航天动力学引论

刘　林　胡松杰　王　歆　编著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

航天动力学引论/刘林,胡松杰,王歆编著.—南京:南京大学出版社,2006.1

ISBN 7-305-04563-2

Ⅰ.航...Ⅱ.①刘...②胡...③王...Ⅲ.航天器轨道—飞行力学—高等学校—教材 Ⅳ.V412.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第109898号

书　　名　航天动力学引论
编　　著　刘　林　胡松杰　王　歆
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路22号　邮编 210093
发行电话　025-83596923　025-83592317　传真 025-83328362
网　　址　http://press.nju.edu.cn
电子邮件　nupress1@public1.ptt.js.cn
　　　　　sales@press.nju.edu.cn(销售部)
印　　刷　南京大众新科技印刷有限公司
开　　本　787×960　1/16　印张 20.5　字数 365千
版　　次　2006年2月第1版　　2006年2月第1次印刷
印　　数　1～1000
ISBN　7-305-04563-2/V·1
定　　价　35.00元

目　　录

前　　言

航天动力学是一般力学(包括天体力学)在航天领域的应用与发展,而本书是作为天体力学与航天器轨道力学专业的一本基础教材,从航天器运动的角度来阐述航天动力学的基础知识的. 从事航天器轨道力学工作的科技人员,除必须掌握轨道力学的基础知识外,同时要广泛地了解与其相关的航天动力学知识,包括航天器(单星或星座)的轨道设计、轨道调整(轨道机动与轨道过渡)、地面测控的有关知识以及与航天器整体(质心)运动的轨道力学密切相关的姿态动力学(涉及航天器各部分相对其质心的运动). 书中内容就是在这一前提下安排的,当然,根据专业的特点,侧重点有所不同. 作为天体力学与轨道力学专业,其重点当然应放在航天器轨道力学方面,特别是航天器在轨运动的细节,这一重点将反映在本书各章撰写的篇幅上. 具体安排如下:

第 1 章是关于航天器运动和地面观测的几何描述.

第 2 章是各类航天器运动的基础,即作为无摄运动的二体问题.

第 3 章至第 5 章是卫星型航天器在轨运动的基础,即受摄二体问题的有关内容,特别是第 4 章所阐述的中心天体非球形引力摄动,全面地反映了卫星轨道变化的

基本规律，无论从理论角度还是从应用角度来看，可以说这些内容是卫星轨道力学重点内容中的重点，即重中之重.

第 6 章是在前 5 章的基础上阐述卫星和星座的轨道设计知识.

第 7 章至第 9 章是深空(包括地—月系)探测器运动的轨道力学，包括发射轨道与在轨运动的基础知识.

最后一章内容是对航天器姿态动力学所作的必要介绍.

由于全书公式和相应符号较多，并照顾到一般的习惯用法，同一符号可能在不同的公式中有不同的含义，请读者在阅读时注意书中的相应说明.

胡松杰博士和王歆博士参加了本书编写工作，第 6 章由胡松杰编写，王歆参加了第 1 章和第 8 章部分内容的编写，全书最后由刘林统稿. 中科院紫金山天文台王昌彬研究员在本书编写过程中多次参加讨论，并提供了有关资料，另外，两位研究生王海红和王彦荣在全书书稿的整理过程中也做了大量工作，在此表示衷心的感谢.

刘　林

2005 年 2 月

第 1 章　航天器运动的轨道几何

要清楚地描述航天器的运动及其与观测者之间的联系，首先要确定参考系，在一定的参考系中去体现航天器的空间位置和运动速度及其与观测者之间的相对几何关系．因此，作为本书的开场白，在这一章中将要阐述的基本内容是参考系（时间系统，空间坐标系及相关参数）、空间观测几何（航天器和观测者的几何位置及相关问题）、航天器的视运动以及星下点轨迹等问题．

§1.1　时间系统

考察运动，需要一种均匀的时间尺度．过去，这种均匀的时间尺度是以地球自转为基准的．由于地球自转的不均匀性和测量精度的不断提高，上述均匀时间尺度已不适应；但由于种种原因，又必须将时间与地球自转相协调，这就导致了时间系统的复杂化．

现行的时间系统基本上分为四种：恒星时、世界时、历书时和原子时．前两种都是根据地球自转测定的，历书时则是根据地球、月亮和行星的运动来测定的，而原子时是以原子的电磁振荡作为标准的，下面将对这些时间系统作一简单介绍[1,2]．

1．恒星时（ST）

春分点连续两次过中天的时间间隔称为一"恒星日"．那么，恒星时就是春分点的时角，它的数值 S 等于上中天恒星的赤经 α，即

$$S = \alpha. \tag{1.1}$$

这是经度为 λ 的地方恒星时．与世界时密切相关的格林尼治恒星时 S_G 由下式给出：

$$S_G = S - \lambda. \tag{1.2}$$

经度 λ 规定向东计量．格林尼治恒星时又有真恒星时（或称视恒星时）

GAST 与平恒星时 GMST 之分. 既然恒星时是由地球自转时角所确定的，那么地球自转的不均匀性就可通过它与均匀时间尺度的差别来测定.

格林尼治恒星时主要是在空间坐标系的转换中用到，其内容将在下面有关部分中介绍.

2. 世界时(UT)

与恒星时相同，世界时也是根据地球自转测定的时间，它以平太阳日为单位，1/86400 平太阳日为秒长. 事实上，测定太阳的精度远低于测定恒星的精度，因此，世界时是通过对恒星观测测定的恒星时再根据两种时间的定义转换而给出的.

根据天文观测直接测定的世界时，记为 UT0，它对应于瞬时极的子午圈. 加上引起测站子午圈位置变化的地极移动(即地球自转轴在地球体内的移动)修正，就得到对应于平均极的子午圈的世界时，记为 UT1，即

$$\mathrm{UT1} = \mathrm{UT0} + \Delta\lambda. \tag{1.3}$$

$\Delta\lambda$ 是极移改正量.

由于地球自转的不均匀性，UT1 并不是均匀的时间尺度. 而地球自转不均匀性呈现三种特性：长期慢变化(每百年使日长增加 1.6 毫秒)，周期变化(主要是季节变化，一年里日长约有 $0^{\mathrm{s}}.001$ 的变化；除此之外，还有一些影响较小的周期变化)和不规则变化，这三种变化不易修正. 而 UT1 又直接与地球瞬时位置相联系，因此，对于精度要求不高的问题，就可用 UT1 作为统一的时间系统；而对于高精度的要求，必须寻求更均匀的时间尺度，即下面要介绍的原子时.

3. 历书时(ET)

由于世界时不能作为均匀的时间尺度，经数次天文会议讨论，决定从 1960 年起引入一种以太阳系内天体公转为基准的均匀时间系统，称为历书时(ET)，1960 年到 1967 年期间，它是世界公认的计时标准.

历书时的定义：1900 年 1 月 0 日历书时 12^{h} 瞬间的回归年长度的 31556925.9747 分之一为一历书秒；起算历元为 1900 年初太阳平黄经等于 $279°41'48''.04$ 的时刻，也就是纽康(Newcomb)原先选定的 1900 年 1 月 0 日格林尼治平午时刻，现在把它作为 1900 年 1 月 0 日历书时 12^{h}.

历书时是一种由力学定律确定的均匀时间，它是太阳、月亮和行星运动理论中的独立变量，同时也是这些基本历表的时间引数. 某一时刻的历书时可以通过对太阳、月亮或行星的观测来得到，而最有效的方法是观测月亮.

但对建立一个均匀时间尺度而言，其观测精度仍嫌不够，而且要得到这样的时间又很慢. 因此，1967 年后，计时标准转向原子时，它有更高的精度，而且随时可以直接求得. 不过在这期间，历书时仍然作为一个天文常数被保留下来，从 1984 年开始，历书时才完全被原子时所代替.

4. 国际原子时(TAI)与地球动力学时(TDT)和质心动力学时(TDB)

这是一种标准频率. 1967 年 10 月，第十三届国际计量大会决定引入新的秒长定义，即铯原子 Cs^{133} 基态的两能级间跃迁辐射的 9192631770 周所经历的时间作为一秒的长度，称为国际单位秒(SI). 由这种时间单位确定的时间系统称为国际原子时(TAI).

因原子时(TAI)是在地心参考系中定义的具有国际单位制秒长的坐标时间基准，它就可以作为动力学中所要求的均匀时间尺度. 由此引入一种地球动力学时(TDT)，它与原子时(TAI)的关系为

$$\mathrm{TDT} = \mathrm{TAI} + 32^{\mathrm{s}}.184. \tag{1.4}$$

这一关系是根据 1977 年 1 月 1 日 $00^{\mathrm{h}}00^{\mathrm{m}}00^{\mathrm{s}}$(TAI)对应的 TDT 为 1977 年 1 月 $1^{\mathrm{d}}.0003725$ 而来，此起始历元的差别就是该时刻历书时与原子时的差别. 这样定义起始历元就便于用 TDT 系统代替 ET 系统. TDT 是地心时空标架的坐标时，用作视地心历表的独立变量. 在人造地球卫星动力学中，它就是一种均匀时间尺度，相应的运动方程即用它作为自变量，通常以 t 表示. 从 1984 年起，历书时正式被地球力学时所取代.

除此之外，还定义一种质心动力学时 TDB，即太阳系质心时空标架的坐标时. 它是一种抽象、均匀的时间尺度，月球、太阳和行星的历表都是以 TDB 为独立变量的，岁差、章动的计算公式也是以该时间尺度为依据.

上述两种动力学时的差别 TDB－TDT 是由相对论效应引起的，根据相对论原理，转换公式为

$$\mathrm{TDB} = \mathrm{TDT} + 0^{\mathrm{s}}.001658\sin g + 0^{\mathrm{s}}.000014\sin 2g. \tag{1.5}$$

该式略去了高阶项，g 为地球绕日轨道的平近点角.

5. 协调世界时(UTC)

用原子钟控制时号发播可得到稳定的时号，但由于原子时秒长比世界时秒长略短，世界时时刻将日益落后于原子时；而有很多问题涉及到计算地球的瞬时位置，这又需要 UT1. 因此，为了避免发播的原子时与世界时产生过大的偏离，实际的时号发播是寻求 TAI 与 UT1 之间的一种协调，称为协调世界时(UTC).

UTC 是一种均匀时号，它依据原子时，却又参考世界时，从 1972 年起，UTC 用原子时秒长发播，但要求它与 UT1 之差不超过 $0^s.9$. 为达到此目的，必须调整 UTC 的整秒数，规定只在 1 月 1 日或 7 月 1 日将原子钟拨慢 1 秒，这就是所谓的闰秒，在引用 UTC 时必须注意这一点. 到目前(2004 年 12 月)为止，已调整过 32^s，即 $UTC = TAI - 32^s$.

除上述时间系统外，在计算中常常会遇到历元的取法以及几种年的长度问题，这里顺便作一介绍. 一种是贝塞耳(Bessel)年，或称假年，其长度为平回归年的长度，即 365.2421988 平太阳日. 常用的贝塞耳历元，是指太阳平黄经等于 280°的时刻，例如 1950.0，并不是 1950 年 1 月 1 日 0 时，而是 1949 年 12 月 31 日 $22^h09^m42^s$（世界时），相应的儒略(Julian)日为 2433282.4234. 另一种是儒略年，其长度为 365.25 平太阳日，儒略历元就是指真正的年初，例如 1950.0，即 1950 年 1 月 1 日 0 时. 显然，引用儒略年较为方便，因此，从 1984 年起，贝塞耳年被儒略年所代替. 两种历元之间的对应关系列于表 1.1.

表 1.1 贝塞耳历元和儒略历元之间的关系

贝塞耳历元	儒略历元	儒略日
1900.0	1900.000858	2415020.3135
1950.0	1949.999790	2433282.4234
2000.0	1999.998722	2451544.5333
1899.999142	1900.0	2415020.0
1950.000210	1950.0	2433282.5
2000.001278	2000.0	2451545.0

为了方便，常用修改的儒略日(亦称简约儒略日，记作 MJD)，定义为

$$MJD = JD - 2400000.5. \tag{1.6}$$

例如 J1950.0 的 MJD=33282.0.

与上述两种年的长度对应的回归世纪(即 100 年)和儒略世纪的长度分别为 36524.22 平太阳日和 36525 平太阳日.

§1.2 空间坐标系

定义一个空间坐标系应包含三个要素：坐标原点，参考平面(xy 平面)和参考平面上的主方向(x 轴方向). 对于航天器的运动而言，以地球卫星为例，所涉及到的主要是地心天球坐标系和地固坐标系，它们的坐标原点都是

地心,这一点并无问题. 但参考平面及其主方向的选择,将会受到岁差章动和地极移动的影响. 空间坐标系的复杂性正是由岁差章动和地极移动等原因所引起的.

日、月和大行星对地球非球形部分的吸引,会产生两种效应: 一是作为刚体平动的力效应,主要是月球对地球扁球部分的作用,将引起一种地球扁率间接摄动;另一种就是作为刚体定点转动的力矩效应,使地球像陀螺那样,出现进动与章动,即自转轴在空间的摆动,这就是岁差章动. 由于岁差章动,地球赤道面亦随时间在空间摆动;另外,由地球内部和表面物质运动引起的地球自转轴在其内部的移动(极移),都将影响坐标系中参考平面的选取.

基于上述原因,根据不同要求,就出现了各种空间坐标系统. 下面介绍与卫星运动有关的几种空间坐标系以及它们之间的转换关系.

1. 六种地心赤道坐标系[3,4]

这几种坐标系的定义见表 1.2. 人造地球卫星绕地球运动,其瞬时轨道面是通过地球质量中心(简称地心)的,因此在研究它的运动规律时,很自然地要引进地心坐标系. 但是,在人造卫星上天前,人们只能依靠传统的大地测量方法给出所谓的参考椭球体,其中心并不是地心,而人造卫星上天后,用卫星动力测地方法才给出了真正的地心参考系. 当然,尽管测量精度越来越高,但所测得的地心仍然是近似的,根据目前的结果,地心位置精度为厘米级.

表 1.2　六种地心赤道坐标系的定义

坐标系	原点	参考平面	x 轴方向	位置矢量
历元平赤道地心系	地心	历元平赤道	指向该历元的平春分点	$\boldsymbol{r}$
瞬时平赤道地心系	地心	瞬时平赤道	指向瞬时平春分点	$\boldsymbol{r}_m$
瞬时真赤道地心系	地心	瞬时真赤道	指向瞬时真春分点	$\boldsymbol{r}_t$
轨道坐标系	地心	瞬时真赤道	指向某历元的平春分点	$\boldsymbol{r}'$
准地固坐标系	地心	瞬时真赤道	参考平面与格林尼治子午线的交线方向	$\boldsymbol{R}_t$
地固坐标系	地心	与地心和 CIO 连线正交之平面	参考平面与格林尼治子午线的交线方向	$\boldsymbol{R}$

表 1.2 中给出的六种地心赤道坐标系分别适用不同的问题. 在当今的精密定轨问题中,通常采用 J2000.0 历元(称为标准历元),J2000 平赤道地

心系，亦简称为 J2000 地心天球坐标系. 而在空间目标监测中，由于某种原因，一些相关单位仍采用混合型的轨道坐标系.

关于轨道坐标系，这里有必要进一步作些说明. 在很多工作中，采用分析法计算卫星轨道的变化是方便的. 对于这种方法，若引用历元平赤道地心系（亦称历元地心天球坐标系），那么由于岁差章动导致地球赤道面在空间摆动，从而引起地球引力场位函数的变化，使卫星轨道增加一种附加摄动（亦称坐标系摄动），随着计算时刻与选取历元之间的间隔增长而增大，这将给定轨问题带来麻烦. 若引用瞬时真赤道地心系，虽然地球引力场位函数基本不变，但它是运动坐标系，需增加一项惯性力，这也是一种坐标系摄动，尽管它比上述附加摄动小（主要是由春分点移动对应的赤经岁差章动 $\mu+\Delta\mu$ 所引起的），但仍嫌不便. 鉴于上述两种坐标系的优缺点，在定轨及其有关工作中曾采用一种混合地心系，即参考平面为瞬时真赤道面，而 x 轴是指向某标准历元（如 1950.0 或 2000.0）的平春分点（该点实为瞬时赤道上的一个“假想”点，在真春分点以东 $\mu+\Delta\mu$ 处，赤经岁差和章动 $\mu+\Delta\mu$ 的计算公式后面将会给出），这就是表 1.2 所列出的轨道坐标系. 在此坐标系中，附加摄动很小，对于一般的精度要求，可完全忽略，故在后面第 4 章讨论地球非球形引力摄动时，不再考虑赤道面摆动问题，如果需要，请阅读参考文献[3，4]，以后不再说明. 不过，对于数值方法，只要通过坐标转换即可解决上述附加摄动问题，无需引进轨道坐标系；当然，引进也无妨，仍有可取之处.

上述坐标系的定义虽然是针对地球卫星而言的，但事实上也可以推广，中心天体可改为其他探测目标天体，如火星，月球等，相应的地心即目标天体质心，地固坐标系即星（指目标天体）固坐标系.

除上述各种地心坐标系外，有时涉及到日、月和大行星的历表和轨道，它们分别对应某历元的太阳系质心惯性系或日心黄道坐标系，坐标原点分别为太阳系质心或日心，参考平面是该历元的平赤道或黄道，x 轴指向该历元的平春分点.

2. 各坐标系之间的转换关系

为了引用矩阵来表达坐标系之间的转换关系，首先回忆一下坐标旋转及其对应的旋转变换的矩阵表示方法. 原坐标系中的任一矢量用 $\boldsymbol{r}$ 表示，在旋转后的新坐标系中以 $\boldsymbol{r}'$ 表示. 那么，若 yz 平面，zx 平面和 xy 平面分别绕 x 轴，y 轴和 z 轴转动一个角度 θ（逆时针为正），则有

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}_x(\theta)\boldsymbol{r}, \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{r}, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}_z(\theta)\boldsymbol{r}, \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{R}_x(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{R}_y(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

旋转矩阵 $\boldsymbol{R}(\theta)$ 有如下性质：

$$\boldsymbol{R}^{-1}(\theta)=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\theta)=\boldsymbol{R}(-\theta). \tag{1.13}$$

这里 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的逆和转置.

(1) 历元平赤道地心系与瞬时平赤道地心系之间的转换

这两个坐标系之间的差别是岁差. 历元平赤道地心系经三次旋转即与瞬时平赤道地心系相重合，有

$$\boldsymbol{r}_m=(\mathbf{PR})\boldsymbol{R}. \tag{1.14}$$

(PR)就是岁差矩阵，它由三个旋转矩阵构成，即

$$(\mathbf{PR})=\boldsymbol{R}_z(-z_A)\boldsymbol{R}_y(\theta_A)\boldsymbol{R}_z(-\xi_A). \tag{1.15}$$

其中 ξ_A, z_A, θ_A 是赤道岁差角，由下式计算：

$$\begin{cases}\xi_A=2306''.2181T+0''.30188T^2+0''.017998T^3,\\ z_A=2306''.2181T+1''.09468T^2+0''.018203T^3,\\ \theta_A=2004''.3109T-0''.42665T^2-0''.041833T^3,\end{cases} \tag{1.16}$$

$$T=\frac{\mathrm{JD}(t)-2451545.0}{36525.0}. \tag{1.17}$$

其中 t 是动力学时，可用 TDT. 相应的赤经岁差 m_A（或记作 μ）和赤纬岁差 n_A 为

$$\begin{cases}m_A=\xi_A+z_A=4612''.4362T+1''.39656T^2+0''.036201T^3,\\ n_A=\theta_A.\end{cases} \tag{1.18}$$

(2) 瞬时平赤道地心系与瞬时真赤道地心系之间的转换

这两个坐标系之间的差别是章动. 同样，经过三次旋转就可使前者与后者重合，相应地有

$$\boldsymbol{r}_t=(\mathbf{NR})\boldsymbol{r}_m. \tag{1.19}$$

这里的(NR)是章动矩阵,它亦由三个旋转矩阵构成,即

$$(\mathbf{NR}) = \boldsymbol{R}_x(-\Delta\varepsilon)\boldsymbol{R}_y(\Delta\theta)\boldsymbol{R}_z(-\Delta\mu). \tag{1.20}$$

或

$$(\mathbf{NR}) = \boldsymbol{R}_x[-(\bar{\varepsilon}+\Delta\varepsilon)]\boldsymbol{R}_z(-\Delta\psi)\boldsymbol{R}_x(\bar{\varepsilon}). \tag{1.21}$$

上两式中的 $\bar{\varepsilon}$ 是平黄赤交角,$\Delta\psi$ 是黄经章动,而 $\Delta\mu$,$\Delta\theta$ 和 $\Delta\varepsilon$ 则分别为赤经章动,赤纬章动和交角章动. 章动量取 IAU(1980)序列,对于米级精度取该序列的前 20 项即可,计算公式如下:

$$\begin{cases} \Delta\psi = \displaystyle\sum_{j=1}^{20}(A_{0j}+A_{1j}t)\sin\Big(\sum_{i=1}^{5}k_{ji}\alpha_i(t)\Big), \\ \Delta\varepsilon = \displaystyle\sum_{j=1}^{20}(B_{0j}+B_{1j}t)\cos\Big(\sum_{i=1}^{5}k_{ji}\alpha_i(t)\Big). \end{cases} \tag{1.22}$$

相应的赤经和赤纬章动 $\Delta\mu$ 和 $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\mu = \Delta\psi\cos\varepsilon, \tag{1.23}$$

$$\Delta\theta = \Delta\psi\sin\varepsilon. \tag{1.24}$$

其中黄赤交角的计算公式如下:

$$\varepsilon = 23°26'21''.448 - 46''.8150t. \tag{1.25}$$

章动序列中的 5 个幅角计算公式为

$$\begin{cases} \alpha_1 = 134°57'46''.733 + (1325^r + 198°52'02''.633)t + 31''.310t^2, \\ \alpha_2 = 357°31'39''.804 + (99^r + 359°03'01''.224)t - 0''.577t^2, \\ \alpha_3 = 93°16'18''.877 + (1342^r + 82°01'03''.137)t - 13''.257t^2, \\ \alpha_4 = 297°51'01''.307 + (1236^r + 307°06'41''.328)t - 6''.891t^2, \\ \alpha_5 = 125°02'40''.280 - (5^r + 134°08'10''.539)t + 7''.455t^2. \end{cases} \tag{1.26}$$

其中 $1^r=360°$. 上述各式中的 t,意义同(1.17)式中的 T. 章动序列前 20 项的有关系数见表 1.3.

事实上,按前面所说的精度考虑,保留大于 $0''.005$ 的周期项,且至多涉及距标准历元 T_0(J2000.0)25 年的计算,故公式(1.22)右端的 A_{1j} 和 B_{1j} 也可略去.

关于章动序列,还在不断地改进,但就原理和结果而言已无实质性改变,而就一般问题的精度要求而言,在定量上亦无明显的影响,对于高精度问题,请注意其差别.

表 1.3　IAU1980 章动序列的前 20 项

j	周期(日)	k_{j1}	k_{j2}	k_{j3}	k_{j4}	k_{j5}	A_{0j} (0″.0001)	A_{1j} (0″.0001)	B_{0j} (0″.0001)	B_{1j} (0″.0001)
1	6798.4	0	0	0	0	1	−171996	−174.2	92025	8.9
2	182.6	0	0	2	−2	2	−13187	−1.6	5736	−3.1
3	13.7	0	0	2	0	2	−2274	−0.2	977	−0.5
4	3399.2	0	0	0	0	2	2062	0.2	−895	0.5
5	365.2	0	1	0	0	0	1426	−3.4	54	−0.1
6	27.6	1	0	0	0	0	712	0.1	−7	0.0
7	121.7	0	1	2	−2	2	−517	1.2	224	−0.6
8	13.6	0	0	2	0	1	−386	−0.4	200	0.0
9	9.1	1	0	2	0	2	−301	0.0	129	−0.1
10	365.3	0	−1	2	−2	2	217	−0.5	−95	0.3
11	31.8	1	0	0	−2	0	−158	0.0	−1	0.0
12	177.8	0	0	2	−2	1	129	0.1	70	0.0
13	27.1	−1	0	2	0	2	123	0.0	−53	0.0
14	27.7	1	0	0	0	1	63	0.1	−33	0.0
15	14.8	0	0	0	2	0	63	0.0	−2	0.0
16	9.6	−1	0	2	2	2	−59	0.0	26	0.0
17	27.4	−1	0	0	0	1	−58	−0.1	32	0.0
18	9.1	1	0	2	0	1	−51	0.0	27	0.0
19	205.9	2	0	0	−2	0	48	0.0	1	0.0
20	1305.5	−2	0	2	0	1	46	0.0	−24	0.0

根据上面的讨论立即可知，由历元平赤道地心系到瞬时真赤道地心系的转换关系为

$$\boldsymbol{r}_t = (\mathrm{GR})\boldsymbol{r}\,. \tag{1.27}$$

我们不妨称(GR)为岁差章动矩阵，有

$$(\mathrm{GR}) = (\mathrm{NR})(\mathrm{PR})\,. \tag{1.28}$$

(3) 瞬时真赤道地心系与准地固坐标系之间的转换

因准地固坐标系是随着地球自转而转动的一种旋转坐标系，显然它与瞬时真赤道地心系之间的差别是地球自转角——格林尼治恒星时 S_G，于是有

$$\boldsymbol{R}_t = (\mathrm{ER})\boldsymbol{r}_t\,, \tag{1.29}$$

$$(\mathrm{ER}) = \boldsymbol{R}_z(S_G)\,. \tag{1.30}$$

(ER)即地球自转矩阵.

(4) 准地固坐标系与地固坐标系之间的转换

这两者之间的差别就是极移,有

$$\boldsymbol{R} = (\mathbf{EP})\boldsymbol{R}_t\,. \tag{1.31}$$

极移矩阵(EP)可由下式表达:

$$(\mathbf{EP}) = \boldsymbol{R}_y(-x_p)\boldsymbol{R}_x(-y_p)\,. \tag{1.32}$$

其中 x_p 和 y_p 就是极移两分量(它们的量级不超过 $0''.5$).若略去极移的二阶量,则上式可简化为

$$(\mathbf{EP}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

为了便于读者看清上述五种地心系坐标系之间的转换关系,我们不妨用一"框图"(见图 1.1)来描绘它们,图 1.1 中的矩阵(HG)为

$$(\mathbf{HG}) = (\mathbf{EP})(\mathbf{ER})(\mathbf{GR}). \tag{1.34}$$

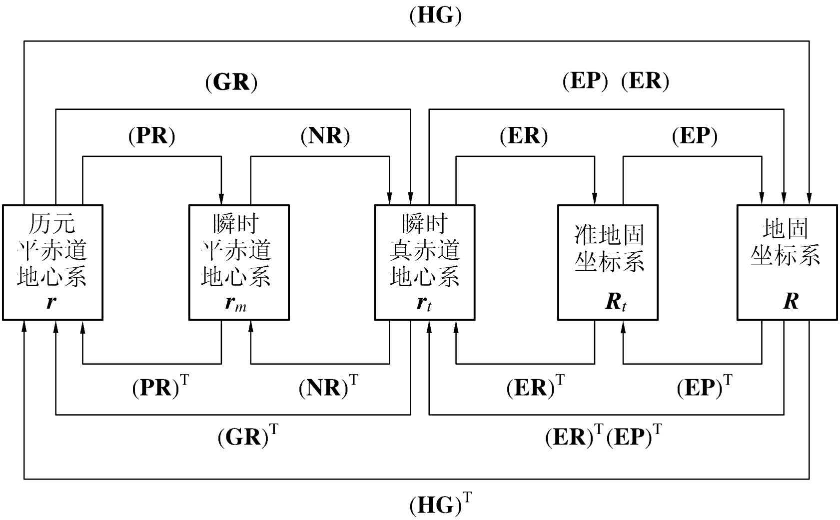

图 1.1 五种地心赤道坐标系之间的转换关系

(5) 轨道坐标系与其他地心坐标系之间的转换关系

由轨道坐标系的定义可知,经一次旋转,就可使瞬时真赤道地心系与它重合,相应地有

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)\boldsymbol{r}_t\,. \tag{1.35}$$

μ 和 $\Delta\mu$ 即赤经岁差和赤经章动,计算公式见(1.8)和(1.23).

利用(1.27)式,可立即得到轨道坐标系与历元平赤道地心系之间的转

换关系，即

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{r}\ , \tag{1.36}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{GR})\ . \tag{1.37}$$

变换矩阵 U 对应七次旋转，但是在一定精度要求下，可使 U 矩阵简化. 如考虑瞬时 t 与选取历元 T_0 的间隔在 25～50 年内，丢掉量级为 10^{-6} 和更小的项（包括章动的二阶项等），则七次旋转就可简化为二次旋转，有

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_y(\theta_A + \Delta\theta)\boldsymbol{R}_x\left(\frac{\mu}{2}\theta_A - \Delta\varepsilon\right)\ . \tag{1.38}$$

若 $(t - T_0) < 25$ 年，为了保证上述精度，$\boldsymbol{U}$ 矩阵还可再简化些，即

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(\theta_A + \Delta\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ (\theta_A + \Delta\theta) & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\Delta\varepsilon \\ 0 & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

也可写成下列形式：

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_y(\theta_A + \Delta\theta)\boldsymbol{R}_x(-\Delta\varepsilon)\ . \tag{1.40}$$

这对应更简单的二次旋转.

下面再给出轨道坐标系与地固坐标系之间的转换关系. 根据(1.35)式和图 1.1 不难得到

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{ER})^{\mathrm{T}}(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\ . \tag{1.41}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{ER})^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)\boldsymbol{R}_z(-S_G) \\ &= \boldsymbol{R}_z(-(S_G - (\mu + \Delta\mu))). \end{aligned} \tag{1.42}$$

若记

$$\theta_G = S_G - (\mu + \Delta\mu)\ . \tag{1.43}$$

θ_G 就是轨道坐标系中的格林尼治恒星时角. 于是(1.41)式又可写成

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}. \tag{1.44}$$

当然，这一转换关系亦可直接导出.

S_G 和 θ_G 的计算公式为

$$S_G = \overline{S}_G + \Delta\mu\ , \tag{1.45}$$

$$\theta_G = \overline{S}_G - \mu\ . \tag{1.46}$$

这里 μ 和 $\Delta\mu$ 即前面已提到的赤经岁差和章动. J2000.0 系统中的格林尼治平恒星时 $\overline{S}_G$ 由下式计算：

$$\overline{S}_G = 18^{\mathrm{h}}.6973746 + 879000^{\mathrm{h}}.0513367t + 0^{\mathrm{s}}.093104t^2 - 6^{\mathrm{s}}.2 \times 10^{-6}t^3\ , \tag{1.47}$$

$$t=\frac{\mathrm{JD}(t)-\mathrm{JD}(\mathrm{J}2000.0)}{36525.0}. \tag{1.48}$$

§1.3 空间观测几何

1. 两种站心坐标系[2]

对航天器的观测量通常是相对观测站的(可以是地基站,也可以是天基站),其中方向观测量(即测角资料)又总是对应赤道系统或地平系统.为此,在有关工作中引进了站心赤道坐标系和站心地平坐标系.两种站心坐标系之间的几何关系见图 1.2. O 是辅助天球中心(即测站),OZ 是重力方向,Z 就是天顶,大圆 NS 是地平. OP 是天极方向,P 是北天极(实为平极,为了与地固坐标系一致,就用 CIO),大圆 QQ' 是天赤道(简称赤道).大圆弧 $PZ=90^\circ-\varphi$,φ 是测站的天文纬度(φ 对应平极,它与大地纬度的差别即垂线偏差).通过天极和天顶的大圆称为测站的子午圈,它与地平相交于 N 和 S 两点,分别称为北点和南点.赤道与地平相交于 E 和 W 两点,分别称为东点和西点. S_* 是测站到天体方向与天球的交点(或就称为天体),大圆 ZS_* 称为地平经圈,而大圆 PS_* 称为时圈或赤经圈.

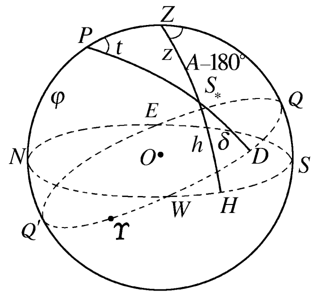

图 1.2 站心坐标系的辅助天球

天体的地平坐标记为 A,h. A 称为地平经度或方位角.由北点沿地平向东量到地平经圈;h 称为地平纬度或高度角,由地平经圈与地平的交点 H 沿地平经圈向天顶方向量到天体 S_*,有时用天顶距 $z=90^\circ-h$ 代替高度角 h.天体的赤道坐标记为 t,δ 或 α,δ.这里的 t 称为天体的时角,由 A 点沿赤道向西量到时圈,时角常用 α 代替,α 称为赤经,由春分点 Υ 沿赤道向东量到时圈,它与 t 的关系为

$$\alpha=S-t.$$

S 是春分点的时角,即测站的地方恒星时;δ 称为赤纬,由时圈与赤道的交点 D 沿时圈向北天极方向量到天体.

上述两种站心坐标系可分别记作 $O-\Upsilon\Upsilon'P$ 和 $O-NWZ$,其中 Υ' 应在赤道 QQ' 上指向 Υ 以东 90° 的方向(见图 1.2).若记航天器在这两种站心坐标系中的位置矢量各为 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\rho}'$,有

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

$$\boldsymbol{\rho}' = \rho \begin{pmatrix} \cos h\cos A \\ -\cos h\sin A \\ \sin h \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

ρ 是航天器到测站的距离.

