在 $p-V$ 图上过程曲线是一条双曲线,如图 11-3 所示. 由于理想气体的内能只是温度的函数 $\Delta E = \mu \frac{i}{2} R \Delta T$ (参见式 10-21), 所以等温过程中理想气体的内能不变, $\Delta E = 0$. 由热力学第一定律, 有

$$Q_T = \int dQ = \int (dE + dA) = \int dA = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \frac{dV}{V} = \mu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (11-16)$$

可见等温过程中, 系统吸收的热量全部用于对外做功.

11.2.3 理想气体的摩尔热容量

在上节理想气体等值过程的讨论中计算热量时, 都是利用热力学第一定律计算的. 计算热量还可以利用热容量的定义式.

由式(11-6), $C = \frac{dQ}{dT}$, 有 $dQ = CdT$, 所以

$$Q = \int dQ = \int CdT \quad (11-17)$$

只要知道热容量的表达式, 即可积分求出热量. 下面讨论理想气体的摩尔热容量.

1. 等容摩尔热容量

$$C_{V,\text{mol}} = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{dE + p dV}{dT} \right)_V = \left(\frac{dE}{dT} \right)_V = \frac{dE}{dT} \quad (11-18)$$

上式最后一个等号用到了理想气体内能只是温度的函数与体积无关的结论.

根据式(10-18), 1mol 理想气体的内能为 $E_{\text{mol}} = \frac{i}{2} RT$, 代入式(11-18)得

$$C_{V,\text{mol}} = \frac{dE}{dT} = \frac{d\left(\frac{i}{2} RT\right)}{dT} = \frac{i}{2} R \quad (11-19)$$

式中 i 是理想气体分子的自由度, 对于单原子分子 $i=3$, $C_{V,\text{mol}} = \frac{3}{2} R$; 对于

刚性双原子分子(除非特别说明, 本书只讨论刚性分子), $i=5$, $C_{V,\text{mol}} = \frac{5}{2} R$.

2. 等压摩尔热容量

$$C_{p,\text{mol}} = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \left(\frac{dE + pdV}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{dE}{dT} + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (11-20)$$

上式最后一个等号用到了理想气体内能只是温度的函数与压强无关的结论。

把一摩尔理想气体的状态方程 $pV = RT$ 代入 $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ 求导, 得 $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$, 连同(11-18)式一起代入(11-20), 可得:

$$C_{p,\text{mol}} = C_{V,\text{mol}} + R \quad (11-21)$$

上式亦称迈耶方程. 等压过程与等容过程相比较表明理想气体的等压摩尔热容量比等容摩尔热容量大一个恒量 R . 这是由于等容过程吸收的热量仅用于增加系统的内能, 而在等压过程中系统吸收的热量除了用于增加系统内能之外还需用于对外做功的缘故.

注意到 $C_{V,\text{mol}} = \frac{i}{2}R$, 式(11-21)可改写为

$$C_{p,\text{mol}} = \frac{i+2}{2}R \quad (11-22)$$

式中 i 是理想气体分子的自由度, 对于单原子分子 $i=3$, $C_{p,\text{mol}} = \frac{5}{2}R$; 对于刚性双原子分子(除非特别说明, 本书只讨论刚性分子), $i=5$, $C_{p,\text{mol}} = \frac{7}{2}R$.

3. 比热容比

等压摩尔热容量与等容摩尔热容量之比称为系统的比热容比, 用 γ 表示

$$\gamma = \frac{C_{p,\text{mol}}}{C_{V,\text{mol}}} \quad (11-23)$$

对于理想气体, $C_{V,\text{mol}} = \frac{i}{2}R$, $C_{p,\text{mol}} = \frac{i+2}{2}R$, 则

$$\gamma = \frac{i+2}{i} \quad (11-24)$$

由上式可以看出 $\gamma > 1$, 工程上称 γ 为绝热系数.

以上关于理想气体摩尔热容量的讨论, 只适用于常温常压下的气体. 实验表明, 在低温或高压下, 气体摩尔热容量的测量值与理论值不符, 其原因要用量子力学理论解释.

11.3 绝热过程

11.3.1 绝热过程方程

绝热过程的特点是 $dQ=0$, 所以由热力学第一定律可得

$$dE = -pdV$$

对于理想气体, 由式(11-18)可得

$$dE = C_{V,\text{mol}}dT$$

故

$$C_{V,\text{mol}}dT = -pdV$$

由一摩尔理想气体状态方程 $pV=RT$,

有

$$pdV + Vdp = RdT$$

与前式联立, 消去 dT $C_{V,\text{mol}} \frac{pdV + Vdp}{R} = -pdV$

即

$$(C_{V,\text{mol}} + R)pdV + C_{V,\text{mol}}Vdp = 0$$

由于

$$C_{V,\text{mol}} + R = C_{p,\text{mol}}, \gamma = \frac{C_{p,\text{mol}}}{C_{V,\text{mol}}}$$

所以

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

积分得

$$pV^\gamma = \text{常数} \quad (11-25)$$

这就是理想气体准静态绝热过程的过程方程. 利用理想气体状态方程, 上式还可写为

$$V^{\gamma-1}T = \text{常数} \quad (11-26)$$

$$p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{常数} \quad (11-27)$$

11.3.2 准静态绝热过程曲线

在图 11-6 中, 根据 pV^γ 常数画出了准静态绝热过程的曲线(实线), 还画出了等温过程曲线(虚线). 可以看出绝热线比等温线要陡. 计算两条曲线交叉点的斜率, 可知绝热线的斜率大于等温线的斜率.

由等温曲线方程

$$pV = \text{常数}$$

可求出
$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = -\frac{p}{V}$$

由绝热曲线方程 $pV^\gamma = \text{常数}$

可求出
$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_S = -\gamma \frac{p}{V}$$

由于 $\gamma > 1$, 所以绝热线要比等温线陡. 从物理上看, 在等温过程中, 压强的降低仅仅是体积增大所造成; 而绝热过程中, 除了体积增大是引起压强降低的原因以外, 还有温度降低也会引起压强降低, 故 Δp_S 的值要比 Δp_T 的值大.

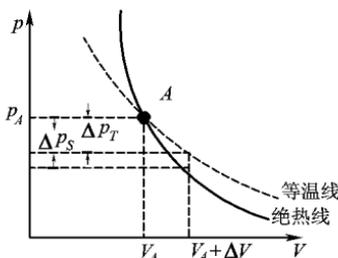


图 11-6 绝热线与等温线比较

例 11-1 分别通过下列过程把标准状态下的 0.014 千克氮气压缩为原体积的一半: (1) 等温过程; (2) 绝热过程; (3) 等压过程. 试分别求出在这些过程中气体内能的改变、传递的热量和外界对气体所做的功. 设氮气视为理想气体.

解 三个过程如图 11-7 所示.

(1) 等温过程

理想气体的内能仅是温度的函数, 等温过程温度不变, 所以

$$\Delta E = 0$$

等温过程外界对气体所做的功

$$\begin{aligned} A' &= -\int_{V_1}^{V_2} p dV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{M}{M_{\text{mol}}} \frac{RT}{V} dV \\ &= -\frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= \frac{0.014}{0.028} \times 8.31 \times 273 \times \ln \frac{1}{2} = 786 \text{ J} \end{aligned}$$

根据热力学第一定律

$$dQ = dE + dA = dE - dA'$$

有

$$Q = -A' = -786 \text{ J}$$

气体向外界放热为 786 焦耳.

(2) 绝热过程

$$Q = 0$$

绝热过程方程

$$pV^\gamma = C$$

C 为常数. 又

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

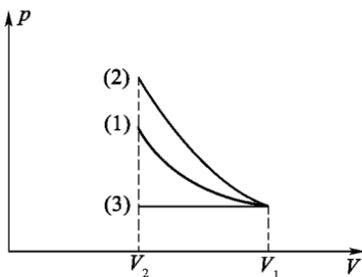


图 11-7 例 11-1 图

所以

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = 2^\gamma p_1$$

氮气为双原子分子,故

$$\gamma = \frac{C_{p,\text{mol}}}{C_{v,\text{mol}}} = \frac{7R/2}{5T/2} = 1.40$$

绝热过程外界对气体所做的功

$$\begin{aligned} A' &= - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{C}{V^\gamma} dV = -C \frac{-1}{\gamma-1} \left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma-1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} (2^{\gamma-1} - 1) = \frac{1}{\gamma-1} \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT_1 (2^{\gamma-1} - 1) \\ &= \frac{1}{1.40-1} \times \frac{0.014}{0.028} \times (8.31 \times 273) \times (2^{1.40-1} - 1) = 906 \text{ J} \end{aligned}$$

气体内能的变化

$$\Delta E = A' = 906 \text{ J}$$

(3) 等压过程

先求出终态的温度 T_2

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{T_1} &= \frac{V_2}{T_2} \\ T_2 &= T_1 \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_1/2}{V_1} T_1 = \frac{1}{2} T_1 \end{aligned}$$

对于双原子分子气体的定压摩尔热容为

$$C_p = C_v + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R$$

所以,等压过程气体吸热

$$\begin{aligned} Q_p &= \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_p (T_2 - T_1) = - \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_p \frac{1}{2} T_1 \\ &= - \frac{0.014}{0.028} \times \frac{7}{2} \times 8.31 \times \frac{1}{2} \times 273 = -1935 \text{ J} \end{aligned}$$

等压过程外界对气体所做的功

$$\begin{aligned} A' &= - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - p_1 \int_{V_1}^{V_2} dV = - p_1 (V_2 - V_1) = - p_1 \left(\frac{V_1}{2} - V_1 \right) = \frac{1}{2} p_1 V_1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT_1 = \frac{1}{2} \times \frac{0.014}{0.028} \times 8.31 \times 273 = 567 \text{ J} \end{aligned}$$

气体内能的变化

$$\Delta E = \Delta Q + A' = 567 + (-1935) = -1418 \text{ J}$$

11.4 循环过程 卡诺循环

11.4.1 循环过程

系统从一个状态出发,经过一系列的中间状态,又回到出发时的状态,称系统经历了一个循环过程.循环过程在 $p-V$ 图上是一条闭合曲线.如图 11-8 所示,系统从状态 A 出发,经过一系列中间过程又回到状态 A ,这就是一个循环过程.

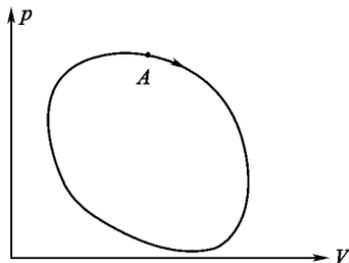


图 11-8 循环过程

若循环方向是顺时针方向,如图 11-8 所示,称为正循环;若循环方向是逆时针方向,则称为逆循环.

正循环过程代表热机的工作过程,汽油机、柴油机等热机的工作过程都可以抽象为一个正循环过程;

逆循环过程代表致冷机的工作过程,空调、冰箱等致冷机的工作过程都可以抽象为一个逆循环过程.

正循环曲线所包围的面积,就是一个循环过程中系统对外所做的净功.如图 11-9 所示,横线区域代表系统对外所做的功,竖线区域代表外界对系统所做的功.两者之差就是循环曲线所围的面积,即系统在一个循环过程中对外所做的净功.反之可以证明,一个逆循环过程曲线所包围的面积是外界对系统在一个循环中所做的净功.

衡量汽油机的性能,希望它输出功要多,消耗燃料要少.这一性能指标抽象成正循环过程的效率.定义正循环过程的效率为一个循环过程中系统对外所做的净功与吸收热量之比,即对外输出的净功占吸收热量的百分比.

正循环过程的效率用 η 表示,设系统在一个循环中从高温热源^①吸收热量

① 热源指无论吸收或放出多少热量自身温度都不变化的物体

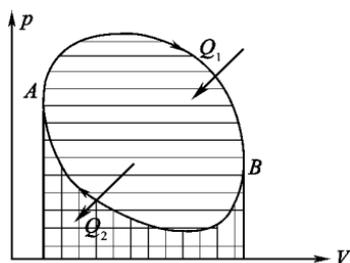


图 11-9 正循环过程示意图

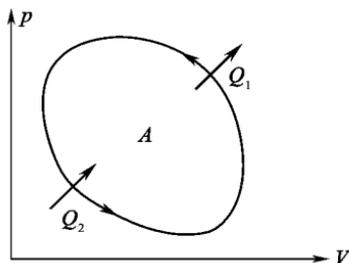


图 11-10 逆循环过程

Q_1 , 向低温热源放出热量 Q_2 , 系统对外做净功 $A_{\text{净}}$, 如图 11-9 所示, 则

$$\eta = \frac{A_{\text{净}}}{Q_1} \quad (11-28)$$

循环过程应遵守热力学第一定律: $\Delta Q = \Delta E + A_{\text{净}}$, 一个循环后, $\Delta E = 0$; 而 $\Delta Q = Q_1 - Q_2$, 所以 $A_{\text{净}} = Q_1 - Q_2$, 因此有

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (11-29)$$

这里的 Q_1, Q_2 都是指其绝对值.

衡量致冷机的性能, 希望它从低温物体吸收的热量要多, 耗电要少. 这一性能指标抽象成逆循环过程的致冷工作系数, 定义逆循环的致冷工作系数为从低温物体吸收的热量与外界对系统所做净功之比. 逆循环的致冷工作系数用 ϵ 表示, 设系统从低温热源吸收热量 Q_2 , 向高温热源放出热量 Q_1 , 外界对系统做净功 $A'_{\text{净}}$, 如图 11-10 所示, 则

$$\epsilon = \frac{Q_2}{A'_{\text{净}}} \quad (11-30)$$

逆循环过程应遵守热力学第一定律: $\Delta Q = \Delta E - A'_{\text{净}}$, 一个循环后 $\Delta E = 0$; 而 $\Delta Q = Q_2 - Q_1$, 所以, $A'_{\text{净}} = -\Delta Q = Q_1 - Q_2$, 因此有

$$\epsilon = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \quad (11-31)$$

这里的 Q_1, Q_2 都是指其绝对值.

11.4.2 卡诺循环

卡诺循环是指由两条等温线和两条绝热线组成的循环, 其正循环是对热机工作过程的一个合理的抽象. 如图 11-11 所示, $a \rightarrow b, c \rightarrow d$ 是两个等温过程; b

$\rightarrow c, d \rightarrow a$ 是两个绝热过程. T_1, T_2 分别是高温热源和低温热源的温度. 系统从高温热源 T_1 吸收热量 Q_1 , 向低温热源 T_2 放出热量 Q_2 ; 整个循环过程中系统吸收的热量为 Q_1 , 放出的热量为 Q_2 . 下面计算理想气体卡诺循环的效率.

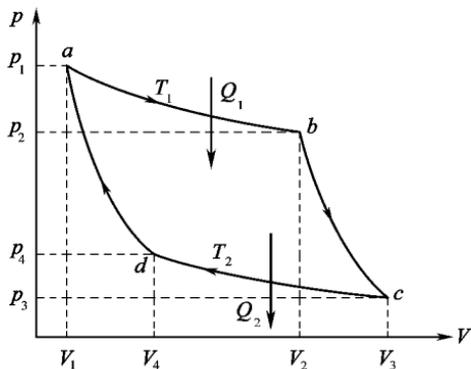


图 11-11 卡诺循环

依据循环的效率公式(11-29), 需要计算出循环过程中系统吸收的热量和放出的热量. 在卡诺循环中它们分别发生在两个等温过程中, 等温过程中热量的计算要依据热力学第一定律. 故

$$Q_1 = \Delta E_{ab} + A_{ab}$$

因为理想气体的内能只是温度的函数, 等温过程中理想气体的内能不变 $\Delta E_{ab} = 0$, 故

$$Q_1 = A_{ab} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT_1 \frac{dV}{V} = \mu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (11-32)$$

同理可得

$$Q_2 = \mu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

效率公式中的 Q_2 取绝对值, 而 $V_4 < V_3$, 所以

$$|Q_2| = \mu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (11-33)$$

卡诺循环的效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\mu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\mu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} \quad (11-34)$$

对 $b \rightarrow c$ 绝热过程应用式(11-26)

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad (11-35)$$

对 $d \rightarrow a$ 绝热过程应用式(11-26)

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \quad (11-36)$$

从(11-35), (11-36)两式可得

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \quad (11-37)$$

代入式(11-34)可得
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (11-38)$$

这就是理想气体卡诺循环的效率公式. 这个公式清晰地给出了提高热机效率的方向: 提高高温热源的温度. 虽然从公式看降低低温热源的温度也可以提高效率, 但那样做必须付出代价, 是不可行的.

对于图 11-12 所示的卡诺逆循环, 可以证明致冷工作系数为

$$\epsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (11-39)$$

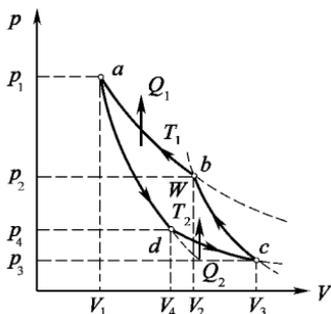


图 11-12 卡诺逆循环示意图

请读者自己证明.

例 11-2 图 11-13 为以理想气体为工作物质的热机循环, $b \rightarrow c$ 为绝热过程, 试证明其效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\frac{P_1}{P_2} - 1}$$

证 $b \rightarrow c$ 为绝热过程, 系统与外界无热量交换.

$c \rightarrow a$ 为等压放热过程, 放出的热量为:

$$Q_2 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_p (T_c - T_a) = C_p \left(\frac{p_2 V_1}{R} - \frac{p_2 V_2}{R} \right)$$

$a \rightarrow b$ 为等容升温过程, 吸收的热量

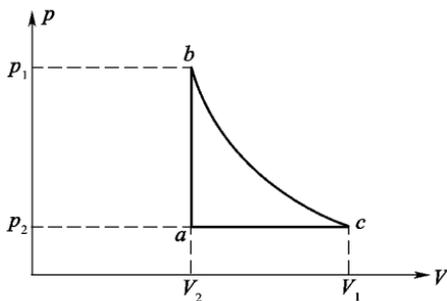


图 11-13 例 11.1 图

$$Q_1 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_b - T_a) = C_V \left(\frac{p_1 V_2}{R} - \frac{p_2 V_2}{R} \right)$$

所以:

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_p (p_2 V_1 - p_2 V_2)}{C_V (p_1 V_2 - p_2 V_2)} \\ &= 1 - \gamma \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\frac{P_1}{P_2} - 1} \quad (\text{证毕}). \end{aligned}$$

例 11-3 一卡诺循环的热机, 高温热源温度是 400 K, 每一循环从此热源中吸收热量为 100 J, 并向低温热源放出热量为 80 J. 求: (1) 低温热源温度; (2) 热机效率.

解 (1) 根据热机效率的定义和卡诺热机的效率公式, 有

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$T_2 = T_1 \frac{Q_2}{Q_1} = 400 \times \frac{80}{100} = 320 \text{ J}$$

(2) 此卡诺热机的效率

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{320}{400} = 20\%$$

11.5 热力学第二定律

11.5.1 可逆过程与不可逆过程

生活经验和实验表明,热力学过程都是按一定的方向进行的,反方向的热力学过程是不可能自动发生的.例如,热量可以从高温物体传到低温物体,但是热量不可能自动地从低温物体传到高温物体.为了描述过程的方向性,引入可逆过程和不可逆过程的概念.

系统由状态 I 经过程 P 到达状态 II,如果系统在从状态 II 返回状态 I 的同时,使外界也恢复原状,不留下任何其他影响,则称过程 P 为可逆过程.这里,“不留下任何其他影响”是一个泛指.例如,系统从状态 I 到状态 II 的过程中对外所做的功,与系统从状态 II 返回状态 I 时外界对系统所做的功不能恰好相等,则称为给外界留下了“影响”.系统从状态 I 到状态 II 的过程中吸收的热量,与系统从状态 II 返回到状态 I 时所放出的热量不能正好抵消,也称为给外界留下了“影响”.

可逆过程只是一个理想概念,绝对的可逆过程是不存在的.但是,有些实际过程可以近似地认为是可逆过程.无摩擦的准静态过程就可以认为是可逆过程.可逆过程是热学中的一个极其重要的概念,由于它的引入可使一些问题的讨论简单化,也为许多重要的概念和理论的引入及定量表达打下基础,具有重要的理论和实际意义.

反之,系统由状态 I 经过程 P 到达状态 II 后,无论采用什么方法,都不能使系统在从状态 II 返回状态 I 的同时使外界恢复原状,不留下任何其他影响,则称 P 过程为不可逆过程.例如,气体的自由膨胀过程如图 11-14 所示.容器用隔板分为两部分,初始状态是一边盛有气体,一边为真空;抽去隔板后,气体向真空膨胀(不做功,称自由膨胀),末状态为气体均匀分布在整个容器.如果要使气体返回到初始状态(一边盛气体一边为真空),外界不做功是不可能的.而一旦外界做功,即留下了“其他影响”,因为气体自由膨胀时没有对外界做功.



图 11-14 气体向真空自由膨胀

11.5.2 热力学第二定律的表述

热力学第二定律有两种传统的表述,即开尔文表述和克劳修斯表述,最初是在研究热机效率的过程中提出来的.

1. 开尔文表述

不可能从单一热源吸热使之完全变为有用功而不产生任何其他影响.

这里的“其他影响”是指系统吸热转变为功以外的任何其他变化,这是很强的限制条件.例如,气体等温膨胀推动活塞无摩擦地移动可以使吸收的热量完全变为有用功,但是它自身的体积发生了变化,从而留下了其他影响,如图 11-15 所示.

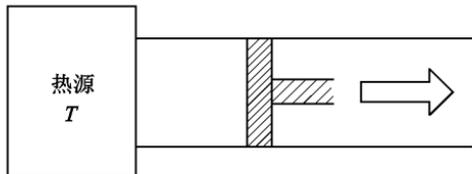


图 11-15 气体等温膨胀

从单一热源吸热使之完全变为有用功的机器称为第二类永动机(也称单热源机),它的效率为 100%,不违背热力学第一定律,但违背了热力学第二定律,是不可能制造的.所以开尔文表述有时也称为第二类永动机是不可能制造的.

2. 克劳修斯表述

热量不可能自动地从低温热源传到高温热源而不产生任何其他影响.

致冷循环(逆循环)从低温热源吸热传到高温热源,在这一热量传输过程中必须有外界做功(产生了其他影响),否则这一传输过程是不可能实现的.

11.5.3 热力学第二定律的实质

热力学第二定律的两种表述看起来毫不相干,实际上应用逻辑学的证明方法可以证明这两种表述是完全等价的^①.既然两种表述是等价的,就说明两种表述必然包含同一本质性内容.

^① 参见汪志诚著《热力学统计物理》第 40 页.

热量从高温热源传到低温热源,即热传导,可以自发地进行.克劳修斯指出其逆过程,热量从低温热源传到高温热源却不能自发进行,一定要外界干预,从而给外界留下影响.这就是说热传导过程是不可逆过程;功可以完全转变为热量(例如摩擦生热),开尔文指出其逆过程,热量完全转变为功,在不产生其他影响的前提下是不可能实现的.这就是说功变热是不可逆过程.进一步研究表明,自然界一切不可逆过程都是相互关联的,从一种不可逆过程可以推导出另一不可逆过程的不可逆性.所以,热力学第二定律的实质是自然界一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆过程.

11.5.4 热力学第二定律的理解

一切与热现象有关的实际宏观过程的不可逆性如何理解呢?下面以气体的自由膨胀为例说明不可逆性的统计意义.

容器用隔板分为Ⅰ和Ⅱ两部分,初始时Ⅰ部盛有气体,Ⅱ部为真空.抽去隔板后气体向真空自由膨胀,最后充满整个容器并到达平衡态.如果没有外界做功,气体不可能自动全部返回到Ⅰ部,使Ⅱ部再次成为真空,如图11-14所示.也就是说气体的自由膨胀是不可逆过程.下面从统计的观点来分析这种不可逆性.

如果初始时Ⅰ部只有一个分子,Ⅱ部为真空,当抽去隔板后,这个分子的活动空间为整个容器,因此这个分子可以自动返回到Ⅰ部,使Ⅱ部再次成为真空,并且它处于Ⅰ部和Ⅱ部的机会应该是均等的,故它返回到Ⅰ部的可能性是 $1/2$,如图11-16所示.