如果测角资料 (α,δ) 是照相或用 CCD 技术等获得的,因采用了背景星定位的方法,给出的 (α,δ) 是对应历元(如 J2000.0)站心平赤道坐标系的,为了与上述站心赤道坐标系加以区别,暂记作 (α_J,δ_J),相应地有

$$\boldsymbol{\rho}_J = \rho \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}_{J2000.0}. \tag{1.51}$$

根据上述两种站心坐标系的定义,由图 1.2 不难看出,经两次坐标轴旋转,站心地平坐标系即与站心赤道坐标系重合,故它们之间的转换关系为

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{ZR})\boldsymbol{\rho}', \tag{1.52}$$

$$(\mathbf{ZR}) = \boldsymbol{R}_z(180^\circ - S)\boldsymbol{R}_y(90^\circ - \varphi). \tag{1.53}$$

其中 S 是地方(对应测站)恒星时. 由(1.51)式和(1.52)式可给出航天器的两种测角资料 (α,δ) 和 (A,h) 之间的具体函数关系,即

$$\begin{cases} \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{-\cos\delta\sin(S-\alpha)}{\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos(S-\alpha)}, \\ \sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(S-\alpha), \end{cases} \tag{1.54}$$

或

$$\begin{cases} \tan(S-\alpha) = \dfrac{\sin(S-\alpha)}{\cos(S-\alpha)} = \dfrac{-\cos h\sin A}{\cos\varphi\sin h - \sin\varphi\cos h\cos A}, \\ \sin\delta = \sin\varphi\sin h + \cos\varphi\cos h\cos A. \end{cases} \tag{1.55}$$

2. 站心坐标系与空间坐标系之间的转换关系

在处理航天器运行的轨道问题中,需将观测量与空间坐标相联系. 对于人造地球卫星而言,即需要给出站心坐标系与历元平赤道地心系和轨道坐标系之间的转换关系. 这里各坐标系中位置矢量的表示仍采用前面表 1.2 中引用的符号.

由于站心赤道坐标系的主方向(x 轴)指向瞬时真春分点,故它与地固坐标系之间的转换关系为旋转加平移,即

$$\boldsymbol{R} = (\mathbf{ER})\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}_A. \tag{1.56}$$

其中(ER)即地球自转矩阵，见(1.30)式，$\boldsymbol{R}_A$ 是测站在地固坐标系中的位置矢量. 下面给出两种站心坐标系以及站心坐标系与地心坐标系之间的转换关系.

通过地固坐标系即可知，站心赤道坐标系和站心地平坐标系与历元平赤道地心坐标系之间的转换关系分别为

$$\boldsymbol{r} = (\mathbf{HG})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = (\mathbf{HG})^{\mathrm{T}}[(\mathbf{ER})\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}_A] \tag{1.57}$$

和

$$\boldsymbol{r} = (\mathbf{HG})^{\mathrm{T}}[(\mathbf{ER})(\mathbf{ZR})\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{R}_A], \tag{1.58}$$

矩阵(HG)的表达式见(1.34)式. 根据 $S = S_G + \lambda$，λ 是测站经度，记矩阵(ER)(ZR)为(EZ)，则可表示为

$$\begin{aligned}(\mathbf{EZ}) &= (\mathbf{ER})(\mathbf{ZR}) \\ &= \boldsymbol{R}_z(180^\circ - S + S_G)\boldsymbol{R}_y(90^\circ - \varphi) \\ &= \boldsymbol{R}_z(180^\circ - \lambda)\boldsymbol{R}_y(90^\circ - \varphi).\end{aligned} \tag{1.59}$$

前面提到的历元站心平赤道坐标系与历元平赤道地心系之间的转换关系较简单，就是经过一个平移，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}_J + \boldsymbol{r}_A, \\ \boldsymbol{r}_A = (\mathbf{HG})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_A.\end{cases} \tag{1.60}$$

由地固坐标系与轨道坐标系之间的转换关系(1.44)式可知，站心赤道坐标系和站心地平坐标系与轨道坐标系之间的转换关系分别为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}[(\mathbf{ER})\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}_A], \tag{1.61}$$

或

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}[(\mathbf{EZ})\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{R}_A]. \tag{1.62}$$

历元站心平赤道坐标系与轨道坐标系的转换关系为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{GR})[\boldsymbol{\rho}_J + \boldsymbol{r}_A] \approx \boldsymbol{U}[\boldsymbol{\rho}_J + \boldsymbol{r}_A]. \tag{1.63}$$

其中矩阵 U 见(1.40)式.

3. 观测站的站址坐标

观测站的站址(指测站的标准点，简称测站)坐标用 H,λ,φ 三个分量表示，它们的定义如下.

H：大地高. 它是从站址点沿法线方向到参考椭球面(参考椭球体是地固坐标系建立的依据，极是 CIO，其中心即当作地心)的距离. 而到大地水准面的高度称为正高，亦称海拔高度，它与大地高之差称为高程异常.

λ：大地经度(亦称测地经度)，简称站址经度. 它是通过站址的大地子

午面（与辅助天球相交截出的大圆）与过格林尼治的大地子午面（称为本初子午面）之间的夹角，从本初子午面向东计量，由 0°到 360°.

φ：大地纬度（亦称测地纬度），简称站址纬度. 它是通过站址的参考椭球面的法线与赤道面的夹角，从赤道面向北计量为正，由 0°到 90°，向南计量为负，由 0°到 −90°，大地纬度不同于天文纬度（它是站址点的铅垂线与赤道面的夹角），即同一点的铅垂线与相应的参考椭球面的法线通常并不重合，此即垂线偏差.

上述站址坐标 H,λ,φ 亦称为大地坐标. 对于一般精度要求，无需区分大地高与正高、大地纬度与天文纬度.

根据站址坐标的定义，在地固坐标系中，测站位置矢量 $\boldsymbol{R}_A$ 的三个分量 (X_A, Y_A, Z_A) 为

$$\begin{cases} X_A = (N+H)\cos\varphi\cos\lambda, \\ Y_A = (N+H)\cos\varphi\sin\lambda, \\ Z_A = [N(1-\epsilon)^2 + H]\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.64}$$

其中

$$N = a_e[\cos^2\varphi + (1-\epsilon)^2\sin^2\varphi]^{-1/2}, \tag{1.65}$$

a_e 是参考椭球体的赤道半径，ϵ 参考椭球体的扁率. 如果知道测站的地心距 R 和地心纬度 φ'，则有

$$\begin{cases} X_A = R\cos\varphi'\cos\lambda, \\ Y_A = R\cos\varphi'\sin\lambda, \\ Z_A = R\sin\varphi'. \end{cases} \tag{1.66}$$

若在轨道坐标系中讨论问题，相应的测站位置矢量记为 $\boldsymbol{r}_A'$，坐标分量为 X,Y,Z. 根据转换关系(1.44)，有

$$\boldsymbol{r}_A' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_A. \tag{1.67}$$

对于一般精度要求，不必考虑极移，那么轨道坐标系中的测站坐标可简化为

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \cos\varphi'\cos(\theta_G+\lambda) \\ \cos\varphi'\sin(\theta_G+\lambda) \\ \sin\varphi' \end{pmatrix}. \tag{1.68}$$

目前对航天器观测所得的资料基本上有四种类型，即

(1) 光学测角资料（Ⅰ）——地平坐标 (A,h) 型；

(2) 光学测角资料（Ⅱ）——赤道坐标 (α,δ) 型；

(3) 多普勒测速 $\dot{\rho}$ 型；

(4) 激光或雷达测距 ρ 型.

在取得原始观测资料后，需要经过一系列改正才能提供可用资料. 这些改正包括天文系统差(如大气折射、光行差等)，各种物理因素的影响(如大气对流层、电离层的影响等)以及仪器误差等. 关于这些改正，请读者参看有关书籍和文献，本书不再介绍. 但有一点需要说明，即所有观测资料对应的空间坐标系必须清楚，显然，测速和测距资料并不存在这个问题，而需要注意的是光学测角资料，对此，前面已作了详尽的阐述.

除上述四种基本类型，还有星上测量(雷达测高等)和星间测量(如星载 GPS 测距等)，但相应的空间观测几何与前面阐述的内容无实质性差别，不再介绍.

§1.4 航天器的可见条件

对人造地球卫星的观测，最早是光学观测，随着科技的进步，观测手段也多样了，如无线电观测、激光观测等等，但光学观测仍然是最主要的观测手段，特别是对于空间目标监视以及空间碎片的观测只能依赖光学手段. 光学观测的可见条件也具有代表性，可适用于其他观测手段. 因此，这里就以光学观测为例，说明航天器的可见条件.

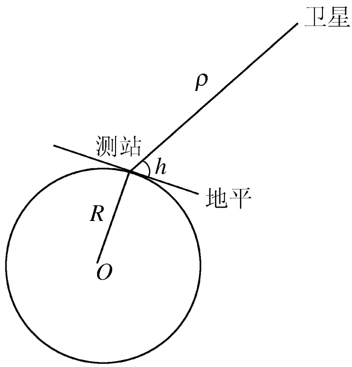

图 1.3 航天器与测站的几何关系

航天器的观测通常是从地面测站进行的，首先就是测站和航天器的几何位置关系，最直观反应这个关系的量就是卫星对测站的方位角 A 、地平高度 h 以及斜距 ρ . 如图 1.3 所示. 方位角 A 是自北点向东起量；地平高度 h 从地平起量，范围在 $\pm 90°$之间；斜距 ρ 为测站到航天器的距离. 由坐标转换关系(1.58)式和(1.59)式可知，航天器在地固系中的坐标为

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}_z(180° - \lambda)\boldsymbol{R}_y(90° - \varphi)\begin{pmatrix} \rho\cos h\cos A \\ -\rho\cos h\sin A \\ \rho\sin h \end{pmatrix}. \tag{1.69}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为测站在地固系中的坐标.

航天器和测站间的一个重要关系是卫星能否被测站观测到，一个必要条件是卫星必出现在地平以上，即 $h > 0$. 但为了保证观测精度通常需要 $h > h_0$ ，h_0 在不同情况下取不同的值，通常在 $5°\sim15°$. 如图 1.4，r 为卫星的

地心距，R 为测站的地心距，θ 为卫星和测站的地心张角，ρ 为斜距. 容易导出如下关系：

$$\theta = \arccos\left(\frac{R}{r}\cosh\right) - h, \quad (1.70)$$

$$\tan h = \frac{r\cos\theta - R}{r\sin\theta}, \quad (1.71)$$

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta. \quad (1.72)$$

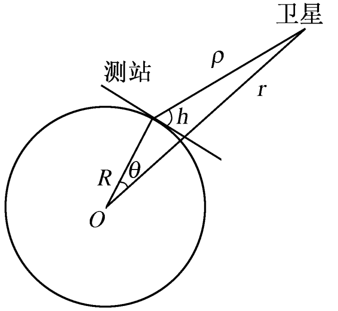

图 1.4　航天器的可观测区域

由此可见，要使卫星的地平高度不小于 h_0，那么卫星同测站的地心张角 θ 必须满足下列条件：

$$\theta < \theta_0 = \arccos\left(\frac{R}{r}\cosh_0\right) - h_0. \quad (1.73)$$

由 θ_0 确定的范围被称为可见范围，航天器在这个范围内才有可能被观测到. 由于大多数卫星都是近圆轨道，可用轨道半长径来代替上式中的 r，用于估计所需要的 θ_0. 无论利用哪种设备观测，上述可见范围都是一个必要条件.

航天器进入可见范围并不一定能被光学设备观测到，还需要考虑测站的天空背景是不是被太阳照亮，明亮的天空背景使得航天器不能被观测到. 这一条件可由太阳与测站的相对几何关系来决定，太阳与测站的相对几何关系通常用太阳的地平高度 β 来反映，对于观测来说需要太阳的地平高度满足条件 $\beta < \beta_0$. β_0 的值将根据不同的观测目标和观测要求来确定. 注意，这里的 β 意味着在地平以下的值，即 $\beta < 0$.

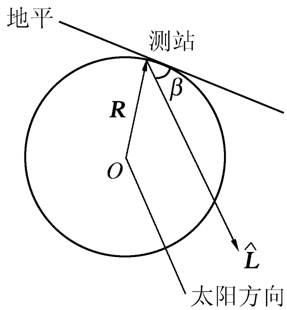

图 1.5　太阳和测站的关系

由于太阳很远，可认为太阳在无穷远处（即忽略视差），地球上的太阳光线为平行光. 从图 1.5 上可看出，测站位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 与太阳方向 $\hat{\boldsymbol{L}}$（单位矢量）的夹角大于 $90° + |\beta_0|$，即在第二象限，此条件如下：

$$\arccos\frac{\hat{\boldsymbol{L}} \cdot \boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} > 90° + |\beta_0|. \quad (1.74)$$

在地面由 $90° + |\beta_0|$ 确定的边界称为日界线，日界线把地球表面分为两个区域，即“白天”和“黑夜”. 当测站为黑夜时才能进行光学观测.

光学观测还需要航天器表面被太阳照亮,此时设备才能观测到反射的光线. 这一条件是由航天器与太阳的相对位置关系决定的,也就是航天器必须在地影外. 对于这一条件,只需考虑简单的柱形地影即可,见图 1.6.

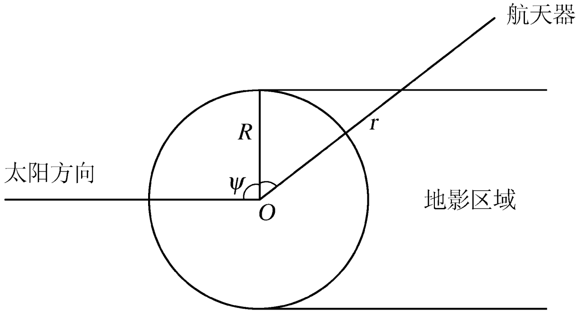

图 1.6　航天器进出地影的平面图

由图 1.6 可知,地影边界上满足下述条件:

$$\begin{cases} \sin\psi = \dfrac{R}{r}, \\ \cos\psi = -\sqrt{1-\dfrac{R^2}{r^2}}. \end{cases} \tag{1.75}$$

(1.75)式中 $\cos\psi$ 的右端取负号,是由于 $\psi > 90°$. 当航天器和太阳方向的夹角小于 ψ 时,航天器不在地影内,可以被太阳照亮. 太阳与地心的连线与椭球面的交点被称为日下点,地面上以日下点为中心半径为 ψ 的区域就是航天器可以被照亮的区域,该区域边界就称为地影线. 同样可用轨道半长径代替 r 来估计无地影区域的大小,即

$$\cos\psi = -\sqrt{1-\frac{R^2}{a^2}}. \tag{1.76}$$

对于航天器的光学观测而言,前面提到的三个条件都必须满足. 对于一个航天器,可观测范围相对测站是不变的,而日界线和地影线随太阳位置的变化而由东向西移动. 对于其他观测,如激光观测、无线电观测等,上述后两个条件理论上不是必需的.

§1.5　航天器的视运动——星下点轨迹与覆盖区域

航天器在高于地面几百公里以上的空间飞行,为了更好地表示它的运动状态,特别是反映它的运动与地球的相对关系,常用星下点的轨迹描绘.

航天器到地心的连线与地球参考椭球面的交点称为星下点，其位置用球坐标 (λ,φ) 来表示. 这里的 (λ,φ) 是大地经纬度，亦可用地心经纬度 (λ,φ') 来表示. 这一星下点的定义亦可用于绕飞其他中心天体（如月球，火星等）的航天器，只要相应的地球量改为另一中心天体即可.

关于星下点位置的计算，首先要将航天器的空间位置量转换到地固坐标系中. 例如定轨预报给出的是 J2000 地心天球坐标系中航天器的位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$，则首先要根据 §1.2 中介绍的坐标转换关系将 $\boldsymbol{r}$ 转换为地固坐标系中的位置矢量 $\boldsymbol{R}(t)$，由图 1.1 给出的转换关系可知：

$$\boldsymbol{R}(t) = (\mathbf{HG})\boldsymbol{r}(t)\ . \tag{1.77}$$

如果描述星下点位置需要的是地心纬度 φ'，则很简单，有如下关系：

$$\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi'\cos\lambda \\ R\cos\varphi'\sin\lambda \\ R\sin\varphi' \end{pmatrix}. \tag{1.78}$$

其中 R 是航天器的地心距，而 (λ,φ') 即可作为星下点在地球参考椭球面上的位置. 由(1.78)式不难给出 (λ,φ') 的计算公式如下：

$$\lambda = \arctan(Y/X), \tag{1.79}$$

$$\varphi' = \arcsin\left(\frac{Z}{R}\right) = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right). \tag{1.80}$$

如果需要的是大地纬度 φ，则可根据 §1.2 中给出的测站位置矢量 $\boldsymbol{R}_A$ 的计算公式(1.64)，令大地高 $H=0$ 即得：

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{1}{(1-e)^2}\tan\varphi' \\ &= \frac{1}{(1-e)^2}\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right). \end{aligned} \tag{1.81}$$

随着航天器的运行，星下点 $(\lambda(t),\varphi(t))$ 的连线即描绘出在自转的地球表面上的一条轨迹. 星下点轨迹清楚地反映了航天器运动和地面的关系，结合上一节可观测条件所对应的可观测范围、日界线和地影线就很容易体现航天器的动态观测几何.

航天器对地面的覆盖问题，可以从两个角度来看，一是卫星看地面的范围；另一个是地面可以看见卫星的范围. 航天器上的照相机对地面进行拍摄就属于卫星对地观测情况；前面提到卫星的可观测范围，是从测站角度考虑，当卫星进入该区域则可被该测站观测到. 随着卫星运动，可以找出地面可观测该卫星的区域，测站如果在该区域中则可观测该卫星. 覆盖几何图像见图 1.7.

对于第一种情况，已知 $\theta' = \theta_0'$ ，那么

$$\sin(90^\circ + h) = \frac{r\sin\theta_0'}{R}, \quad (1.82)$$

$$\theta = 180^\circ - \theta_0' - (90^\circ + h)$$
$$= 90^\circ - \theta_0' - h. \quad (1.83)$$

对于第二种情况，已知 $h = h_0$ ，那么地面看卫星的范围如下：

$$\sin(\theta') = \frac{R\sin(90^\circ + h_0)}{r}, \quad (1.84)$$

$$\theta = 180^\circ - \theta' - (90^\circ + h_0)$$
$$= 90^\circ - \theta' - h_0. \quad (1.85)$$

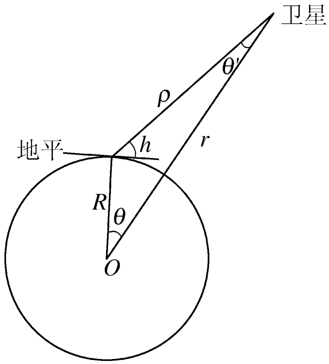

图 1.7 航天器对地面的覆盖

相应的覆盖范围在地图上即以星下点为中心，半径为 θ 的圆. 随着卫星运动这些区域形成的带就是卫星相应的覆盖范围. 对于近圆轨道，同样可以用 a 代替上式中的 r ，估计基本的覆盖范围.

参 考 文 献

[1] 中国科学院紫金山天文台. 中国天文年历. 北京：科学出版社，每年一本
[2] 夏一飞，黄天衣. 球面天文学. 南京：南京大学出版社，1995
[3] 刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京：高等教育出版社，1992
[4] 刘林. 航天器轨道理论. 北京：国防工业出版社，2000

第 2 章　航天器在轨运行的无摄运动

若将地球或任何一个探测目标天体(如大行星、小行星等)看成一个质量密度分布均匀的球体,则它对绕其运行的航天器的引力作用可等效于一个质点,相当于质量全部集中在该天体质心上,于是就构成一个简单的二体系统,一个中心天体和一个运动天体. 以地球和人造卫星为例,将坐标系的原点放在地心上,讨论人造卫星相对地心的运动,这是很自然的. 卫星运动方程可写成

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{2.1}$$

其中 r 是卫星的地心向径,$\mu=GM$ 是地心引力常数,这里 M 是地球质量.

严格地说,人造卫星对地球亦有引力作用,地心坐标系并非惯性参考系. 因此,方程(2.1)的原形式应为

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)-\frac{Gm}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\ &= -\frac{G(M+m)}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

方程右端第二项即惯性加速度. m 是人造卫星的质量,相对地球质量而言它是一个小量,例如一个 1 吨重的卫星,其质量与地球质量之比只有 $1:10^{22}$. 这个量对定轨精度的影响显然无需考虑,至少在当前的测量精度意义下是如此. 因此,卫星运动方程就可写成(2.1)的形式.

方程(2.1)或(2.2)是可积的,下面我们首先给出相应的六个独立积分,在此基础上再进行各种讨论.

§ 2.1　二体问题的六个积分与轨道根数

1. 动量矩积分(或称面积积分)

根据有心力的性质,可直接写出方程(2.1)的动量矩积分. 由方程(2.1)

很容易推出该积分，若记 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ 为面积速度矢量，则由方程(2.1)可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=0.$$

这表明 $\boldsymbol{h}$ 为常矢量，人造卫星绕地球的运动为一平面运动，相应的动量矩积分可写成

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=h\hat{\boldsymbol{R}}. \tag{2.3}$$

其中 $h=|\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}|$ 为面积速度常数，$\hat{\boldsymbol{R}}$ 即表示面积速度方向，它是卫星运动平面的法向单位矢量. 如果我们采用地心赤道坐标系，可用图 2.1 来描绘. 图中大圆 AA' 和 BB' 分别表示地球赤道和卫星轨道在辅助天球上的投影，X 方向即春分点方向，R 方向即轨道面法向，i 就是卫星轨道面与赤道面的夹角，Ω 即轨道升交点方向 N(或称节点)的赤经，在此坐标系中，利用球面三角形的余弦公式(或采用坐标旋转的方法)，不难导出法向单位矢量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 的表达式为

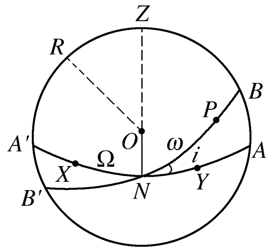

图 2.1 地心辅助天球

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\-\sin i\cos\Omega\\\cos i\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

积分(2.3)包含了 h,i,Ω 三个积分常数，h 是面积速度的两倍，i,Ω 则确定了卫星轨道平面的空间方向.

2. 运动平面内的轨道积分和活力公式

既然是平面运动，而相应的平面已由(i,Ω)确定，那么，我们即可在这一确定的平面内讨论降阶后的方程. 引入平面极坐标(r,θ)，运动方程(2.1)可按径向和横向两个分量写成

$$\begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\dfrac{\mu}{r^2},\\ r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})=0.\end{cases} \tag{2.5}$$

第二个方程给出一个积分： $r^2\dot{\theta}=h,$ (2.6)

由空间极坐标(三个轴方向的单位矢量分别记作 $\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{k}},\hat{k}$ 即前面的 $\hat{\boldsymbol{R}}$)中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}},\quad \dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}},\tag{2.7}$$

立即可得

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{k}}=r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{R}}.$$

这表明积分(2.6)就是动量矩积分(2.3)式的标量形式. 方程(2.5)和(2.6)构成了平面运动系统对应的三阶常微分方程,需要寻找三个独立积分.

上述方程组的特点是不显含自变量 t,由常微分方程的基本知识可知,对于这类方程,通过分离 t 的方法可使它降一阶,即能够首先讨论 r 对 θ 的变化规律. 为此,记 $r'=\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta,r''=\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}\theta^2$,由(2.6)式得

$$\begin{cases}\dot{r}=\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\dfrac{h}{r^2}r',\\[2ex] \ddot{r}=\mathrm{d}\dot{r}/\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\dfrac{h^2}{r^2}\left(-\dfrac{2}{r^3}r'^2+\dfrac{1}{r^2}r''\right).\end{cases}\tag{2.8}$$

将这一关系代入方程(2.5)的第一个方程即可给出 r 对 θ 的二阶方程. 但相应的方程比较复杂,仍不便于求解. 如果在降阶的同时,再作变量变换

$$r=1/u.\tag{2.9}$$

有

$$\begin{cases}\dot{r}=-hu',\\ \ddot{r}=-h^2u^2u''.\end{cases}\tag{2.10}$$

利用这一关系即可得到 u 对 θ 的一个二阶常系数线性方程:

$$u''+u=\frac{\mu}{h^2}.\tag{2.11}$$

这是可积的. 顺便提一下,如果将原方程右端作用力 μ/r^2 改为(或增加)μ/r^n 的形式,$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$,尽管经上述变换所得方程不同于(2.11)式,但仍然是可积的,这留给读者作为一道习题.

方程(2.11)给出一轨道积分:

$$r=\frac{1}{u}=\frac{h^2/\mu}{1+e\cos(\theta-\omega)}.\tag{2.12}$$

e 和 ω 即两个新积分常数. 这是一圆锥曲线,在一定条件下它表示椭圆,地心就在椭圆的焦点上. 对于人造地球卫星而言,当然属于这种情况,至于深空探测器所遇到的抛物线轨道和双曲线轨道,将在后面 §2.4 中介绍. 既然是椭圆,可令

$$p=a(1-e^2)=h^2/\mu,\tag{2.13}$$

那么积分(2.6)和(2.12)又可写成

$$r^2\dot{\theta} = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \tag{2.14}$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)}. \tag{2.15}$$

积分常数 h 由 a 代替，p 是椭圆的半通径，a 是半长径，e 是偏心率，ω 则称为人造卫星过近地点的经度（或称幅角），因 $\theta=\omega$ 时，r 达到最小值. ω 的几何意义见图 2.1，图中 P 是近地点方向，幅角 ω 从节点 N 沿卫星运动方向计量.

将 $r=r(\theta)$ 的关系代入方程(2.14)，原则上可以给出最后一个与时间 t 有关的积分，我们暂时放一下，先导出椭圆运动的几个常用关系. 由(2.14)和(2.15)两式，经简单的运算可得

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right). \tag{2.16}$$

此即活力公式. 另外，既然是椭圆运动，那么卫星向径在一个周期 T 内扫过的面积就是椭圆的面积 $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$，由此可知面积速度 $\frac{h}{2}$ 为

$$\frac{h}{2} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}/2 = \frac{\pi a^2\sqrt{(1-e^2)}}{T}.$$

整理后写成下列的形式：

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}. \tag{2.17}$$

若引进平均角速度（通常称其为平运动速度）$n=2\pi/T$，则上式又可写成

$$n^2a^3 = \mu. \tag{2.18}$$

这两个表达式就是万有引力定律导出的开普勒(Kepler)第三定律.

3. 第六个积分——开普勒方程

为了运算方便，在寻找第六个积分时，不直接引用方程(2.14)按 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 求解，而是利用(2.16)式按 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 积分，有

$$\dot{r}^2 = \mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) - \mu\frac{p}{r^2}.$$

通过(2.18)式消去 μ 整理后得

$$n\mathrm{d}t = \frac{r\mathrm{d}r}{a\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}. \tag{2.19}$$

对于椭圆轨道，r 的极大和极小值分别为

$$r_{\max} = a(1+e), \quad r_{\min} = a(1-e).$$

因此有 $|a-r| \leqslant ae$，故可引入辅助量 E：

$$a - r = ae\cos E$$

或

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{2.20}$$

代入(2.19)式可得

$$n\mathrm{d}t = (1 - e\cos E)\mathrm{d}E.$$

于是给出第六个积分：

$$E - e\sin E = n(t - \tau). \tag{2.21}$$

这又称为开普勒方程，τ 是积分常数. 当 $t=\tau$ 时，$E=0$，相应的 $r=a(1-e)=r_{\min}$，故 τ 就是卫星过近地点的时刻.

最后引进两个角度 f 和 M，定义如下：

$$f = \theta - \omega, \quad M = n(t - \tau). \tag{2.22}$$

f，M 和 E 是三个角度，分别称为真近点角，平近点角和偏近点角，都是从近地点开始计量，E 的几何意义见图 2.2，图中 O 是椭圆焦点，O' 是辅助圆的圆心. 显然，在二体问题中，面积积分可简化为

$$r^2 \dot{f} = h. \tag{2.23}$$

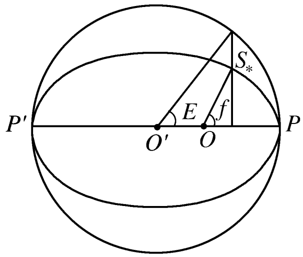

图 2.2　椭圆轨道和辅助圆

上述六个独立积分常数又称为轨道根数，只要初始条件给定，它们就完全被确定. a，e 是确定轨道大小和形状的根数；i，Ω 和 ω 是轨道平面和拱线（长半轴）的空间定向根数；第六个根数 τ 常被三种近点角代替，特别是平近点角 M，常被引用，它们本身同时包含时间 t，而不是常数，即随 t 而变化，故也被称作时间根数.

§2.2　椭圆运动的基本关系式

原则上说，上述六个积分就完全确定了二体问题意义下人造卫星绕地球的运动，但这六个积分的表达形式有时使用不便，有必要在它们的基础上导出一些常用关系式. 这里将根据理论研究和实际工作的需要进行整理，所涉及到的量，不外乎六个根数，时间 t、各种近点角、向径、速度等.

1. 椭圆运动中各量之间的几何关系

首先从图 2.2 和开普勒方程不难看出，三种近点角的象限关系很清楚，它们同时处在[0，π]或[π，2π]区间上，这是一个很重要的关系，它们之间

的联系即

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}=a(1-e\cos E),\tag{2.24}$$

$$E-e\sin E=M.\tag{2.25}$$

另外,根据椭圆的性质可知,图 2.2 中的$\overline{OO'}=ae$,于是有

$$r\cos f=a(\cos E-e).\tag{2.26}$$

由此可立即导出

$$r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin E,\tag{2.27}$$

$$\tan\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}.\tag{2.28}$$

2. 椭圆运动中一些量对轨道根数的偏导数

在研究人造卫星的运动规律或计算其位置时,除遇到六个根数 a,e,i,Ω,ω,M 外,还会出现由它们构成的一些函数,这些函数关系中的基本量就是 E,f,r(或写成$\frac{a}{r}$较为方便),只要导出这些量对根数的偏导数就够了. 首先,我们来分析函数关系,由方程(2.24)～(2.26)可知

$$\begin{cases}E=E(e,M),\\ \dfrac{a}{r}=\dfrac{a}{r}(e,\ E(e,\ M))=\dfrac{a}{r}(e,M),\\ f=f(e,\ E(e,\ M),\ \dfrac{a}{r}(e,M))=f(e,M).\end{cases}\tag{2.29}$$

那么,利用前面的几何关系即可推出相应的偏导数,它们是

$$\frac{\partial E}{\partial e}=\frac{a}{r}\sin E,\quad \frac{\partial E}{\partial M}=\frac{a}{r},\tag{2.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{a}{r}\right)=\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos f,\quad \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{a}{r}\right)=-\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{r}\right)^2\sin f,\tag{2.31}$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}=\frac{1}{1-e^2}\left(1+\frac{p}{r}\right)\sin f,\quad \frac{\partial f}{\partial M}=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2.\tag{2.32}$$

有时为了需要,基本变量不用上述六个根数,而改用 $a,i,\Omega,\xi=e\cos\omega,\eta=e\sin\omega,\lambda=M+\omega$ 六个变量,f,E 将由 $u=f+\omega,\tilde{u}=E+\omega$ 代替. 若要推出相应的偏导数,其关键仍在于首先分析清楚函数关系. 由

$$e^2=\xi^2+\eta^2,\omega=\arctan(\eta/\xi),M=\lambda-\arctan(\eta/\xi),\tag{2.33}$$

可知

$$\begin{cases}f=f(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda)),\\ E=E(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda)),\\ \dfrac{a}{r}=\dfrac{a}{r}(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda)).\end{cases}\tag{2.34}$$

利用这一关系再去推导相应的偏导数显然是容易的，例如

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial e}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial e}{\partial \xi}+\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial M}{\partial \xi}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial e}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial e}{\partial \eta}+\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial M}{\partial \eta}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial M}{\partial \lambda}.\end{cases} \tag{2.35}$$

其中$\dfrac{\partial}{\partial e}\left(\dfrac{a}{r}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)$前面已给出，剩下的问题只是根据(2.33)式去推导$\dfrac{\partial e}{\partial \xi}$，$\dfrac{\partial M}{\partial \xi}$，…，这对读者来说并不是难题.

3. 近点角 M,E,f 与时间 t 之间的微分关系

根据三种近点角的定义，利用面积积分(2.23)和开普勒方程(2.25)以及上述关系，可给出

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n,\quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=n\left(\frac{a}{r}\right),\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=n\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2. \tag{2.36}$$

在后面要讨论的问题中，积分时常遇到上述几种变量之间的转换，为了方便，我们不妨根据(2.36)式将这些关系整理如下：

$$\mathrm{d}M=n\mathrm{d}t=\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}f, \tag{2.37}$$

$$\mathrm{d}E=n\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}M=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}f, \tag{2.38}$$

$$\mathrm{d}f=n\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\mathrm{d}t=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\mathrm{d}M=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}E, \tag{2.39}$$

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\mathrm{d}M=\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E=\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}f. \tag{2.40}$$

注意，这组微分关系是建立在六个轨道根数为常数基础上的，严格地说，它们仅适用于二体问题，这与前面两组关系式不一样.