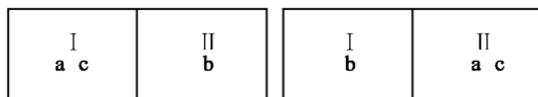
如果初始时Ⅰ部有两个分子,抽隔板后分子可能的分布如图11-16所示有四种可能性,这四种可能的分布应该机会均等,故两个分子都返回到Ⅰ部的可能性是 $1/4$;如果初始时Ⅰ部有三个分子,抽隔板后分子可能的分布如图11-16所示有八种可能性,这八种可能的分布应该机会均等,故三个分子都返回到Ⅰ部的可能性是 $1/8$;不难发现: $(1/2)^1=1/2$, $(1/2)^2=1/4$, $(1/2)^3=1/8$ ……即自由膨胀后自动返回到Ⅰ部的可能性以分子数目为指数变化,对于 1 mol 气体,自由膨胀后自动返回到Ⅰ部的可能性为 $(1/2)^{6.02 \times 10^{23}} \approx 1/10^{2 \times 10^{23}}$.如果自由膨胀后自动返回到Ⅰ部维持 10^{-5} 秒,则自由膨胀后经过 $10^{2 \times 10^{23}}$ 秒才会发生一次,这个时间比宇宙的年龄 2×10^{18} 秒(200亿年)要大得多.实际上根本不可能观察到气体自由膨胀后又自动返回到Ⅰ部的现象.这就是气体自由膨胀过程不可逆性的统计解释.



1 个分子时返回 I 的可能性为 $(1/2)^1 = 1/2$



2 个分子时返回 I 的可能性为 $(1/2)^2 = 1/4$



3 个分子时返回 I 的可能性为 $(1/2)^3 = 1/8$

图 11-16 气体自由膨胀不可逆性的统计意义

11.6 卡诺定理 克劳修斯熵

11.6.1 卡诺定理

热机的循环过程为可逆循环, 则称该热机为可逆热机; 致冷机的循环过程为可逆循环, 则称该致冷机为可逆致冷机; 否则为不可逆热机和不可逆致冷机。

在研究如何提高热机的效率的过程中,卡诺提出并证明^①了关于热机效率的卡诺定理.内容如下:

(1)工作在相同高温热源和相同的低温热源之间的一切可逆机,其效率相等,与工作物质无关.即

$$\eta_{\text{可逆}} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (11-40)$$

(2)在相同高温热源和相同低温热源之间工作的一切不可逆热机,其效率不可能大于可逆热机的效率.即

$$\eta_{\text{不可逆}} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (11-41)$$

式(11-40)后一个等号,是根据可逆卡诺热机的效率公式得出.

11.6.2 克劳修斯等式不等式

克劳修斯在卡诺定理的基础上进一步研究,建立了克劳修斯等式不等式.用 η 表示可逆热机和不可逆热机的效率,综合卡诺定理(1),(2)两条,有

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

其中等号对应于可逆机,不等号对应于不可逆机.上式可改写为

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

在效率表达式中, Q_2 取的是绝对值.采用热力学第一定律中热量的符号规定,即放出热量为负,由于 Q_2 是系统向外界放热,故 $|Q_2| = -Q_2$,则前式可写为

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad (11-42)$$

这是卡诺循环(只有两个热源)的克劳修斯等式不等式.可以证明^②,对于任意循环过程,有

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (11-43)$$

式(11-43)就是克劳修斯等式不等式,其中等号对应于可逆循环过程,不等号对应于不可逆循环过程.

① 卡诺本人的证明有缺陷,严格的证明参见汪志诚《热力学统计物理》第43页.

② 证明参见汪志诚《热力学统计物理》第48页.

11.6.3 熵

如图 11-17 所示可逆循环应满足克劳修斯等式

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

如图所示,环路积分可分成两段积分

$$\int_{\text{I}}^B \frac{dQ}{T} + \int_{\text{II}}^A \frac{dQ}{T} = 0$$

即
$$\int_{\text{I}}^B \frac{dQ}{T} = - \int_{\text{II}}^A \frac{dQ}{T}$$

亦即
$$\int_{\text{I}}^B \frac{dQ}{T} = \int_{\text{II}}^B \frac{dQ}{T}$$

注意到路径 I 和路径 II 是两个不同的可逆路径,

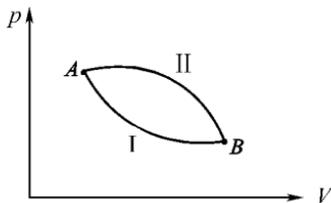


图 11-17 可逆循环

上式表明,初态和末态确定后,热温比 $\frac{dQ}{T}$ 的积分的值只与初态和末态的状态有关,与具体的可逆路径无关. 克劳修斯引入态函数熵,用 S 表示

$$S_B - S_A = \int_{\text{可逆}}^B \frac{dQ}{T} \quad (11-44)$$

上式中 A 和 B 是系统的两个平衡态,积分沿由 A 到 B 的任意可逆路径进行. 显然,式(11-44)只给出了两个状态的熵函数的差值,熵函数可以有任意的相加常数. 由于系统吸收的热量与系统的质量成正比,故式(11-44)定义的熵函数是一个广延量,即系统的熵变等于各子系统的熵变之和,全过程的熵变等于各子过程的熵变之和. 由定义式可以看出,熵的单位是 $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$,即焦耳每开尔文.

特别要注意的是,积分 $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ 的值仅仅对于可逆过程才与路径无关. 如果系统经不可逆过程由平衡态 A 到平衡态 B , B, A 两态的熵差仍然要由 A 到 B 的一个可逆过程的积分来定义和计算. 这个可逆过程所引起的系统的状态变化虽然相同,但外界的变化是不相同的.

由式(11-44),对一个微小过程有

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (11-45)$$

11.6.4 热力学第二定律的数学表达式

如图 11-18 所示的不可逆循环由可逆路径 II 和不可逆路径 I 组成(不可逆路径在 $p-V$ 图上用虚线表示,以示与可逆路径的区别). 不可逆循环应满足克劳修斯不等式

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0$$

即

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_{II}^A \frac{dQ}{T} < 0$$

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} < - \int_{II}^A \frac{dQ}{T}$$

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} < \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

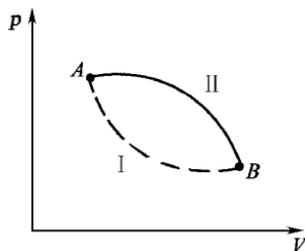


图 11-18 不可逆循环

由于路径 II 是可逆路径,故 $\int_{II}^B \frac{dQ}{T} = S_B - S_A$, 注意到路径 I 是不可逆的,有

$$\int_{\text{不可逆}}^B \frac{dQ}{T} < S_B - S_A \quad (11-46)$$

综合对应于可逆路径的式(11-44)和对应于不可逆路径的式(11-46)两式,可得

$$S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (11-47)$$

对于一个微小过程

$$dS \geq \frac{dQ}{T} \quad (11-48)$$

式(11-47)和式(11-48)中,等号对应于可逆过程,不等号对应于不可逆过程.

式(11-47)和式(11-48)给出了热力学第二定律对过程方向的限制,违反这两个不等式的过程是不可能发生的. 它们分别是热力学第二定律的积分表达式和微分表达式.

11.6.5 熵增加原理

对于孤立系统或者系统经绝热过程以后, $dQ=0$, 所以

$$dS \geq 0 \quad (11-49)$$

也就是说,对孤立系统而言,或者系统经绝热过程以后,系统的熵永不减少.可逆过程以后熵不变,不可逆过程以后熵增加,平衡态对应于熵最大的状态.这称为熵增加原理.

值得注意的是,系统的熵永不减少的前提是孤立系统内或者系统经绝热过程以后,否则,熵是可以减少的.但这并不意味着熵增加原理的应用范围有限,实际上任何一个热力学过程,只要把过程所涉及的物体都作为系统的一部分,那么这个系统对该过程就是一个孤立系统.所以,在实际问题中可以广泛应用熵增加原理来判断过程演化的方向.

熵增加原理指出了自然界过程演化的方向,是最重要的自然规律之一.熵的概念突破了物理学和自然科学的界限,进入了信息、生物、经济和社会学等领域,得到广泛应用.

熵增加原理是比能量守恒定律更重要的自然规律.它指出了自然过程的方向,而能量守恒只是在自然过程按照熵增加原理指出的方向演化时所遵守的规律.

例 11-4 设 1 kg 的水在标准状态下的熵为零.若气压不变,求:(1)水的温度升为 100 °C 时,熵是多少?(2)全部变为 100 °C 的蒸气时,熵是多少?(3)全部变为 0 °C 下的冰,熵是多少?(4)由 0 °C 下的冰变为 100 °C 的蒸气,熵的改变是多少?水的比热 $C_p = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; 汽化热为 $L_v = 539 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; 凝固热为 $L_m = 80 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

解 标准状态下,温度为 0 °C = 273.15 K \approx 273 K, 压强为 101325 Pa.

(1) 从 $T_1 = 273 \text{ K}$ 的水,等压升温到 $T_2 = 373 \text{ K}$ 的水,是不可逆过程.若控制外界热源的温度,使水无限缓慢地升温,就是构成了一个可逆过程,对此可逆过程

$$\begin{aligned} \Delta S_{21} &= S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{MC_p}{T} dT = MC_p \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= 1000 \times 1.0 \times \ln \frac{373}{273} = 312 \text{ cal} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

因为规定 $S_1 = 0$, 所以

$$S_2 = 312 \text{ cal} \cdot \text{K}^{-1}$$

(2) 用稍高于 100 °C 的热源,无限缓慢地给 100 °C 的水加热,使之变为蒸气,这样就构成了一个可逆等温过程,于是

$$\begin{aligned} \Delta S_{32} &= S_3 - S_2 = \int_2^3 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_2} \int_2^3 dQ = \frac{Q}{T_2} = \frac{ML_v}{T_2} \\ &= \frac{1000 \times 539}{373} = 1445 \text{ cal} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

因为规定 $S_1 = 0$, 所以

$$S_3 = S_2 + \Delta S_{32} = 312 + 1445 = 1757 \text{ cal} \cdot \text{K}^{-1}$$

(3) 用稍低于 0 °C 的热源,无限缓慢地从 0 °C 的水吸热,使之变为冰,这样就构成了一个

可逆等温过程, 于是

$$\begin{aligned}\Delta S_{41} &= S_4 - S_1 = \int_1^4 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_1} \int_1^4 dQ = \frac{Q}{T_1} = \frac{-Ml_m}{T_2} \\ &= \frac{-1000 \times 80}{273} = -293 \text{ cal} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

因为规定 $S_1 = 0$, 所以

$$S_4 = -293 \text{ cal} \cdot \text{K}^{-1}$$

(4) 由 0°C 下的冰变为 100°C 的蒸气, 熵的改变是

$$\Delta S = S_3 - S_4 = 1757 - (-293) = 2050 \text{ cal} \cdot \text{K}^{-1}$$

例 11-4 8 g 氧气从状态 1 ($V_1 = 0.1 \text{ m}^3$, $T_1 = 353 \text{ K}$) 过渡到状态 2 ($V_2 = 0.4 \text{ m}^3$, $T_2 = 575 \text{ K}$), 求熵变. 设氧气可视为理想气体.

解 由于熵是态函数, 如果能求出熵变的态函数表达式, 代入初态和末态的数据也可求出熵变.

氧气为双原子分子, 定压摩尔热容为 $C_V = \frac{5}{2}R$, 先求出熵变的态函数表达式

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

由热力学第一定律

$$dQ = dU + p dV = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V dT + p dV$$

由理想气体状态方程可得

$$p = \frac{1}{V} \frac{M}{M_{\text{mol}}} RT$$

因而可得

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{M}{M_{\text{mol}}} R \frac{dV}{V} = \frac{M}{M_{\text{mol}}} (C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1})$$

代入数据, 得

$$S_2 - S_1 = \frac{0.008}{0.032} \left(\frac{5}{2} \times 8.31 \times \ln \frac{575}{353} + 8.31 \ln \frac{0.4}{0.1} \right) = 5.4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

11.7 热力学第二定律的统计意义 玻耳兹曼熵

11.7.1 热力学概率

本书不对热力学概率做一般性讨论, 仅以气体分子在容器内的位置分布为

例,说明相关概念.

1. 宏观态与微观态

设容器内气体系统由四个气体分子(a, b, c, d)组成,把容器空间划分为两个大小相等的区域,分别称为 I 部和 II 部. I 部和 II 部各自容纳的分子数目的可能分配如下表.

I 部	4	3	2	1	0
II 部	0	1	2	3	4

每一种可能的分配称为系统的一个宏观态,即

	宏观态 1	宏观态 2	宏观态 3	宏观态 4	宏观态 5
I 部	4	3	2	1	0
II 部	0	1	2	3	4

气体系统处于平衡态时,气体分子在空间如何分布?或者说处于哪一个宏观态呢?

为弄清这个问题,进一步考察,对每一宏观态,处于 I 部或 II 部的分子究竟是哪几个分子?以宏观态 2 为例, I 部分子数目为 3, II 部分子数目为 1,具体分子的可能分配如下表.

I 部	abc	bcd	acd	abd
II 部	d	a	b	c

每一种可能的分配称为一个微观态,即

	微观态 1	微观态 2	微观态 3	微观态 4
I 部	abc	bcd	acd	abd
II 部	d	a	b	c

也就是说,宏观态 2 包含四个可能的微观态. 显然,其他宏观态也包含不同的微观态数. 微观状态数用 Ω 表示,本例中宏观状态 2 所包含的微观状态数 $\Omega=4$. 不难推出,其他各宏观态所包含的微观状态数目如下表.

	宏观态 1	宏观态 2	宏观态 3	宏观态 4	宏观态 5
Ω	1	4	6	4	1

2. 等概率假设

上例中气体系统的 5 个宏观态都有实现的可能,每个宏观态都包含几个不同的微观态,这些微观态也都有实现的可能,每一微观态出现的概率将决定宏观态实现的概率,一个微观态实现的概率是多少?这个问题不能从理论上解决,一个合理的作法是让系统的每一个可能的微观态实现的概率相等. 这种作法称为等概率假设.

3. 热力学概率

根据等概率假设,一个宏观态所包含的微观状态数越多,它实现的概率就越大. 统计物理中定义,宏观态所对应的微观状态的数目 Ω 称为热力学概率.

11.7.2 热力学第二定律的统计意义

热力学第二定律的实质是一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆的. 下面用热力学概率来说明这种不可逆性,仍然用气体自由膨胀为例. 假设容器用隔板分为两部分, I 部盛有气体系统, II 部为真空. 抽去隔板后,气体向真空膨胀,其活动空间为整个容器. 这种自由膨胀是不可逆的,气体分子不可能自动全部返回 I 部,使 II 部成为真空. 热力学概率是如何解释这一现象的呢? 假设气体系统由四个分子组成,气体全部返回到 I 部,使 II 部成为真空,用宏观态来描述就是实现 11.7.1 中讨论的宏观态 1,宏观态 1 所对应的微观状态数为 1,所有可能的微观状态数为 16(各宏观态对应的微观态的数目相加),因此宏观态 1 实现的概率为 $1/16=(1/2)^4$,其中 4 是系统内分子的数目. 对 1 mol 气体来说,要实现宏观态 1 的概率就是 $(1/2)^{6.02 \times 10^{23}}$,因此实现的可能性几乎为零.

在 11.7.1 节所举的例子中,宏观态 3 所对应的微观态的数目为 6,是微观

状态数目最多的宏观态. 宏观态 3 所对应的分布是均匀分布, 两部分各有两个分子, 是最稳定的分布. 宏观态 3 实现的概率为 $6/16=3/8$ 也是最大的. 而宏观态 1 实现的概率为 $1/16$, 是最小的. 这表明, 孤立系统内的热力学过程总是由热力学概率小的状态向热力学概率大的状态发展. 这就是热力学第二定律的统计意义.

宏观态对应的微观态数目小, 对宏观态的全部情况容易弄清, 称之为无序程度小. 宏观态对应的微观态数目大, 相对而言, 对宏观态的全部情况不太容易弄清, 称之为无序程度大. 也就是说, 宏观态所对应的微观状态数表征宏观状态的无序程度. 因此, 孤立系统内热力学过程由热力学概率小的状态向热力学概率大的状态发展, 就是由无序程度小的状态向无序程度大的状态发展. 所以, 热力学第二定律还可以这样理解: 孤立系统内热力学过程总是由无序程度小的状态向无序程度大的状态发展.

11.7.3 玻耳兹曼熵

从前面的讨论中可以发现, 用熵(克劳修斯熵)来描述, 孤立系统内的热力学过程总是朝着熵增大的方向进行; 用热力学概率描述, 孤立系统内的热力学过程总是朝着热力学概率增大的方向进行. 可见, 熵与热力学概率之间有着某种必然的联系. 玻耳兹曼研究了这一问题, 得出用宏观过程定义的熵(克劳修斯熵)与宏观态所对应的微观状态数之间的关系为

$$S = k \ln \Omega \quad (11-50)$$

式中 k 就是玻耳兹曼常数, Ω 是微观状态数. 这个关系式称为玻耳兹曼关系. 用式(11-50)定义的熵称为玻耳兹曼熵.

由于微观状态数表征系统状态的无序程度, 由表达式(11-50)可以看出, 熵是系统状态无序程度的量度.

11.8 熵与信息 耗散结构简介

熵的概念突破了物理学和自然科学的界限, 进入了信息、生物、经济和社会学等领域, 得到广泛应用. 本节简单介绍熵与信息的关系、信息熵以及耗散结构.

11.8.1 熵与信息

1. 信息

很难给信息下一个准确的定义. 通常所谓的信息包括语言、符号、图像、声音、数据等可传递和交换的内容, 还包括人的感觉器官能感觉的一切. 维纳(N. Wiener)说:“信息就是我们适应外部世界和控制外部世界过程中, 同外部世界进行交换的内容的名称.”

信息的价值很难准确评价. 所以信息论这门学科不讨论信息的具体内容, 专门研究信息的数量和信息的转换、存储、传输所遵循的规律.

2. 麦克斯韦妖的启示

19世纪60年代和70年代, 麦克斯韦曾讨论过这样的问题. 在一个体积不变的绝热容器中, 盛有温度和压强处处恒定的气体. 容器被分为A, B两部分, 中间隔板上装有极其灵巧的阀门, 启闭阀门的功可以忽略. 一个小精灵(开尔文称之为麦克斯韦妖)能敏锐地观察到分子的轨迹和速度, 操纵阀门, 只让速度快的分子由A进入B, 速度慢的分子由B进入A. 于是, A的温度将会升高, B的温度会降低. 热力学第二定律遭到了破坏. 这个问题的讨论不仅可以澄清对热力学第二定律的理解, 更重要的是通过对麦克斯韦妖作用的分析, 揭示了熵与信息之间的关系, 确立了信息熵在信息论中的地位.

对于麦克斯韦妖的作用, 众多科学家作了许多精辟的分析. 其中, 匈牙利科学家西拉德(L. Szilard)于1929年指出, 麦克斯韦妖能正常工作的关键在于, 它对气体分子的位置拥有记忆、存储和运行信息的能力(即麦克斯韦妖拥有获得信息、存储信息和运行信息的能力). 获得分子位置的信息, 并运行信息对阀门进行及时精确的操作, 固然能使系统变得有序, 得到负熵. 但是, 建立记忆和熵的产生是不可分割地联系在一起. 于是, 西拉德首先指出了熵与信息之间的关系, 扩展了熵的内涵和它的应用范围.

众多科学家的讨论表明, 麦克斯韦妖的作用并不可能破坏热力学第二定律, 系统的熵还是要增加的. 讨论的意外收获, 就是使得人们认识了熵与信息之间的联系.

3. 信息量

信息有多种载体: 语言文字、声音图像、数学公式、图表……要对不同载体所表达信息的数量进行比较是很困难的. 但是信息的获得是与事件的不确定度的

减少相联系的。信息论创始人香农说：“信息是能够协助信息接收者消除事件不确定度的因素。”比如从一付扑克中抽出一张面朝下，则只知它是 54 张中的任一张；若告知它是红色的，则可知它是 27 张中任一张；若告知它是“5”，则可知它是两张中的一张；若又告知它是红心，则其答案是惟一的——红心 5。这个例子清楚地说明了信息获得越多，不确定度越小，当获得足够信息时，不确定度为零。

通常事物有多种可能性，其中最简单的是两种可能性，例如“是与否”，“有与无”，“黑与白”等等。现代计算机采用二进制，其数据每一位不是“0”就是“1”，也是两种可能性。1948 年，香农从仅有两种可能性的等概率出发给出信息量的定义，把从两种可能性作出判断所需要的信息量称为 1 比特(bit)，并把 bit 作为信息量的单位。

通常实际问题有多种可能，例如一事件可能有 X_1, X_2, \dots, X_N 种结果，每一种结果出现的概率为 $P_i = P(X_i), i=1, 2, 3, \dots, N$ ；则信息量的定义为

$$I = - \sum_{i=1}^N P_i \log_2 P_i \quad (11-51)$$

对于等概率事件， $P_i = \frac{1}{N}, i=1, 2, 3, \dots, N$ ，则

$$I = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} = - \log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N \quad (11-52)$$

上式为计算信息量的公式。

当得到信息量 ΔI 后，可供选择的等概率事件的不确定度由 N 减为 M ，则这时的信息量从 I 减为 I' ， $I' = \log_2 M$ 。即：

$$\Delta I = I - I' = \log_2 N - \log_2 M \quad (11-53)$$

4. 信息熵

不难发现，信息量的定义式(11-52)： $I = \log_2 N$ ，与玻耳兹曼熵 $S = k \ln \Omega$ 十分类似。实际上，由于熵是系统的无序程度，也就是混乱程度，而获取信息却使系统的不确定度减少，即减少系统的熵。所以，熵的概念可以引进信息论，信息论中定义信息熵为

$$S = -K \sum_{i=1}^N P_i \ln P_i \quad (11-54)$$

对于等概率事件， $P_i = \frac{1}{N}, i=1, 2, 3, \dots, N$ ，则上式可写为

$$S = -K \sum_{i=1}^N P_i \ln P_i = K \ln N \quad (11-55)$$

比较式(11-51) $I = -\sum_{i=1}^N P_i \log_2 P_i$ 与式(11-54) $S = -K \sum_{i=1}^N P_i \ln P_i$, 两者的不同仅在对数的底上, 前者为 2 后者为 e, 因而差一常数 K, 显然 $K = \frac{1}{\ln 2} = 1.443$.

可以证明

$$\Delta I = -\Delta S \quad (11-56)$$

信息量欠缺 = 负熵(熵的减少)

5. 信息熵与热力学熵的关系

麦克斯韦妖要获取信息, 就必须消耗能量. 利用玻尔兹曼关系 $S = k \ln \Omega$, 可建立信息与能量之间的内在联系: 在 N 个等概率状态的物理系统中, 若输入能量为 Q , 则所对应的信息熵的变化为

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = k \ln N \quad (11-57)$$

式中 k 为玻尔兹曼常量, T 为绝对温度.

若系统仅有两种等概率状态, 即 $N=2$, 则 $\Delta S = k \ln 2$; 根据信息熵的单位 bit 的定义, 可知它等于 1 bit. 故

$$1 \text{ bit} = k \ln 2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = 0.957 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (11-58)$$

上式表示信息熵与热力学熵之间的转换关系, 有重要的物理意义. 例如, 要使计算机内存储的信息量增加 1 bit, 它的热力学熵需减少 $k \ln 2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, 而这种减少只能以周围环境至少增加相同数值的熵为代价. 即在温度为 T 时, 计算机至少消耗 $k \ln 2 \text{ J}$ 的能量. 这是计算机能量消耗的理论下限.

11.8.2 耗散结构简介

1. 热寂说及其批判

热力学第二定律指出, 孤立系统总是从有序趋向无序的, 最终达到最无序的平衡态. 在绝大多数热学系统中, 看到的就是这种从非平衡到平衡、从有序到无序的发展过程. 把这种从有序到无序的发展过程推广到整个宇宙, 整个宇宙最终将变为最无序的平衡态, 到那时除了分子热运动, 整个宇宙不会再有宏观差别和宏观运动, 这无异于“宇宙死亡”. 这就是所谓的“热寂说”.