4. 向径 r 和速度 $\dot{r}$ 的表达式

作为二阶方程(2.1)的完整解，应该有

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t;C_1,\cdots,C_6), \\ \dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}(t;C_1,\cdots,C_6).\end{cases} \tag{2.41}$$

既然六个积分已得到,那么可以写出(2.41)式的具体形式.这里的积分常数 $C_1, \cdots, C_6$ 即前面的六个轨道根数,其中 C_6 是 τ,如果改用 M,(2.41)式中的 t 将包含在 M 中.

显然有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= r\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= r\cos f\,\hat{\boldsymbol{P}} + r\sin f\,\hat{\boldsymbol{Q}} \\ &= a(\cos E - e)\hat{\boldsymbol{P}} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\,\hat{\boldsymbol{Q}}.\end{aligned} \tag{2.42}$$

其中 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 分别表示近地点和半通径方向的单位矢量.通过坐标旋转,很容易给出它们在地心赤道坐标系中的表达式.若记

$$\hat{\boldsymbol{P}}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

则

$$\hat{\boldsymbol{P}} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\hat{\boldsymbol{P}}_0. \tag{2.44}$$

关于旋转矩阵 $R_z(-\Omega)$,$R_x(-i)$, $R_z(-\omega)$ 的表达式请见第一章(1.10)~(1.12)式.至于 $\hat{Q}$ 的表达式,只要将 $R_z(-\omega)$ 改为 $R_z(-(\omega+90°))$ 即得.

为适合某些应用的需要,这里将 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 的具体表达式写出,即

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix}\cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i\\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i\\ \sin\omega\sin i\end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

$$\hat{\boldsymbol{Q}} = \begin{pmatrix}-\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i\\ -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i\\ \cos\omega\sin i\end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

关于 $\dot{\boldsymbol{r}}$,根据二体问题的性质,由 $\boldsymbol{r}$ 的表达式(2.42)可得

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{2.47}$$

利用前面的偏导数和微分关系即可具体写出上述表达式,即

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin f\hat{\boldsymbol{P}} + \sqrt{\frac{\mu}{p}}(\cos f + e)\hat{\boldsymbol{Q}} \\ &= \frac{\sqrt{\mu a}}{r}\left[-\sin E\hat{\boldsymbol{P}} + \sqrt{1-e^2}\cos E\hat{\boldsymbol{Q}}\right].\end{aligned} \tag{2.48}$$

5. 椭圆运动的展开式

在很多问题中,需要将有关量通过平近点角 M 表示成时间 t 的显函

数，但由开普勒方程可知，这必将涉及到超越函数关系，无法直接达到上述要求. 因此，必须将 E，f，$\left(\dfrac{a}{r}\right)$等量展成 M 的三角级数，而在这些展开式中又要用到两个特殊函数：第一类贝塞耳函数和超几何函数(或称超几何级数)，故首先简单地介绍一下这两个函数的有关知识，详细内容请查阅有关特殊函数的书籍.

第一类贝塞耳函数 $\mathrm{J}_n(x)$是二阶线性常微分方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-n^2)y=0$$

的一个解，它由下列级数表达：

$$\mathrm{J}_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(n+k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \tag{2.49}$$

其中 n 为整数($n=0,1,2,\cdots$)，x 为任意实数. 它又是 $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$展开式的系数，即

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)z^n. \tag{2.50}$$

其中 e 是自然对数的底，而 z 可以是复变量. 由此可给出 $\mathrm{J}_n(x)$的积分表达式，即

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(x\sin\theta-n\theta)}\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{2.51}$$

根据 $\mathrm{J}_n(x)$的定义，不难得出下列一些性质：

$$\begin{cases}\mathrm{J}_{-n}(x)=(-1)^n\mathrm{J}_n(x),\\\mathrm{J}_n(-x)=(-1)^n\mathrm{J}_n(x),\\\mathrm{J}_{-n}(-x)=\mathrm{J}_n(x),\\\mathrm{J}_n(x)=\dfrac{x}{2n}[\mathrm{J}_{n-1}(x)+\mathrm{J}_{n+1}(x)],\\\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_n(x)=\dfrac{1}{2}[\mathrm{J}_{n-1}(x)-\mathrm{J}_{n+1}(x)].\end{cases} \tag{2.52}$$

超几何函数 $F(a,b,c;x)$是二阶线性常微分方程

$$(x^2-x)y''+[(a+b+1)x-c]y'+aby=0$$

的一个解，即

$$F(a,b,c;x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdot(b+n-1)}{n!\cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n$$

$$= 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \cdots. \quad (2.53)$$

其中 a, b, c 是常数.

（1）$\sin kE$, $\cos kE$ 和 E 的展开式

这里将直接列出展开结果，它们在文[1～3]中有详细的推导.

对 $k=1$，有

$$\sin E = \frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM, \quad (2.54)$$

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)]\cos nM$$

$$= -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[J_n(ne)]\cos nM. \quad (2.55)$$

对 $k \geqslant 2$，有

$$\sin kE = k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[J_{n-k}(ne) + J_{n+k}(ne)]\sin nM, \quad (2.56)$$

$$\cos kE = k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[J_{n-k}(ne) - J_{n+k}(ne)]\cos nM. \quad (2.57)$$

由 $E = M + e\sin E$ 立即可得

$$E = M + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM. \quad (2.58)$$

（2）$\frac{r}{a}$ 和 $\frac{a}{r}$ 的展开式

由 $\frac{r}{a} = 1 - e\cos E$, $\frac{a}{r} = \frac{\partial E}{\partial M}$ 可得

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[J_n(ne)]\cos nM, \quad (2.59)$$

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(ne)\cos nM. \quad (2.60)$$

（3）$\sin f$, $\cos f$ 和 f 的展开式

利用偏导数关系式(2.31)可得

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{a}{r}\right)^{-1} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin f.$$

于是有

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$= 2\sqrt{1-e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[\mathrm{J}_n(ne)]\sin nM. \tag{2.61}$$

由轨道方程(2.15)得出

$$\cos f = \frac{1}{e}\left[-1+(1-e^2)\frac{a}{r}\right]$$

$$= -e+\frac{2}{e}(1-e^2)\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_n(ne)\cos nM, \tag{2.62}$$

利用 $\sin f$ 和 $\cos f$ 的展开式，可给出 f 的展开式，取到 e^4 项有

$$f = M+\left(2e-\frac{1}{4}e^3+\cdots\right)\sin M+\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4+\cdots\right)\sin 2M+$$
$$\left(\frac{13}{12}e^3-\cdots\right)\sin 3M+\left(\frac{103}{96}e^4-\cdots\right)\sin 4M+\cdots. \tag{2.63}$$

(4) $\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos mf$ 和 $\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin mf$ 的展开式

这里 n 和 m 均是任意整数(包括 0). 若仅用上述基本展开式，要给出这两个函数对 M 的三角级数(特别是一般表达式)，那是相当困难的，下面就对这两个函数直接进行傅立叶(Fourier)展开. 函数 $F(f)$ 展成傅立叶级数的基本形式为

$$\begin{cases} F(f) = \dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}(a_p\cos pM+b_p\sin pM), \\ a_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F(f)\cos pM\,\mathrm{d}M, \\ b_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F(f)\sin pM\,\mathrm{d}M, (p=0,1,2,\cdots). \end{cases} \tag{2.64}$$

$\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos mf$ 是偶函数，$b_p=0$，且

$$a_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n[\cos(mf-pM)+\cos(mf+pM)]\mathrm{d}M. \tag{2.65}$$

对于被积函数的第二部分，可令 p 取 $-p$，此时 $p=-1,-2,\cdots,-\infty$，于是有

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos mf = \sum_{p=-\infty}^{\infty}X_p^{n,m}(e)\cos pM$$

$$= X_0^{n,m}(e)+\sum_{p=1}^{\infty}(X_p^{n,m}(e)+X_{-p}^{n,m}(e))\cos pM. \tag{2.66}$$

其中

$$X_p^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos(mf-pM)\mathrm{d}M. \tag{2.67}$$

$\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mf$ 是奇函数，$a_p=0$，b_p 的计算公式为

$$b_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n[\cos(mf-pM)-\cos(mf+pM)]\mathrm{d}M. \tag{2.68}$$

对于被积函数的第二部分的处理同上，结果得

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mf &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^{n,m}(e)\sin pM \\ &= \sum_{p=1}^{\infty}(X_p^{n,m}(e)-X_{-p}^{n,m}(e))\sin pM.\end{aligned} \tag{2.69}$$

由于上述两个函数的展开式系数相同，可用指数形式将这两个函数用统一形式来表达，即

$$\begin{cases}\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(jmf) = \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} X_p^{n,m}(e)\exp(jpM), \\ X_p^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp[j(mf-pM)]\mathrm{d}M.\end{cases} \tag{2.70}$$

其中 $j=\sqrt{-1}$. 因

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(mf-pM)\mathrm{d}M = 0.$$

(2.70)式中的 $X_p^{n,m}(e)$ 就是由(2.67)式表达的 $X_p^{n,m}(e)$，称为汉森(Hansen)系数，它是偏心率 e 的函数. 但它无法用初等函数来表达，只能引用贝塞耳函数和超几何级数，详细推导见文献[1]和[4]，这里列出展开结果.

$$X_p^{n,m} = (1+\beta^2)^{-(n+1)}\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_q(pe)X_{p,q}^{n,m}, \tag{2.71}$$

$$\beta = \frac{1}{e}(1-\sqrt{1-e^2}) = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}. \tag{2.72}$$

$$X_{p,q}^{n,m} = \begin{cases}(-\beta)^{(p-m)-q}\dbinom{n-m+1}{p-m-q}F(p-q-n-1,-m-n-1,p-m-q+1,\beta^2), \\ \qquad\qquad (q\leqslant p-m), \\ (-\beta)^{q-(p-m)}\dbinom{n+m+1}{q-p+m}F(q-p-n-1,\ m-n-1,q-p+m+1,\beta^2), \\ \qquad\qquad (q\geqslant p-m).\end{cases} \tag{2.73}$$

其中 $$\begin{cases}\dbinom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}, \quad \dbinom{-n}{m} = (-1)^m\dbinom{n+m-1}{m}, \\ \dbinom{n}{-m} = \dbinom{-n}{-m} = 0, \quad \dbinom{n}{0} = \dbinom{-n}{0} = 1.\end{cases} \tag{2.74}$$

由(2.67)式即可给出

$$X_{-p}^{n,-m}(e) = X_p^{n,m}(e). \tag{2.75}$$

根据 $J_q(pe)=O(e^q)$，可知

$$X_p^{n,m}(e) = O(e^{|m-p|}). \tag{2.76}$$

这两个性质在具体计算 $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mf$ 和 $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mf$ 的展开式时会用到.

以上各展开式的系数都是关于偏心率 e 的无穷级数，只有当 $e<e_c=0.6627\cdots$ 时才收敛，e_c 称为拉普拉斯(Laplace)极限.

给定 n,m 值和对 e 的取项要求后，根据性质(2.76)就可决定展开式(2.66)和(2.69)求和中 p 取值的范围. 对于人造地球卫星(甚至太阳系中大部分自然天体)的运动状况，绝大部分的轨道偏心率都是比较小的，取到 e^4 项有一定的实用价值. 为此，由性质(2.76)可知，展开式(2.66)和(2.69)的求和中，p 的取值如下：

$$\begin{cases} p = m-5+j,\ j=1,2,\cdots,9 \\ |m-p| \leqslant 4. \end{cases}$$

根据上面的分析，取到 e^4 项，只涉及 9 个 Hansen 系数，它们的简明表达式(e 的多项式)如下：

$$\begin{aligned} X_{m-4}^{n,m}(e) = {} & \frac{e^4}{384}[n^4-(18-8m)n^3+(95-102m+24m^2)n^2- \\ & (142-330m+192m^2-32m^3)n-(206m-283m^2+ \\ & 120m^3-16m^4)], \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned} X_{m-3}^{n,m}(e) = {} & -\frac{e^3}{48}[n^3-(9-6m)n^2+(17-33m+12m^2)n+ \\ & m(26-30m+8m^2)], \end{aligned} \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned} X_{m-2}^{n,m}(e) = {} & \frac{e^2}{8}[n^2-(3-4m)n+m(4m-5)]+\frac{e^4}{96}[n^4- \\ & (6-4m)n^3-(1+3m)n^2+(22-47m+48m^2- \\ & 16m^3)n+m(22-64m+60m^2-16m^3)], \end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned} X_{m-1}^{n,m}(e) = {} & -\frac{e}{2}(n+2m)-\frac{e^3}{16}[n^3-(1-2m)n^2-(3-5m+ \\ & 4m^2)n-m(2-10m+8m^2)], \end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned} X_m^{n,m}(e) = {} & 1+\frac{e^2}{4}(n^2+n-4m^2)+\frac{e^4}{64}[n^4-2n^3-(1+8m^2)n^2+ \\ & 2n-m^2(9-16m^2)], \end{aligned} \tag{2.81}$$

$$X_{m+1}^{n,m}(e) = -\frac{e}{2}(n-2m)-\frac{e^3}{16}[n^3-(1+2m)n^2-(3+5m+$$

$$4m^2)n + m(2 + 10m + 8m^2)]. \tag{2.82}$$

$$X_{m+2}^{n,m}(e) = \frac{e^2}{8}[n^2 - (3+4m)n + m(4m-5)] + \frac{e^4}{96}[n^4 - (6+4m)n^3 - (1-3m)n^2 + (22+47m+48m^2+16m^3)n - m(22+64m+60m^2+16m^3)], \tag{2.83}$$

$$X_{m+3}^{n,m}(e) = -\frac{e^3}{48}[n^3 - (9+6m)n^2 + (17+33m+12m^2)n - m(26+30m+8m^2)]. \tag{2.84}$$

$$X_{m+4}^{n,m}(e) = \frac{e^4}{384}[n^4 - (18+8m)n^3 + (95+102m+24m^2)n^2 - (142+330m+192m^2+32m^3)n + (206m+283m^2+120m^3+16m^4)]. \tag{2.85}$$

事实上,上述 Hansen **系数** $X_{m-k}^{n,m}(e)$**与** $X_{m+k}^{n,m}(e)$**还存在如下关系:**

$$X_{m-k}^{n,m}(e) = X_{(-m)+k}^{n,(-m)}(e), k = 0,1,2\cdots. \tag{2.86}$$

因此,展开式取到 e^4 **项时,实际上只要给出** 5 **个** Hansen **系数** $X_{m+k}^{n,m}(e), k = 0,1,2,3,4.$

利用(2.77)~(2.85)**式,很容易给出地球非球形引力主要摄动项和第三体引力摄动中涉及到的如下六个函数的展开式:**

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4\right) + \left(3 + \frac{27}{8}e^2\right)e\cos M + \left(\frac{9}{2} + \frac{7}{2}e^2\right)e^2\cos 2M + \frac{53}{8}e^3\cos 3M + \frac{77}{8}e^4\cos 4M, \tag{2.87}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{12}e^2\right)e\cos M + \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{41}{48}e^4\right)\cos 2M + \left(\frac{7}{2} - \frac{123}{16}e^2\right)e\cos 3M + \left(\frac{17}{2} - \frac{115}{6}e^2\right)e^2\cos 4M + \frac{845}{48}e^3\cos 5M + \frac{533}{16}e^4\cos 6M, \tag{2.88}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2f = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}e^2\right)e\sin M + \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{37}{48}e^4\right)\sin 2M + \left(\frac{7}{2} - \frac{123}{16}e^2\right)e\sin 3M + \left(\frac{17}{2} - \frac{115}{6}e^2\right)e^2\sin 4M + \frac{845}{48}e^3\sin 5M + \frac{533}{16}e^4\sin 6M, \tag{2.89}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) + \left(-2e + \frac{1}{4}e^3\right)\cos M +$$

$$\left(-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{6}e^4\right)\cos 2M-\frac{1}{4}e^3\cos 3M-\frac{1}{6}e^4\cos 4M, \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f = {} & \frac{5}{2}e^2+\left(-3e+\frac{4}{3}e^3\right)\cos M+\\ & \left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{11}{8}e^4\right)\cos 2M+\left(e-\frac{19}{8}e^3\right)\cos 3M+\\ & \left(e^2-\frac{5}{2}e^4\right)\cos 4M+\frac{25}{24}e^3\cos 5M+\frac{9}{8}e^4\cos 6M,\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f = {} & \left(-3e+\frac{23}{12}e^3\right)\sin M+\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{3}{2}e^4\right)\sin 2M+\\ & \left(e-\frac{19}{8}e^3\right)\sin 3M+\left(e^2-\frac{5}{2}e^4\right)\sin 4M+\frac{25}{24}e^3\sin 5M\\ & +\frac{9}{8}e^4\sin 6M.\end{aligned} \tag{2.92}$$

这里要说明一点，展开式(2.66)**和**(2.69)**式的收敛性能并不好，首先当** $e>e_c=0.6627\cdots$ **时，展开式发散. 因此对展开式截断误差的估计就不像一般二项式**$(1+e)^n$ **展开那么简单，特别当** $e>0.2$ **时，而在** $e<0.2$ **时，勉强可用估计式** $O(\varepsilon^{k+1})$**来表达展开式取到** e^k **项的截断误差，**$\varepsilon=\dfrac{e}{e_c}$.

除上述展开式外，有些工作还需要其他类型的展开式，下面详细说明.

(5) $\left(\dfrac{a}{r}\right)^p$, E, $f-M$ **对** f **的展开式**

$$\left(\frac{a}{r}\right)^p=(1-e^2)^{-p/2}\left[T_0(p,0)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(p,0)\binom{p}{n}\beta^n\cos nf\right], \tag{2.93}$$

其中 p **为正负整数，**β **的意义同前，见**(2.72)**式，**$T_n(p,q)$**由超几何级数定义**[2]**，即**

$$T_n(p,q)\equiv F\left(-p-q,p-q+1,n+1,-\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right). \tag{2.94}$$

当 $p=-1,-2$ **时有**

$$T_n(-1,0)=T_0(-1,0)=1,$$

$$T_n(-2,0)=\frac{1}{n+1}\left(n+\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right),T_0(-2,0)=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.$$

于是可得

$$\left(\frac{r}{a}\right)=\sqrt{1-e^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\beta^n\cos nf\right], \tag{2.95}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \sqrt{1-e^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+n\sqrt{1-e^2})\beta^n\cos nf\right]. \tag{2.96}$$

这两个展开式下面将要用到. 由

$$\frac{\partial E}{\partial f} = (1-e^2)^{-1/2}\left(\frac{r}{a}\right), \quad \frac{\partial M}{\partial f} = (1-e^2)^{-1/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2,$$

利用展开式(2.95)和(2.96),积分后即得

$$E = f + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\beta^n\sin nf, \tag{2.97}$$

$$f - M = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^2}\right)\beta^n\sin nf. \tag{2.98}$$

6. 一些函数的平均值

采用有摄二体问题作为人造卫星绕地球运动的数学模型时,需要求出卫星椭圆轨道的摄动变化,而这些变化又将包含周期项与非周期项这两类性质截然不同的部分. 为了计算和理论分析的需要,有必要把它们分开. 如何分解呢?有些量无法直接看出其性质,如$\left(\frac{a}{r}\right)$,$\cos f$ 等,它们是 f 的周期函数,但对时间 t 积分时,在一个卫星运动周期内的累积效果不为零(除非偏心率 $e=0$);也就是说,这种类型的摄动力所引起的卫星轨道变化并不完全是周期性的. 为此,我们可用求平均值的方法来加以区分.

任一函数 $F(t)$,在一个卫星运动周期 T 内的平均值$\overline{F}$定义为

$$\overline{F} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.99}$$

若记 F_{S} 和 F_{c} 分别为周期项和非周期项,则显然有

$$F_{\mathrm{c}} = \overline{F}, \quad F_{\mathrm{S}} = F - \overline{F}. \tag{2.100}$$

于是,我们可用对一个卫星运动周期求平均值的方法把周期项分离出来,相应的函数 F 即被分解成两个部分:

$$F(t) = F_{\mathrm{c}} + F_{\mathrm{S}}(t). \tag{2.101}$$

从上述各表达式可清楚地看出,在求积分(2.99)式时,到底采用什么方法,并不影响由(2.100)和(2.101)式表达的函数分解结果的严格性. 因此,尽管这一分解是针对后面求卫星轨道摄动变化的需要,可这里计算积分(2.99)时,却能采用椭圆运动关系. 当然,考虑摄动时,运动周期 T 及所有椭圆轨道根数均要发生缓慢的变化,但它不会改变周期项 F_{S} 的基本特征. 上述分解不仅严格,而且仍然保持原分解的意义.

讨论卫星轨道变化时所涉及到的摄动力，对应各种各样的函数，但需要通过求平均值来分离周期项的，基本上有下面四类：

$$\left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf, \qquad \left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf,$$
$$\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\sin qf, \qquad \left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\cos qf, \qquad (p,q=0,1,2,\cdots)$$

另一些特殊形式，在有关章节中再讨论.

首先通过几个特例来介绍求平均值的基本方法以及平均值的特征，并借此熟悉一下前面所介绍的各种椭圆关系式的具体应用.

(1) $p=0, q=1$ 时的 $\sin f$ 和 $\cos f$：

$$\begin{aligned}\overline{\sin f} &= \frac{1}{T}\int_0^T \sin f\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin f\,\mathrm{d}M \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin f\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2}\sin E\,\mathrm{d}E \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\cos f} &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos f\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos f\,\mathrm{d}M \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos f\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos E-e)\,\mathrm{d}E \\ &= -e.\end{aligned}$$

(2) $p=3, q=0$ 时的 $\left(\frac{a}{r}\right)^3$：

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} &= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{a}{r}\right)^3\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(1-e^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{2\pi}(1-e^2)^{-3/2}\int_0^{2\pi}(1+e\cos f)\,\mathrm{d}f \\ &= (1-e^2)^{-3/2}.\end{aligned}$$

(3) $p=-1, q=0$ 时的 $\left(\frac{r}{a}\right)$：

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{r}{a}\right)} &= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}E \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-e\cos E)^2\,\mathrm{d}E \\ &= 1+\frac{1}{2}e^2.\end{aligned}$$

这三个例子，一方面可使我们看出求平均值的方法，基本上是采用时间 t 与近点角 E，f 之间的变换和相应的几何关系. 另外，还可以看出，对不同的量

所求的平均值是不同的，例如 $\cos f$ 对 f 的平均值显然为 0，而对 t 的平均值却是 $-e$，这正说明椭圆运动的不均匀性.

下面不加推导地把上述四类函数平均值的一般表达式直接写出来，以供读者查用，具体证明留给读者作为习题.

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf} = 0, (p, q = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.102}$$

$$\overline{\cos qf} = (1 + q\sqrt{1-e^2})\left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q, (p, q = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.103}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)\cos qf} = \left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q, (p, q = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.104}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf} = \begin{cases} 0, (p \geqslant 2, q \geqslant p-1), \\ (1-e^2)^{-\left(p-\frac{3}{2}\right)} \displaystyle\sum_{n(2)=q}^{(p-2)-\delta} \binom{p-2}{n} \begin{bmatrix} n \\ \frac{1}{2}(n-q) \end{bmatrix} \left(\frac{e}{2}\right)^n, \\ \qquad (p \geqslant 2, q < p-1). \end{cases} \tag{2.105}$$

$$\delta = \frac{1-(-1)^{p-q}}{2}. \tag{2.106}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\cos qf} = 0, (p \geqslant 0, q \geqslant 0). \tag{2.107}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2 (f-M)\sin qf} = -\frac{1}{q}\frac{\overline{\cos qf}}{\sqrt{1-e^2}}, (q \geqslant 1). \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\sin qf} = {} & (1-e^2)^{-\left(p-\frac{3}{2}\right)} \sum_{n=0}^{p-2}\sum_{m=0}^{n} \binom{p-2}{n}\binom{n}{m}\left(\frac{e}{2}\right)^n \times \\ & \left(-\frac{\overline{\cos(q+n-2m)f}}{q+n-2m}\right)_{2m \neq q+n}, (p \geqslant 3, q \geqslant 1).\end{aligned} \tag{2.109}$$

对于 $p=0,1$ 的情况，很少遇到，这里不再讨论. (2.105)式求和中 $n(2)=q$ 表示取值"步长"为 2，即 $n=q, q+2, \cdots$，以后出现类似符号不再说明. 上述推导中要用到有关三角函数的两个表达式：

$$\begin{aligned}\sin^n f = {} & \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{\frac{1}{2}(2m+n-\delta_1)}\binom{n}{m}[(1-\delta_1)\cos(n-2m)f + \\ & \delta_1 \sin(n-2m)f] \\ = {} & \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(n-\delta_1)} 2^{\delta_2}(-1)^{\frac{1}{2}(2m+n-\delta_1)}\binom{n}{m}[(1-\delta_1)\cos(n-2m)f +\end{aligned}$$

$$\delta_1 \sin(n-2m)f], \tag{2.110}$$

$$\cos^n f = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cos(n-2m)f$$
$$= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(n-\delta_1)} 2^{\delta_2}\binom{n}{m}\cos(n-2m)f. \tag{2.111}$$

其中

$$\delta_1 = \frac{1-(-1)^n}{2},\quad \delta_2 = \begin{cases}1, n-2m \neq 0,\\ 0, n-2m = 0.\end{cases} \tag{2.112}$$

为了读者方便,在书末附录中列出一些常用函数的平均值.

§2.3　位置矢量和速度矢量与轨道根数之间的转换关系

1. 星历计算

对于椭圆运动,一旦相应的六个积分常数(即轨道根数)被确定,轨道就被确定,由此即可计算任何时刻卫星的空间位置,这就是星历计算.

已知时刻 t 的六个椭圆根数 $a, e, i, \Omega, \omega, M$,要计算相应的卫星空间位置,可分三步:

首先也是最重要的一步,由 M 和 e 计算偏近点角 E,即解开普勒方程

$$E = M + e\sin E.$$

这虽然是一超越方程,但 $e<1$(有时很小),解此方程的方法很多(如简单迭代法,微分改正法等),读者是清楚的,这里不必多述.

得到 E 后,就可利用(2.42)式计算卫星的空间位置向量 $\boldsymbol{r}$,即

$$\boldsymbol{r} = a(\cos E - e)\hat{\boldsymbol{P}} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\hat{\boldsymbol{Q}}.$$

至于$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$的计算,可利用旋转矩阵(2.44)式,亦可直接用(2.45)式,依需要而定.

最后一步即将 $\boldsymbol{r}$ 转换为站心坐标 $\boldsymbol{\rho}(\rho, \alpha, \delta)$ 或 $\boldsymbol{\rho}'(\rho, A, h)$,前者即站心赤道坐标,由

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} \tag{2.113}$$

得

$$\begin{pmatrix}\rho\cos\delta\cos\alpha\\ \rho\cos\delta\sin\alpha\\ \rho\sin\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-X\\ y-Y\\ z-Z\end{pmatrix}. \tag{2.114}$$

即
$$\rho^2 = (x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2, \tag{2.115}$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{y-Y}{x-X}\right), \quad \delta = \arcsin\left(\frac{z-Z}{\rho}\right). \tag{2.116}$$
其中 $\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$是测站坐标. 若要给出站心地平坐标(ρ,A,h),只需简单的坐标转换,详见第一章 §1.2.

2. 由位置矢量和速度矢量计算轨道根数

给定 t_0 时刻的卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0,z_0)$和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}_0(\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$,计算相应的六个椭圆轨道根数,这正是上一节星历计算的逆问题. 因此,仍旧是那些椭圆运动关系式的简单应用.

(1) 根数 a,e,M_0 的计算

这三个根数可以确定卫星在轨道平面内相对于近地点的位置,利用下述椭圆运动关系式就可算出它们,即
$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu}, \tag{2.117}$$
$$e\cos E_0 = 1 - \frac{r_0}{a}, \tag{2.118}$$
$$e\sin e_0 = r_0\dot{r}_0/\sqrt{\mu a}, \tag{2.119}$$
$$M_0 = E_0 - e\sin E_0. \tag{2.120}$$
其中(2.119)式是由(2.42)和(2.48)两式表达的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 进行数量乘积得到的. r_0,v_0 和 $r_0\dot{r}_0$ 由下式计算
$$\begin{cases} r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ v_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2, \\ r_0\dot{r}_0 = \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0. \end{cases} \tag{2.121}$$

(2) 三个定向根数 i,Ω,ω 的计算

这三个根数确定了$\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$三个单位矢量,因此,要计算它们就必须利用椭圆运动关系中有关 $\boldsymbol{r}$ 和$\dot{\boldsymbol{r}}$,$\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$之间的关系. 由(2.42)和(2.48)式容易解出
$$\hat{\boldsymbol{P}} = \frac{\cos E}{r}\boldsymbol{r} - \sqrt{\frac{a}{\mu}}\sin E\dot{\boldsymbol{r}}, \tag{2.122}$$
$$\sqrt{1-e^2}\,\hat{\boldsymbol{Q}} = \frac{\sin E}{r}\boldsymbol{r} + \sqrt{\frac{a}{\mu}}(\cos E - e)\dot{\boldsymbol{r}}. \tag{2.123}$$
另外,动量矩积分给出

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}). \tag{2.124}$$

由 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 和已算出的 a,e,E_0，即可通过上面三个表达式计算 $\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$，但不必计算全部分量，只需要 $\boldsymbol{P}_z$，$\boldsymbol{Q}_z$ 和 $\boldsymbol{R}_x,\boldsymbol{R}_y$，$\boldsymbol{R}_z$. 根据 §2.2 给出的 $\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}}$，$\hat{\boldsymbol{R}}$ 表达式可知，这五个分量与 i,Ω,ω 的关系为

$$\begin{cases} P_z = \sin i\sin\omega, \quad Q_z = \sin i\ \cos\omega, \\ R_x = \sin i\sin\Omega, \quad R_y = -\sin i\ \cos\Omega\ , \quad R_z = \cos i. \end{cases} \tag{2.125}$$

那么

$$\begin{cases} \omega = \arctan\ (P_z/Q_z)\ , \\ \Omega = \arctan\ (R_x/(-R_y)), \\ i = \arccos R_z. \end{cases} \tag{2.126}$$

计算 ω,Ω 与 E_0 一样，均有确定象限问题，故必须用两个三角函数值，而对 i 只需用一个 $\cos i$ 值就够了，关于这一点，读者是容易理解的.

§2.4　抛物线轨道和双曲线轨道

尽管从天体力学这一角度来看，显然应该着重讨论椭圆轨道及其变化，但有些问题，如深空探测器的运动，也会涉及抛物线轨道和双曲线轨道，特别是双曲线轨道. 因此，作为二体问题，对这两种轨道作一简单介绍也是有必要的.

1. 抛物线轨道

动量矩积分(2.3)以及法向单位矢量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 与轨道平面的定向根数 (i,Ω) 之间的关系(2.4)仍不变，但此时，$e=1$，$a\to\infty$，故面积积分(2.6)式和轨道积分(2.12)式变为

$$r^2\dot{\theta} = \sqrt{\mu p}, \quad p = 2q, \tag{2.127}$$

$$r = \frac{p}{1+\cos(\theta-\omega)}. \tag{2.128}$$

该抛物线的焦点仍在中心天体上，p 是半通径，q 是近星距. 定义 f 为真近点角，有

$$f = \theta - \omega. \tag{2.129}$$

那么(2.127)和(2.128)式即可分别写成下列形式

$$r^2\dot{f} = \sqrt{2\mu q}, \tag{2.130}$$

$$r = \frac{p}{1+\cos f} = q\sec^2\frac{f}{2}, \tag{2.131}$$

将后一式代入前一式，积分得

$$2\tan\frac{f}{2} + \frac{2}{3}\tan^3\frac{f}{2} = \sqrt{2\mu}q^{-\frac{3}{2}}(t-\tau). \tag{2.132}$$

其中 τ 是最后一个积分常数，与椭圆运动类似，它也是运动天体 m 过近星点的时刻. 因此，抛物线轨道根数由于 $e=1$ 只剩下 5 个，即 $i, \Omega, q, \omega, \tau$.

2. 双曲线轨道

与抛物线轨道类似，动量矩积分(2.3)以及法向单位矢量 $\hat{R}$ 的表达式(2.4)仍不变，但此时，$e>1$，相应的面积积分(2.6)式和轨道方程(2.12)式变为

$$r^2\dot{\theta} = \sqrt{\mu p}, \tag{2.133}$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos f}. \tag{2.134}$$

其中

$$p = a(e^2-1), \tag{2.135}$$

$$f = \theta - \omega. \tag{2.136}$$

这里 p 亦为半通径，p 和 a 的几何关系见图 2.3，f 是真近点角，ω 是近星点角距，而相应的近星距为

$$r_p = a(e-1). \tag{2.137}$$

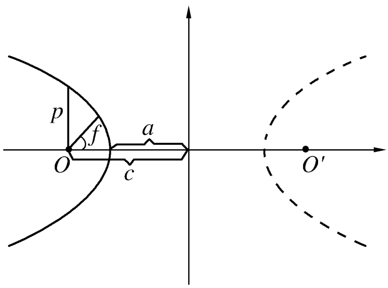

图 2.3　探测器相对目标天体(焦点 O)的双曲线轨道

活力公式(2.16)在这里变为下列形式：

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right). \tag{2.138}$$

类似椭圆运动的积分方法，由(2.138)式利用(2.133)式消除 $\dot{\theta}$ 得

$$n a \mathrm{d}t = \frac{r \mathrm{d}r}{\sqrt{(r+a)^2 - a^2 e^2}}. \tag{2.139}$$

其中

$$n = \sqrt{\mu a}^{-3/2}. \tag{2.140}$$

引进辅助量 E

$$r = a(e\mathrm{ch}E - 1). \tag{2.141}$$

代入(2.139)式,积分得

$$e\mathrm{sh}E - E = n(t-\tau) = M. \tag{2.142}$$

其中 τ 为第六个积分常数,亦是过近星点的时刻. 虽然这里引进的 E 与椭圆运动中的偏近点角 E 意义不同,但上述 f,E 和 M 之间的关系与椭圆运动中的相应关系类似,即

$$\begin{cases} r\cos f = a(e - \mathrm{ch}E), \\ r\sin f = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}E, \end{cases} \tag{2.143}$$

$$\tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{th}\,\frac{E}{2}. \tag{2.144}$$

由轨道方程(2.134)不难看出,$1+e\cos f=0$,$r\to\infty$,于是可知

$$-\pi + \arccos\left(\frac{1}{e}\right) \leqslant f \leqslant \pi - \arccos\left(\frac{1}{e}\right). \tag{2.145}$$

方程(2.142)类似于椭圆运动中的 Kepler 方程,但由于 $e>1$,不能用一般的迭代法求解,若用微分改正法(即简单的牛顿法),亦容易由给定的 e,M 求出 E. 若取初值 $E=E^{(0)}$,则改正公式为

$$\begin{cases} \Delta E = \dfrac{M - (e\mathrm{sh}E^{(0)} - E^{(0)})}{e\mathrm{ch}E^{(0)} - 1}, \\ E^{(1)} = E^{(0)} + \Delta E. \end{cases} \tag{2.146}$$

例:由 $e=1.5$,$M=\pi/4=0.785398163$,求 E 值.