“热寂说”一出世就受到哲学家和物理学家的批判. 一些物理学家指出, 热力学第二定律是在有限空间得出的规律, 推广到无限的宇宙是不合适的. 对“宇宙死亡”本能的排斥使得人们努力寻求更有说服力的批判“热寂说”的论据. 实际

上,在生物系统和社会系统中,大量存在着与“从有序到无序”截然相反的从无序到有序、从低级到高级演化过程.但是,长期以来,人们认为生命现象、社会现象和非生命现象是由不同的规律支配的.物理学家、化学家和生物学家、社会学家和平共处,各自立论,形成了两个关于发展的截然不同的观点.直到在非生命的物理过程和化学反应中也发现了这种从无序到有序的转化(最初的发现者受到嘲笑),并且类似的事例越来越多,促使人们想到生命世界和非生命世界的这两类现象可能遵循相同的规律.人们定义这种系统从无序转化到有序而使大量分子按一定规律运动的现象叫做自组织现象.在生命世界和非生命世界都大量存在着自组织现象.许多科学家对自组织现象进行了理论研究,哈肯把激光发射过程与生物过程类比,创立了协同论;普里高津把物理过程和生物过程中的自组织现象结合起来研究,提出了耗散结构理论,并对耗散结构进行了深入的研究,得出了“涨落导致有序”的论断.人们逐渐消除了对“宇宙死亡”的恐惧.

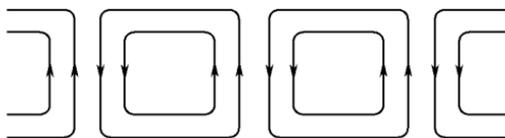
2. 自组织现象

生物是一个高度有序的系统,不仅空间有序而且时间有序.各种生物都是由各种细胞按精确的规律组成的,人的大脑由约 150 亿个神经细胞精密有序地组成.每个生物细胞还有奇特的有序的结构,它至少有一个 DNA(脱氧核糖核酸)或 RNA(核糖核酸)这样的长链分子.一个 DNA 分子由 10^8 到 10^{10} 个原子组成.这些原子构成四种不同的核甙酸碱基,这些核甙酸碱基组成两条螺旋状的长链,两条长链上的四种不同的核甙酸碱基组成两种核甙酸碱基对,其数目可达 10^6 到 10^{10} 对.这些核甙酸碱基对按严格的次序排列着.一个生物的全部遗传信息都编码在这些核甙酸碱基对排列的次序中,这是何等有序的结构啊!然而,这种极其有序的结构竟来源于生物的食物中那些混乱无序的原子.

生命过程的时间有序表现在随时间做周期性变化的振荡行为.糖酵解反应是为生命提供能量的过程,反应的中间产物(以及某些酶)的浓度会随时间振荡(做周期性变化),这是分子水平的周期性行为;至于生物体,北方候鸟冬去春来、中华鲟每年秋季到长江上游产卵,幼鱼返回到长江下游生活等等.类似例子举不胜举.

非生命世界中也广泛存在着自组织现象,贝纳德(Benard)对流是物理实验中发现的一个典型的自组织现象.在圆盘中放置一层流体,上下各与一很大的恒温热源板接触.两板的距离远小于圆盘的半径.当下层的恒温热源板的温度 T_1 高于上层的恒温热源板的温度 T_2 时,热量不断地通过液体从下板流向上板.只要温度差 $\Delta T = T_1 - T_2$ 不大,整个液体会保持静止,液体处于非平衡的定态.加大温差,就把液体推向远离平衡的状态.当温差超过某临界值 ΔT_c 时,液体的静止热传导状态就会被突然打破,形成对流状态,如图 11-19 所示.在热传导状态

下,液体分子通过无规则碰撞传递能量,而在对流状态下,大量分子被组织起来参加统一的运动,热量通过这种宏观对流得到更有效地传递,是宏观有序的动态结构.



— 贝纳德对流示意图 箭头方向表示液体宏观流动方向

物理过程中时间有序的典型例子就是激光.当输入功率小于某一临界值时,激光器发出的光与普通光源发出的光一样,发光物质的各原子各自独立地发光,每次发光持续 10^{-8} 秒,波列的长度只有 3 厘米.当输入功率大于某一临界值时,出现了全新的景象,各原子不再独立地互不相关地发射光波了,所有原子集体一致地行动,发出频率、振动方向都相同的相干光波.其光波波列长度可达 30 万公里,这就是激光.发射激光时,发光物质的原子处于一种非常有序的状态,它们不断进行着自组织过程.

耗散结构和协同论采用不同的方法对自组织现象进行了研究,得到了许多有价值的结果.前者偏重用热力学方法进行分析,后者偏重用统计原理进行讨论.下面简单介绍耗散结构理论.

3. 耗散结构

自组织现象都是发生在非孤立系统(封闭或开放系统)内,为了维持自组织现象,系统必须与外界不断地交换物质和能量,所以普里高津称之为耗散结构.

对于非孤立系统,熵变由两部分组成,一部分是系统内的不可逆过程引起的,叫做熵产生,用 dS_i 表示;另一部分是由于系统和外界交换物质和能量引起的,叫做熵流,用 dS_e 表示.整个系统的熵变 $dS = dS_i + dS_e$;系统的熵产生总是正的: $dS_i \geq 0$;对于孤立系统, $dS_e = 0$;所以, $dS = dS_i \geq 0$,这就是熵增加原理的表达式.但是,非孤立系统的熵流 dS_e 视外界作用的不同可以有不同的符号.如果 $dS_e < 0$,且 $|dS_e| > dS_i$,则 $dS = dS_i + dS_e < 0$.表示经过这样的过程,系统的熵会减少,系统就由原来的状态进入更有序的状态.也就是说,非孤立系统存在着从无序到有序转化的可能.

非孤立系统是形成耗散结构的必要条件.然而,虽然日常接触的大多是非孤立系统,但发现耗散结构的例子并不普遍.这是因为日常接触的非孤立系统大多数处于偏离平衡态较小的接近平衡态的状态,这种对平衡态的偏离是外界的影响.

响在系统内部所引起的线性不可逆反应,所以称为线性非平衡态.对它的研究也称为线性非平衡态热力学,线性非平衡态热力学的一个重要原理就是普里高津提出的最小熵原理.根据最小熵原理可以证明,在线性非平衡态,任何有序结构最终仍将消失.也就是说,在偏离平衡态较小的线性区域,自发过程仍是趋于破坏任何有序而增加无序,自组织现象不可能发生.所以,要产生自组织现象,必须使系统远离平衡态.

远离平衡态的状态是指外界对系统的影响与系统内部引起的响应不成线性关系的状态,对它的研究也称为非线性非平衡态热力学.它的理论指出,当系统远离平衡态时,它们可以发展到某个不随时间改变的定态.此时,熵不再具有极值行为,最小熵原理失效,系统的稳定性不能再根据它们来判断.过程发展的方向不能依靠纯粹热力学方法来确定,必须同时研究系统详细的动力学行为,研究结果如图 11-20 所示.图中横坐标 λ 是外界对系统的控制参数,表示外界对系统影响的程度和系统偏离平衡态的程度;纵坐标 x 是表征系统定态的某个参数,不同的 x 值表示不同的定态.与 λ_0 对应的 x_0 表示平衡态,随着 λ 偏离 λ_0 , x 偏离平衡态.在 λ 偏离 λ_0 较小时,系统的状态类似平衡态且具有稳定性.表示这种定态的点形成线段(a),它是平衡态延伸,称作热力学分支.

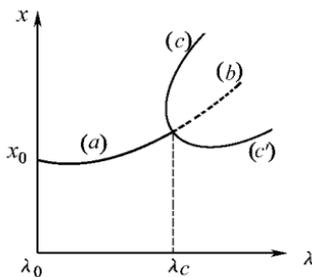


图 11-20 分支现象

当 $\lambda \geq \lambda_c$ 时(相当于贝纳德对流中温度差超过某临界值 ΔT_c 时),曲线(a)的延续(b)上各非平衡定态变得不稳定,一个很小的扰动就可引起系统的突变,离开热力学分支而跃迁到另外两个稳定的分支(c)或(c')上.(c)或(c')上的每一个点可能对应于某种时空有序状态.由于这种有序状态是在不可逆的耗散过程足够强烈的情况下出现的,所以普里高津称这种状态为耗散结构.(c)或(c')称为耗散结构分支.由图 11-20 可以看出,在 $\lambda = \lambda_c$ 处热力学分支开始分岔,称为分岔现象,也叫做分支现象.在分支以前,系统的状态保持空间均匀和时间不变性,因而具有高度的时空对称性.超过分支点后,耗散结构对应于某种时空有序

状态,破坏了系统原来的对称性.因此,这类现象常常被称为对称性破缺.

分支现象的理论使人们对于自然界的发展过程有一个比较全面的认识:在平衡态附近,发展过程总是趋向平衡态或与平衡态有类似行为的非平衡定态,总是伴随着无序的增加与宏观结构的破坏;在远离平衡态的条件下,非平衡定态可以变得不稳定,发展过程可能发生突变,因而导致宏观结构的形成和宏观有序的增加.这种认识对研究有序现象、生命起源、生物进化以及宇宙的发展等问题提供了有益的启示.

在系统内部,究竟是什么因素导致定态的不稳定而发生分支的呢?研究表明,这涉及到涨落的作用.无论是平衡态还是非平衡定态都是系统在宏观上不随时间变化的状态,而实际上组成系统的分子仍然在不停地做无规则运动,系统因而在局部上经常与宏观平均态有暂时的偏离,这种自发产生的微小偏离称为涨落.此外,宏观系统所承受的外界条件也不会一成不变,因此系统的宏观态总是不停地受到各种各样的扰动.涨落一般在宏观上观察不到,但随着控制条件(控制参数)的改变,有的涨落分量随时间很快衰减,有的涨落分量却会随时间长大以致其振幅终于达到宏观尺度而使系统进入一种宏观有序状态,于是,就形成了耗散结构.

哈肯的协同论认为,系统中各个分子的运动状态由分子热运动(独立运动)和分子间的关联引起的协同运动共同决定.当分子间的关联能量小于独立运动的能量时,分子独立运动占主导地位,系统处于无序状态;当分子间的关联能量大于分子独立运动的能量时,分子独立运动受到约束,服从由关联形成的协同运动,于是,系统就显示出有序的特征.涨落是系统中各局部内分子间相互耦合变化的反映.系统在偏离平衡态较小时,独立运动和协同运动能量的相对大小未发生明显的变化,涨落相对较小;当控制参数变化,两种运动的能量的相对大小也在变化.当控制参数达到临界值 λ_c 时,这两种运动能量的相对地位势均力敌.因此,局部分子间可能的各种耦合相当活跃,使得涨落变大.各种涨落都具有特定的内容,代表着一种结构或组织的“胚芽状态”.涨落的出现是偶然的,那些适应系统动力学性质的涨落会得到系统绝大多数分子的响应而波及整个系统,从而使系统进入一种新的有序结构——耗散结构.

思考题

11-1 内能和热量的概念有何不同?下面两种说法是否正确?(1)物体的温度越高,则热量越多;(2)物体的温度越高,则内能越大.

11-2 在 $p-V$ 图上用一条曲线表示的过程是否一定是准静态过程？理想气体经过自由膨胀由状态 (p_1, V_1) 改变到状态 (p_2, V_2) ，这一过程能否用一条等温线表示？

11-3 气缸内有单原子理想气体，若绝热压缩使体积减半，问气体分子的平均速率变为原来速率的几倍？若为双原子理想气体，又为几倍？

11-4 有两个卡诺机分别使用同一个低温热库，但高温热库的温度不同。在 $p-V$ 图中，它们的循环曲线所包围的面积相等，它们对外所做的净功是否相同？热循环效率是否相同？

11-5 一个卡诺机在两个温度一定的热库间工作时，如果工质体积膨胀的多些，它做的净功是否就多些？它的效率是否就高些？

11-6 在一个房间里，有一台电冰箱正工作着。如果打开冰箱的门，会不会使房间降温？会使房间升温吗？用一台热泵为什么能使房间降温？

11-7 试根据热力学第二定律判别下列两种说法是否正确？

- (1) 功可以全部转化为热，但热不能全部转化为功；
- (2) 热量能够从高温物体传到低温物体，但不能从低温物体传到高温物体。

11-8 瓶子里装一些水，然后密闭起来。忽然表面的一些水温度升高而蒸发成气体，余下的水温变低，这件事可能吗？它违反热力学第一定律吗？它违反热力学第二定律吗？

11-9 试根据热力学第二定律判别下列两种说法是否正确？

- (1) 功可以全部转化为热，但热不能全部转化为功；
- (2) 热量能够从高温物体传到低温物体，但不能从低温物体传到高温物体。

11-10 一条等温线与一条绝热线是否可能有两个交点？为什么？

11-11 两条绝热线与一条等温线是否可以构成一个循环？为什么？

11-12 可逆过程是否一定是准静态过程？准静态过程是否一定是可逆过程？有人说：“凡是有热接触的物体，它们之间进行热交换的过程都是不可逆过程。”这种说法对吗？

11-13 下列过程是可逆过程还是不可逆过程？说明理由。

- (1) 恒温加热使水蒸发。
- (2) 由外界做功使水在恒温下蒸发。
- (3) 在体积不变的情况下，用温度为 T_2 的炉子加热容器中的空气，使它的温度由 T_1 升到 T_2 。
- (4) 高速行驶的卡车突然刹车停止。

11-14 一杯热水置于空气中，它总是要冷却到与周围环境相同的温度。在这一自然过程中，水的熵减小了，这与熵增加原理矛盾吗？

11-15 一定量气体经历绝热自由膨胀，既然是绝热地，即 $Q=0$ ，那么熵变也应该为零。对吗？为什么？

11-16 一条等温线与一条绝热线是否能有两个交点？为什么？

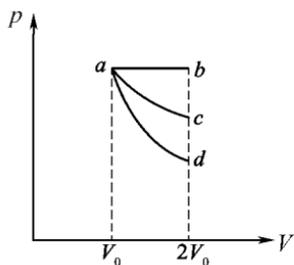
11-17 两条绝热线与一条等温线是否可以构成一个循环？为什么？

11-18 可逆过程是否一定是准静态过程？准静态过程是否一定是可逆过程？有人说：“凡是有热接触的物体，它们之间进行热交换的过程都是不可逆过程。”这种说法对吗？

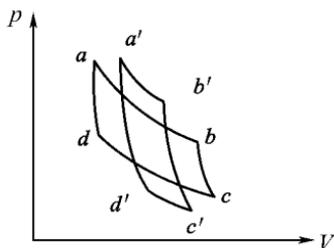
习题 11

11-1 如图所示，一理想气体分别经过等压、等温及绝热三个过程并使其体积增加 1 倍，则：

- (1) _____ 过程做功最大，_____ 过程做功最小；
- (2) _____ 过程引起的温度变化最大，_____ 过程引起的温度变化最小；
- (3) _____ 过程气体吸收的热量最多，_____ 过程吸收的热量最少。



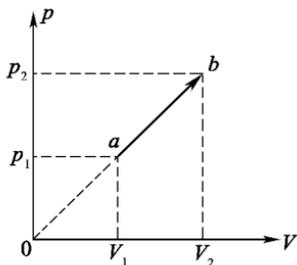
题 11-1 图



题 11-2 图

11-2 两卡诺循环在 $p-V$ 图上的过程曲线 $abcda$ 及 $a'b'c'd'a'$ 所围面积相等，则：它们的循环效率 _____，从高温热源吸收的热量 _____，对外做的净功 _____。

11-3 如图所示， N_{mol} 氦气由态 $a(p_1, V_1)$ 沿图中直线变化到 $b(p_2, V_2)$ ，求：

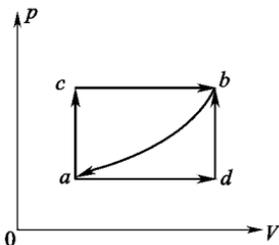


题 11-3 图

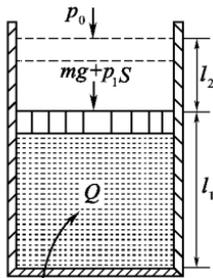
- (1) 气体内能的变化;
- (2) 对外做的功;
- (3) 吸收的热量.

11-4 如图所示,当系统沿 acb 路径从 a 变化到 b 时吸热 80.0 J ,且对外界做功 30.0 J .

- (1) 当系统沿 adb 路径从 a 变化到 b 时对外做功 10.0 J ,系统吸收了多少热量?
- (2) 若系统沿 ba 路径返回 a 时外界对系统做功 20 J ,则系统吸收了多少热量?



题 11-4 图



题 11-5 图

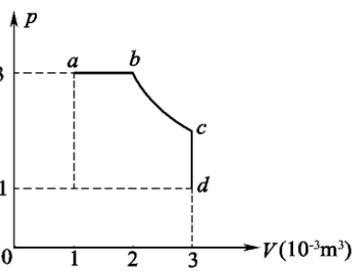
11-5 如图所示,一侧壁绝热的气缸内盛 2 mol 氧气,其温度为 300 K ,活塞外面的压强 $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$,活塞质量 $m = 100 \text{ kg}$,面积 $S = 0.1 \text{ m}^2$.开始时,由于气缸内活动插销的阻碍,活塞在距气缸底部 $l_1 = 1.0 \text{ m}$ 处.后从气缸底部缓慢加热,使活塞上升了 $l_2 = 0.5 \text{ m}$ 的距离.问:

- (1) 气缸中的气体经历的是什么过程?

(2) 气缸在整个过程中吸收了多少热量?(设气缸与活塞间的摩擦可以忽略,且无漏气,无热量损失)

11-6 从热力学第一定律出发证明迈耶公式.

11-7 一定质量的双原子气体沿如图所示的 $abcd$ 路径发生变化.已知 ab 为等压过程, bc 为等温过程, cd 为等体过程.求气体在 $abcd$ 过程中所做的功、吸收的热量及内能的变化.



题 11-7 图

11-8 4.8 kg 的氧气在 $27.0 \text{ }^\circ\text{C}$ 时占有 1000 m^3 的体积,求:

- (1) 在等温、等压情况下,将体积压缩到原来的 $\frac{1}{2}$ 所

需的功、所吸收的热量以及内能的变化;

- (2) 等温过程终了时的压强及等压过程终了时的温度.

11-9 用热力学第一定律证明一条等温线与一条绝热线只能相交于一点(提示:可

用反证法证明)。

11-10 质量为 $5.8 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 、压强为 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、温度为 300 K 的空气, 经历一等体过程加热到 900 K 后绝热膨胀, 压强降到 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, 最后经由等压过程回到初态(空气可作双原子分子看待, $\mu = 2.9 \times 10^{-2} \text{ kg}$)。

(1) 在 $p-V$ 图上画出该循环的示意图;

(2) 求该循环的效率。

11-11 喷气发动机的循环可近似用如图所示的循环来表示。其中 ab, cd 分别代表绝热过程, bc, da 分别代表等压过程。证明当工质为理想气体时, 循环的效率

$$\eta = 1 - \frac{T_d}{T_c} = 1 - \frac{T_a}{T_b}$$

11-12 3 mol 氧气在压强为 2 atm 时体积为 40 L , 先将它绝热压缩到一半体积, 接着再令它等温膨胀到原体积。

(1) 求这一过程的最大压强和最高温度;

(2) 求这一过程中氧气吸收的热量、对外做的功以及内能的变化;

(3) 在 $p-V$ 图上画出整个过程曲线。

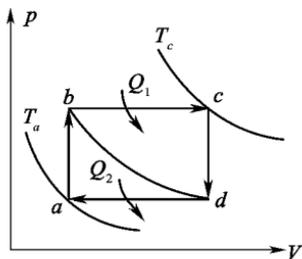
11-13 一气缸内贮有 10 mol 的单原子理想气体, 在压缩过程中, 外力做功 209 J , 气体温度升高 1 K 。试计算气体内能增量和所吸收的热量, 在此过程中气体的摩尔热容是多少?

11-14 质量为 $4.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 的氦气经历的循环如图所示, 图中三条曲线均为等温线, 且 $T_a = 300.0 \text{ K}$, $T_c = 833.0 \text{ K}$ 。问:

(1) 中间等温线对应的温度为多少?

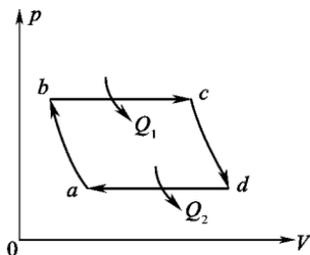
(2) 经历一循环后气体对外做了多少功?

(3) 循环的效率为多少?



题 11-14 图

11-15 1.5 mol 氧气在 400 K 和 300 K 之间做卡诺循环。已知循环中的最小体积为 $1.2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, 最大体积为 $4.8 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 。计算气体在此循环中做的功, 以及从高温热



题 11-11

源吸收的热量和向低温热源放出的热量。

11-16 大家知道,海洋中贮存有大量的能量.一种从海洋中获取能量的方法是利用海水(表层和底层)的温度差来发电.让极易气化的流体质(如氨、丙烷等)在海水表层蒸发,并通过管道送至水下的汽轮机,在那里膨胀,驱动汽轮机,带动发电机组发电,后在深水区凝结,并泵回表层,完成循环.假设所进行的循环可以近似作为卡诺循环处理,海水表层温度为 17°C ,底层温度为 2°C .计算这种循环的效率.

11-17 一电冰箱在温度为 27°C 的室内运行.

(1) 当冷冻室的温度为 -3°C 时,从中提取 1 J 的热量最少要做多少功?

(2) 当冷冻室的温度为 -13°C 时,从中提取 1 J 的热量最小又需做多少功?

11-18 若用一卡诺热泵使一建筑物的温度维持在 22°C .当室外温度为 3°C 时,平均每天的热量损失(建筑物吸收的热量)为 $4.18 \times 10^9\text{ J}$.问需要多大的功率驱动热泵才能达到此目的?采用直接加热(如用电热设备加热)则需多大的功率?

11-19 若太阳表面的温度为 5800 K ,地球表面温度为 298 K .当太阳向地球表面传递 $4.60 \times 10^4\text{ J}$ 热量时,系统的熵变为_____.

11-20 从热力学第二定律出发证明一条绝热线与一条等温线不可能两次相交.

11-21 求质量为 32 g 的氧气由压强为 $2.02 \times 10^5\text{ Pa}$ 等温地下降到 373 K 时的熵变.

11-22 将质量为 1 kg 、温度为 273 K 的水与一温度为 373 K 的热源接触,当水温达到 373 K 时,水和热源的熵变各为多少(水的定压比热容为 $4.18 \times 10^3\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$)?

11-23 以温度为纵坐标、熵为横坐标画出卡诺循环图(这种图叫温—熵图,亦称 $T-S$ 图),并证明:

(1) 在温—熵图中,任一过程曲线下的面积在数值上与该过程中系统和外界所交换的热量等值;

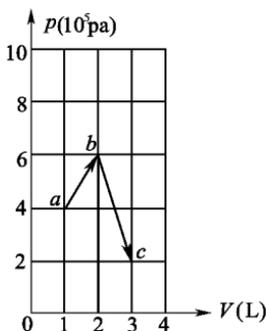
(2) 卡诺循环的效率 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

11-24 一卡诺循环工作在温度分别为 400 K 和 300 K 的两个热源之间,设卡诺循环的两条绝热线(又称等熵线)的熵差为 $100\text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.问工质在该循环中吸收了多少热量?对外做了多少功?

11-25 据医学推算,我国成年男子每天新陈代谢产生的热量约为 $5.85 \times 10^3\text{ kJ}$.计算一个成年男子一天中因新陈代谢而产生的熵(人的正常体温为 37°C).

11-26 求在一个大气压下, 30 g , -40°C 的冰变为 100°C 蒸汽时的熵变.(已知冰的比热容 $C_1 = 2.1\text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,水的比热容 $C_2 = 4.2\text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,在 $1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ 气压下熔比热 $\lambda = 334\text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$,水的汽化热 $L = 2260\text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$)

11-27 1 mol 氧气(当成刚性分子理想气体)经历如题图 11-27 所示的过程,由 a 经 b 到 c .求在此过程中气体对外做的功、吸的热以及熵变.



题 11-27 图

参考答案

习题 1

1-1 (1) $-0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (2) $v(2) = -6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (3) $s = 2.25 \text{ m}$

1-2 (1) $\mathbf{r} = r \cos \omega t \mathbf{i} + r \sin \omega t \mathbf{j}$

(2) $\mathbf{v} = -r\omega \sin \omega t \mathbf{i} + r\omega \cos \omega t \mathbf{j}$ $\mathbf{a} = -r\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - r\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}$

(3) $\mathbf{a} = -\omega^2 (r \cos \omega t \mathbf{i} + r \sin \omega t \mathbf{j}) = -\omega^2 \mathbf{r}$, 说明 \mathbf{a} 与 \mathbf{r} 方向相反, 即指向圆心.