经计算,取 $E^{(0)}=M$,相应的改正过程如下:

$$E^{(1)} = 1.056738913,$$
$$E^{(2)} = 1.018032116,$$
$$E^{(3)} = 1.016994172,$$
$$E^{(4)} = 1.016993449.$$

$E^{(4)}$ 对应的值 $e\mathrm{sh}E-E=0.785398163$,与 M 的值在 9 位有效数字上完全相同. 当然还可充分利用当代计算机的条件,采用更快速的“迭代”算法,这里只是举一个简单的算例供读者参考.

3. 位置矢量和速度矢量的计算公式

对于上述两种轨道，运动天体的位置矢量 r 的表达式与椭圆轨道相同，即

$$\boldsymbol{r} = r\cos f\,\hat{\boldsymbol{P}} + r\sin f\,\hat{\boldsymbol{Q}}. \tag{2.147}$$

其中 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 即近星点方向和半通径方向的单位矢量，它们的表达式与椭圆运动中的形式相同，见(2.45)和(2.46)两式.

速度矢量 $\dot{r}$ 的表达式，两种轨道稍有不同，对于抛物线轨道和双曲线轨道分别为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}\left[(-\sin f)\,\hat{\boldsymbol{P}} + (\cos f + 1)\,\hat{\boldsymbol{Q}}\right], \\ p = 2q, \end{cases} \tag{2.148}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}\left[(-\sin f)\,\hat{\boldsymbol{P}} + (\cos f + e)\,\hat{\boldsymbol{Q}}\right], \\ p = a(e^2 - 1). \end{cases} \tag{2.149}$$

对于双曲线轨道，还可以用辅助量 E 来表达 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的计算公式，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = a(e - \operatorname{ch}E)\,\hat{\boldsymbol{P}} + a\sqrt{e^2 - 1}\,\operatorname{sh}E\,\hat{\boldsymbol{Q}}, \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\sqrt{\mu a}}{r}\left[(-\operatorname{sh}E)\,\hat{\boldsymbol{P}} + (\sqrt{e^2 - 1}\,\operatorname{ch}E)\,\hat{\boldsymbol{Q}}\right]. \end{cases} \tag{2.150}$$

4. 双曲线轨道中由位置矢量和速度矢量计算轨道根数

由下列各式分别计算 a, e, E, M:

$$\frac{1}{a} = \frac{v^2}{\mu} - \frac{2}{r}, \tag{2.151}$$

$$\begin{cases} e\operatorname{sh}E = (\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})/\sqrt{\mu a}, \\ e\operatorname{ch}E = \left(\dfrac{r}{a}\right) + 1, \end{cases} \tag{2.152}$$

$$\begin{cases} e^2 = (e\operatorname{ch}E)^2 - (e\operatorname{sh}E)^2, \\ E = \operatorname{Arth} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \quad x = \dfrac{e\operatorname{sh}E}{e\operatorname{ch}E}, \end{cases} \tag{2.153}$$

$$M = e\operatorname{sh}E - E. \tag{2.154}$$

关于 i, Ω, ω 的计算，与椭圆轨道中的计算基本相同，有

$$\cos i = (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})_z / \sqrt{\mu p}, \tag{2.155}$$

$$\begin{cases}\sin i\ \sin\Omega=(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})_x/\sqrt{\mu p},\\ \sin i\ \cos\Omega=-(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})_y/\sqrt{\mu p},\end{cases}\tag{2.156}$$

$$\begin{cases}\sin i\ \sin\omega=P_z,\\ \sin i\ \cos\omega=Q_z,\end{cases}\tag{2.157}$$

其中

$$P_z=(\hat{\boldsymbol{P}})_z,\quad Q_z=(\hat{\boldsymbol{Q}})_z,\tag{2.158}$$

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{P}}=\left(\dfrac{\mathrm{ch}E}{r}\right)\boldsymbol{r}-\left(\sqrt{\dfrac{a}{\mu}}\mathrm{sh}E\right)\dot{\boldsymbol{r}},\\ \hat{\boldsymbol{Q}}=\dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}\left[\left(\dfrac{\mathrm{sh}E}{r}\right)\boldsymbol{r}+\sqrt{\dfrac{a}{\mu}}(e-\mathrm{ch}E)\,\dot{\boldsymbol{r}}\right].\end{cases}\tag{2.159}$$

§2.5 初轨计算

初轨计算无论在航天任务中,还是在太阳系各种小天体(小行星、自然卫星等)的发现过程中,都是不可缺少的. 在自然天体和人造天体的定轨问题中,通常所说的初轨计算是指二体问题意义下的短弧定轨,相对受摄二体问题意义下的精密定轨而言,它定出的是初轨(initial orbit),除直接被引用外,它主要为精密定轨提供初值(或称初始估计),经大量观测资料改进后的初轨就是在一定意义下的精轨,这一过程过去称为轨道改进,现在常与和定轨有关的一些几何和物理参数同时确定,被称为精密定轨,这就完全拓宽了轨道改进的概念.

初轨计算和精密定轨计算都是通过一个迭代过程完成的,但它们却有重大区别. 初轨计算对应一个特定的迭代过程,它不同于精密定轨中的多变元迭代过程,不过对于测距和测速等类型的测量资料,只能采用多变元迭代过程. 但是,我们一般所说的初轨计算,主要是针对测角资料(赤道型资料 α,δ 和地平型资料 A,h 等)的,或是将测距或测速资料转化成相应的形式. 而对于这些类型的测量资料,初轨计算可以由简单的迭代计算完成,不会出现多变元迭代所遇到的各种问题. 在天体力学发展的几百年历史中,就出现过测角型资料的多种定轨方法,就其实质而言可以归纳为 Laplace 型和 Guass 型两类方法[5~9],特别在当今计算技术高度发展的背景下,Laplace 型方法显得更加简洁有效. 这里将重点介绍这一方法及其推广形式.

通常所说的 Laplace 型初轨计算方法,就是指在二体问题意义下的轨道计算方法. 事实上我们完全可以把这种类型的初轨计算方法推广到一般

受摄二体问题,既可以计算椭圆轨道,亦可以计算双曲线轨道.

随着地球卫星测量精度的提高(例如测角精度可达角秒级)和深空探测的发展,将会遇到各种目标天体轨道器的初轨计算问题,主星扁率摄动、第三体引力摄动等均可达到较大的程度,而且探测器飞往目标天体附近,在未变轨前处于双曲线轨道运行状态.因此针对精度要求的提高和力模型的复杂化,有必要建立一个适用范围广的初轨计算方法.为此,在经典 Laplace 方法基础上进行了推广,对于该方法不妨称其为广义 Laplace 方法.尽管这种方法可适用于受摄二体问题,但其基本原理和计算过程与二体问题意义下的 Laplace 方法并无重大区别,故该方法还是简单实用的.

1. 方法原理

选取空间坐标系 $O-xyz$,坐标原点是中心天体的质心,其坐标面 xy 可有多种选择.对于人造地球卫星,通常取地球赤道面,月球轨道器,即取月球赤道面,对小行星而言即取为日心黄道面等,总之,根据研究的对象而定.类似于精密定轨中的提法,初轨计算同样涉及到两类方程,即对应测量方程和状态微分方程的测量几何关系和天体运动方程.

(1) 几何条件——测量几何关系

在所选取的坐标系中(见图 2.4),测量几何满足如下关系:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{R}. \tag{2.160}$$

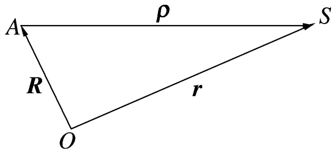

图 2.4 中心天体 O、测站 A 和运动天体 S 的相对几何构形

其中 $\boldsymbol{r}$ 是运动天体的位置矢量,$\boldsymbol{\rho}$ 是观测矢量,对于测角资料而言,即 $\boldsymbol{\rho}(\rho,\alpha,\delta)$ 或 $\boldsymbol{\rho}(\rho,A,h)$,其中测角量$(\alpha,\delta)$或$(A,h)$即赤经赤纬或方位角高度角.在坐标系 $O-xyz$ 中,$\boldsymbol{\rho}$ 可写成下列形式:

$$\boldsymbol{\rho}=\rho\hat{\boldsymbol{L}},\quad \hat{\boldsymbol{L}}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}. \tag{2.161}$$

直角坐标分量(λ,μ,ν)可由测角量(α,δ)或(A,h)经简单的坐标转换给出.如果在历元地心平赤道坐标系对人造卫星定轨,而测角量(α,δ)又是通过定标星给出的,即与定轨坐标系一致,则有

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\delta\ \cos\alpha\\ \cos\delta\ \sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}. \tag{2.162}$$

由于(A,h)资料对应的是瞬时真地平坐标系,于是有

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=(\mathbf{GR})^{\mathrm{T}}(\mathbf{ZR})\begin{pmatrix}\cos h\cos A\\ -\cos h\sin A\\ \sin h\end{pmatrix}. \tag{2.163}$$

其中(GR)=(NR)(PR)是岁差章动矩阵，在第一章 §1.2 中已给出具体表达式，而(ZR)是瞬时真赤道坐标系与地平坐标系之间的转换矩阵，在第一章 §1.2 中也有其具体表达式. 测站坐标矢量 $\boldsymbol{R}$ 是给定的，有

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}. \tag{2.164}$$

(2) 动力学条件——天体运动方程

在坐标系 $O\text{-}xyz$ 中，运动天体相对中心天体(质量记为 M)的运动方程即

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{r}}=-\dfrac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon),\\ t_0:\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0),\quad \dot{\boldsymbol{r}}_0=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0).\end{cases} \tag{2.165}$$

其中 $\mu=GM$ 是中心天体的质心引力常数. 摄动加速度 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 对应各种力学因素，可以是保守力效应，亦可以是耗散效应，只要能写出相应力学因素的数学模型即可. 这里给出的初轨计算方法并不限于无摄运动，它可适用于不同类型的受摄运动，包括变化的椭圆轨道和双曲线轨道，计算给出的将是历元 t_0 时刻的瞬时椭圆轨道或是瞬时双曲线轨道.

(3) 初轨计算的基本方程

与精密定轨中对测量方程线性化后给出的条件方程(即精密定轨的基本方程)[9] 类似，将运动天体所遵循的动力学条件引入测量几何关系(2.160)，构成初轨计算的基本方程，不同的是动力学条件所对应的既不是运动方程(对应精密定轨中的状态微分方程)[9] 的数值解，亦不是小参数幂级数解(后面第四章中将要给出)，而是方程的另一种幂级数解，即时间间隔 $\Delta t=t-t_0$ 的幂级数解. 就中心天体的扁率摄动和第三体摄动而言，该级数解可写成如下形式：

$$\boldsymbol{r}(t)=F^*(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\boldsymbol{r}_0+G^*(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\dot{\boldsymbol{r}}_0. \tag{2.166}$$

其中 F^* 和 G^* 由 Δt 的幂级数表达，其具体形式下一段中给出. 以此解代入测量几何关系(2.160)可得

$$\hat{\boldsymbol{L}}\times(F^*\boldsymbol{r}_0+G^*\dot{\boldsymbol{r}}_0)=\hat{\boldsymbol{L}}\times\boldsymbol{R}. \tag{2.167}$$

对于一次测角采样资料，(2.167)式对应的三个方程只有两个是独立的，至

少需要三次采样才能定轨. 这是关于历元 t_0 时 $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ 形式上的线性代数方程. 如果能确定, 那么再经简单的转换(见§2.3和§2.4中的有关内容)即可给出 t_0 时刻的瞬时轨道——椭圆轨道或双曲线轨道.

2. F, G 和 F_z, G_z 的表达式

只要运动方程(2.165)的右函数满足一定条件, 其满足初始条件的解即存在, 且可展成时间间隔 $\Delta t = t - t_0$ 的幂级数:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_0^{(1)}\Delta t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{r}_0^{(2)}\Delta t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{r}_0^{(k)}\Delta t^k + \cdots. \tag{2.168}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0^{(k)}$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 对 t 的 k 阶导数在 t_0 点的取值, 即

$$\boldsymbol{r}_0^{(k)} = \left(\frac{\mathrm{d}^k \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^k}\right)_{t=t_0}. \tag{2.169}$$

要给出级数阶(2.168)满足初始条件的具体形式, 就需要计算各阶导数 $\boldsymbol{r}^{(k)}$ 在处 t_0 的值 $\boldsymbol{r}_0^{(k)}$. 事实上有 $\boldsymbol{r}_0^{(1)} = \dot{\boldsymbol{r}}_0$, 而二阶以上各导数值 $\boldsymbol{r}^{(k)}(k \geqslant 2)$ 均可根据运动方程(2.165), 由 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 构成, 即

$$\boldsymbol{r}^{(k)} = \boldsymbol{r}^{(k)}(t_0, \boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0), \quad k \geqslant 2. \tag{2.170}$$

对于无摄运动, 级数解(2.166)中的 F^* 和 G^* 即 F 和 G, 表达式简化为

$$\boldsymbol{r}(t) = F(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \Delta t)\boldsymbol{r}_0 + G(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \Delta t)\,\dot{\boldsymbol{r}}_0. \tag{2.171}$$

对于 $\boldsymbol{r}(t)$ 的三个分量 $x(t), y(t), z(t)$, F 和 G 各具有同一形式, 为一数量函数. 对应受摄运动, 通常相应的 F^* 和 G^* 对于三个分量 x, y, z 各具有不同的形式. 下面就中心天体扁率摄动和第三体引力摄动给出其具体表达式, 相应的两种摄动加速度为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \left(\frac{3J_2}{2}\right)\left[\left(5\frac{z^2}{r^7} - \frac{1}{r^5}\right)\boldsymbol{r} - \left(\frac{2z}{r^5}\right)\hat{\boldsymbol{k}}\right] - \mu'\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3} - \frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right). \tag{2.172}$$

为了便于量级分析和公式表达, 这里已采用适当计算单位使各物理量无量纲化(详见后面第四章中的计算单位选取), 相应的中心天体的质心引力常数 $\mu = GM = 1$, $\mu' = GM'/GM$, M' 是第三体的质量. (2.172)式中的 J_2 为中心天体的动力学扁率. 其他有关量定义如下:

$$\hat{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'. \tag{2.173}$$

$\boldsymbol{r}'$ 为第三体的坐标矢量.

略去推导过程，并记 $\tau=\Delta t$，直接写出形如(2.166)式的 τ 的幂级数解如下[10]：

$$
\begin{cases}
x = F(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \Delta t)x_0 + G(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \Delta t)\dot{x}_0, \\
y = F(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \Delta t)y_0 + G(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \Delta t)\dot{y}_0, \\
z = F_z(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \Delta t)z_0 + G_z(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \Delta t)\dot{z}_0.
\end{cases} \tag{2.174}
$$

相应的基本方程(2.167)式按分量形式书写如下：

$$
\begin{cases}
(F\nu)x_0 - (F_z\lambda)z_0 + (G\nu)\dot{x}_0 - (G_z\lambda)\dot{z}_0 = (\nu X - \lambda Z), \\
(F\nu)y_0 - (F_z\mu)z_0 + (G\nu)\dot{y}_0 - (G_z\mu)\dot{z}_0 = (\nu Y - \mu Z), \\
(F\mu)x_0 - (F\lambda)y_0 + (G\mu)\dot{x}_0 - (G\lambda)\dot{y}_0 = (\mu X - \lambda Y).
\end{cases} \tag{2.175}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
F = 1 &+ \frac{\tau^2}{2}\left[-u_3 + \left(\frac{3J_2}{2}\right)(5u_7 z_0^2 - u_5) - \mu' u_3'\right] + \\
&\frac{\tau^3}{6}\left[(3u_5\sigma) + \left(\frac{3J_2}{2}\right)(5(u_7 - 7u_9 z_0^2)\sigma + 10u_7 z_0 \dot{z}_0)\right] + \\
&\frac{\tau^4}{24}\Big[u_5(3v_0^2 - 2u_1 - 15u_2\sigma^2) + \left(\frac{3J_2}{2}\right)(6u_8(4u_2 z_0^2 - 1) - \\
&5u_7(7u_2 z_0^2 - 1)v_0^2 + 10u_7 \dot{z}_0^2 + 35u_9(9u_2 z_0^2 - 1)\sigma^2 - \\
&140u_9\sigma z_0\dot{z}_0) + u_3(\mu' u_3')\Big] + \frac{\tau^5}{120}u_7[15\sigma(-3v_0^2 + 2u_1 + \\
&7u_2\sigma^2)] + \frac{\tau^6}{720}u_7[u_2\sigma^2(630v_0^2 - 420u_1 - 945u_2\sigma^2) - (22u_2 \\
&- 66u_1 v_0^2 + 45v_0^4)] + O(\tau^7),
\end{aligned} \tag{2.176}
$$

$$
\begin{aligned}
G = \tau &+ \frac{\tau^3}{6}\left[-u_3 + \left(\frac{3J_2}{2}\right)(5u_7 z_0^2 - u_5) - \mu' u_3'\right] + \\
&\frac{\tau^4}{24}\left[6u_5\sigma + \left(\frac{3J_2}{2}\right)(20u_7 z_0 \dot{z}_0 - 10u_7(7u_2 z_0^2 - 1)\sigma)\right] + \\
&\frac{\tau^5}{120}u_5[9v_0^2 - 8u_1 - 45u_2\sigma^2] + \\
&\frac{\tau^6}{720}u_7[30\sigma(-6v_0^2 + 5u_1 + 14u_2\sigma^2)] + O(\tau^7),
\end{aligned} \tag{2.177}
$$

$$
\begin{aligned}
F_z = F + \left(\frac{3J_2}{2}\right)\Big[&\frac{\tau^2}{2}(-2u_5) + \frac{\tau^3}{6}(10u_7\sigma) + \\
&\frac{\tau^4}{24}u_7(10v_0^2 - 6u_1 - 70u_2\sigma^2)\Big],
\end{aligned} \tag{2.178}
$$

$$G_z = G + \left(\frac{3J_2}{2}\right)\left[\frac{\tau^3}{2}(-2u_5) + \frac{\tau^4}{24}(20u_7\sigma)\right], \tag{2.179}$$

$$\begin{cases} u_n = 1/r_0^n, \quad \sigma = \boldsymbol{r}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_0, \quad v_0^2 = \dot{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_0, \\ u_3{}' = 1/r'^3_0, \quad r'_0 = |\boldsymbol{r}'_0|. \end{cases} \tag{2.180}$$

这里 $\boldsymbol{r}'_0$ 是第三体位置矢量 $\boldsymbol{r}'$在历元 t_0 时的值，即 $\boldsymbol{r}_0{}' = \boldsymbol{r}'(t_0)$.

在上述无量纲的表达式中，$|\tau|<1$，级数解收敛是显然的，而且收敛范围还可扩大. 对于人造地球卫星而言，$|\tau|<1$ 对应的有量纲物理量——时间间隔 $\Delta t = |t-t_0| < 13^m.4468$，这与初轨计算对应的短弧是相适应的. 注意，上述表达式中的 $\sigma = O(e)$是小量，e 是轨道偏心率.

在上述 F^*，G^*（即 F，G 和 F_z，G_z）的表达式中，由于 τ 通常较小，只有在 τ 的低次幂中考虑了摄动，而在 τ^5 以上幂次中未列入相应的结果，这是很自然的，要写出 τ 高次幂中的摄动项并无任何困难. 不仅如此，对于其他类型的摄动，只要给出相应的数学模型，总是可以导出相应的 F^*，G^* 的表达式，因为运动方程(2.165)的右端仅出现 $\boldsymbol{r}$，$\dot{\boldsymbol{r}}$，高阶导数 $\boldsymbol{r}_0^{(k)}$ $(k\geqslant 2)$总是可以用 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 来表达的.

3. 广义 Laplace 初轨计算方法的定轨过程

由一列测角采样资料：t_j，(α_j, δ_j)或(A_j, h_j)，$j=1,2,\cdots,N$，$N\geqslant 3$ 即可由基本方程(2.168)进行定轨，即给出定轨历元 t_0 时的 $\boldsymbol{r}_0$，$\dot{\boldsymbol{r}}_0$，$t\in[t_1, t_N]$. 方程组(2.168)是关于 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 形式上的线性代数方程，只要知道 F，G，F_z，G_z，即可解出 $\boldsymbol{r}_0$，$\dot{\boldsymbol{r}}_0$，而 F，G，F_z，G_z 均是 $\boldsymbol{r}_0$，$\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的函数. 因此，这一定轨计算显然涉及一个迭代过程，但与精密定轨中的多变元迭代不同，它是一个特殊而简单的迭代过程. 由于

$$\begin{cases} F = 1 + O(\tau^2), \quad G = \tau + O(\tau^3), \\ F_z = 1 + O(\tau^2), \quad G_z = \tau + O(\tau^3), \end{cases} \tag{2.181}$$

而$|\tau|<1$. 因此，即使对于运动天体的轨道一无所知，亦可以采用

$$F^{(0)} = 1, \quad G^{(0)} = \tau, \quad F_z^{(0)} = F^{(0)}, \quad G_z^{(0)} = G^{(0)} \tag{2.182}$$

作迭代初值，按方程(2.168)和(2.176)～(2.180)式进行迭代，直到

$$\begin{cases} \Delta F = |F^{(m)} - F^{(m-1)}|, \quad \Delta G = |G^{(m)} - G^{(m-1)}|, \\ \Delta F_z = |F_z{}^{(m)} - F_z{}^{(m-1)}|, \quad \Delta G_z = |G_z^{(m)} - G_z^{(m-1)}|, \end{cases} (m = 1, 2, \cdots) \tag{2.183}$$

满足一定精度终止计算，给出结果 t_0，$\boldsymbol{r}_0$，$\dot{\boldsymbol{r}}_0$，这和二体问题意义下的

Laplace 定轨方法就迭代过程而言没有任何差别.

获得 $t_0, \boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0$ 后,即可由简单的转换给出历元 t_0 时的椭圆轨道或双曲线轨道的瞬时根数 $a, e, i, \Omega, \omega, M$,具体转换关系已在前两节 §2.3 和 §2.4 中给出.

广义 Laplace 方法的定轨原理是严格的,如果用测角资料定轨,与二体问题一样,结果是唯一的,即所定出的轨道显然要通过三次观测对应的空间点. 正是由于这一原因,加上弧段又短,就使得资料误差会歪曲真实轨道,即定轨精度受到影响,特别是轨道半长径 a(这是一个很重要的根数)和偏心率 e. 例如,对于卫星椭圆轨道,应有 $a>1$,但有时因弧段短、资料精度又差,用拉普拉斯方法定出的轨道会出现 $a<1$ 的情况. 从前面的迭代计算中也可看出这一点,由于 F_j, G_j 的特点,通过方程(2.168)求解时,资料误差(反映在 λ_j, μ_j, ν_j 上)对 $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ 的影响较大,从而导致 a 和 e 有较大的误差.

上述问题并不是 Laplace 方法特有的,而是所有根据动力学原理通过三次观测(相应的弧段较短)严格定轨的一类方法的共同问题. 就人造地球卫星而言,考虑到下述观测的特点:

(1) 在一个较短的弧段内,可以得到较多的观测资料;

(2) 一天内可以得到多圈资料.

可以采用某些方法在一定程度上减轻资料误差的影响. 如采用多资料进行定轨,基本原理和方法以及计算过程不变,只是基本方程(2.175)式的个数增多,$j=1,2,\cdots,N, N\gg 3$,求解时采用简单的最小二乘法,给出 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的最佳解,这可充分利用统计信息减小资料误差的影响.

4. 其他类型资料的定轨问题

关于另一类 Guass 型方法,即首先确定两个以上的点位 $\boldsymbol{r}_j(j=1,\cdots,k, k\geqslant 2)$,然后再去定轨. 其定轨计算过程过于复杂,而基本原理与 Laplace 方法并无实质性差别,本书不再介绍. 这里将要给出另一种类似于 Laplace 方法的点位资料的定轨方法. 至于点位资料 $\boldsymbol{r}_j(j\geqslant 2)$的获得,并不是由 Guass 方法中所指的由测角资料根据复杂的转换过程获得,而是直接由测量得到. 一种方法是现代测量手段可以实现的,即在取得测角量(α, δ 或 A, h)的同时获得卫星到"测站"(实为测量设备)的距离量 ρ,由此即给出卫星的空间点位 $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r} = \rho \hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{R}.$$

相应的定轨基本方程(2.175)将由下列方程替代,即

$$\begin{cases} Fx_0 + G\dot{x}_0 = (\rho\lambda + X), \\ Fy_0 + G\dot{y}_0 = (\rho\mu + Y), \\ F_z z_0 + G_z \dot{z}_0 = (\rho\nu + Z). \end{cases} \tag{2.184}$$

只要有两次以上这样的采样资料即可定轨，定轨过程同前面第 3 段的介绍. 另一种取得卫星点位的方法就是通过卫星导航定位（如星载 GPS 定位方法）获得，即直接获得卫星的空间位置矢量 $\boldsymbol{r}$，由此，定轨基本方程更简单，即

$$\begin{cases} Fx_0 + G\dot{x}_0 = x, \\ Fy_0 + G\dot{y}_0 = y, \\ F_z z_0 + G_z \dot{z}_0 = z. \end{cases} \tag{2.185}$$

§2.6 二体问题意义下的轨道机动

在航天器的运行过程中常常需要进行轨道调整（即轨道机动），这就涉及到变轨问题，而变轨又往往采用脉冲式，那么这一机动过程是短暂的，可以看成是瞬时变轨变轨前的轨道根数记作 $\sigma_1(a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1, M_1)$，而变轨后目标轨道的轨道根数记作 $\sigma_2(a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \omega_2, M_2)$，变轨前后的轨道差为 $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$，变轨后目标轨道的轨道根数就相当于一个边值条件. 由于变轨时间短暂，可以看成是在二体问题意义下完成这一变轨过程，那么就需要在此前提下给出 $\Delta\sigma$ 与由脉冲能量获得的速度变化 $\Delta\boldsymbol{v}$ 之间的关系. 由它们之间的函数关系 $\Delta\sigma = \Phi(\Delta\boldsymbol{v})$，根据目标轨道的不同要求选择变轨方式（对应一定的 $\Delta\boldsymbol{v}$）.

瞬时椭圆轨道根数 σ 与位置矢量和速度矢量 $\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}$ 由严格的函数关系 $\sigma = f(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})$，§2.2 中已给出. 这里将用到如下关系式：

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}\right)^{-1}, \tag{2.186}$$

$$\begin{cases} e\cos E = 1 - \dfrac{r}{a}, \\ e\sin E = \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} / \sqrt{\mu a}, \end{cases} \tag{2.187}$$

$$M = E - e\sin E, \tag{2.188}$$

$$\cos i = (x\dot{y} - y\dot{x}) / \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \tag{2.189}$$

$$\tan\Omega = (y\dot{z} - z\dot{y}) / (x\dot{z} - z\dot{x}), \tag{2.190}$$

$$\tan\omega=\frac{\sqrt{1-e^2}\left[e\cos E\left(\frac{z}{r}\right)-\sqrt{\frac{a}{\mu}}e\sin E\,\dot{z}\right]}{e\sin E\left(\frac{z}{r}\right)-\sqrt{\frac{a}{\mu}}(e\cos E-e^2)\,\dot{z}}. \tag{2.191}$$

其中

$$\begin{cases} r=|\boldsymbol{r}|, & \boldsymbol{r}=(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}}, \\ v=|\dot{\boldsymbol{r}}|, & v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2, \quad \dot{\boldsymbol{r}}=(\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z})^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{2.192}$$

上标“T”表示转置，即 r 和 $\dot{r}$ 为列向量.

利用上述关系式不难导出

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{2a^2}{\mu}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}, \tag{2.193}$$

$$\left(\frac{\partial e^2}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{2a}{\mu}\left[\frac{1}{a^2}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}+\left((1-e^2)-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}\right], \tag{2.194}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \cos i}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\mu p}}(\boldsymbol{\Omega})^{\mathrm{T}}+\cos i\left[-\sqrt{\frac{a}{\mu}}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2(1-e^2)}\left(\frac{\partial e^2}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)\right], \\ \boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.195}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{1}{1+\tan^2\Omega}\left(-\frac{1}{x\dot{z}-z\dot{x}}\right)\left[(\boldsymbol{\Omega}_1)^{\mathrm{T}}-\tan\Omega(\boldsymbol{\Omega}_2)^{\mathrm{T}}\right], \\ \boldsymbol{\Omega}_1=\begin{pmatrix}0\\ z\\ -y\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}_2=\begin{pmatrix}z\\ 0\\ -x\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.196}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)= & \sin\omega\left[\frac{1}{e\sin i}\left(\frac{\dot{z}}{an}\right)-\frac{\cos\omega}{2(1-e^2)}\right]\left(\frac{\partial e^2}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)+ \\ & \frac{1}{e\sin i}\left\{\sqrt{1-e^2}\cos\omega\left[\frac{z}{r}\left(\frac{\partial(e\cos E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)-\sqrt{\frac{a}{\mu}}\dot{z}\left(\frac{\partial(e\sin E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)-\right.\right. \\ & \left.\sqrt{\frac{a}{\mu}}(e\sin E)(\hat{\boldsymbol{k}})^{\mathrm{T}}-\frac{\dot{z}}{\mu n}(e\sin E)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}\right]- \\ & \sin\omega\left[\frac{z}{r}\left(\frac{\partial(e\sin E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)+\sqrt{\frac{a}{\mu}}\dot{z}\left(\frac{\partial(e\cos E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)+\right. \\ & \left.\left.\sqrt{\frac{a}{\mu}}(e\cos E-e^2)(\hat{\boldsymbol{k}})^{\mathrm{T}}+\frac{\dot{z}}{\mu n}(e\cos E-e^2)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.197}$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{1}{e^2}\left\{-\frac{a}{\mu}(e\sin E)\left[(1-e^2)+\frac{r}{a}\right](\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{\mu a}}\left[(1-e^2)-\frac{r}{a}\right](\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}\right\}. \tag{2.198}$$

(2.197)式右端出现的单位矢量 $\hat{k}$ 和四个偏导数$\dfrac{\partial(e\cos E)}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}$,$\dfrac{\partial(e\sin E)}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}$如下:

$$\hat{\boldsymbol{k}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \tag{2.199}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial(e\cos E)}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\dfrac{2r}{\mu}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}},\\ \left(\dfrac{\partial(e\sin E)}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\right)=-\dfrac{(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{\sqrt{\mu a}}\left(\dfrac{a}{\mu}\right)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}+\dfrac{1}{\sqrt{\mu a}}(\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{2.200}$$

根据上述各式即可给出如下函数关系:

$$\Delta\sigma=\Phi_v(\Delta\dot{r}). \tag{2.201}$$

例如,若要改变轨道半长径 a,则由(2.193)式不难给出

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}(\Delta\dot{\boldsymbol{r}}). \tag{2.202}$$

这里 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}=(\Delta\dot{x}\quad\Delta\dot{y}\quad\Delta\dot{z})^{\mathrm{T}}=(\Delta v_r\quad\Delta v_\theta\quad\Delta v_w)^{\mathrm{T}}$,其中 v_r,v_θ,v_w 即速度矢量$\dot{r}$的径向、横向和轨道面法向分量,且有 $v_w=0$. 那么(2.202)式可以分别写成下列形式:

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(\dot{x}\Delta\dot{x}+\dot{y}\Delta\dot{y}+\dot{z}\Delta\dot{z}) \tag{2.203}$$

和

$$\begin{cases}\Delta a=\dfrac{2a^2}{\mu}(v_r\Delta v_r+v_\theta\Delta v_\theta),\\ v_r=\dot{r},\quad v_\theta=r\dot{\theta}.\end{cases} \tag{2.204}$$

或用$\dot{r}$的模 v 来表达,有

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(v\Delta v). \tag{2.205}$$

由此表达式可以看出,若在变轨中仅要增大轨道半长径 a,则在近星点处(v 最大)最有利;而若需要抬高近星点高度,那么就需要在远星点加速($\Delta v>0$). 注意,这里的 Δv 是切向(即速度方向)分量,而不是 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的模$|\Delta\boldsymbol{v}|$.

一个速度增量 Δv 同样会改变轨道偏心率 e,根据(2.194)式可给出与

(2.205)式对应的关系式：

$$\begin{aligned}\Delta e &= \left[\frac{2}{ve}\left(\frac{rv^2}{\mu}\right)\left(\frac{rv^2}{\mu}-1\right)\cos^2\theta\right]\Delta v \\ &= \frac{2}{ve}\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{rv^2}{\mu}-1\right)\Delta v.\end{aligned} \tag{2.206}$$

其中 θ 是速度方向(即切向)与横向的夹角.

这一节主要给出二体问题意义下轨道过渡(变轨)的一些基本关系式，至于轨道过渡的具体问题和细节将在后面有关章节中阐述.

参 考 文 献

[1] Plummer H. C. An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy. Cambridge at the University Press,1918

[2] Smart W. M. Celestial Mechanics, University of Glasgow, 1953

[3] Brouwer D. Clemence, G. M. Methods of Celestial Methanics, New York and London: Academic Press,1961

刘林,丁华译. 天体力学方法. 北京:科学出版社,1986

[4] Giacaglia G. E. O. Celest. Mech. 1976, 14(4): 515～523

[5] Taff L. G. On Initial Orbit Determination. Astron. J. 1984, 89(12): 1426～1478

[6] Morton B. G. and Taff L. G. A New Method of Initial Orbit Determination. Celest. Mech. 1986, 39(2): 181～190

[7] 刘林. 人造地球卫星轨道力学(第三章). 北京:高等教育出版社. 1992

[8] 刘林. 天体力学方法(第二章). 南京:南京大学出版社. 1998

[9] 刘林. 航天器轨道理论(第二章,第十五章). 北京:国防工业出版社. 2000

[10] 刘林, 王歆. 考虑地球扁率摄动影响的初轨计算方法. 天文学报. 2003, 44(2): 175～179

Liu Lin, Wang Xin. A Method of Orbit Computation Taking into Account the Earth's Oblateness. Chin. Astron. Astrophys. 2003,27(3):335～339

第 3 章　航天器在轨运行的受摄运动

第 2 章所讨论的二体问题（无摄运动）只是航天器绕中心天体运动的一种近似，从这一章开始将要仔细研究航天器在各种力学因素作用下的运动规律. 为了便于讨论，暂取中心天体的质心天球坐标系作为讨论问题的参考系. 在此参考系中，航天器绕中心天体运动的微分方程可写成如下形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\ \dot{\boldsymbol{r}},\ t). \tag{3.1}$$

这里，右函数 $\boldsymbol{F}$（尽管少一个质量因子，我们还是经常习惯地称它为作用力）极其复杂，若要获得运动方程（3.1）式的解，就必须对 $\boldsymbol{F}$ 作一些必要的分析和简化，给出合理的力学模型. 每一种力学因素的数学模型将要在后面各章中逐一给出，这一章先用中心天体质点引力外加保守力和耗散力影响的原则性力模型，介绍对受摄运动的处理方法，从而让读者了解求解这类方程的基本知识.

在上述前提下，航天器运动的基本方程（3.1）可以写成下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon, \tag{3.2}$$

而 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 的形式为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{r},\ \dot{\boldsymbol{r}},\ t;\ \varepsilon^k). \tag{3.3}$$

$\boldsymbol{F}_0$ 是中心天体的质点引力加速度，即

$$\boldsymbol{F}_0 = -\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right), \tag{3.4}$$

而 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 则包含了各种影响航天器运动的力因素，但它们满足下列条件：

$$|\boldsymbol{F}_\varepsilon| / |\boldsymbol{F}_0| = O(\varepsilon^k). \tag{3.5}$$

这里 $\varepsilon \ll 1$ 是小参数. 对于低轨人造地球卫星而言，$\varepsilon = O(J_2) = 10^{-3}$，$J_2$ 是地球非球形的扁率项因子. 对于不同的航天器，根据所处的不同力学环境，可取不同的参考量作为小参数标准.

满足方程（3.2）的运动不再是无摄运动，相应的二体问题意义下的圆锥曲线运动（椭圆或双曲线）就要发生轨道变化，此即受摄运动，（3.2）式即受

摄运动方程.

§3.1　轨道变化与常数变易法

如何求解受摄运动方程(3.2),从而给出航天器运动轨道的变化规律,这是航天器轨道力学的一个重点内容,本章将用分析方法来处理这一问题.

首先考虑无摄运动问题(即二体问题),这时 $\boldsymbol{F}_\varepsilon=0$,相应的方程(3.2)变为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_0=-\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{3.6}$$

第二章已给出该问题的解:

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(C_1,C_2,\cdots,C_6,\ t),\\ \dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{g}(C_1,C_2,\cdots,C_6,\ t).\end{cases} \tag{3.7}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{r}}=\partial\boldsymbol{r}/\partial t$. 此解用来描述一圆锥曲线运动,六个积分常数 $C_1,C_2,\cdots,C_6$ 即轨道根数,依次排列为 a,e,i,Ω,ω,τ. 回到原方程(3.2),$\boldsymbol{F}_\varepsilon\neq0$,解(3.7)式当然不能满足它. 所谓常数变易法,即要使无摄运动的解(3.7)满足受摄方程(3.2),显然,$C_1,C_2,\cdots,C_6$ 不再是常数,应变为时间 t 的函数. 那么接下来就要导出这些积分常数(或轨道根数)的变化所满足的微分方程——摄动运动方程.

(3.7)第一式对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial C_j}\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}. \tag{3.8}$$

由于要求(3.7)第二式亦满足受摄运动方程,所以应有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial t}=\boldsymbol{g}(C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_6,\ t). \tag{3.9}$$

此式再对 t 求一次导数,并让其满足受摄运动方程(3.2),即

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial C_j}\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{F}_\varepsilon, \tag{3.10}$$

而在该式中有

$$\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial t}=\boldsymbol{F}_0, \tag{3.11}$$

由此可知,常数变易的两个条件应为

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial C_j}\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}=0,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial C_j}\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_\varepsilon.\end{cases} \tag{3.12}$$

其中$\frac{\partial f}{\partial C_j}$和$\frac{\partial g}{\partial C_j}$都是$C_j$和$t$的已知函数，因此共有六个“未知量”$\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}$，与方程个数相同. 对于具体应用，需要由该方程组给出$\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}$的显形式. 至于如何给出，暂放一下，先来看看上述常数变易法的实际意义. 显然，经上述处理，就是把受摄运动看成一个变化的圆锥曲线运动，无摄运动解的表达式(3.7)仍然成立，只是相应的六个不变根数C_j变为$C_j(t)$，即瞬时根数，亦称吻切根数.

关于由线性方程组(3.12)给出$\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}$的显形式问题，不再重复许多天体力学书中常用的推导方法，下面将介绍另一种比较简单的以轨道根数作为基本变量的直接推导方法，它无需假定摄动力是保守力，可普遍适用[1].

§3.2 摄动运动方程的直接推导

原理未变，但不是直接引用关系式(3.7)，而是引用它们的原始形式，即二体问题的六个积分. 对于椭圆运动情况有

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\ -\sin i\cos\Omega\\ \cos i\end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right), \tag{3.14}$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}=a(1-e\cos E), \tag{3.15}$$

$$M=E-e\sin E. \tag{3.16}$$

对于双曲线运动情况六个积分稍有差别，即

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\sqrt{\mu a(e^2-1)}\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\ -\sin i\cos\Omega\\ \cos i\end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right), \tag{3.18}$$

$$r=\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos f}=a(e\,\mathrm{ch}E-1), \tag{3.19}$$

$$M=e\,\mathrm{sh}E-E. \tag{3.20}$$

这里同时引用轨道积分和活力公式，仍算作两个独立积分. 因此两种轨道分别有六个关系式，可用来导出六个积分常数(可变根数)变化的微分方程. 同

样，让它满足受摄运动方程(3.2)，而原不变根数变为时间 t 的函数.

为了下面推导的需要，现将 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 在空间极坐标系(r,θ,w)和中心天体质心直角坐标系 $O-xyz$ 中的形式分别列出，即

$$\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}=x\hat{\boldsymbol{i}}+y\hat{\boldsymbol{j}}+z\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{3.21}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}=\dot{x}\hat{\boldsymbol{i}}+\dot{y}\hat{\boldsymbol{j}}+\dot{z}\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}&=r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{w}}\\&=(y\dot{z}-z\dot{y})\hat{\boldsymbol{i}}+(z\dot{x}-x\dot{z})\hat{\boldsymbol{j}}+(x\dot{y}-y\dot{x})\hat{\boldsymbol{k}}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{w}}$ 为径向，横向和轨道面法向单位矢量，$\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ 为直角坐标三个方向的单位矢量. 摄动力(加速度)$\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 在上述两坐标系中的三个分量分别记为 S, T, W 和 F_x, F_y, F_z.

将常数变易的原理分别用于上述六个积分(3.13)～(3.16)和(3.17)～(3.20). 设

$$\varphi(C_1, C_2, \cdots, C_6, t)=\psi(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) \tag{3.24}$$

为无摄运动(3.6)的任一积分，对于无摄运动有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\ddot{\boldsymbol{r}}, \tag{3.25}$$

即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\boldsymbol{F}_0. \tag{3.26}$$

而对受摄运动却变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial C_j}\dot{C}_j=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\ddot{\boldsymbol{r}}\\&=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}(\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{F}_\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.27}$$

按常数变易的要求，其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 仍满足椭圆或双曲线运动关系，那么根据(3.26)式立即可得

$$\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial C_j}\dot{C}_j=\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\boldsymbol{F}_\varepsilon. \tag{3.28}$$

实际上，这就是条件(3.12)式的一般情况，当 $\psi=x$, y, z 和 $\psi=\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ 时，条件(3.28)式即退化为(3.12)式.

为了避免混乱，我们引用 a, e, i, Ω, ω, M 六个根数作为独立变量. 事实上，无论是理论研究还是具体应用问题，都没有必要引用过近星点时刻 τ 或常用的 $M_0=-n\tau$，真正有用的是时间根数 $M=n(t-\tau)$，或另两个近点角

f 和 E,而采用平近点角 M 比较方便. 引用 M 代替 τ 作为独立变量后,在求某些函数对 a 的偏导数时,不再有显含 a 和隐含 a 的问题. 上述六个积分中的前四个,即(3.13)~(3.14)式和(3.17)~(3.18)式,可以写成形如(3.24)式的简单形式:

$$\varphi(a, e, i, \Omega) = \psi(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}). \tag{3.29}$$

相应的条件(3.28)式为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi}{\partial e}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi}{\partial i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\Omega}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \\ = &\frac{\partial\psi}{\partial\dot{r}}S + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\theta}}T \\ = &\frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}}F_x + \frac{\partial\psi}{\partial\dot{y}}F_y + \frac{\partial\psi}{\partial\dot{z}}F_z. \end{aligned} \tag{3.30}$$

这可用来推导 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$. 关于另两个方程,虽然 M 或 f,E 可以代替 τ 作为独立变量,但它们都不能看成积分常数,因此对后两个积分(3.15)~(3.16)式和(3.19)~(3.20)式不便引用(3.28)式,但可用来直接推导 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$. 推导中将要用到 $\dot{f}$,这可由面积积分将它与 $\dot{\omega}$,$\dot{\Omega}$ 联系起来. 对于无摄运动有

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dot{f}, \\ r^2\dot{\theta} = r^2\dot{f} = h, \end{cases} \tag{3.31}$$

$$h = \sqrt{\mu p} = \begin{cases} \sqrt{\mu a(1-e^2)} \\ \sqrt{\mu a(e^2-1)}. \end{cases} \tag{3.32}$$

而对于受摄运动却有

$$\dot{\theta} = \dot{f} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i,$$

$$r^2\dot{\theta} = r^2(\dot{f} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i) = h(t),$$

即

$$r^2\dot{f} = h(t) - r^2(\dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i). \tag{3.33}$$

下面根据上述原理具体推导摄动运动方程,但仅对椭圆情况作全面阐述,而对双曲线运动情况,推导过程完全类似,不再重复. 首先将积分(3.14)式写成(3.29)式的形式:

$$\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r} - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

根据(3.14)式得

$$-\frac{\mu}{a^2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=-2\dot{r}S-2r\dot{\theta}T.$$

其中

$$\begin{cases}\dot{r}=\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=\sqrt{\mu/p}e\sin f,\\ r\dot{\theta}=\dfrac{1}{r}\sqrt{\mu p}.\end{cases} \tag{3.34}$$

代入上式整理后得

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[Se\ \sin f+T(1+e\cos f)]. \tag{3.35}$$

接着利用积分(3.13)式在轨道面法向和 x,y 方向上的分量来推导 $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$. 相应的形式为

$$h=r^2\dot{\theta}, \tag{3.36}$$

$$h\ \sin i\sin\Omega=y\dot{z}-z\dot{y}, \tag{3.37}$$

$$-h\ \sin i\cos\Omega=z\dot{x}-x\dot{z}, \tag{3.38}$$

由(3.30)式得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=rT, \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}rT\sin i\sin\Omega+h\ \cos i\sin\Omega\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+h\ \sin i\cos\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=yF_z-zF_y\\&=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_x,\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}-rT\sin i\cos\Omega-h\ \cos i\cos\Omega\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+h\ \sin i\sin\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=zF_x-xF_z\\&=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_y.\end{aligned} \tag{3.41}$$

由 $h=\sqrt{\mu p}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}$，(3.39)式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu}{2\sqrt{\mu p}}\left[(1-e^2)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-2ae\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right]=rT. \tag{3.42}$$

将方程(3.35)代入上式并消去 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$，即得

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}[S\ \sin f+T(\cos f+\cos E)]. \tag{3.43}$$

为了由(3.40)式和(3.41)推出 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$，需要计算 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_x$ 和 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_y$. 在空间极坐标系中记 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)$ 为 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)^*$ ，有

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)^*=\begin{pmatrix}0\\-rW\\rT\end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

经三次旋转可得 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 在地心赤道直角坐标系中的表达式，即

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-u)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)^*$$

$$=\begin{pmatrix} rT\sin i\sin\Omega + rW(\cos\Omega\sin u+\sin\Omega\cos u\cos i) \\ -rT\sin i\cos\Omega + rW(\sin\Omega\sin u-\cos\Omega\cos u\cos i) \\ rT\cos i - rW\cos u\sin i \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

其中 $u=f+\omega$. 将$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_x$ 和$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_y$ 两个分量代入(3.40)式，作简单运算即得

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W, \tag{3.46}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W. \tag{3.47}$$

利用轨道积分(3.15)式分别得出

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1-e^2}{1+e\cos f}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \left[\frac{p\cos f}{(1+e\cos f)^2} + \frac{2ae}{1+e\cos f}\right]\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{pe\sin f}{(1+e\cos f)^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \tag{3.48}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = (1-e\cos E)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - a\cos E\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + ae\sin E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \tag{3.49}$$

而根据常数变易原理，按椭圆运动关系有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin f. \tag{3.50}$$

通过(3.33)式和开普勒积分给出的导数关系

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = (1-e\cos E)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \sin E\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}. \tag{3.51}$$

即可将(3.48)式和(3.49)式中的 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 与 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ 联系起来，从而导出最后两个方程

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right] - \cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}, \tag{3.52}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \frac{1-e^2}{nae}\left[-S\left(\cos f - 2e\frac{r}{p}\right) + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right]. \tag{3.53}$$

从上述六个方程的形式来看，中心天体质心引力常数 μ 仅出现在平运动速度 n 中，即

$$n = \sqrt{\mu a^{-3/2}}. \tag{3.54}$$

§3.3　椭圆运动的摄动运动方程

1. 以六个椭圆轨道根数为基本变量的摄动运动方程

基本变量记作 σ，它们是 a，e，i，Ω，ω，M 六个随时间变化的瞬时根数. 根据不同问题的需要，摄动力(加速度)将以三种形式表达. 其一是径向分量 S，横向分量 T，轨道面法向分量 W 表示. 另一种形式是将 S，T 改为切向分量 U，法向分量 N. 这里切向是指天体运动方向，N 是轨道面内的法向分量，也称主法线分量，而 W 又称次法线分量. U，N，W 与 S，T，W 一样，组成右手螺旋系统. 有些摄动力是保守力，存在势 R，相应的第三种形式即

$$\boldsymbol{F}_{\varepsilon} = \mathrm{grad}R. \tag{3.55}$$

其中 R 又称摄动函数.

为了由 S，T，W 型的摄动运动方程推出另两种形式，就必须找出 U，N，W 三个分量以及摄动函数的偏导数 $\partial R/\partial\sigma$ 与 S，T，W 的关系. 首先考虑 U，N，设径向与切向之间的夹角为 α，由坐标旋转，立即可得

$$\begin{cases} S = U\cos\alpha - N\sin\alpha, \\ T = U\sin\alpha + N\cos\alpha. \end{cases} \tag{3.56}$$

根据微分几何知识可知，对于曲线(即轨道) $r=r(\theta)$ 或 $r=r(f)$，有

$$\tan\alpha = \frac{r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}f}} = \frac{1+e\cos f}{e\sin f}. \tag{3.57}$$

由此可得

$$\cos\alpha = \frac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}. \tag{3.58}$$

将此结果代入(3.56)式得

$$\begin{cases} S = \dfrac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}U - \dfrac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}N, \\ T = \dfrac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}U + \dfrac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}N. \end{cases} \tag{3.59}$$

对于保守力情况有

$$S = \frac{\partial R}{\partial r}, \quad T = \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial u}, \quad W = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r\sin u}\frac{\partial R}{\partial i}. \tag{3.60}$$

有了这一关系，就可以写出用摄动函数描述瞬时根数变化的摄动运动方程. 但方程右端还包含 r,u,f,E 等量，若要使给出的方程 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$，其右端仅出现 a,e,i 三个量和 $\partial R/\partial\sigma$，就必须求出 $\partial R/\partial\sigma$ 与 S,T,W 之间的关系.

因 $R=R(r)$，故有

$$\frac{\partial R}{\partial\sigma}=\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\sigma}=\boldsymbol{F}_{\varepsilon}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\sigma}, \tag{3.61}$$

而其中

$$\boldsymbol{F}_{\varepsilon}=\boldsymbol{R}_z(-\Omega)\boldsymbol{R}_x(-i)\boldsymbol{R}_z(-u)\begin{pmatrix}S\\T\\W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S\\T\\W\end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

这里 $l_j,m_j,n_j(j=1,2,3)$ 是径向、横向和轨道面法向单位矢量的三个分量，即

$$\hat{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}l_1\\m_1\\n_1\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}=\begin{pmatrix}l_2\\m_2\\n_2\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{\omega}}=\begin{pmatrix}l_3\\m_3\\n_3\end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

具体形式在第二章中已给出（那里的 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 即 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$），它们是：

$$\begin{cases}l_1=\cos\Omega\cos u-\sin\Omega\sin u\cos i,\\ m_1=\sin\Omega\cos u+\cos\Omega\sin u\cos i,\\ n_1=\sin u\sin i,\end{cases} \tag{3.64}$$

$$\begin{cases}l_2=-\cos\Omega\sin u-\sin\Omega\cos u\cos i,\\ m_2=-\sin\Omega\sin u+\cos\Omega\cos u\cos i,\\ n_2=\cos u\sin i,\end{cases} \tag{3.65}$$

$$\begin{cases}l_3=\sin\Omega\sin i,\\ m_3=-\cos\Omega\sin i,\\ n_3=\cos i.\end{cases} \tag{3.66}$$

$\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 满足下列关系：

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{r}}^2=\hat{\boldsymbol{\theta}}^2=\hat{\boldsymbol{\omega}}^2=1,\\ \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}}=\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=0.\end{cases} \tag{3.67}$$

剩下的问题是求 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\sigma}$. 由

$$\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}$$

可知

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} = \frac{\partial r}{\partial \sigma}\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \sigma}. \tag{3.68}$$

其中

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \sigma} = \begin{pmatrix} l_3 \sin u\,\dfrac{\partial i}{\partial \sigma} - m_1\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + l_2\,\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} \\ m_3 \sin u\,\dfrac{\partial i}{\partial \sigma} + l_1\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + m_2\,\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} \\ n_3 \sin u\,\dfrac{\partial i}{\partial \sigma} + n_2\,\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

将(3.62)式和(3.68)式连同(3.63)～(3.66)式以及(3.69)式一并代入(3.61)式，经整理后得

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial r}{\partial \sigma}S + rT\left(\cos i\,\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\right) + rW\left(\sin u\,\frac{\partial i}{\partial \sigma} - \sin i \cos u\,\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}\right). \tag{3.70}$$

利用 §2.2 中的结果

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial a} = \dfrac{r}{a}, \quad \dfrac{\partial r}{\partial e} = -a\cos f, \quad \dfrac{\partial r}{\partial M} = \dfrac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \omega} = 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial e} = \dfrac{1}{1-e^2}\left(1+\dfrac{p}{r}\right)\sin f, \quad \dfrac{\partial u}{\partial M} = \left(\dfrac{a}{r}\right)^2\sqrt{1-e^2}. \end{cases} \tag{3.71}$$

就可给出(3.70)式的具体形式，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a} = \dfrac{r}{a}S, \\ \dfrac{\partial R}{\partial e} = -a\cos f S + r\left(\dfrac{1}{1-e^2} + \dfrac{a}{r}\right)\sin f T, \\ \dfrac{\partial R}{\partial i} = r\sin u W, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \Omega} = r\cos i T - r\cos u \sin i W, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \omega} = rT, \\ \dfrac{\partial R}{\partial M} = \dfrac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f S + \dfrac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r}T. \end{cases} \tag{3.72}$$

根据前面的推导，我们将三种形式的摄动运动方程整理于下：

(1) S, T, W 型

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[S\,e\,\sin f + T(1+e\cos f)],\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}[S\sin f + T(\cos f+\cos E)],\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W,\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W,\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right] - \cos i\,\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \dfrac{1-e^2}{nae}\left[-S\left(\cos f - 2e\dfrac{r}{p}\right) + T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right].
\end{cases}
\tag{3.73}
$$

(2) U, N, W 型

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}U,\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[2(\cos f+e)U - \sqrt{1-e^2}\sin E N\right],\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2\sin f\,U + (\cos E+e)N] - \\[1ex]
\qquad \cos i\,\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \dfrac{1-e^2}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[\left(2\sin f + \dfrac{2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)U + \right.\\[1ex]
\qquad \left.(\cos E - e)N\right].
\end{cases}
\tag{3.74}
$$

$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$ 与(3.73)式中相应的两式表达相同. 上述两种类型称为高斯(Guass)型.

（3）$\partial R/\partial \sigma$ 型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial M},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1-e^2}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial M}-\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial \omega},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\cos i\dfrac{\partial R}{\partial \omega}-\dfrac{\partial R}{\partial \Omega}\right),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial R}{\partial i},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial e}-\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{1-e^2}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial e}-\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial a}.\end{cases} \tag{3.75}$$

这种类型称为拉格朗日（Lagrange）型.

2．适合任意偏心率（$0\leqslant e<1$）问题的摄动运动方程

前面推出的方程，右端含有$\dfrac{1}{e}$因子，不能用于 $e=0$ 的情况. 为此引进新变量，它们是

$$a,\ i,\ \Omega,\ \xi=e\cos\omega,\ \eta=e\sin\omega,\ \lambda=M+\omega \tag{3.76}$$

这组变量当 $e=0$ 时是完全确定的. 根据变量的定义和前面已推出的方程，经简单运算即可给出以新变量表达的摄动运动方程，其形式如下：

（1）S，T，W 型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\sin u-\eta\cos u)+T\left(\dfrac{p}{r}\right)\right],\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}\Big\{S\sin u+\dfrac{T}{\sqrt{1-e^2}}\Big[(1+\sqrt{1-e^2})\cos u-\\ \qquad\dfrac{\xi}{1+\sqrt{1-e^2}}(\xi\cos\tilde{u}+\eta\sin\tilde{u})\Big]\Big\}+\eta\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}\Big\{-S\cos u+\dfrac{T}{\sqrt{1-e^2}}\Big[(1+\sqrt{1-e^2})\cos u-\\ \qquad\dfrac{\eta}{1+\sqrt{1-e^2}}(\xi\cos\tilde{u}+\eta\sin\tilde{u})\Big]\Big\}-\xi\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}\Big\{2S\sqrt{1-e^2}\left(\dfrac{r}{p}\right)+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\Big[S(\xi\cos u+\\ \qquad\eta\sin u)-T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)(\xi\sin u-\eta\cos u)\Big]\Big\}-\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}.\end{cases} \tag{3.77}$$

其中 $\tilde{u}=E+\omega$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$ 与前面(3.73)式中的形式相同，不再重复.

（2）$\partial R/\partial\sigma$ 型

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda},\\
\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left[\cos i\left(-\eta\dfrac{\partial R}{\partial\xi}+\xi\dfrac{\partial R}{\partial\eta}+\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}\right)-\dfrac{\partial R}{\partial\Omega}\right],\\
\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial R}{\partial i},\\
\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\dfrac{\partial R}{\partial\eta}-\xi\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}+\eta\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\
\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\dfrac{\partial R}{\partial\xi}-\eta\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}-\xi\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\
\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}+\dfrac{1-e^2}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\left(\xi\dfrac{\partial R}{\partial\xi}+\eta\dfrac{\partial R}{\partial\eta}\right)-\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}.
\end{cases}
\tag{3.78}
$$

这两组方程的右端不再出现 $1/e$ 因子.

3. 适合任意偏心率($0\leqslant e<1$)和倾角($0\leqslant i<180°$)问题的摄动运动方程

上述方程右端还有 $1/\sin i$ 因子，不适用于 $i=0$ 或 $i=180°$的情况. 但对卫星型的航天器而言，一般不会出现 $i=180°$的情况，只需要考虑 $i=0$ 的问题. 为此，引进另一组新变量，它们是：

$$
\begin{cases}
a,\ h=\sin\dfrac{i}{2}\cos\Omega,\ k=\sin\dfrac{i}{2}\sin\Omega,\\
\xi=e\cos(\omega+\Omega),\ \eta=e\sin(\omega+\Omega),\ \lambda=M+\omega+\Omega.
\end{cases}
\tag{3.79}
$$

在 h 和 k 的定义中采用的是 $\sin\dfrac{i}{2}$而不是 $\sin i$，其原因是采用 $\sin i$ 时，在相关问题中会出现 $1/\cos i$ 的因子，不适用于 $i=90°$的情况，而采用 $\sin\dfrac{i}{2}$不会出现这一问题. 下面分别列出 S，T，W 型的方程和 $\partial R/\partial\sigma$ 型的方程.

（1）***S*，*T*，*W* 型**

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\sin u-\eta\cos u)+T\left(\frac{p}{r}\right)\right],\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{S\sin u+T\left[\cos\tilde{u}+\cos u-\right.\right.\\
&\quad \left.\frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}(\xi\sin\tilde{u}-\eta\cos\tilde{u})\right]+\\
&\quad \left.W\left(\frac{r}{p}\right)\left[-\eta\,\frac{(h\sin u-k\cos u)}{\cos\dfrac{i}{2}}\right]\right\},\\
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{-S\cos u+T\left[\sin\tilde{u}+\sin u+\right.\right.\\
&\quad \left.\frac{\xi}{\sqrt{1-e^2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}(\xi\sin\tilde{u}\eta\cos\tilde{u})\right]+\\
&\quad \left.W\left(\frac{r}{p}\right)\left[\xi\,\frac{(h\sin u-k\cos u)}{\cos\dfrac{i}{2}}\right]\right\},\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{W}{2na\sqrt{1-e^2}\cos\dfrac{i}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)[\cos u-h(k\sin u+h\cos u)],\\
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} &= \frac{W}{2na\sqrt{1-e^2}\cos\dfrac{i}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)[\sin u-k(k\sin u+h\cos u)],\\
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= n-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{2S\sqrt{1-e^2}\left(\frac{r}{p}\right)+\right.\\
&\quad \frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\cos u+\eta\sin u)-\right.\\
&\quad \left.T\left(1+\frac{r}{p}\right)(\xi\sin u-\eta\cos u)\right]-\\
&\quad \left.W\left(\frac{r}{p}\right)\left[\frac{h\sin u-k\cos u}{\cos\dfrac{i}{2}}\right]\right\}.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.80}
$$

（2）$\partial R/\partial\sigma$ 型

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\lambda},\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{1}{2k+2h-1-\cos i}\left[-2h\frac{\partial R}{\partial h}-(2h-\right.\right.\\
&\quad\left.\left.1-\cos i)\frac{\partial R}{\partial k}\right]+\frac{h}{1+\cos i}\left(\eta\frac{\partial R}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\partial R}{\partial\lambda}\right)\right\},\\
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{1}{2k+2h-1-\cos i}\left[2k\frac{\partial R}{\partial k}+(2k-\right.\right.\\
&\quad\left.\left.1-\cos i)\frac{\partial R}{\partial h}\right]+\frac{k}{1+\cos i}\left(\eta\frac{\partial R}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\partial R}{\partial\lambda}\right)\right\},\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2\eta\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\eta}-\\
&\quad\frac{\xi\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial\lambda},\\
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &= \frac{2\xi\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\xi}-\\
&\quad\frac{\eta\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial\lambda},\\
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{2\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\cos i)}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)+\\
&\quad\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\left(\xi\frac{\partial R}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial R}{\partial\eta}\right).
\end{aligned}\right. \tag{3.81}$$

上述两种形式的方程不再有 $1/e$ 和 $1/\sin i$ 因子.

§ 3.4　双曲线运动的摄动运动方程

直接写出下列两种形式的摄动运动方程[2]，即

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2}{n\sqrt{e^2-1}}[Se\sin f + T(1+e\cos f)], \\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{e^2-1}}{na}[S\sin f + T(\cos f + \mathrm{ch}E)], \\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{r\cos u}{na^2\sqrt{e^2-1}}W, \\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{r\sin u}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i}W, \\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{e^2-1}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right] - \cos i\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}, \\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= n + \frac{e^2-1}{nae}\left[S\left(-\cos f + 2e\,\frac{r}{p}\right) + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right],
\end{aligned}
\right.
\tag{3.82}
$$

和

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial M}, \\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{e^2-1}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial M} + \frac{\sqrt{e^2-1}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i}\left(\cos i\,\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega}\right), \\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sqrt{e^2-1}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial e} - \cos i\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}, \\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= n - \frac{e^2-1}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial a}.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.83}
$$

其中 R 同样是保守力型摄动对应的摄动函数，即 $\boldsymbol{F}_\varepsilon = \mathrm{grad}R$.

从上述摄动运动方程不难看出，由于双曲线轨道对应的 $e>1$，相应的 a 和 e 以及相关的平近点角 M 的变化规律有别于椭圆轨道.

§ 3.5　各类摄动对轨道影响的定性分析

受摄运动方程(3.2)式右端的摄动加速度 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 通常包含保守力(引力等)和耗散力作用，不同的力因素对卫星轨道将会产生不同性质的影响. 在具体阐述相应摄动解之前，这里先对各类摄动因素及其影响特征作一简单介绍和分析. 就人造地球卫星而言，几类主要摄动源如下：

1. 地球非球形引力摄动

太阳系中各大行星、小行星以及月球,它们的质量分布都是不均匀的,形状也并非球形. 对于这样的天体,其引力位函数与球形引力位(即质点引力位)有差别,在质心赤道坐标系中,相应的非球形引力位可由下列球谐展开式表达:

$$V = V_0 + \Delta V, \tag{3.84}$$

$$V_0 = \frac{\mu}{r} = \frac{GM}{r}, \tag{3.85}$$

$$\Delta V = -GM \sum_{l \geqslant 2} \frac{J_l}{r^{l+1}} P_l(\sin\varphi) - \sum_{l \geqslant 2} \sum_{m=1}^{l} \frac{J_{l,m}}{r^{l+1}} P_l^m(\sin\varphi) \cos m\bar{\lambda}, \tag{3.86}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda - \lambda_{l,m}, \quad \lambda_{l,m} = \text{const}. \tag{3.87}$$

其中 r 为地心距,λ,φ 为地心经、纬度,$P_l(\sin\varphi)$和 $P_l^m(\sin\varphi)$分别为勒让德(Legendre)和缔合勒让德多项式. V_0 是地球引力位的主要部分,相当于密度均匀球体的引力位,或质量全部集中在质心的质点引力位. ΔV 是真实引力位对均匀球体的修正部分,包括带谐(Zonal Harmonic)和田谐(Tesseral Harmonic)两大项,它们反映了地球的不均匀性(包括形状不规则和密度分布的不均匀). 相应的 J_l 和 $J_{l,m}$即带谐项系数和田谐项系数,它们的大小则反映出上述不均匀性的程度. 其中 $J_2 = O(10^{-3})$,相应的项又称为扁率项,其他 J_l 和 $J_{l,m}$的量级几乎都不大于 10^{-6}. 因此,人造卫星在地球引力场中的运动方程又可写成下列形式:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon. \tag{3.88}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_0 = \text{grad}V_0 = -\frac{\mu}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{3.89}$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \text{grad}(\Delta V), \tag{3.90}$$

且有

$$|\boldsymbol{F}_\varepsilon| / |\boldsymbol{F}_0| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon = O(J_2). \tag{3.91}$$

$\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 相对 $\boldsymbol{F}_0$ 是一小扰动,称为摄动部分. 这种由地球(或任一中心天体)不均匀性引起的摄动,常被称为非球形引力摄动或简称形状摄动.