1-3 (1) $x = v_0 t, y = \frac{1}{2} g t^2$ 轨迹方程是: $y = \frac{g x^2}{2 v_0^2}$

(2) $a_t = g^2 t / \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$ $a_n = v_0 g / \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$

1-4 $v = 2(x + x^3)^{1/2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

1-5 $v^2 = v_0^2 + k(y_0^2 - y^2)$

1-6 $t = 2 \text{ s}$ 时, $a_t = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, a_n = 83.3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

1-7 $t = \sqrt{\frac{R}{c}} - \frac{b}{c}$

1-8 $v = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $a = 35.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

1-9 $\rho = v_0^2 / g \cos \theta$

1-10 $x = 2t^3/3 + 10 \text{ (SI)}$

1-11 $\beta = 0.99 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$

1-12 $170 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 飞机应取北偏东 19.4° 的航向.

1-13 $25.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

1-14 $H = 75.9 \text{ m}$ $t = 4.08 \text{ s}$

习题 2

2-1 $a = \frac{g_1 - g_2}{1 + g_1/g_2} = 1.18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;

2-2 $h = la/g$

2-3 $2\mu(M+m)g$;

2-4 (1) $N = mg \sin\theta - m\omega^2 l \sin\theta \cos\theta$, $T = mg \cos\theta + m\omega^2 l \sin\theta$;

(2) $\omega_c = \sqrt{g/\cos\theta}$, $T = mg/\cos\theta$;

2-5 略

2-6 (1) $\frac{F_0}{m} - \frac{k}{m}t$, (2) $\frac{F_0}{m}t - \frac{k}{2m}t^2$, $\frac{F_0}{2m}t^2 - \frac{k}{6m}t^3$;

2-7 (1) $\frac{mg^2 \cos\theta}{2A \sin^2\theta}$, (2) $\frac{1}{8} \frac{m^2 g^3 \cos\theta}{A^2 \sin^3\theta}$;

2-8 $Mk^2 x$, $\frac{1}{k} \ln \frac{x_1}{x_0}$;

2-9 $x = x_0 e^{-mv_0^2/(2k)}$;

2-10 mb , $\frac{m(v_0 + bt)^2}{R}$;

2-11 $T_{\min} = \sqrt{3\pi/G\rho}$, $T_{\min} = 6.9 \times 10^3 \text{ s}$, $M = 2.31 \times 10^{29} \text{ kg}$;

2-12 $v = v_0 e^{-kt/m}$, $x_{\max} = mv_0/k$;

2-13 $v = (mg - F)(1 - e^{-kt/m})/k$;

2-14 $s = \frac{5v_0^2}{2g(1-5\mu)} \ln \frac{1}{5\mu} = 221 \text{ m}$;

2-15 $a = g[1 - (v/v_0)^2] = 3.53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;

2-16 略

习题 3

3-1 $F = f + Mg = \frac{mv_2}{\Delta t} + Mg$, $\Delta v = mv_1/M$

$$3-2 \quad (1) P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = v \cdot v \mathrm{d}M/\mathrm{d}t = v^2 \mathrm{d}M/\mathrm{d}t$$

$$(2) F'' = v \Delta M = 30 \text{ N}, P = v^2 \Delta M = 45 \text{ W}$$

$$3-3 \quad (1) mv_0 = mv + Mv' \quad T = Mg + Mv'^2/l = 26.5 \text{ N}$$

$$(2) f \Delta t = mv - mv_0 = -4.7 \text{ N} \cdot \text{s} \quad (\text{设 } v_0 \text{ 方向为正向})$$

$$3-4 \quad F' = |-F| = |2mv \cos \theta / \Delta t|, \text{ 方向垂直墙面指向墙内}$$

$$3-5 \quad (1) N = m_B a = 1.8 \times 10^3 \text{ N} \quad \text{方向向右}$$

$$(2) v_A = at = 6 \text{ m/s} \quad v_B = \frac{mv_0 - m_A v_A}{m + m_B} = 22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$3-6 \quad \Delta p = 2M_m v = 2M_m R_e \sqrt{g/r} = 1.46 \times 10^{26} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$3-7 \quad \int_0^{\pi/2\omega} F \mathrm{d}t = -k \int_0^{\pi/2\omega} A \cos \omega t \mathrm{d}t = -\frac{kA}{\omega}$$

$$3-8 \quad I = 1.41 \text{ N} \cdot \text{s}$$

3-9 证明略

$$3-10 \quad (1) t = 3 \times 10^{-3} \quad (2) I = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s} \quad (3) 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$3-11 \quad v_1 = \frac{ft_1}{m_1 + m_2}, v_2 = v_1 + \frac{ft_2}{m_2} = \frac{ft_1}{m_1 + m_2} + \frac{ft_2}{m_2}$$

$$3-12 \quad v = \sqrt{\frac{2MgR}{m+M}}$$

$$3-13 \quad \frac{m}{M+m} h \cot \theta; m \cos \theta \sqrt{\frac{2gh}{(M+m)(M+m \sin^2 \theta)}}$$

$$3-14 \quad v_1 = -\frac{m}{M} v, v_2 = \frac{m}{M+m} v$$

$$3-15 \quad v = 6.14 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \quad \theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = 35^\circ 32'$$

$$3-16 \quad 0.632$$

$$3-17 \quad F = 2.25 \times 10^4 \text{ N}$$

$$3-18 \quad (1) bt \quad (2) -p_0 + bt$$

$$3-19 \quad \text{不同}, \frac{S_2}{S_1} = 1 - \frac{m}{M+m}$$

习题 4

$$4-1 \quad A = \int_0^3 12T(3t^2) \mathrm{d}t = \int_0^3 36t^3 \mathrm{d}t = 729 \text{ J}$$

4-2 (1) $W_f = -\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$ (“-”表示摩擦力作负功)

(2) $v = \sqrt{g/l[(l^2 - a^2) - \mu(l-a)^2]}^{1/2}$

4-3 $W = \int dW = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^l -9kc^{2/3}x^{4/3}dx = -27kc^{2/3}l^{7/3}/7$

4-4 (1) $E_{KA} = 1/2m\mathbf{v}_x^2 + 1/2m\mathbf{v}_y^2 = 1/2m b^2\omega^2$

$E_{KB} = 1/2m\mathbf{v}_x^2 + 1/2m\mathbf{v}_y^2 = 1/2m a^2\omega^2$

(2) $\mathbf{F} = ma_x\mathbf{i} + ma_y\mathbf{j}$

$= -m\omega^2 \cos\omega t \mathbf{i} - m\omega^2 \sin\omega t \mathbf{j}$

$W_x = \int_a^0 \mathbf{F}_x dx = -\int_a^0 m\omega^2 a \cos\omega t dx$

$= -\int_a^0 m\omega^2 x dx = 1/2ma^2\omega^2$

$W_y = \int_0^b \mathbf{F}_y dy = \int_0^b -m\omega^2 b \sin\omega t dy$

$= -m\omega^2 \int_0^b y dy = -1/2mb^2\omega^2$

4-5 $W = E_{p_2} - E_{p_1} = 0.14 \text{ J}$

4-6 $W = E_{p_1} - E_{p_2} = 1/2kx_1^2 - 1/2kx_2^2 = (\sqrt{2}-1)kl^2$

4-7 $9.9 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

4-8 (1) -45 J (2) 75 W (3) -45 J

4-9 (1) 31 J (2) 5.34 m · s⁻¹

4-10 略

4-11 $E_p = W_{P_\infty} = \int_r^\infty \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^\infty \frac{k}{r^3} dr = k/(2r^2)$

4-12 (1) 8 J (2) 0 (3) 4 J 否

4-13 略

4-14 略

4-15 $\frac{G_1}{G_2} = \frac{\sin 30^\circ + 0.2}{\sin 30^\circ - 0.2} = \frac{7}{3}$

4-16 略

4-17 (1) $h = \frac{v_0^2}{2g(1+\mu \cot\theta)} = 4.25 \text{ m}$

(2) $v = [2gh(1-\mu \cot\theta)]^{1/2} = 8.16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

4-18 $-0.89 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 负号表示此速度的方向沿斜面向上.

$$4-19 \quad (1) \theta = \cos^{-1} \left[\frac{m^2 v_0^2}{3gR(M+m)^2} + 2/3 \right]$$

$$(2) v_0 = (M+m) \sqrt{Rg/m}$$

4-20 远地点 $h_1 = r_1' - R = 997 \text{ km}$

近地点 $h_2 = r_2' - R = 613 \text{ km}.$

$$4-21 \quad u = \sqrt{\frac{mk}{M(M+m)}} \Delta x$$

$$4-22 \quad x = v_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

习题 5

5-1 $-Dmg\mathbf{k}; -Dmg\mathbf{k}$

5-2 (1) 0; (2) $(8.0\mathbf{i} + 8.0\mathbf{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$

5-3 $4.13 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

5-4 (1) $1.59 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}; 3.80 \times 10^4 \text{ s}$

5-5 (1) $24t^2 \vec{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ (2) $-48t \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$

习题 6

6-1 $3.14 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}; 6.28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$6-2 \quad \frac{13}{24} mR^2$$

6-3 $2.37 \times 10^{29} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

6-4 $7.61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; 381 \text{ N}; 438 \text{ N}$

$$6-5 \quad \frac{2(M_1 r_2 - M_2 r_1)}{(m_1 + m_2) r_1^2 r_2}; \frac{2(M_1 r_2 - M_2 r_1)}{(m_1 + m_2) r_1 r_2^2}$$

$$6-6 \quad (1) \frac{2}{r} \sqrt{\frac{m_2 gh}{m_1 + 2m_2}}; \quad (2) \frac{2}{r} \sqrt{\frac{m_2 gh}{m_1}}$$

$$6-7 \quad (1) \frac{3g}{2l}; \quad (2) \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}}$$

$$6-8 \quad (1) \frac{J_0 \omega_0}{2M}; \quad (2) \frac{3J_0 \omega_0^2}{16\pi M}$$

6-9 $7.61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

6-10 (1) 0; (2) $4.2 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; (3) $5.3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

6-11 $5.71 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

6-12 $1286 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

6-13 (1) $\frac{J_0}{a} \ln 2$; (2) $\frac{J_0 \omega}{4\pi a}$

6-14 $\frac{3R\omega_0}{4\mu g}$; $-\frac{1}{4}mR^2\omega_0^2$

习题 7

7-2 $2.25 \times 10^{-7} \text{ s}$; 72.5 m

7-3 $8.94 \times 10^{-2} \text{ s}$; 长沙

7-4 $0.745c$; $1.341 \times 10^9 \text{ m}$

7-5 $0.866c$

7-6 $0.816c$; $\frac{\sqrt{2}}{2}m$

7-7 $\frac{l_0}{c}$; $\frac{l_0}{c} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$

7-8 $1.22 \times 10^{-6} \text{ s}$; 223 m ; $1.91 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

7-9 $0.75c$; $-0.4c$

7-10 5.9 m ; 8.8 m

7-11 $1.673 \times 10^{-26} \text{ kg}$, $1.51 \times 10^{-9} \text{ J}$, $4.99 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $1.36 \times 10^{-9} \text{ J}$

7-12 5.10 Mev ; 10 倍; 5×10^3 ; $c = 1.51 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

7-13 $0.417 m_0 c^2$

7-14 at, c ; $\frac{1}{2}at^2, ct$

7-15 $0.285 m_0$, $0.285 m_0 c^2$

7-16 2.22 Mev , 0.12%

7-17 $5.6 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, 2.8×10^{-21}

习题 8

8-1 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{s\rho g}} = 6.35 \text{ s}$

$$8-2 \quad (1) x=0.1\cos(7t+\pi) \text{ m} \quad (2) x=0.1\cos(5.7t+\pi) \text{ m}$$

$$8-3 \quad x=4\times 10^{-2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi t-\frac{\pi}{3}\right) \text{ m}$$

$$8-4 \quad T=2\pi\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 mR^3}{Qq}}$$

$$8-5 \quad (2) x=0.0447\cos(10t+0.65\pi) \text{ m} \quad (3) F_{\max}=k\Delta x=72.4 \text{ N}$$

$$8-6 \quad (1) x=0.24\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right) \text{ m} \quad (2) t_{\min}=\frac{2}{3} \text{ s}$$

$$(3) F=-m\omega x=0.3 \text{ N 指向平衡位置}$$

$$8-7 \quad x=5.0\times 10^{-2}\cos\left(40t-\frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$8-8 \quad T_2=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}=1.4 \text{ s} \quad A_2=\frac{v}{\omega^2}=\frac{vT}{2\pi}=0.035 \text{ m}$$

$$8-9 \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{1}{2\mu g}}=1.5 \text{ s}$$

$$8-10 \quad (1) T=\frac{2\pi}{\omega}=1.26 \text{ s} \quad (2) x_0=-0.60 \text{ m} \quad v_0=0 \quad (3) v=2.6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a=-7.5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \quad F=-1.5 \text{ N} \quad (4) x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A=\pm 0.42 \text{ m}$$

$$8-11 \quad (1) N'=8.1 \text{ N} \quad (2) A_{\max}=\frac{g}{4\pi^2 v^2}=0.062 \text{ m}$$

$$(3) A'_{\max}=\frac{1}{4}A_{\max}=0.0155 \text{ m}$$

$$8-12 \quad (1) A'=\sqrt{\frac{m}{m+m'}}A \quad T'=2\pi\sqrt{\frac{m+m'}{k}}$$

$$(2) \Delta E=-\frac{m'}{m+m'}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) \quad (3) v'=\pm\sqrt{\frac{k}{m+m'}}A$$

$$8-13 \quad (1) \omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\pi}{3} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=6 \text{ s} \quad A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=0.1 \text{ m}$$

$$(2) v=\pm 0.091 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad a=0.055 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \quad (3) E=27.8\times 10^{-3} \text{ J}$$

$$(4) x=0.01\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{2}{3}\pi\right) \text{ m}$$

$$8-14 \quad (1) x_P=5.00\times 10^{-2}\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right) \text{ m}$$

$$x_Q=2.00\times 10^{-2}\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right) \text{ m}$$

$$(2) x_p = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m} \quad x_Q = -1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$v_p = 13.60 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_Q = -5.44 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad a_p = 24.68 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_Q = 9.87 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$8-15 \quad (1) x = 5.00 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ m} \quad (2) E_p = 7.71 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$8-16 \quad (1) x = -6.00 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (2) f = 1.48 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$(3) t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

$$(4) v = -3.26 \times 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad a = 2.96 \times 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$(5) 5.33 \times 10^{-4} \text{ J} \quad 1.77 \times 10^{-4} \text{ J} \quad 7.10 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$8-17 \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

$$8-18 \quad x = 5\sqrt{2} \times 10^{-2} \cos(20\pi t + \frac{5}{4}\pi) \text{ m}$$

$$8-19 \quad (1) 0.0892 \text{ m} \quad 68^\circ 13'$$

$$(2) \varphi = \pm 2k\pi = \frac{3}{5}\pi \quad \varphi = \pm (2k+1)\pi + \frac{\pi}{5}$$

$$8-20 \quad \frac{\pi}{2}$$

$$8-21 \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{ka^2}{Gl}\right)}$$

$$8-22 \quad (1) \varphi_1 = \varphi_2 \quad (2) \varphi_1 - \varphi_2 = \pm \pi$$

习题 9

$$9-1 \quad y = 0.02 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x-L}{u}\right) - \frac{2}{3}\pi\right] \text{ m}$$

$$9-2 \quad (1) \lambda = 0.8 \text{ m} \quad A = 0.5 \text{ m} \quad v = \frac{u}{\lambda} = \frac{100}{0.8} \text{ Hz} = 125 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{v} = 8 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$(2) y = 0.5 \cos\left[250\pi\left(t - \frac{x}{100}\right)\right] \text{ m}$$

$$(3) y = 0.5 \cos\left[250\pi\left(t - \frac{1}{250}\right)\right] \text{ m}$$

$$9-3 \quad (1) y_0 = 0.04 \cos\left(\frac{2}{5}\pi t + \frac{\pi}{2}\right) m$$

$$(2) y = 0.04 \cos\left[\frac{2}{5}\pi\left(t - \frac{x}{0.08}\right) + \frac{\pi}{2}\right] m$$

$$(3) y_p = 0.04 \cos\left[\frac{2}{5}\pi t - \frac{2}{3}\pi\right] m$$

(4) a 点向下运动, b 点向上运动

$$9-4 \quad (1) \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \varphi_p = 0 \quad (2) y = 0.2 \cos\left[180\pi\left(t - \frac{x}{36}\right) + \frac{\pi}{2}\right] m$$

$$9-5 \quad y = A \cos\omega\left(t - \frac{x}{u} + \frac{L}{u}\right) \quad y = A \cos\omega\left(t + \frac{x}{u} - \frac{L}{u}\right)$$

$$y = A \cos\omega\left(t + \frac{x}{u} + \frac{L}{u}\right)$$

$$9-6 \quad (1) \lambda = \frac{u}{v} = \frac{2}{2} m = 1 m \quad v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} \text{ Hz} = 2 \text{ Hz} \quad u = 2 \text{ m/s}$$

$$(2) x = k - 2t \quad \text{当 } t = 4.2 \text{ s 时, } x = (k - 8.4) m \quad (3) t' = 4 \text{ s}$$

$$9-7 \quad (1) y = 3 \cos\left[4\pi\left(t + \frac{x}{20}\right) - \pi\right] m \quad y_B = 3 \cos\left(4\pi t - \frac{14}{5}\pi\right) m$$

$$(2) y = 3 \cos\left[4\pi\left(t - \frac{x}{20}\right)\right] m \quad y_B = 3 \cos\left(4\pi t - \frac{14}{5}\pi\right) m$$

$$9-8 \quad (1) \bar{\omega} = 3 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \quad \omega_m = 6 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}; \quad (2) 4.62 \times 10^{-7} \text{ J}$$

$$9-9 \quad (1) \bar{P} = 2.7 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}; \quad (2) I = 9 \times 10^{-2} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2};$$

$$(3) \bar{\omega} = 2.65 \times 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$9-10 \quad y_0 = \sqrt{2} A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$9-11 \quad I_Q = 4I_0$$

$$9-12 \quad (1) y = 0.12 \cos\pi \times \cos 4\pi t m;$$

$$(2) \text{波节: } x = \frac{1}{2}(2k+1) m \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{波腹: } x = k m \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(3) 0.12 m \quad 0.097 m$$

$$9-13 \quad (1) y_{\text{E}} = 5 \times 10^{-3} \cos\left[\left(500\pi t - \frac{3}{4}\pi\right) + 2\pi \frac{x}{1.4}\right] m$$

$$(2) x = 0, 0.7 m, 1.4 m, 2.1 m$$

$$(3) 7.1 \times 10^{-3} m$$

9-14 (1) $y_{\lambda} = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$

(2) $y_{\bar{\lambda}} = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) - \left(\frac{2\omega D}{u} + \pi \right) \right]$

(3) $y_{\text{合}} = 2A \cos \left[\frac{\omega D}{u} + \frac{\pi}{2} - \frac{\omega x}{u} \right] \cos \left[\omega t - \left(\frac{\omega D}{u} + \frac{\pi}{2} \right) \right]$

(4) $y_{\pm} = 2A \cos \left[\frac{2\omega D}{3u} + \frac{\pi}{2} \right] \cdot \cos \left[\omega t - \left(\frac{\omega D}{u} + \frac{\pi}{2} \right) \right]$

9-15 (1) $y_p = y_{p1} = y_{p2}$

$$= A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} + \frac{2\pi x_p}{\lambda} \right) + A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x_p}{\lambda} + \pi \right) -$$

$$2A \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi x_p}{\lambda} - \frac{\pi}{\lambda} \right)$$

(2) $x=0, \frac{1}{2} \text{ m}, 1 \text{ m}$

9-16 $\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{340}{0.16} \text{ Hz} = 2125 \text{ Hz}$

9-17 (1) $y_{\text{E}} = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$ (2) $y_{\bar{\lambda}} = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$

(3) 干涉极大的坐标为: $x=0, -\frac{\lambda}{2}$

干涉极小的坐标为: $x = \frac{\lambda}{4}, -\frac{3}{4}\lambda$

(4) $y_{\text{合}} = 2A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$

9-18 (1) $y_{\bar{\lambda}} = 0.5 \cos \left[2\pi t + 4\pi x - \frac{29\pi}{2} \right] \text{ m}$

(2) $y = 0.5 \cos \left(4\pi x - \frac{15\pi}{2} \right) \cos(2\pi t - 7\pi) \text{ m}$

(3) **波节**: $x=0, 0.25 \text{ m}, 0.5 \text{ m}, 0.75 \text{ m}, 1 \text{ m}, 1.25 \text{ m}, 1.5 \text{ m}, 1.75 \text{ m}, 2 \text{ m}$

波腹: $x=0.125 \text{ m}, 0.375 \text{ m}, 0.625 \text{ m}, 0.875 \text{ m}, 1.125 \text{ m}, 1.375 \text{ m}, 1.625 \text{ m}, 1.875 \text{ m}$

9-19 (1) $\nu' = 971.4 \text{ Hz}$ (2) $\nu'' = 1030.3 \text{ Hz}$ (3) 58.9 Hz

习题 10

10-1 (1) $9.08 \times 10^3 \text{ Pa}$; (2) 90.4 k , -182.8 C

- 10-2 1.07
- 10-3 84 °C
- 10-4 929 K, 656 °C
- 10-5 略
- 10-6 3.36×10^4 Pa
- 10-7 2.3×10^3 m
- 10-8 $6.24 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- 10-9 (1) $4.47 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $3.49 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $4.83 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
(2) $6.21 \times 10^{21} \text{ J}$
- 10-10 1.64%
- 10-11 0.526%
- 10-12 (1) $2/3v_0$; (2) $2N/3, N/3$; (3) $11v_0/9$.
- 10-13 (1) $\frac{2N}{3v_0}$; (2) $\frac{N}{3}$; (3) $\frac{11}{9}v_0$
- 10-14 (1) $p_2 = 3p_1$; (2) $\overline{\epsilon_{k_z}} = \frac{3}{2}\overline{\epsilon_{k_1}}$, $\sqrt{\overline{v_2^2}} = 1.22 \sqrt{\overline{v_1^2}}$
- 10-15 7.7 K
- 10-16 $5.980 \times 10^{-21} \text{ J}$, $6.55 \times 10^{-21} \text{ J}$, 0.327 J
- 10-17 $6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$, $4.14 \times 10^{-21} \text{ J}$, $3.12 \times 10^3 \text{ J}$, $1.04 \times 10^3 \text{ J}$
- 10-18 (1) $6.00 \times 10^{-21} \text{ J}$, $4.08 \times 10^{-21} \text{ J}$, $10.00 \times 10^{-21} \text{ J}$
(2) $1.83 \times 10^3 \text{ J}$ (3) 1.39 J
- 10-19 平均自由程增大, 平均碰撞频率变小
 $9.46 \times 10^{-5} \text{ m}$, $4.63 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$
- 10-20 $6.86 \times 10^{-8} \text{ m}$, $6.53 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$
- 10-21 6×10^6 , 30 cm

习题 11

- 11-1 (1) 等压, 绝热; (2) 等压, 等温; (3) 等压, 绝热
- 11-2 不等, 不等, 相等
- 11-3 (1) $\frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$; (2) $\frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$;
(3) $2(p_2V_2 - p_1V_1)$

- 11-4 (1) 60 J; (2) -70 J
- 11-5 (1) 先等温加热,后等压加热; (2) 3.48×10^4 J
- 11-6 略
- 11-7 5.52×10^2 J, 5.52×10^2 J, 0
- 11-8 (1) -2.59×10^5 J, -2.59×10^5 J, 0; -1.87×10^5 J, -6.54×10^5 J, -4.67×10^5 J;
(2) 7.48×10^2 Pa, 150 K
- 11-9 略
- 11-10 (2) 16%
- 11-11 略
- 11-12 (1) 5.28 atm; 429 K;
(2) 7.41×10^3 J, 0.93×10^3 J, 6.48×10^3 J
- 11-13 124.7 J, -84.3 J, -84.3 J; $-8.43 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- 11-14 (1) 500 K; (2) 1.11×10^3 J; (3) 11.8%
- 11-15 8.33×10^2 J, 3.33×10^3 J, 2.50×10^3 J
- 11-16 5%
- 11-17 (1) 0.11 J; (2) 0.154 J
- 11-18 3.11 kW; 48.4 kW
- 11-19 $1.46 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- 11-20 略
- 11-21 $5.76 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- 11-22 $1.31 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $-1.12 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- 11-23 略
- 11-24 4.0×10^4 J, 1.0×10^4 J
- 11-25 $1.89 \times 10^4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- 11-26 $268 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- 11-27 1.30×10^3 J, 2.79×10^3 , $23.5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$