2. 第三体引力摄动

对于人造卫星绕地球的运动,日、月(作为质点)引力是一种典型的第三体引力摄动,相应的摄动加速度为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \sum_{j=1}^{2}(-m_j)\left(\frac{\boldsymbol{R}_j}{|\boldsymbol{R}_j|^3} + \frac{\boldsymbol{\Delta}_j}{|\boldsymbol{\Delta}_j|^3}\right), \tag{3.92}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_j = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_j,(j=1,2). \tag{3.93}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}_j$ 各为人造卫星和日、月的地心向径，$\boldsymbol{R}_j$ 是时间 t 的已知函数，由日、地、月三体系统确定，与人造卫星运动无关.

3. 大气阻力摄动

人造卫星(特别是低轨卫星)在地球高层大气中飞行，将受大气阻力的影响，阻力加速度可写成下列形式：

$$\boldsymbol{D} = -\frac{1}{2}\left(\frac{C_{\mathrm{D}}S}{m}\right)\rho v^2\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right). \tag{3.94}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是卫星相对大气的飞行速度，v 是其大小，ρ 是大气密度，S/m 是卫星对阻力而言的有效面积质量比(以后简称面质比)，C_{D} 是阻力系数. 对于绝大多数卫星而言，它们的有效截面积 S 不是太大，而飞行高度又不太低(通常距地面 200 km 以上)，$\boldsymbol{D}$ 相对前面的主项 $\boldsymbol{F}_0$ 是很小的，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}_\varepsilon$，是一种阻力摄动.

4. 太阳辐射压摄动

直接作用在人造卫星表面的太阳辐射压(或简称光压)，虽然并不大，但同样要影响卫星的运动，也是一种摄动源，相应的摄动加速度为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \nu\left(\frac{\kappa S}{m}\right)\rho_\odot\frac{a_u^2}{\Delta^2}\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta}\right). \tag{3.95}$$

其中 $\rho_\odot$ 是作用在离太阳一个天文单位 a_u 处的太阳辐射压强，$\kappa=1+\eta$，η 是卫星表面的反射系数，S/m 是卫星对辐射压而言的有效面质比，$\boldsymbol{\Delta}$ 是太阳到卫星的矢径，ν 是地影因子，由下式定义：

$$\nu = 1 - \Delta S/S_\odot. \tag{3.96}$$

这里 $S_\odot$ 是太阳视面积，ΔS 是被“蚀”部分，这涉及到地影问题，当 $\Delta S=S_\odot$ 时，$\nu=0$，此时对应卫星进入真正的地影.

上述四类力因素不仅是人造地球卫星运动中所承受的主要摄动源，对于其他类型的航天器(包括月球探测器、行星探测器)，在不同的运行过程中所承受的主要摄动源基本上也是这几类中的某几种. 这些摄动源不外乎保守力和耗散力，或引力和非引力.

对于保守力而言，航天器的能量不会有耗散，表现在椭圆轨道半长径 a 不会出现长期变化. 耗散力摄动则不同，航天器能量有耗损，轨道半长径和

偏心率都不断减小，即轨道变小变圆. 引力摄动与卫星的大小形状无关，而非引力摄动（如大气阻力和光压），它们是一面力，与承受这种力因素的截面有关，即与卫星的大小形状有关，这就涉及到卫星的姿态等问题. 这些还仅仅是各类摄动因素对航天器运行轨道影响的一个粗略的轮廓，具体细节（变化规律）还有待下两章建立各类摄动解时才有可能看得清楚，而这一点又是航天工程中必须充分了解的轨道信息，否则任何一个航天任务要圆满完成都是不可能的.

参 考 文 献

[1] 刘林. 人造地球卫星轨道力学（第四章）. 北京：高等教育出版社. 1992

[2] Liu Lin，Wang Xin. Hyperbolic Orbit and Its Variation of Deep-space Probe. Science in China (Series G). 2003，46(2)：191～197

第 4 章　摄动运动方程的解与中心天体的非球形引力摄动

根据前面两章的讨论，我们已经了解到卫星在轨运行（无论是人造地球卫星还是环绕其他探测目标天体运行的轨道器）对应的是一个受摄二体问题，并经常数变易法的处理，已将原受摄运动方程

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon \ ,$$

的求解问题转化为相应的摄动运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = f_\varepsilon(\sigma, t, \varepsilon) \ , \tag{4.1}$$

的求解问题. 这里 σ 表示一 6 维向量，6 个分量即瞬时轨道根数，即无摄运动的 6 个积分常数. 右函数 f_ε 则是 6 维向量函数，有

$$|(f_\varepsilon)_i| = O(\varepsilon) \ll 1, \quad i = 1, 2, \cdots, 6. \tag{4.2}$$

原受摄运动问题的解由两部分组成，即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma, t), \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}(\sigma, t) \tag{4.3}$$

和

$$\sigma = \sigma(t) = \sigma(\sigma_0, t_0; t, \varepsilon), \quad \sigma(t_0) = \sigma_0. \tag{4.4}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式是已知的，即第二章中的(2.42)式和(2.48)式，它们对应于一个瞬时椭圆，σ_0 即 t_0 时的椭圆根数. 这一阐述对变化的双曲线轨道同样适用，但已不是卫星运动问题，只在本章有关内容中加以阐明. 现在剩下的问题是如何求解小参数方程(4.1)，给出 $\sigma(t)$.

尽管方程(4.1)是复杂的非线性方程组，但其右端含小参数 ε，给出相应的小参数幂级数解并不困难，已有成熟的方法，即摄动法. 为了让读者深入了解摄动法，以便更好地学习后面要介绍的针对航天器在轨运行时所承受的各种摄动及相应摄动运动方程的具体解法，本章将首先对摄动法如何构造相应的小参数幂级数解以及摄动法的改进作必要的阐述.

§4.1 摄动运动方程的小参数幂级数解

1. 小参数幂级数解的构造——摄动法

如果第 6 个根数为 τ 或 $M_0=-n\tau$，则方程(4.1)的右函数 f_ε 的 6 个元素的量级均为 $O(\varepsilon)$，即满足(4.2)式. 然而，通常第六个根数是采用平近点角 M，那么上述右函数 f_ε 的第六个元素含有一项 $n=\sqrt{\mu a}^{\ -3/2}=O(\varepsilon^0)$，此时方程(4.1)应改写成下列形式

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f_0(a)+f_1(\sigma,t,\varepsilon), \tag{4.5}$$

$$f_0(a)=\delta n=O(\varepsilon^0), \tag{4.6}$$

$$|f_{1i}(\sigma,t,\varepsilon)|=O(\varepsilon),\quad i=1,2,\cdots,6, \tag{4.7}$$

其中

$$\delta=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}. \tag{4.8}$$

这里轨道根数 σ 的各元素排列次序为 a,e,i,Ω,w,M，δ 向量只有第 6 个元素为 1，对应 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$，δ 这一符号后面经常用到，不再说明.

方程(4.5)的小参数幂级数解形式为

$$\begin{cases}\sigma(t)=\sigma^{(0)}(t)+\Delta\sigma^{(1)}(t,\varepsilon)+\Delta\sigma^{(2)}(t,\varepsilon^2)+\cdots+\Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)+\cdots,\\ \Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)=\varepsilon^l\beta_l(t).\end{cases} \tag{4.9}$$

其中 $\sigma^{(0)}(t)$是对应 $\varepsilon=0$ 的无摄运动解，即

$$\sigma^{(0)}(t)=\sigma_0+\delta n_0(t-t_0), \tag{4.10}$$

或具体写成

$$\begin{cases}a^{(0)}(t)=a_0,\quad e^{(0)}(t)=e_0,\quad i^{(0)}(t)=i_0,\\ \Omega^{(0)}(t)=\Omega_0,\quad \omega^{(0)}(t)=\omega_0,\\ M^{(0)}(t)=M_0+n_0(t-t_0).\end{cases} \tag{4.11}$$

其中 $\sigma_0(a_0,e_0,i_0,\Omega_0,w_0,M_0)$是初始时刻 t_0 时的根数. 不难看出，对 ε 展开的小参数幂级数解(4.9)，实际上就是解 $\sigma(t)$在参考轨道——无摄运动解 $\sigma^{(0)}(t)$处的展开. $\Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)$即 l 阶摄动变化项，简称 l 阶摄动项. 将形式解

(4.9)代入(4.5),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sigma^{(0)}+\Delta\sigma^{(1)}+\Delta\sigma^{(2)}+\cdots+\Delta\sigma^{(l)}+\cdots]$$
$$=f_0(a)+\frac{\partial f_0}{\partial a}[\Delta a^{(1)}+\Delta a^{(2)}+\cdots]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}[\Delta a^{(1)}+\cdots]^2+\cdots+$$
$$f_1(\sigma,t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}[\Delta\sigma_j^{(1)}+\Delta\sigma_j^{(2)}+\cdots]+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}[\Delta\sigma_j^{(1)}+\cdots][\Delta\sigma_k^{(1)}+\cdots]+\cdots. \tag{4.12}$$

该式右端各项中出现的根数 σ 均应取参考轨道 $\sigma^{(0)}(t)$. 若级数(4.9)收敛,则可比较展开式(4.12)两端同次幂(ε^l)的系数,于是有

$$\begin{cases}\sigma^{(0)}(t)=\sigma_0+\delta n_0(t-t_0),\\ \Delta\sigma^{(1)}(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\delta\frac{\partial n}{\partial_a}\Delta a^{(1)}+f_1(\sigma,t,\varepsilon)\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t,\\ \Delta\sigma^{(2)}(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\delta\left(\frac{\partial n}{\partial a}\Delta a^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(\Delta a^{(1)})^2\right)+\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}\Delta\sigma_j^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t,\\ \cdots\end{cases} \tag{4.13}$$

显然,这是一个有效的递推过程:由低阶摄动求高阶摄动,将 $f_1(\sigma,t,\varepsilon)$ 的具体形式代入后,即可给出解(4.9)中各阶摄动项的表达式,从而构造出摄动运动方程(4.5)的小参数幂级数解. 这一构造级数解的方法,即摄动法. 关于该小参数幂级数解的收敛性,实际上是常微分方程解析理论中的一个基本问题,早已获得证明,其收敛条件不再详述,对运动而言,收敛范围为

$$s\sim\frac{1}{\varepsilon}, \tag{4.14}$$

这里 $s=n(t-t_0)$ 是运动弧段. 在 s 弧段外解仍可作解析延拓.

下面举一个简单的例子,以体现上述构造级数解的具体过程.

例:用摄动法求解二阶小参数方程

$$\ddot{x}+\omega^2 x=-\varepsilon x^3,\quad \varepsilon\ll 1. \tag{4.15}$$

其中 $\omega>0$ 是实常数.

解:当 $\varepsilon=0$ 时,无摄运动方程

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0$$

的解为

$$\begin{cases}x=a\cos(\omega t+M_0),\\ \dot{x}=-\omega a\sin(\omega t+M_0).\end{cases} \tag{4.16}$$

这里初始时刻 $t_0=0$,积分常数 a 和 M_0 相当于两个无摄根数.

当 $\varepsilon\neq 0$ 时,用常数变易法建立相应的摄动运动方程,有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial a}\dot{a}+\dfrac{\partial x}{\partial M_0}\dot{M}_0=0,\\[2ex]\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial a}\dot{a}+\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial M_0}\dot{M}_0=-\varepsilon x^3.\end{cases}\tag{4.17}$$

由此导出摄动运动方程如下:

$$\begin{cases}\dot{a}=\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^3\left(\dfrac{1}{4}\sin 2M+\dfrac{1}{8}\sin 4M\right)=(f_1)_a,\\[2ex]\dot{M}=\omega+\dot{M}_0=\omega+\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2M+\dfrac{1}{8}\cos 4M\right)=\omega+(f_1)_M.\end{cases}\tag{4.18}$$

其中积分常数 M_0 用 $M=M_0+\omega t$ 代替,方程(4.18)的小参数幂级数解即

$$\sigma(t)=\sigma^{(0)}(t)+\Delta\sigma^{(1)}(t)+\cdots.\tag{4.19}$$

其中

$$\sigma^{(0)}(t)=\begin{pmatrix}a_0\\M_0+\omega t\end{pmatrix}.\tag{4.20}$$

因 $\omega=\text{const}$,于是有

$$\Delta\sigma^{(1)}(t)=\int_0^t[f_1(\sigma,t,\varepsilon)]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t.$$

积分得

$$\Delta a^{(1)}(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2}a^3\left(-\frac{1}{8}\cos 2M-\frac{1}{32}\cos 4M\right)\Big|_0^t,\tag{4.21}$$

$$\Delta M^{(1)}(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2}a^2\left(\frac{3}{8}\omega t+\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{32}\sin 4M\right)\Big|_0^t.\tag{4.22}$$

二阶摄动项的计算公式为

$$\begin{cases}\Delta a^{(2)}(t)=\displaystyle\int_0^t\left[\frac{\partial(f_1)_a}{\partial a}\Delta a^{(1)}+\frac{\partial(f_1)_a}{\partial M}\Delta M^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t,\\[2ex]\Delta M^{(2)}(t)=\displaystyle\int_0^t\left[\frac{\partial(f_1)_M}{\partial a}\Delta a^{(1)}+\frac{\partial(f_1)_M}{\partial M}\Delta M^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t.\end{cases}\tag{4.23}$$

将 $\Delta\sigma^{(1)}$ 代入后积分即得二阶摄动项 $\Delta a^{(2)}$ 和 $\Delta M^{(2)}$. 不难看出,由于 $\Delta M^{(1)}$ 中含有 ωt 这种项,那么求 $\Delta\sigma^{(2)}(t)$ 时,将会出现下列形式的积分:

$$\int_0^t\begin{pmatrix}\sin kM\\\cos kM\end{pmatrix}\omega t\,\mathrm{d}t,\quad k=0,1,\cdots.\tag{4.24}$$

此即混合项,亦称泊松(Poisson)项,正是摄动法在动力天文中用来求解摄动运动方程时应重视的问题.

如果摄动力是保守力，在有限时间间隔内，通常 a,e,i 仅有周期变化，Ω,ω 有随时间变化的长期变化，但比近点角 M（或 E,f）的变化缓慢得多，因为近点角 M 是直接反映运动天体绕中心天体运动的位置变化，而 Ω 和 ω 的变化仅仅是由摄动引起的，变化缓慢，故通常称 a,e,i 为“不变量”，Ω 和 ω 为慢变量，而 M（或 E,f）为快变量. 在上述情况下，各阶摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)}$，$\Delta\sigma^{(2)}$，… 中一般包含三种性质不同的项：长期项、长周期项和短周期项，长期项是 $(t-t_0)$ 的线性函数或多项式，其系数仅是 a,e,i 的函数，长周期项是 Ω 和 ω 的三角函数，而短周期项则是 M 的周期函数（亦是三角函数）. 对于短周期项，也会因某种通约而导致其转化为长周期项（后面有关内容中将会讨论它）. 另外，还有形如 $(t-t_0)\sin(At+B)$ 和 $(t-t_0)\cos(At+B)$ 等形式的泊松项，即上一段最后提到的(4.24)型积分就可能导致这种混合项的出现.

从摄动法构造级数解的过程和例子中不难看出，即使摄动力为保守力，也会导致 $\varepsilon(t-t_0)$，$\varepsilon^2(t-t_0)^2$，… 这种多项式型的长期项的出现，而且与 Ω 或 ω 有关的长周期项将会变为长期项或泊松项. 因为参考轨道取无摄运动解 $\sigma^{(0)}(t)$，那么将会有

$$\int_{t_0}^{t}\cos\omega_0\,\mathrm{d}t=\cos\omega_0(t-t_0)$$

等形式的出现，再按摄动解的构造过程(4.13)构造高阶摄动项，就可导致 $(t-t_0)$，$(t-t_0)^2$，… 这种类型的长期项或泊松项的出现. 而若积分时，ω 取为 $\bar{\omega}=\omega_0+\dot{\omega}(t-t_0)$，让其代替 $\omega^{(0)}(t)=\omega_0$，则上述积分变为

$$\int_{t_0}^{t}\cos\omega\mathrm{d}t=\frac{\sin\bar{\omega}}{\dot{\omega}}\Big|_{t_0}^{t}=\frac{1}{\dot{\omega}}[\sin\bar{\omega}(t)-\sin\bar{\omega}(t_0)],$$

此为长周期项，从而不会出现上面提到的那些摄动项，这一点是相当重要的. 从定性角度看，当摄动力为保守力时，通常 a,e,i 是没有长期变化的，但按上述经典摄动法来构造摄动解，即会导致 a,e,i 出现长期变化，这就歪曲了轨道变化的性质. 即使从定量角度来看，虽然对于短弧而言无关紧要，但对于长弧情况，长周期项与长期项的差别就明显了，这将影响解的精度. 因此，选择参考轨道为无摄运动解的经典摄动法有明显的缺点，对它进行改进是完全有必要的.

本书重点介绍的是改进的摄动法，相应的参考轨道不再是最简单的无摄运动解 $\omega^{(0)}(t)$，而是一种长期进动椭圆，相应的轨道根数是带有长期变化的所谓平均根数 $\bar{\sigma}(t)$，因此，它又不同于通常意义下的中间轨道，不会引起中间轨道理论中遇到的那些复杂性问题. 这种改进的实质，即将摄动变化项按其不同的性质区分开，以解除经典摄动法中所遇到的问题.

2．改进的摄动法——平均根数法

在上一段中指出，求解摄动运动方程的经典摄动法有明显的缺点，对于较长的弧段，其定量计算精度不理想；如果取项太多则难以实现，即使在一定精度前提下，它也不能真实地反映轨道变化的规律．导致这一状况的原因是参考轨道（即初始时刻的瞬时椭圆）太简单，因此有必要改进参考轨道的选择．非线性力学中的一种渐进法，即平均法，其参考解就很有特点，本段要介绍的平均根数法就是将这种类型的参考解引入摄动法．

(1) 参考解的选择——平均根数法的引入

仍记

$$\sigma = (a, e, i, \Omega, \omega, M)^{\mathrm{T}} ,$$

相应的摄动运动对应的初值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = f_0(a) + f_\varepsilon(\sigma, t, \varepsilon), \\ \sigma_0 = \sigma(t_0). \end{cases} \tag{4.25}$$

其中

$$\begin{cases} f_0(a) = \delta n, \quad n = \sqrt{\mu}\, a^{-3/2}, \\ \delta = (0,0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{4.26}$$

$f_\varepsilon(\sigma, t, \varepsilon)$即对应摄动部分．

现将根数的摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)}, \Delta\sigma^{(2)}, \cdots$按其性质分解成长期变化、长周期变化和短周期变化三部分（其定义见上一段），分别记作 $\sigma_1(t-t_0), \cdots$, $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}, \cdots, \Delta\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}, \cdots$，而相应的方程(4.25)的小参数幂级数解的形式将改为

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(t) + \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)} + \cdots + \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)} + \cdots . \tag{4.27}$$

其中

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}^{(0)}(t) + \sigma_1(t - t_0) + \cdots , \tag{4.28}$$

$$\bar{\sigma}^{(0)}(t) = \bar{\sigma}_0 + \delta\bar{n}(t - t_0) , \tag{4.29}$$

$$\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}(t_0) = \sigma_0 - \left[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0) + \cdots + \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0) + \cdots\right]. \tag{4.30}$$

上述形式解表明，原摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)}(t), \Delta\sigma^{(2)}(t), \cdots$不仅按其变化性质分成不同部分，而且改为以摄动项表达的形式，即原

$$\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0), \quad \Delta\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) = \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)$$

在表达式(4.27)中只出现 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t), \cdots, \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)$，而 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0), \cdots, \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0), \cdots$已按(4.30)式从 σ_0 中消去．这样的分解就使得$\bar{\sigma}(t)$只包含长期变化，故称其为平均轨道根数，简称平均根数，或平根数．

平均根数法就是采用 $\bar{\sigma}(t)$ 作为其参考解．显然，$\bar{\sigma}(t)$ 对应的仍是一个

椭圆轨道，但它不再是一个对应历元 t_0 固定不变的椭圆，而是一个包含长期摄动的变化椭圆. 在保守力摄动下，它将是一个长期进动椭圆，即该椭圆轨道平面和拱线方向在空间转动. 因此，这种参考解又不同于通常意义下的中间轨道，原椭圆运动的各种几何关系式对它仍适用. 这就表明，平均根数法仍是建立在受摄二体问题基础上的一种摄动法，可以称其为改进的摄动法.

(2) 平均根数法——摄动解的构造

通常，方程(4.25)右函数的摄动部分 $f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon)$ 亦可展为小参数的幂级数，即

$$f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon)=f_1(\sigma,t,\varepsilon)+f_2(\sigma,t,\varepsilon^2)+\cdots+f_N(\sigma,t,\varepsilon^N)+\cdots, \tag{4.31}$$

其中

$$f_N=O(\varepsilon^N). \tag{4.32}$$

为了适应平均根数法中将摄动变化分解为长期项和周期项的需要，可利用第 2 章 § 2.2 中的方法，将 $f_N(\sigma,t,\varepsilon^N)$，$N=1,2,\cdots$分解成相应的三部分，即

$$f_N=f_{NC}+f_{NL}+f_{NS},N=1,2,\cdots. \tag{4.33}$$

这里第二个下标“C”、“L”和“S”各表示长期、长周期和短周期部分，即 f_{NC} 只与 a,e,i 有关，f_{NL}的周期取决于慢变量 Ω 和 ω 的变化，或是通约项(后面有关内容中会遇到)，f_{NS}的周期则取决于快变量 M. 要使平均根数法有效，则要求

$$f_{1L}=0, \tag{4.34}$$

这在卫星(特别是低轨卫星)运动中是满足的.

将形式解(4.27)代入方程(4.25)，右函数在$\bar{\sigma}(t)$展开，得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\bar{\sigma}^{(0)}(t)+\sigma_1(t-t_0)+\sigma_2(t-t_0)+\cdots+\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\cdots+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)+\cdots\right]\\
&=f_0(\bar{a})+\frac{\partial f_0}{\partial a}\left[a_{\mathrm{L}}^{(1)}+a_{\mathrm{L}}^{(2)}+\cdots+a_{\mathrm{S}}^{(1)}+a_{\mathrm{S}}^{(2)}+\cdots\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}\left[a_{\mathrm{L}}^{(1)}+\cdots+\right.\\
&\quad\left.a_{\mathrm{S}}^{(1)}+\cdots\right]^2+\cdots+f_1(\bar{\sigma},t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}\left[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\cdots+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}+\cdots\right]_j+\\
&\quad\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}\left[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\cdots+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}+\cdots\right]_j\left[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\cdots+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}+\cdots\right]_k+\\
&\quad\cdots+f_2(\bar{\sigma},t,\varepsilon^2)+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\left[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\cdots+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}+\cdots\right]_j+\cdots+\cdots+\\
&\quad f_N(\bar{\sigma},t,\varepsilon^N)+\cdots.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

该式右端出现的根数 σ 均为参考解$\bar{\sigma}(t)$. 若级数(4.27)收敛(该级数是前面(4.9)的重新组合,收敛性已有说明),则比较展开式(4.35)两端同次幂(ε^N)的系数,并积分,得

$$\bar{\sigma}^{(0)}(t)=\int_{t_0}^{t} f_0(\bar{a})\mathrm{d}t=\sigma^{(0)}+\delta\bar{n}(t-t_0)\ , \tag{4.36}$$

$$\begin{cases}\sigma_1(t-t_0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}[f_{1\mathrm{C}}]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)=\displaystyle\int^{t}\left[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{S}}^{(1)}+f_{1\mathrm{S}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\end{cases} \tag{4.37}$$

$$\begin{cases}\sigma_2(t-t_0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{C}}^2+\left(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{l}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})j\right)_{\mathrm{C}}+f_{2\mathrm{c}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\displaystyle\int^{t}\left[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{L}}^{(2)}+\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{L}}^2+\left(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}+f_{2\mathrm{L}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=\displaystyle\int^{t}\left[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{S}}^{(2)}+\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{S}}^2+\left(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{S}}+f_{2\mathrm{S}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \cdots\end{cases} \tag{4.38}$$

上列各式右端被积函数中出现的$(A)_{\mathrm{C}}$,$(A)_{\mathrm{L}}$,$(A)_{\mathrm{S}}$ 分别表示括号中函数 A 的长期、长周期和短周期部分. 例如

$$A=\cos f+\cos(f+\omega)=\cos f+\cos f\ \cos\omega-\sin f\ \sin\omega, \tag{4.39}$$

利用第二章 §2.2 中的方法,即可分解为

$$\begin{cases}A=(A)_{\mathrm{C}}+(A)_{\mathrm{L}}+(A)_{\mathrm{S}},\\ (A)_{\mathrm{C}}=-e,\\ (A)_{\mathrm{L}}=-e\ \cos\omega,\\ (A)_{\mathrm{S}}=(\cos f+e)+(\cos f+e)\cos\omega-\sin f\ \cos\omega\ .\end{cases} \tag{4.40}$$

容易证明,当 $f_{1\mathrm{L}}=0$ 时,有 $a_{\mathrm{L}}{}^{(1)}=0$,详见下一段. 因此,只要满足条件(4.34),那么平均根数法对应的上述递推过程是有效的,即由低阶摄动求高阶摄动. 但有几点要说明,即

1) 对于保守力摄动,a,e,i 的变化无长期项,那么在 Ω,ω,M 的变化中,长期项将是$(t-t_0)$的线性函数,因为它们的长期项 σ_1,σ_2,… 对应的被积函数都是 a,e,i 的函数,且积分时取 $\bar{a}=\bar{a}_0$,$\bar{e}=\bar{e}_0$,$\bar{i}=\bar{i}_0$. 如果是耗散力,则解的结构要复杂些,例如长期项不再是$(t-t_0)$的线性函数. 但在一般情况下(即耗散力相对较小,是与 ε^2 同阶的二阶小量,甚至更小),它并不影响级数解的构造. 下面在类似的问题中不再重复说明这一点.

2) 与经典摄动法不同,参考解$\bar{\sigma}(t)$实际上是在递推过程中形成的,但

它并不影响上述级数解的构造. 例如,对于保守力摄动,有

$$\int\cos\bar{\omega}\mathrm{d}t=\frac{\sin\bar{\omega}}{(\omega_1+\omega_2+\cdots)}.$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots$ 是 ω 变化的各阶长期项系数,它们都是 $\bar{a},\bar{e},\bar{i}$ 的函数,积分时不必知道它的具体形式,只是在导出结果后引用该公式计算时才可能用到.

3) 对于长周期项,其变化取决于慢变量 Ω 和 ω,例如 ω,因有

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0)+\cdots,$$

其中 $\omega_1=O(\varepsilon)$ 是一阶小量,不像 M 的变化速度那么快,即

$$\overline{M}=\overline{M}_0+\bar{n}_0(t-t_0)+M_1(t-t_0)+\cdots,$$

其中 $\bar{n}_0=O(\varepsilon^0)$. 因此,若 $f_{2L}=\varepsilon^2\cos\omega$,将有

$$\int^t f_{2L}\mathrm{d}t=\int^t\varepsilon^2\cos\bar{\omega}\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon^2\sin\bar{\omega}}{\omega_1+\cdots}=A\sin\bar{\omega}.$$

这里 $A=O(\varepsilon)$. 积分结果给出的是一阶长周期项,而不是二阶长周期项,这就是长周期项积分的降阶现象,所以(4.38)式的长周期部分左端记为 $\sigma_L^{(1)}(t)$ 而不是 $\sigma_L^{(2)}(t)$. 实际上,在不太长的间隔内,$\sigma_L^{(1)}(t)$ 对应的 $\Delta\sigma_L^{(1)}=\sigma_L^{(1)}(t)-\sigma_L^{(1)}(t_0)$ 与二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$ 相当(后面有关章节中将会用到这一点),在经典摄动法中就是给出 $\sigma_2(t-t_0)$ 这样的结果,而在平均根数法中却以 $\sigma_L^{(1)}(t)$ 的形式出现,它保持了周期项的本质,比较合理. 由 f_{3L} 积分给出 $\sigma_L^{(2)}(t)$,依此类推. 但这又引起另一问题,即由(4.38)式计算 $\sigma_L^{(1)}(t)$ 时,右端被积函数中不仅用到 $\sigma_L^{(1)}(t)$,还用到 $a_L^{(2)}(t)$. 关于这一点,如果仔细分析一下,即可知道,它并不影响解的构造,后面 § 4.2 中将要具体说明.

(3) $a_L^{(1)}=0$ 的证明

考虑保守了摄动,它对应一 Hamilton 系统. 受摄二体问题对应的 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}v^2-V,\tag{4.41}$$

其中 V 包含中心天体的质点引力位和摄动位,由于摄动力是保守力,则有

$$V=\frac{\mu}{r}+R(r,\varepsilon),\tag{4.42}$$

$\mu=GM$,R 即相应的摄动位或摄动函数. 这里可按定常情况考虑,对于非定常情况,可以用正则扩充的方法转化为定常情况. 对于受摄二体问题,将活力公式,即

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),\tag{4.43}$$

代入(4.41)式得

$$H = -\frac{\mu}{2a} - R\,. \tag{4.44}$$

存在一积分(能量积分)

$$\frac{\mu}{2a} + R = C\,, \tag{4.45}$$

该积分在参考解$\bar{\sigma}(t)$展开,并将不同性质的项分开,有"常数项":

$$\frac{\mu}{2a} + (R_{1C} + R_{2C} + \cdots) = C\,. \tag{4.46}$$

一阶长周期项:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_{L}^{(1)}(t)] + R_{1L} = 0\,. \tag{4.47}$$

一阶短周期项:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_{S}^{(1)}(t)] + R_{1S} = 0\,. \tag{4.48}$$

由于 $f_{1L}=0$,而摄动运动方程的这一 f_{1L} 又是由 $\partial R_{1L}/\partial\sigma$ 形成的,那么必有 $R_{1L}=0$,因此

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_{L}^{(1)}] = 0\,. \tag{4.49}$$

显然,$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)\neq 0$,故证得

$$a_{L}^{(1)}(t) = 0\,. \tag{4.50}$$

(4) 举例

这里仍用求解上一段中提出的二阶小参数微分方程(4.15)作为一例,一是为了让读者初步了解如何用平均根数法构造摄动解,同时也可与经典摄动法作一简单比较. 方程为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\varepsilon x^3\,,$$

其中 $\varepsilon \ll 1$,$\omega > 0$ 是实常数. 上一段已给出无摄运动解,即

$$\begin{cases} x = a\cos M, \\ \dot{x} = -\omega a\sin M, \\ M = M_0 + \omega t\,. \end{cases} \tag{4.51}$$

相应的摄动运动方程为

$$\begin{cases} \dot{a} = \dfrac{\varepsilon}{\omega}a^3\left(\dfrac{1}{4}\sin 2M + \dfrac{1}{8}\sin 4M\right), \\ \dot{M} = \omega + \dfrac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos 2M + \dfrac{1}{8}\cos 4M\right). \end{cases} \tag{4.52}$$

现用平均根数法解该方程,其形式改写成

$$\begin{cases}\dot{a}=(f_{1S})_a,\\ \dot{M}=(f_0)_M+(f_{1C})_M+(f_{1S})_M,\end{cases}\tag{4.53}$$

其中

$$(f_{1S})_a=\frac{\varepsilon}{\omega}a^3\left(\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{8}\sin 4M\right),\tag{4.54}$$

$$\begin{cases}(f_0)_M=\omega=\text{const},\\ (f_{1C})_M=\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\dfrac{3}{8}\right),\\ (f_{1S})_M=\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\dfrac{1}{2}\cos 2M+\dfrac{1}{8}\cos 4M\right).\end{cases}\tag{4.55}$$

按平均根数法构造级数解的过程(4.36)～(4.38)式,首先有

$$\begin{cases}\bar{a}^{(0)}(t)=\bar{a}_0,\\ \overline{M}^{(0)}(t)=\overline{M}_0+\omega(t-t_0).\end{cases}\tag{4.56}$$

由此积分(4.37)式给出

$$\begin{cases}a_1(t-t_0)=0,\\ M_1(t-t_0)=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}\bar{a}_0^2\left(\dfrac{3}{8}\right)\omega(t-t_0),\end{cases}\tag{4.57}$$

$$\begin{cases}a_S^{(1)}(t)=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)}\bar{a}_0^3\left(-\dfrac{1}{8}\cos 2\overline{M}-\dfrac{1}{32}\cos 4\overline{M}\right),\\ M_S^{(1)}(t)=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)}\bar{a}_0^3\left(\dfrac{1}{4}\sin 2M+\dfrac{1}{32}\sin 4M\right).\end{cases}\tag{4.58}$$

由于 $M_1/\omega=O(\varepsilon)$,那么 $a_S^{(1)}(t)$ 和 $M_S^{(1)}(t)$ 右端的分母 $\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)$,在精确到一阶周期项时,可直接写成 ω^2.

给出 $a_S^{(1)}$ 和 $M_S^{(1)}$ 后,即可由(4.38)式的长期项计算公式给出 a 和 M 的二阶长期项,有

$$\begin{cases}a_2(t-t_0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial(f_{1S})_a}{\partial a}a_S^{(1)}+\frac{\partial(f_{1S})_a}{\partial M}M_S^{(1)}\right]_C\mathrm{d}t=0,\\ M_2(t-t_0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial(f_{1S})_M}{\partial a}a_S^{(1)}+\frac{\partial(f_{1S})_M}{\partial M}M_S^{(1)}\right]_C\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad=\left(\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}\bar{a}_0^2\right)^2\left(-\dfrac{51}{256}\right)\omega(t-t_0),\end{cases}\tag{4.59}$$

二阶短周期项不再给出,而该问题只有一个角变量 M,无慢变量 Ω,ω,故不出现长周期项.

从上列各阶摄动项的表达式可以看出,解的结构比上一章摄动法给出的简单,而且不会出现形如(4.24)式的积分,即不会导致泊松项(或称混合

项)的出项,该小参数方程(4.15)解的形式变得较简单,即

$$\begin{cases}a(t)=\bar{a}_0+a_S^{(1)}(t)+\cdots,\\ M(t)=\overline{M}_0+\omega+(M_1+M_2+\cdots)(t-t_0)+M_S^{(1)}(t)+\cdots.\end{cases} \tag{4.60}$$

平均根数法首先由 Kozai[1]成功地用于构造人造地球卫星在地球非球形引力(主要带谐项 J_2,J_3 和 J_4)摄动影响下的分析解. 因此,针对各类航天器(特别是卫星型航天器)的运动状况和太阳系各大行星及月球等天体的形状和质量分布的特征,本章将重点介绍平均根数法如何构造卫星在中心天体非球形引力场中运动的轨道分析解,从而即可让读者进一步了解平均根数法的具体细节,又能给出卫星椭圆轨道变化的主要特征,为轨道设计提供必要的依据. 最后还对一类探测器在接近目标天体或近距离飞越目标天体时的双曲线轨道变化进行讨论,构造相应的轨道摄动解.

§4.2 中心天体的非球形引力位

对于质点引力场,空间任何一点的引力位由下式表达:

$$V_0=\frac{GM}{r}. \tag{4.61}$$

其中 G 是引力常数,M 是质点的质量,r 是空间测量点到该质点的距离. 显然,$V_0=V_0(r)$是空间点的函数,亦称位函数. 相应的引力加速度为

$$\boldsymbol{F}_0=\mathrm{grad}V_0=-\frac{GM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{4.62}$$

如果各大行星是质量分布均匀的球形天体,则其引力场等价于质点引力场,相当于质量全部集中在质心上. 但是,无论是地球,还是其他大行星或是月球,质量分布并非均匀,而且形状也不是球形,最好的近似也只能看成一个扁球体(旋转椭球体),相应的动力学扁率状况如下:

地球:$J_2=O(10^{-3})$,　　月球:$J_2=O(10^{-4})$,

火星:$J_2=O(10^{-3})$,　　木星:$J_2=O(10^{-2})$,…

不仅如此,由于卫星(特别是低轨卫星)离中心天体较近,相应的非球形引力特征更加显著,因此必须给出一般天体的非球形引力位.

1. 引力位函数的一般式

由于大行星和月球等均有自转,又并非旋转对称体,故空间任一固定点的引力位都要随时间变化,为此必须在星固坐标系 $O-XYZ$ 中讨论这一问

题. 该坐标系在 § 1. 1 中曾提出过,即坐标原点在中心天体质心上,XY 坐标面是该天体的赤道面,X 轴是赤道面上的任一固定方向(对于地球即取为格林尼治子午线方向). 采用球坐标(r,λ_G,φ),r 是向径,即空间点到中心天体质心(坐标原点)的距离,λ_G,φ 是经纬度,则引力位函数(对中心天体外任一点)的一般表达式如下:

$$V=\frac{GM}{r}\left[1+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\mu)(C_{lm}\cos m\lambda_G+S_{lm}\sin m\lambda_G)\right]. \tag{4.63}$$

此即球谐展开式,$P_{lm}(\mu)$是球谐函数. 其中 a_e 是中心天体的赤道半径(确切地说是相应的参考椭球体的赤道半径),$\mu=\sin\varphi$,谐系数 C_{lm} 和 S_{lm} 是与中心天体的形状和密度分布有关的常数. 其值的大小即反映了中心天体与等密度球体之间的差异,亦即反映了中心天体形状不规则(即与球形的差别)和密度不均匀的程度.

(4.63)式表明,一般天体的引力位函数与质点引力位函数之间的差别即该式右端括号内的第二项,此即非球形引力位部分,对卫星运动而言,亦称摄动函数,有

$$\begin{aligned}R&=\Delta V=V-V_0\\&=\frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\mu)[C_{lm}\cos m\lambda_G+S_{lm}\sin m\lambda_G].\end{aligned} \tag{4.64}$$

2. 非球形引力位的常用形式及有关参数

(1) 带谐项和田谐项

由(4.64)式可以看出,非球形引力位部分 ΔV 包含性质完全不同的两种球谐项:一种对应 $m=0$,此时 $\sin m\lambda_G=0$,$\cos m\lambda_G=1$,这种项显然与经度 λ_G 无关,称为带谐项,记作 ΔV_1;而另一种项则对应 $m=1,2,\cdots,l$,与经度 λ_G 有关,称为田谐项,记作 ΔV_2. 其中 $m=l$ 对应的 C_{ll} 和 S_{ll} 又称扇谐系数,相应的项则称为扇谐项,本书将不再从 ΔV_2 中区分出,统称田谐项. ΔV_1 和 ΔV_2 分别由下式表达:

$$\Delta V_1=\frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}C_{n,0}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_l(\sin\varphi)\ , \tag{4.65}$$

$$\Delta V_2=\frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\sin\varphi)[C_{lm}\cos m\lambda_G+S_{lm}\sin m\lambda_G]. \tag{4.66}$$

对于带谐项,又常采用下列形式:

$$J_l = -C_{l,0} \ , \tag{4.67}$$

$$\Delta V_1 = -\frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_l(\sin\varphi) \ . \tag{4.68}$$

与带谐项类似,田谐项的另一种表达式为

$$\Delta V_2 = \frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l} J_{lm}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\sin\varphi)\cos m\bar{\lambda} \ , \tag{4.69}$$

其中

$$\begin{cases} J_{lm} = (C_{lm}^2 + S_{lm}^2)^{1/2} \ , \\ m\lambda_{lm} = \arctan(S_{lm}/C_{lm}) \ , \\ \bar{\lambda} = \lambda_G - \lambda_{lm} \ . \end{cases} \tag{4.70}$$

对于卫星运动问题,相应空间坐标系采用的是中心天体质心赤道坐标系($O-xyz$),除天体赤道面摆动等因素外,它与星固坐标系之间的差别是 x 轴方向不同,空间坐标系的 x 轴是指向空间一固定方向,如春分点方向. 那么,对于空间球坐标系($O-r\lambda\varphi$)而言,两者之间有如下关系:

$$\lambda = \lambda_G + S_G \ . \tag{4.71}$$

对地球而言,S_G 即格林尼治恒星时,对其他大行星或月球,也有类似的含义,S_G 即反映中心天体的自转. 由此从(4.65)或(4.66)式不难看出,带谐项实际上反映了中心天体非球形引力位的旋转对称部分,中心天体的自转不改变空间固定点的引力大小,就卫星运动而言,相应的摄动位不显含 t,对应一个定常问题. 而田谐项与带谐项有本质的差别,它反映的是中心天体非球形引力位的非旋转对称部分,由 $S_G = S_G(t)$ 导致中心天体的自转将改变空间固定点的引力大小. 就卫星运动而言,该项的影响对应一个非定常问题.

(2) 关于中心天体的引力场常数

(4.65)和(4.66)式中出现的球谐函数 $P_{lm}(\mu)$ 称为缔合勒让德多项式,而 $P_l(\mu) = P_{l0}(\mu)$ 则称为勒让德多项式,其定义如下:

$$P_{lm}(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2}\,\frac{\mathrm{d}^m P_l(\mu)}{\mathrm{d}\mu^m} \ , \tag{4.72}$$

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l\,!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\mu^l}[(\mu^2-1)^l] \ . \tag{4.73}$$

$P_{lm}(\mu)$ 还有递推算法,这在各种有关特殊函数的书籍中都有阐述,本书将不再重复. 除此之外,$P_{lm}(\mu)$ 的模 N_{lm} 是一个很重要的值,有

$$[N_{lm}]^2 = \int_{-1}^{1}[P_{lm}(\mu)]^2\mathrm{d}\mu = \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)\,!}{(l-m)\,!} . \tag{4.74}$$

如果直接采用(4.64)式表达非球形引力位,那么 $P_{lm}(\mu)$ 对不同的阶次

l 和 m，其值相差较大，而相应的谐系数值也因此起伏较大. 为了避免这种情况，通常采用归一化的表达式，即根据 $P_{lm}(\mu)$ 模 N_{lm} 的大小引进 $\overline{P}_{lm}(\mu)$，定义如下：

$$\overline{P}_{lm}(\mu) = P_{lm}(\mu)/N_{lm}\ , \tag{4.75}$$

这里的符号 N_{lm} 与(4.74)式给出的模稍有差别，表达式为

$$N_{lm} = \left[\frac{2}{2l+1}\ \frac{(l+m)!}{(1+\delta)(l-m)!}\right]^{1/2} . \tag{4.76}$$

其中 δ 的定义如下：

$$\delta = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases} \tag{4.77}$$

由此定义，非球形引力位 ΔV 的归一化形式变为

$$\Delta V = \frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l \overline{P}_{lm}(\sin\varphi)[\overline{C}_{lm}\ \cos m\lambda_G + \overline{S}_{lm}\ \sin m\lambda_G]\ , \tag{4.78}$$

其中归一化的谐系数为

$$\overline{C}_{lm} = C_{lm}N_{lm}\ ,\quad \overline{S}_{lm} = S_{lm}N_{lm}\ . \tag{4.79}$$

上述非球形引力位就反映了一个天体的真实引力场，其中 GM，a_e 和 $\overline{C}_{lm}$，$\overline{S}_{lm}$ 就是一个天体一套自洽的引力场参数，它们分别称为该天体的质心引力常数(如地心引力常数、月心引力常数等)，参考椭球体赤道半径和引力场谐系数. 在本书附录中我们将给出地球引力场较普遍采用的两套引力场参数 JGM－3 和 WGS84 以及一套较新的月球引力场参数 LP75G 和 LP175，以供读者参考，同时也为后面阐述有关内容提供依据.

下面将以人造卫星在地球非球形引力场中的运动为代表，具体阐述平均根数法的应用，给出相应的轨道分析解，并在有关内容中同时介绍构造其他类型航天器轨道分析解时应注意的问题.

在构造人造地球卫星轨道分析解时，为了公式表达的方便和对一些关键量进行量级分析的需要，习惯采用一种标准化的计算单位，即采用给定的地球引力场参数的有关量作为质量、长度和时间单位：$[M]$，$[L]$，$[T]$，有

$$\begin{cases} [M] = \text{地球质量}\ M, \\ [L] = \text{地球参考椭球赤道半径}\ a_e, \\ [T] = [a_e^3/GM] \approx 806^s.81038\cdots . \end{cases} \tag{4.80}$$

在此单位系统中，非球形引力位表达式中的引力常数 $\mu = GM = 1$，$a_e = 1$. 在本章下面的有关内容和其他章节中，如果对量纲没有具体说明，均为上述标准单位，这种对计算单位的处理，亦可称为“无量纲化”. 在讨论其他类型航

天器的运动时，对计算单位亦有类似的处理.

§4.3 中心天体非球形引力摄动（Ⅰ）——主要带谐项摄动

针对地球非球形引力场的特征，主要带谐项是指 J_2，J_3 和 J_4 三项，对于其他大行星、月球或某些值得探测的小行星和自然卫星等，未必是这三项，但对于所有有自转的天体，J_2 对应的扁率项确实是主要的，它反映了旋转扁球体这一主要特征，至少符合太阳系的状况. 当然，对于快自转天体和慢自转天体，动力学扁率因子 J_2 与其他球谐项的相对大小是有明显差别的. 例如若将 J_2 作为一阶小量，那么，对于地球，其他球谐项的归一化系数将为二阶小量，甚至更小；而对于月球，由于自转慢，相应的 J_2 较小，其他球谐项归一化系数与其相差不太大（见附录月球引力场参数）. 关于这一点，将在后面有关内容的阐述中加以区别.

J_2，J_3，J_4 三项是地球引力场球谐展开式中的低阶带谐项（或长波项），对于精度要求不高的问题，非球形引力位的修正取此三项就足够了. 更重要的是，通过对这三项的讨论，可以较完整地体现平均根数的定义和平均根数法构造摄动解的细节. 在上述标准单位中，仅考虑 J_2，J_3 和 J_4 三项，(4.68) 式变为下列形式：

$$\Delta V_1 = -\sum_{l=2}^{4} \frac{J_l}{r^{l+1}} P_l(\sin\varphi) . \tag{4.81}$$

讨论人造地球卫星在相应的地球引力场中的运动时，ΔV_1 即摄动函数 R.

1. 摄动函数的分解

根据 $P_l(\sin\varphi)$ 的定义 (4.73) 式，摄动函数表达式 (4.81) 的具体形式为

$$R = -\frac{J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) - \frac{J_3}{r^4}\left(\frac{5}{2}\sin^3\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi\right) - \frac{J_4}{r^5}\left(\frac{35}{8}\sin^4\varphi - \frac{15}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{8}\right) . \tag{4.82}$$

为了与已有习惯一致，引入

$$A_2 = \frac{3}{2}J_2, \quad A_3 = -J_3, \quad A_4 = -\frac{35}{8}J_4 , \tag{4.83}$$

并以

$$\sin\varphi = \sin i \ \sin(f + \omega) \tag{4.84}$$

代入 (4.82) 式得

$$
\begin{aligned}
R = {} & \frac{A_2}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)+\frac{1}{2}\sin^2 i\ \cos 2(f+\omega)\right]+ \\
& \frac{A_3}{a^4}\left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin i\left[\left(\frac{15}{8}\sin^2 i-\frac{3}{2}\right)\sin(f+\omega)-\frac{5}{8}\sin^2 i\ \sin 3(f+\right. \\
& \left.\omega)\right]+\frac{A_4}{a^5}\left(\frac{a}{r}\right)^5\left[\left(\frac{3}{35}-\frac{3}{7}\sin^2 i+\frac{3}{8}\sin^4 i\right)+\right. \\
& \left.\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)\sin^2 i\ \cos 2(f+\omega)+\frac{1}{8}\sin^4 i\ \cos 4(f+\omega)\right].
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

从(4.85)式可知，摄动函数 R 不显含 t 也不含 Ω，这也是所有带谐项的特征.

仅考虑上述三项，相应的摄动运动方程(4.25)即

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = f_0(a) + f_1(\sigma, J_2) + f_2(\sigma, J_3, J_4)\ , \tag{4.86}
$$

这里取 $\varepsilon = J_2, J_3, J_4 = O(\varepsilon^2)$. 将摄动函数 R 代入摄动运动方程(3.75)式即可给出(4.86)式的具体形式. 但为了用平均根数法构造级数解，还需要将 f_1, f_2 分解成 f_{kC}, f_{kL} 和 $f_{kS}(k=1,2)$，既然如此，先对 R 进行分解似乎更简单些. 首先对卫星运动(即时间 t 或平近点角 M)求平均值，可将短周期项分离出，剩下的项中关于 ω 的周期函数部分即长周期项，这样便将 R 分解成五部分

$$
R = R_C + R_L + R_S = R_{1C} + R_{2C} + R_{2L} + R_{1S} + R_{2S}\ . \tag{4.87}
$$

其中一、二阶长期部分 $R_C = R_{1C}(J_2) + R_{2C}(J_4)$ 是 a, e, i 的函数，$R_{1L} = 0$，$R_{2L}(J_3, J_4)$ 是长周期部分，而 $R_S = R_{1S}(J_2) + R_{2S}(J_3, J_4)$ 是一、二阶短周期部分. 从 R 的表达式(4.85)可以看出，分解过程中仅涉及形如

$$
\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf, \quad \left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf\ ,
$$

这类函数的求平均值问题. 利用第二章 §2.2 给出的方法或直接引用附录中的结果：

$$
\begin{cases}
\overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^3} = (1-e)^{-3/2}, \quad \overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^3 \cos 2f} = 0, \\
\overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^4 \cos f} = e(1-e^2)^{-5/2}, \quad \overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^4 \cos 3f} = 0, \\
\overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^5} = \left(1+\dfrac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2},
\end{cases}
\tag{4.88}
$$

$$
\begin{cases}
\overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^5 \cos 2f} = \dfrac{3}{4}e^2(1-e^2)^{-7/2}, \overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^5 \cos 4f} = 0, \\
\overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^p \cos qf} = 0\ .
\end{cases}
$$

便可得到(4.87)**式中** 5 **个部分的具体形式如下：**

$$R_{1C} = \frac{A_2}{a^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sin^2 i\right)(1-e^2)^{-3/2} , \tag{4.89}$$

$$R_{2C} = \frac{A_4}{a^5}\left(\frac{3}{35} - \frac{3}{7}\sin^2 i + \frac{3}{8}\sin^4 i\right)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2} , \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned} R_{2L} = & -\frac{3}{4}\frac{A_3}{a^4}\sin i\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right)(1-e^2)^{-5/2} e \sin\omega + \\ & \frac{3}{4}\frac{A_4}{a^5}\sin^2 i\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{2}\sin^2 i\right)(1-e^2)^{-7/2} e^2 \cos 2\omega , \end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned} R_{1S} = & \frac{A_2}{a^3}\left\{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - (1-e^2)^{-3/2}\right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2(f+\omega)\right\} , \end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned} R_{2S} = & -\frac{A_3}{a^4}\left\{\frac{3}{4}\sin i\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin(f+\omega) - \right.\right. \\ & \left.\left.(1-e^2)^{-5/2} e \sin\omega\right] + \frac{5}{8}\sin^3 i\left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin 3(f+\omega)\right\} + \\ & \frac{A_4}{a^5}\left\{\left(\frac{3}{35} - \frac{3}{7}\sin^2 i + \frac{3}{8}\sin^4 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}\right] + \right. \\ & \sin^2 i\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 2(f+\omega) - \frac{3}{4}(1-e^2)^{-7/2} e^2 \cos 2\omega\right] + \\ & \left.\frac{1}{8}\sin^4 i\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 4(f+\omega)\right\} . \end{aligned} \tag{4.93}$$

对于一阶解，二阶短周期部分 R_{2S} **是不需要的.**

将 R **的各个部分代入摄动运动方程**(3.75)**，就可分别给出方程**(4.86)**右函数的具体形式，即**

$$f_0 = (0,0,0,0,0,n)^{\mathrm{T}} , \tag{4.94}$$

$$f_{1C} = (0,0,0,(f_{1C})_\Omega,(f_{1C})_\omega,(f_{1C})_M)^{\mathrm{T}} , \tag{4.95}$$

$$f_{1S} = ((f_{1S})_a,(f_{1S})_e,(f_{1S})_i,(f_{1S})_\Omega,(f_{1S})_\omega,(f_{1S})_M)^{\mathrm{T}} , \tag{4.96}$$

$$f_{2C} = (0,0,0,(f_{2C})_\Omega,(f_{2C})_\omega,(f_{2C})_M)^{\mathrm{T}} , \tag{4.97}$$

$$f_{2L} = (0,(f_{2L})_e,(f_{2L})_i,(f_{2L})_\Omega,(f_{2L})_\omega,(f_{2L})_M)^{\mathrm{T}} . \tag{4.98}$$

其中

$$(f_{1C})_\Omega = -\frac{A_2}{p^2} n \cos i , \tag{4.99}$$

$$(f_{1C})_\omega = \frac{A_2}{p^2} n\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) , \tag{4.100}$$

$$(f_{1C})_M = \frac{A_2}{p^2} n\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\ , \tag{4.101}$$

$$(f_{1S})_a = \frac{2nA_2}{a}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\left\{-\frac{e\ \sin f}{1-e^2}\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{3}{2}\sin^2 i\ \cos 2(f+\omega)\right] - \sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)\right\}\ , \tag{4.102}$$

$$(f_{1S})_e = \frac{nA_2}{a^2 e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\left\{-e\ \sin f\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\right.\right.$$
$$\left.\frac{3}{2}\sin^2 i\ \cos 2(f+\omega)\right] - (1-e^2)\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega) +$$
$$\left.\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)\right\}\ , \tag{4.103}$$

$$(f_{1S})_i = -\frac{nA_2}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\sin 2i\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2(f+\omega)\ , \tag{4.104}$$

$$(f_{1S})_\Omega = -\frac{nA_2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\cos i\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - (1-e^2)^{-3/2}\right]-\right.$$
$$\left.\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\}\ , \tag{4.105}$$

$$(f_{1S})_\omega = \frac{nA_2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\cos^2 i\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - (1-e^2)^{-3/2}\right]-\right.$$
$$\left.\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\} + \frac{nA_2}{a^2 e}\sqrt{1-e^2}\left\{\left(1-\right.\right.$$
$$\left.\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f - e(1-e^2)^{-5/2}\right]+$$
$$\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f$$
$$\cos 2(f+\omega) - \frac{\sin^2 i}{1-e^2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin f\ \sin 2(f+\omega)+\right.$$
$$\left.\left.(1-e^2)\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin f\ \sin 2(f+\omega)\right]\right\}\ , \tag{4.106}$$

$$(f_{1S})_M = \left(-\frac{3n}{2a}\right)a_S^{(1)} + \frac{2nA_2}{a^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - (1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.$$
$$\left.\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\} -$$
$$\frac{nA_2}{a^2 e}\sqrt{1-e^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f - e(1-e^2)^{-5/2}\right]+\right.$$

$$\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\ \cos 2(f+\omega)-$$

$$\frac{\sin^2 i}{1-e^2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin f\ \sin 2(f+\omega)+\right.$$

$$\left.(1-e^2)\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin f\sin 2(f+\omega)\right]\Bigg\}\ , \tag{4.107}$$

$$(f_{2C})_\Omega=-\frac{A_4}{p^4}n\cos i\left[\left(\frac{6}{7}+\frac{9}{7}e^2\right)-\sin^2 i\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}e^2\right)\right], \tag{4.108}$$

$$(f_{2C})_\omega=\frac{A_4}{p^4}n\left[\left(\frac{12}{7}+\frac{27}{14}e^2\right)-\sin^2 i\left(\frac{93}{14}+\frac{27}{4}e^2\right)+\sin^4 i\left(\frac{21}{4}+\frac{81}{16}e^2\right)\right], \tag{4.109}$$

$$(f_{2C})_M=\frac{A_4}{p^4}n\ \sqrt{1-e^2}\left[e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{45}{14}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right], \tag{4.110}$$

$$(f_{2L})_e=-\frac{1-e^2}{e}\tan i(f_{2L})_i\ , \tag{4.111}$$

$$(f_{2L})_i=-\frac{A_3}{p^3}n\left[\frac{3}{4}\cos i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\right]e\cos\omega-$$

$$\frac{A_4}{p^4}n\left[\sin 2i\left(\frac{9}{28}-\frac{3}{8}\sin^2 i\right)\right]e^2\sin 2\omega\ , \tag{4.112}$$

$$(f_{2L})_\Omega=-\frac{A_3}{p^3}n\left[\frac{3}{8}\cot i(4-15\sin^2 i)\right]e\sin\omega+$$

$$\frac{A_4}{p^4}n\left[\cos i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right]e^2\cos 2\omega\ , \tag{4.113}$$

$$(f_{2L})_\omega=-\frac{A_3}{p^3}n\ \frac{1}{e\sin i}\left[\frac{3}{8}\sin^2 i(4-5\ \sin^2 i)-\frac{3}{8}e^2(4-35\sin^2 i+\right.$$

$$\left.35\sin^4 i)\right]\sin\omega+\frac{A_4}{p^4}n\left[\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)-\right.$$

$$\left.e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{15}{4}\sin^2 i+\frac{27}{8}\sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega\ , \tag{4.114}$$

$$(f_{2L})_M=\frac{A_3}{p^3}n\ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sin i}\left[\frac{3}{8}\sin^2 i(4-5\sin^2 i)(1-4e^2)\right]\sin\omega-$$

$$\frac{A_4}{p^4}n\ \sqrt{1-e^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\right]\cos 2\omega\ . \tag{4.115}$$

以上各式中的 n 和 p 分别为 $a^{-\frac{3}{2}}$ 和 $a(1-e^2)$，不要与某些公式中的整数取值相混淆. 推导中涉及的 $\partial f/\partial\sigma$ 和 $\partial\left(\frac{a}{r}\right)/\partial\sigma$，在第二章 §2.2 中给出.

2. J_2, J_3, J_4 三项摄动的一阶解

将上述右函数 f_{1C}, f_{1S}, f_{2C} 和 f_{2L} 分别代入(4.37)～(4.38)式,即可给出一阶解所需要的个摄动项,下面分别列出.

(1) 一阶长期项 $\boldsymbol{\sigma}_1(t-t_0)$

$$a_1(t-t_0)=0,\quad e_1(t-t_0)=0,\quad i_1(t-t_0)=0, \tag{4.116}$$

$$\Omega_1(t-t_0)=-\frac{A_2}{\bar{p}^2}\bar{n}\cos\bar{i}(t-t_0), \tag{4.117}$$

$$\omega_1(t-t_0)=\frac{A_2}{\bar{p}^2}\bar{n}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}\right)(t-t_0), \tag{4.118}$$

$$M_1(t-t_0)=\frac{A_2}{\bar{p}^2}\bar{n}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}\right)\sqrt{1-\bar{e}^2}(t-t_0). \tag{4.119}$$

其中

$$\bar{n}=\bar{a}^{-3/2},\quad \bar{p}=\bar{a}(1-\bar{e}^2). \tag{4.120}$$

(2) 一阶短期项 $\boldsymbol{\sigma}_S^{(1)}$

根据 f_{1S} 的表达式可以看出,由于积分时 σ 应以 $\bar{\sigma}(t)$ 代入,被积函数中会同时出现 f 和 t 两种变量,对 t 无法严格积分. 但由于 f_{1S} 的变化具有短周期特征,又是求一阶项,故可按无摄运动引用变换关系,而且积分时 $\bar{\omega}(t)$ 可当作常数.

$$\begin{aligned}
a_S^{(1)}(t) &= \int^t \frac{2}{an}\frac{\partial R_{1S}}{\partial M}\mathrm{d}t=\int^M \frac{2}{an}\frac{\partial R_{1S}}{\partial M}\frac{\mathrm{d}M}{n}=\frac{2}{n^2 a}R_{1S}\\
&=\frac{A_2}{a}\left\{\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.\\
&\qquad\left.\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\},
\end{aligned} \tag{4.121}$$

$$\begin{aligned}
i_S^{(1)}(t) &= \int^t (f_{1S})_i\,\mathrm{d}t\\
&=-\frac{A_2}{2a^2(1-e^2)}\sin 2i\int^t\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)\,\mathrm{d}f\\
&=\frac{A_2}{4p^2}\sin 2i\left[\cos 2(f+\omega)+e\cos(f+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right].
\end{aligned} \tag{4.122}$$

关于 $e_S^{(1)}(t)$,不必求积分 $\int^t (f_{1S})_e\,\mathrm{d}t$,根据 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 的积分方法,可由摄动运动方程(3.75)直接给出

$$e_S^{(1)}(t)=\frac{1-e^2}{e}\left[\frac{1}{2a}a_S^{(1)}(t)-\tan i\cdot i_S^{(1)}(t)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A_2}{a^2}\left(\frac{1-e^2}{e}\right)\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.\\
&\quad \frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)-\frac{\sin^2 i}{2(1-e^2)^2}\left[\cos 2(f+\omega)+\right.\\
&\quad \left.\left. e\cos(f+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{4.123}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) &= \int^t (f_{1\mathrm{S}})_\Omega \mathrm{d}t\\
&= -\frac{nA_2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\cos i\left\{\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\int^t\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}f-\right.\\
&\quad \left.\frac{1}{n}(1-e^2)^{-3/2}\int^M \mathrm{d}M-\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\int^t\left(\frac{a}{r}\right)\cos 2(f+\omega)\mathrm{d}f\right\}\\
&= -\frac{A_2}{p^2}\cos i\left\{(f-M+e\sin f)\right\}-\\
&\quad \left.\frac{1}{2}\left[\sin 2(f+\omega)+e\sin(f+2\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{4.124}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) &= \int^t (f_{1\mathrm{S}})_\omega \mathrm{d}t\\
&= \frac{A_2}{p^2}\left\{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)(f-M+e\sin f)+\right.\\
&\quad \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]-\\
&\quad \left[\frac{1}{4e}\sin^2 i+\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 i\right)e\right]\sin(f+2\omega)-\\
&\quad \left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin 2(f+\omega)+\left[\frac{7}{12e}\sin^2 i-\right.\\
&\quad \left.\left(\frac{1}{6}-\frac{19}{48}\sin^2 i\right)e\right]\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin^2 i\sin(4f+2\omega)+\\
&\quad \left.\frac{e}{16}\sin^2 i[\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega)]\right\},
\end{aligned}
\tag{4.125}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) &= \int^t\left[\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)+(f_{1\mathrm{S}})_M\right]\mathrm{d}t\\
&= \frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\left\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\right.\right.\\
&\quad \left.\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)-\right.
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{7}{12e}-\frac{e}{48}\right)\sin(3f+2\omega)-\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)-$$

$$\left.\left.\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)-\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\right]\right\}. \tag{4.126}$$

上述 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 表达式右端出现的根数均为 $\bar{\sigma}(t)$. 当然,在一阶解意义下,$\bar{a},\bar{e},\bar{i}$ 就是 $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$,也可用 a_0,e_0,i_0 代替,但 $\bar{\omega}(t)=\bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0)$,$\overline{M}(t)=\overline{M_0}+(\bar{n}+M_1)(t-t_0)$.

将 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 对卫星运动求平均值,得

$$\begin{cases}\overline{a_S^{(1)}(t)}=0,\\ \overline{e_S^{(1)}(t)}=\dfrac{A_2}{p^2}\sin^2 i\left(\dfrac{1-e^2}{6e}\right)\overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\\ \overline{i_S^{(1)}(t)}=-\dfrac{1}{12}\dfrac{A_2}{p^2}\sin 2i\,\overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\\ \overline{\Omega_S^{(1)}(t)}=-\dfrac{1}{6}\dfrac{A_2}{p^2}\cos i\,\overline{\cos 2f}\sin 2\omega,\\ \overline{\omega_S^{(1)}(t)}=\dfrac{A_2}{p^2}\left[\sin^2 i\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1-e^2}{6e}\overline{\cos 2f}\right)+\dfrac{1}{6}\cos^2 i\,\overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega,\\ \overline{M_S^{(1)}(t)}=-\dfrac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1-e^2/2}{6e}\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega.\end{cases} \tag{4.127}$$

在求平均值过程中已经将 $\overline{\cos qf}$ 表示成 $\overline{\cos 2f}$ 的形式,而 $\overline{\cos 2f}$ 由下式计算

$$\overline{\cos 2f}=\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2. \tag{4.128}$$

上述结果表明,$\sigma_S^{(1)}(t)-\overline{\sigma_S^{(1)}(t)}$ 才是真正的短周期项. 事实上,求 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 时是按无摄运动变换关系积分的,而 $\overline{\sigma_S^{(1)}(t)}$ 只是 a,e,i,ω 的函数,因此,该项实为这种积分方法所导致的一个"积分常数". 如果积分 $\int^t f_{1S}\mathrm{d}t$ 时,将 f_{1S} 展成平近点角 M 的三角级数,从而表示成时间 t 的显函数后直接对 t 积分,则必有 $\sigma_S^{(1)}(t)=0$.

(3) 二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$

推导 $\sigma_2(t-t_0)$ 和 $\sigma_l^{(1)}(t)$ 时,均涉及到

$$\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_S^{(1)}(t))_j$$

这类表达式求平均值时分解成 C,L,S 三种项的问题. 为了书写方便,这里引用符号 C,L,S 分别表示前面提出的仅与 a,e,i 有关的部分,性质取决于

ω 变化的长周期部分和变化由 M 决定的短周期部分. 在分离上述各项时要注意以下两点:

1) C,L,S 三种项相乘的结果,一般为

$$\begin{cases} \mathrm{C}\cdot\mathrm{C}\to\mathrm{C}, & \mathrm{C}\cdot\mathrm{L}\to\mathrm{L}, & \mathrm{C}\cdot\mathrm{S}\to\mathrm{S}, \\ & \mathrm{L}\cdot\mathrm{L}\to\mathrm{C},\mathrm{L}, & \mathrm{L}\cdot\mathrm{S}\to\mathrm{S}, \\ & & \mathrm{S}\cdot\mathrm{S}\to\mathrm{C},\mathrm{L},\mathrm{S}, \end{cases} \quad . \tag{4.129}$$

例如

$$\sin f\cdot\sin f=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\overline{\cos 2f}\right)-\left(\frac{1}{2}\cos 2f-\frac{1}{2}\overline{\cos 2f}\right),$$

即 $\mathrm{S}\cdot\mathrm{S}=\mathrm{C}+\mathrm{S}$.

2) 在求平均值时,显然有 $\overline{A\pm B}=\overline{A}\pm\overline{B}$. 而对一般情况,存在下列不等式:

$$\overline{A\cdot B}\neq\overline{A}\cdot\overline{B},\quad \overline{\left(\frac{A}{B}\right)}\neq\overline{A}/\overline{B}\,. \tag{4.130}$$

略去推导过程,对于 a,e,i,很容易得到下述结果:

$$a_2=0,\quad e_2=0,\quad i_2=0\,. \tag{4.131}$$

对于 Ω,ω,相应的 $(f_{2\mathrm{C}})_\Omega$ 和 $(f_{2\mathrm{C}})_\omega$ 已由(4.108)和(4.109)式给出,另一大项的结果为

$$\begin{aligned}\left(\sum_j\frac{\partial(f_1)_\Omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}-\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}})_j\right)_{\mathrm{C}}=&-\frac{A_2^2}{p^4}n\cos i\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}\right)-\right.\\&\left.\sin^2 i\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\right],\end{aligned} \tag{4.132}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_j\frac{\partial(f_1)_\omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}-\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}})_j\right)_{\mathrm{C}}=&\frac{A_2^2}{p^4}n\left[\left(4+\frac{7}{12}e^2+2\sqrt{1-e^2}\right)-\right.\\&\sin^2 i\left(\frac{103}{12}+\frac{3}{8}e^2+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}\right)+\\&\left.\sin^4 i\left(\frac{215}{48}-\frac{15}{32}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{4.133}$$

因 $\bar{a}=\bar{a}_0,\bar{e}=\bar{e}_0,\bar{i}=\bar{i}_0$,故由(4.38)式可知,$\Omega$ 和 ω 的二阶长期项系数 Ω_2 和 ω_2 就分别由上述(4.108),(4.132)式和(4.109),(4.133)式两部分之和给出.

对于 M,与上类似,$(f_{2\mathrm{C}})_M$ 已由(4.110)式给出,另一大项是

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2+\sum_j\frac{\partial(f_1)_M}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{C}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A_2^2}{p^4} n \sqrt{1-e^2} \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)^2 \sqrt{1-e^2} + \left(\frac{5}{2}+\frac{10}{3}e^2\right) - \right. \\
&\quad \sin^2 i\left(\frac{19}{3}+\frac{26}{3}e^2\right) + \sin^4 i\left(\frac{233}{48}+\frac{103}{12}e^2\right) + \\
&\quad \left. \frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{12}-\frac{35}{4}\sin^2 i+\frac{315}{32}\sin^4 i\right) \right],
\end{aligned} \tag{4.134}
$$

同样 M_2 就是上述(4.110)和(4.134)式给出的两项之和.

关于二阶长期项,需要说明两点:

1)推导中 $\sigma_S^{(1)}$ 这一项与 $\sigma_S^{(1)}-\overline{\sigma_S^{(1)}}$ 的效果相同,即$\overline{\sigma_S^{(1)}}$对二阶长期项的推导不起作用,这可从 $f_1=f_{1C}+f_{1S}$和运算规律(4.129)式得到答案.

2)Ω_2 和 ω_2 与古在由秀给出的结果[1]不一致,与后来库克(Cook)给出的结果[2]也不一致,下面将回答这一问题. 分别记我们的结果、古在由秀的结果和库克的结果为$(\Omega_2)_1$,$(\omega_2)_1$;$(\Omega_2)_2$,$(\omega_2)_2$;$(\Omega_2)_3$,$(\omega_2)_3$,有

$$
\begin{cases}
(\Omega_2)_1 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n \cos i\left[-\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right], \\
(\omega_2)_1 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n\left[\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],
\end{cases} \tag{4.135}
$$

$$
\begin{cases}
(\Omega_2)_2 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n \cos i\left[2\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right], \\
(\omega_2)_2 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n\left[-2\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],
\end{cases} \tag{4.136}
$$

$$
\begin{cases}
(\Omega_2)_3 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n \cos i\left[\dfrac{5}{2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right], \\
(\omega_2)_3 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n\left[-\dfrac{5}{2}\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],
\end{cases} \tag{4.137}
$$

各式右端的根数都是平均根数. (4.135)式的形式已重新整理过,与前面(4.132)和(4.133)式不一样,这是为了比较不同的部分,请读者注意.

上述三种结果显然是不同的,产生的原因是平均根数 $\bar{a}$ 和 $\bar{n}$ 的取法不同. 我们的结果是按平均根数的严格定义给出的,即

$$
\bar{a} = \overline{a_0}, \quad \bar{n} = \overline{n_0}, \quad \bar{a}^3 \bar{n}^2 = 1 . \tag{4.138}
$$

而古在由秀用的却是

$$\begin{cases}\bar{a}=\bar{a}_0\left[1-\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right],\\ \bar{n}=\overline{n_0}\left[1+\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right],\\ \bar{a}^3\bar{n}^2\neq 1,\end{cases}\tag{4.139}$$

库克用的则是

$$\begin{cases}\bar{a}=\bar{a}_0\left[1-\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right],\\ \bar{n}=\overline{n_0}\left[1+\dfrac{3}{2}\,\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right].\end{cases}\tag{4.140}$$

$\bar{a}$ 与古在由秀的相同，但 $\bar{n}$ 则是根据 $\bar{a}^3\bar{n}^2=1$ 给出的. 由于这个原因，Ω_1 和 ω_1 也产生差别，相应地有

$$\begin{aligned}(\Omega_1)_2&=-\frac{A_2}{\bar{a}^2(1-\bar{e}_0^2)^2}\bar{n}\cos\bar{i}_0\\&=(\Omega_1)_1-\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\bar{n}_0\left[3\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3)\ ,\\(\omega_1)_2&=\frac{A_2}{\bar{a}^2(1-\bar{e}_0^2)^2}\bar{n}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\\&=(\omega_1)_1+\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\bar{n}_0\left[3\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3),\\(\Omega_1)_3&=(\Omega_1)_1-\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\bar{n}_0\left[\frac{7}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3)\ ,\\(\omega_1)_3&=(\omega_1)_1+\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\bar{n}_0\left[\frac{7}{2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+\\&\qquad O(A_2^3)\ .\end{aligned}$$

而由(4.134)，(4.136)和(4.137)三式给出的 Ω_2 和 ω_2 的差别为

$$\begin{aligned}(\Omega_2)_2&=(\Omega_2)_1+\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\overline{n}_0\left[3\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3)\ ,\\(\omega_2)_2&=(\omega_2)_1-\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\overline{n}_0\left[3\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3)\ ,\\(\Omega_2)_3&=(\Omega_2)_1+\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\overline{n}_0\left[\frac{7}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]\ ,\\(\omega_2)_3&=(\omega_2)_1-\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\overline{n}_0\left[\frac{7}{2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3)\ ,\end{aligned}$$

这正与上面的差别相差一个符号. 因此，对于整个解来说是没有差别的，只是表达形式不一致. 在使用上述公式时，要注意各自的系统，不能混淆. 而我们给出的解是完全按照平均根数的定义来构造的，没有人为地引进任何不

一致的辅助量，因此，在实际应用中不会出现混乱.

(4) 一阶长周期项 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$

由(4.8)式和(4.95)，(4.96)式可知，对于 a,e,i，因相应的

$$f_{1\mathrm{C}}=0, f_{1\mathrm{L}}=0, f_1=f_{1\mathrm{S}},$$

故被积函数只有两部分，即

$$\left(\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}, f_{2\mathrm{L}}.$$

后者已由(4.98)式和相应的(4.111)，(4.112)式给出，至于前者，经计算有

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_1)_a}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=0.$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_1)_i}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=\frac{A_2^2}{p^4}n\sin 2i\left[\frac{1}{6}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\overline{\cos 2f}\sin 2\omega+\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i\right)e^2\sin 2\omega\right].$$

将这一结果与 $f_{2\mathrm{L}}$ 代入(4.38)式的长周期项部分，积分后得

$$a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=0, \tag{4.141}$$

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=&-\frac{1}{12}\frac{A_2}{p^2}\sin 2i\,\overline{\cos 2f}\cos 2\omega-\frac{A_2}{p^2}\frac{\sin 2i}{(4-5\sin^2 i)}\left(\frac{7}{24}-\right.\\ &\left.\frac{5}{16}\sin^2 i\right)e^2\cos 2\omega-\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cos i e\ \sin\omega+\\ &\frac{1}{p^2}\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{\sin 2i}{(4-5\ \sin^2 i)}\left(\frac{9}{28}-\frac{3}{8}\sin^2 i\right)e^2\cos 2\omega. \end{aligned} \tag{4.142}$$

利用$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$与$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$的关系并注意到带谐项摄动函数不含 Ω，不难给出

$$e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right)i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t). \tag{4.143}$$

对于 Ω 和 ω，(4.38)式长周期部分的被积函数有三大项，即

$$\left(\sum_j \frac{\partial f_{1\mathrm{C}}}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}},\quad \left(\sum_j \frac{\partial f_{1\mathrm{S}}}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}},\quad f_{2\mathrm{L}},$$

第三大项见(4.112)～(4.113)式. 第一大项看上去似乎无法计算，推导 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$时要用其本身，但实际上无妨. 因对 Ω,ω 和 M 都有

$$f_{1\mathrm{C}}=f_{1\mathrm{C}}(a,e,i),$$

$$\frac{\partial f_{1\mathrm{C}}}{\partial(\Omega,\omega,M)}=0,$$

故第一大项中不涉及 $\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)},\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}$ 和 $M_{\mathrm{L}}^{(1)}$，而 $a_{\mathrm{L}}^{(1)},e_{\mathrm{L}}^{(1)},i_{\mathrm{L}}^{(1)}$ 均已推出. 经计算有

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_{1\mathrm{C}})_\Omega}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{l}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=\left(5\frac{A_2}{p^2}n\sin i\right)i_{\mathrm{L}}^{(1)},$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial(f_{1C})_\omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_L^{(1)})_j\right)_L = -\frac{A_2}{p^2}n\tan i(13-15\sin^2 i)i_L^{(1)}\ .$$

第二大项算出的结果为

$$\left(\sum_j \frac{\partial(f_{1C})_\Omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j\right)_L = \frac{A_2}{p^2}n\cos i\left\{\left[-\frac{1}{6}(4-5\sin^2 i)\overline{\cos 2f}+\frac{5}{6}\sin^2 i\,\overline{\cos 2f}\right]\cos 2\omega - e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\cos 2\omega\right\}\ ,$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial(f_{1C})_\omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j\right)_L = \frac{A_2^2}{p^4}n\left\{\left[\sin^2 i(4-5\sin^2 i)\left(\frac{1}{8}+\frac{1-e^2}{6e}\overline{\cos 2f}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\sin^2 i+\frac{10}{3}\sin^4 i\right)\overline{\cos 2f}\right]\cos 2\omega+\left[-\sin^2 i\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{79}{24}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega\right\}\ .$$

将上述三大项代入(4.38)**式的长期项部分,积分得**

$$\begin{aligned}\Omega_L^{(1)}(t) = &-\frac{1}{6}\,\frac{A_2}{p^2}\cos i\,\overline{\cos 2f}\sin 2\omega - \\ &\frac{A_2}{p^2}\,\frac{\cos i}{(4-5\sin^2 i)^2}\left(\frac{7}{3}-5\sin^2 i+\frac{25}{8}\sin^4 i\right)e^2\sin 2\omega + \\ &\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cot i\ e\cos\omega + \\ &\frac{1}{p^2}\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{\cos i}{(4-5\sin^2 i)^2}\left(\frac{18}{7}-6\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right)e^2\sin 2\omega\ ,\end{aligned} \tag{4.144}$$

$$\begin{aligned}\omega_L^{(1)}(t) = &\frac{A_2}{p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1-e^2}{6e}\overline{\cos 2f}\right)+\frac{1}{6}\cos^2 i\,\overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega - \\ &\frac{A_2}{p^2}\,\frac{1}{(4-5\sin^2 i)^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{25}{3}-\frac{245}{12}\sin^2 i+\frac{25}{2}\sin^4 i\right)- \right.\\ &\left. e^2\left(\frac{7}{3}-\frac{17}{2}\sin^2 i+\frac{65}{6}\sin^4 i-\frac{75}{16}\sin^6 i\right)\right]\sin 2\omega + \\ &\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\frac{1}{e\sin i}[(1-e^2)\sin^2 i-e^2]\cos\omega + \\ &\frac{1}{p^2}\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{1}{(4-5\sin^2 i)^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{18}{7}-\frac{87}{14}\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right)- \right.\\ &\left. e^2\left(\frac{18}{7}-\frac{69}{7}\sin^2 i+\frac{90}{7}\sin^4 i-\frac{45}{8}\sin^6 i\right)\right]\sin 2\omega\ .\end{aligned} \tag{4.145}$$

对于 M**,稍微复杂些,涉及五大项,即**

$$\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{L}}^{(2)},\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{L}}^2,$$

$$\left(\sum_j\frac{\partial(f_{1\mathrm{C}})_M}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}},\left(\sum_j\frac{\partial(f_{1\mathrm{S}})_M}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}},\quad(f_{2\mathrm{L}})_M.$$

首先遇到的问题是：由于 M **的摄动运动方程右端有一零阶项** n**，因此推导** $M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$**时需要知道** $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$**，这将引起平均根数法本身遇到的麻烦，但可借助于其他手段绕过这一障碍. 关于这个问题将留到后面第四段中讨论，此处先引用** $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$**的结果. 最后一大项**$(f_{2\mathrm{L}})_M$ **见**(4.115)**式，其余四大项分别算得**

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{L}}^{(2)}=&\frac{A_2^2}{p^4}n\sqrt{1-e^2}\left\{\left[\frac{1}{4}\sin^2 i(4-5\sin^2 i)\overline{\cos 2f}+\right.\right.\\&e^2\sin^2 i\left(-\frac{17}{8}+\frac{57}{16}\sin^2 i\right)\Big]\cos 2\omega-\\&\left.\frac{e^4}{1-e^2}\left[\frac{7}{2}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega+\frac{3}{64}\sin^4 i\cos 4\omega\right]\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{L}}^2+\left(\sum_j\frac{\partial(f_{1\mathrm{S}})_M}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}\\=&\frac{A_2^2}{p^4}n\sqrt{1-e^2}\left\{\left[-\sin^2 i(4-5\sin^2 i)\left(\frac{1}{4}+\frac{1+2e^2}{6e^2}\right)\overline{\cos 2f}+\right.\right.\\&\sin^2 i\left(\frac{19}{12}-\frac{15}{8}\sin^2 i\right)+e^2\sin^2 i\left(\frac{2}{3}-2\sin^2 i\right)\Big]\cos 2\omega+\\&\left.\frac{e^4}{1-e^2}\left[\frac{7}{2}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega+\frac{3}{63}\sin^4 i\cos 4\omega\right]\right\},\end{aligned}$$

$$\left(\sum_j\frac{\partial(f_{1\mathrm{C}})_M}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=-\frac{3}{2}\frac{A_2}{p^2}n\sqrt{1-e^2}\tan i(4-5\sin^2 i)i_{\mathrm{L}}^{(1)}.$$

将以上各部分全部代入(4.38)**式的相应部分，积分得**

$$\begin{aligned}M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=&-\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1+e^2/2}{6e^2}\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega+\\&\frac{A_2}{p^2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{(4-5\sin^2 i)}\sin^2 i\left[\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)-\right.\\&\left.e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)\right]\sin 2\omega.\end{aligned}\tag{4.146}$$

从 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$**的结果**(4.142)～(4.146)**式清楚地看出，它们的右端第一大项就是**$\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)}$**. 因此，在引用** J_2 **项摄动时，不必从** $\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)$**中减掉**$\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)}$**，而相应的** $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$**中却删去**$\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)}$**这一项，对解** $\sigma(t)$**而言，这样处理既正确又简单. 下面将按这种形式整理一套完整的计算公式，请读者注意.**

3．公式整理

经前面的推导，已经给出 J_2,J_3,J_4 三项摄动一阶解的完整结果. 摄动项中同时包含了二阶长期项，是由于该项随着轨道外推弧段的增长而增大，当弧段 $s=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时，二阶长期项的大小增大到一阶小量的量级 $O(\varepsilon)$. 因此在一阶解中通常都包含二阶长期项，但在实际应用中可视具体要求而有所取舍. 具体结果下面逐一列出.

$$\begin{cases}\sigma(t)=\bar{\sigma}_0+(\delta\bar{n}+\sigma_1+\sigma_2)(t-t_0)+\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ \bar{\sigma}_0=\sigma_0-[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)].\end{cases}\tag{4.147}$$

六个根数的形式分别为

$$\begin{cases}a(t)=\bar{a}_0+a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ e(t)=\bar{e}_0+e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+e_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ i(t)=\bar{i}_0+i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+i_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ \Omega(t)=\bar{\Omega}_0+\Omega_1(t-t_0)+\Omega_2(t-t_0)+\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\Omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ \omega(t)=\bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0)+\omega_2(t-t_0)+\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ M(t)=\bar{M}_0+(\bar{n}+M_1)(t-t_0)+M_2(t-t_0)+M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+M_{\mathrm{S}}^{(1)}(t).\end{cases}\tag{4.148}$$

根据 M 的特点，计算 $\bar{n}_0$ 所用的 $\bar{a}_0$ 要消去二阶周期项，即

$$\bar{a}_0=a_0-[a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)+a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t_0)+a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t_0)],\tag{4.149}$$

但在实际工作中，往往是通过精密定轨直接给出 $\bar{a}_0$.

下面列出各项摄动公式具体形式.

(1) $\boldsymbol{\sigma_1}$ 和 $\boldsymbol{\sigma_2}$

$$a_1=0,e_1=0,i_1=0,\tag{4.150}$$

$$\Omega_1=-\frac{A_2}{p^2}n\cos i,\tag{4.151}$$

$$\omega_1=\frac{A_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right),\tag{4.152}$$

$$M_1=\frac{A_2}{p^2}n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2},\tag{4.153}$$

$$a_2=0,e_2=0,i_2=0,\tag{4.154}$$

$$\begin{aligned}\Omega_2=-\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 n\cos i\Big\{\Big[&\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}\right)-\\ &\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^2 i\Big]+\end{aligned}$$

$$\left(\frac{A_4}{A_2^2}\right)\left[\left(\frac{6}{7}+\frac{9}{7}e^2\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}e^2\right)\sin^2 i\right]\Bigg\}\ , \tag{4.155}$$

$$\begin{aligned}\omega_2 = &\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 n\Bigg\{\Bigg[\left(4+\frac{7}{12}e^2+2\sqrt{1-e^2}\right)-\Bigg(\frac{103}{12}+\frac{3}{8}e^2+\\ &\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}\Bigg)\sin^2 i+\left(\frac{215}{48}-\frac{15}{32}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^4 i\Bigg]+\\ &\left(\frac{A_4}{A_2^2}\right)\left[\left(\frac{12}{7}+\frac{27}{14}e^2\right)-\left(\frac{93}{14}+\frac{27}{4}e^2\right)\sin^2 i+\left(\frac{21}{4}+\frac{81}{16}e^2\right)\sin^4 i\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.156}$$

$$\begin{aligned}M_2 = &\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 n\sqrt{1-e^2}\Bigg\{\Bigg[\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)^2\sqrt{1-e^2}+\left(\frac{5}{2}+\frac{10}{3}e^2\right)-\\ &\left(\frac{19}{3}+\frac{26}{3}e^2\right)\sin^2 i+\left(\frac{233}{48}+\frac{103}{12}e^2\right)\sin^4 i+\\ &\frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{12}-\frac{35}{4}\sin^2 i+\frac{315}{32}\sin^4 i\right)\Bigg]+\\ &\left(\frac{A_4}{A_2^2}\right)e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{35}{14}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\Bigg\}\ .\end{aligned} \tag{4.157}$$

上述各式中的 a, e, i **均为** $\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}$**，且有**

$$\begin{cases}\bar{a}=\bar{a}_0,\ \bar{e}=\bar{e}_0,\ \bar{i}=\bar{i}_0\\ \bar{n}=\bar{a}^{-\frac{3}{2}}=\bar{a}_0^{-3/2},\bar{p}=\bar{a}(1-\bar{e}^2)=\bar{a}_0(1-\bar{e}_0^2).\end{cases} \tag{4.158}$$

（2）$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{S}}^{(1)}(\boldsymbol{t})$

$$\begin{aligned}a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) = \frac{A_2}{a}\Bigg\{&\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\\ &\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\Bigg\}\ ,\end{aligned} \tag{4.159}$$

$$e_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) = \frac{1-e^2}{e}\left[\frac{1}{2a}a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)-(\tan i)i_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)\right], \tag{4.160}$$

$$i_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) = \frac{A_2}{4p^2}\sin 2i\left[e\cos(f+2\omega)+\cos 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right], \tag{4.161}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) = -\frac{A_2}{p^2}\cos i\Bigg\{&(f-M+e\sin f)-\\ &\frac{1}{2}\left[e\sin(f+2\omega)+\sin 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right]\Bigg\}\ ,\end{aligned} \tag{4.162}$$

$$\omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) = -\cos i\,\Omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)+\frac{A_2}{p^2}\Bigg\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\Big[(f-M)+e\sin f+$$

$$\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\Big]+$$

$$\sin^2 i\Big[-\left(\frac{1}{4e}-\frac{7}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+\frac{3}{4}\sin 2(f+\omega)+$$

$$\left(\frac{7}{12e}+\frac{11}{48}e\right)\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+$$

$$\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)+\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\Big]\Big\},\tag{4.163}$$

$$M_S^{(1)}(t)=\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\Big\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\Big[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+$$

$$\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\Big]-\sin^2 i\Big[-\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+$$

$$\left(\frac{7}{12e}-\frac{1}{48}e\right)\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+$$

$$\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)+\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\Big]\Big\}.\tag{4.164}$$

上述各式涉及 a,e,i,ω 和 M 五个根数，均为准到一阶长期项的平均根数，即

$$\bar{a}(t)=\bar{a}_0,\bar{e}(t)=\bar{e}_0,\bar{i}(t)=\bar{i}_0,$$

$$\bar{\omega}(t)=\overline{\omega_0}+\omega_1(t-t_0),$$

$$\overline{M}(t)=\overline{M_0}+(\bar{n}+M_1)(t-t_0),$$

而 $\left(\frac{a}{r}\right)$ 和 f 则是 e,M 的函数，它们的值由 $\bar{e}(t)$ 和 $\overline{M}(t)$ 给出.

(3) $\boldsymbol{\sigma}_L^{(1)}(\boldsymbol{t})$

$$a_L^{(1)}(t)=0,\tag{4.165}$$

$$e_L^{(1)}(t)=-\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right)i_L^{(1)}(t),\tag{4.166}$$

$$i_L^{(1)}(t)=-\frac{1}{2p^2}\frac{\sin 2i}{(4-5\sin^2 i)}\Big[A_2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)-$$

$$\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)\Big]e^2\cos 2\omega-\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cos i\, e\sin\omega.\tag{4.167}$$

$$\Omega_L^{(1)}(t)=-\frac{1}{p^2}\frac{\cos i}{(4-5\sin^2 i)^2}\Big[A_2\left(\frac{7}{3}-5\sin^2 i+\frac{25}{8}\sin^4 i\right)-$$

$$\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\left(\frac{18}{7}-6\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right)\Big]e^2\sin 2\omega+$$

$$\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cot i\ e\sin\omega\,. \tag{4.168}$$

$$\begin{aligned}\omega_L^{(1)}(t) = -\frac{1}{p^2}\frac{1}{(4-5\sin^2 i)^2}\Big\{A_2\Big[&\sin^2 i\left(\frac{25}{3}-\frac{245}{12}\sin^2 i+\frac{25}{2}\sin^4 i\right)-\\ &e^2\left(\frac{7}{3}-\frac{17}{2}\sin^2 i+\frac{65}{6}\sin^4 i-\frac{75}{16}\sin^6 i\right)\Big]-\\ &\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\Big[\sin^2 i\left(\frac{18}{7}-\frac{87}{14}\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right)-\\ &e^2\left(\frac{18}{7}-\frac{69}{7}\sin^2 i+\frac{90}{7}\sin^4 i-\frac{45}{8}\sin^6 i\right)\Big]\Big\}\sin 2\omega+\\ &\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\frac{1}{e\sin i}[(1+e^2)\sin^2 i-e^2]\cos\omega\,,\end{aligned} \tag{4.169}$$

$$\begin{aligned}M_L^{(1)}(t) = \frac{1}{p^2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{(4-5\sin^2 i)}\sin^2 i\Big\{A_2\Big[&\left(\frac{15}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)-\\ &e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)\Big]-\left(\frac{A_4}{A_2}\right)(1-e^2)\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)\Big\}\sin 2\omega-\\ &\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\frac{1}{e}(1-e^2)^{3/2}\sin i\cos\omega\,.\end{aligned} \tag{4.170}$$

上述各式中的根数与 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 中的根数作同样的处理.

上述(4.147)～(4.170)式是一套完整的摄动计算公式. 如果给出的初始条件是

$$t_0, \sigma_0(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega, M_0)\,,$$

那么利用这组公式计算 t 时刻的瞬时根数 $\sigma(t)$ 的步骤如下:

(1) 由 σ_0 代替 $\bar{\sigma}_0$(对于一阶解,这样做精度已够),用(4.159)～(4.170)式计算 $\sigma_L^{(1)}(t_0)$ 和 $\sigma_S^{(1)}(t_0)$,从而给出 $\bar{\sigma}_0$,即

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 - [\sigma_L^{(1)}(t_0) + \sigma_S^{(1)}(t_0)]$$

在计算短周期项 $\sigma_S^{(1)}(t_0)$ 时出现的两个量,$\left(\frac{a}{r}\right)$ 和 f,按下列公式计算:

$$\begin{cases} E = M + e\sin E, \\ \left(\dfrac{a}{r}\right) = (1-e\cos E)^{-1}, \\ \tan f = \dfrac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{\cos E - e}. \end{cases} \tag{4.171}$$

由于平近点角 M 变化的特殊性,所需要的 $\bar{\sigma}_0$ 必须从 a_0 中消除精确到二阶量的 $a_S^{(1)}(t_0)$ 和二阶周期项 $a_S^{(2)}(t_0)$ 和 $a_L^{(2)}(t_0)$,那么 $a_S^{(1)}(t_0)$ 还必须重新由上面算出的 $\bar{\sigma}_0$ 计算,给出精确到二阶量的 $a_S^{(1)}(t_0)$.

(2) 由$\overline{\sigma}_0$ 用(4.150)~(4.157)式计算 σ_1 和 σ_2,从而给出瞬时平均根数 $\overline{\sigma}(t)$,即

$$\overline{\sigma}(t)=\overline{\sigma}_0+(\delta\overline{n}_0+\sigma_1+\sigma_2)(t-t_0).$$

(3) 由$\overline{\sigma}(t)$再用(4.159)~(4.170)式计算 $\sigma_L^{(1)}(t)$和 $\sigma_S^{(1)}(t)$,从而给出瞬时根数 $\sigma(t)$,即

$$\sigma(t)=\overline{\sigma}(t)+\sigma_L^{(1)}(t)+\sigma_S^{(1)}(t).$$

原来这一步要用$\overline{\sigma}(t)=\sigma_0+(\delta\overline{n}_0+\sigma_1)(t-t_0)$计算 $\sigma_S^{(1)}(t)$和 $\sigma_L^{(1)}(t)$就符合精度要求了,但为了计算程序上的方便,按上述方法计算也可以,对一阶解而言,精度一致.

在实际工作中,往往给出的初始条件是

$$t_0,\quad \overline{\sigma}_0=\overline{\sigma}(t_0),$$

于是,可直接从上述第(2)步开始计算.正因为如此,也就不必考虑平近点角 M 对 $\overline{n}_0$(或 $\overline{a}_0$)的特殊要求,即为了使 $M(t)$的计算精度与其他五个根数一致,必须从 a_0 中消除一阶和二阶周期项.

对于低轨卫星,在 $n(t-t_0)=10^3$ 弧段内,一阶摄动解的定轨精度可达 10^{-5}.这在很多航天任务中得到了广泛的应用.

除定量计算外,还可以通过上述分析解了解卫星轨道变化的基本特征.如摄动解中 Ω 和 ω 具有长期变化,这说明地球形状带谐项摄动,导致人造卫星轨道平面及拱线在空间不断旋转,而旋转方向取决于倾角 i 的大小.由

$$\Omega_1=-\frac{A_2}{p^2}n\cos i,$$

$$\omega_1=\frac{A_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right),$$

可知当 $0<i<90°$时,轨道面西退,$90°<i<180°$时,轨道面东进.而当$i=90°$(极地轨道)时,轨道面不动,这是容易理解的,因为此时人造卫星受一个具有旋转对称特性的地球引力场作用,对轨道面而言,受力是平衡的.

当 $i=i_C=63°23'$或 $116°34'$时$\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i=0\right)$,拱线"不动",$i_C$ 称为临界倾角.

以上特征可以帮助我们了解人造卫星轨道变化的规律,在轨道设计等工作中将会用到.如设计一个太阳同步卫星(轨道面每天东进约 $1°$,与太阳"运动"同步),就要使 $\Omega_1>0$,即 $i>90°$(逆行卫星).

在摄动表达式 $\sigma_S^{(1)}(t)$和 $\sigma_L^{(1)}(t)$中,有$\frac{1}{e}$,$\frac{1}{\sin i}$,$\frac{1}{4-5\sin^2 i}$这类因子,对于 $e=0$,$i=0$ 或 $180°$,$i=i_C$,上述摄动解无效,此即摄动解的"奇点",但并不

是运动的实质性奇点，是可以消除的，具体方法是采用无奇点根数和相应的拟平均根数法(即改变参考解)，详见参考文献[3]~[5].

最后必须指出：平均根数法的原理确实很简单，只是改变了经典摄动法的参考解. 但无论是摄动法还是平均根数法，构造小参数幂级数解的过程相对而言都较烦，若要构造二阶解，那将更难让人接受. 如果采用哈密顿力学来构造相应的级数解，则要简单很多. 参考文献[6]就在此框架下，通过 Von-Zeipel 变换较简单地构造了上述主要带谐项摄动解，但必须引用正则共轭变量，而轨道根数 $\sigma(a,e,i,\Omega,\omega,M)$ 不符合这一条件. 为此，参考文献[7]又将这种变换思想推广到一般变量，直接用轨道根数，同样可以采用该变换方法来构造相应的级数解. 所有这些，从构造小参数幂级数解的角度来看有其特点，但在实际工作中是否一定要采用，要视具体情况而定，这里所介绍的方法仅供参考.

4. 能量积分的利用——半长径 a 的二阶周期项的推导

讨论所有带谐项摄动，并将 J_2 和 $J_l(l\geqslant 3)$ 分开. 记

$$F=\frac{1}{2a}+R(\sigma,J_2,J_n)\ ,\tag{4.172}$$

这里带谐项摄动函数 R 不显含 t，有

$$\frac{\partial F}{\partial t}=0\ .$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\sum_j\frac{\partial F}{\partial\sigma_j}\dot{\sigma}_j=-\frac{1}{2a}+\sum_j\frac{\partial R}{\partial\sigma_j}\dot{\sigma}_j\ .$$

其中 $\dot{\sigma}_j$ 由摄动运动方程给出，代入上式整理后得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=0\ .\tag{4.173}$$

因此，存在一积分

$$F=\frac{1}{2a}+R=C\ ,\tag{4.174}$$

此即能量积分.

能量积分(4.174)式有一个非常显著的特点：F 有两部分，$\frac{1}{2a}$和 R，且

$$\frac{1}{2a}=O(\varepsilon^0)\ ,\quad R=O(\varepsilon)\ ,$$

ε 即 J_2，零阶部分仅含半长径 a 一个根数. 这一特点非常重要，它至少有两

个用途,即

1）由 a,e,i,Ω,ω,M 的一阶摄动,可简单地求出 a 的二阶摄动.

2）在积分常数满足一定精度的条件下,由精度较低的六个根数可重新算出精度较高(高一阶)的半长径 a. 前者就是本节用来推导 a 的二阶周期项的基础,而后者将在数值求解卫星运动方程时,用以控制沿迹误差的扩大.

将能量积分对平均根数$\bar{\sigma}(t)$展开,得

$$\frac{1}{2a}+\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_{\mathrm{S}}^{(1)}+a_{\mathrm{L}}^{(1)}+a_{\mathrm{S}}^{(2)}+a_{\mathrm{L}}^{(2)}+\cdots)\right]_{\bar{\sigma}}+\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_{\mathrm{S}}^{(1)}+a_{\mathrm{L}}^{(1)}+\cdots)^2\right]_{\bar{\sigma}}+(R_{1\mathrm{C}}+R_{2\mathrm{C}}+R_{1\mathrm{S}}+R_{2\mathrm{S}}+R_{2\mathrm{L}})_{\bar{\sigma}}+\left[\sum_j\frac{\partial(R_{1\mathrm{C}}+R_{1\mathrm{S}})}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})\right]_{\bar{\sigma}}+\cdots=C. \tag{4.175}$$

下面为了书写方便,平均根数$\bar{\sigma}$就写成 σ,请注意这一点. 还有,长周期项 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)},\sigma_{\mathrm{L}}^{(2)},\cdots$分成两部分,一部分为 J_2 项产生的,仍记作 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)},\sigma_{\mathrm{L}}^{(2)},\cdots$,另一部分为 $J_l(l\geqslant 3)$项产生,记作 $\sigma_{l\mathrm{L}}^{(1)},\sigma_{l\mathrm{L}}^{(2)},\cdots$. 根据积分(4.174)式的性质,展开式左端仅与 a,e,i 有关的“常数项”之和应等于右端的常数 C,与时间 t 有关的全部周期项之和应为 0,而且不同性质的周期项应分别为 0,相同性质的周期项按 J_2 不同阶的各部分亦应分别为 0. 于是有

$$\text{常数项:}\ \frac{1}{2a}+(R_{1\mathrm{C}}+R_{2\mathrm{C}})+\cdots=C. \tag{4.176}$$

$$\text{一阶周期项:}\ \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_{\mathrm{L}}^{(1)}+a_{l\mathrm{L}}^{(1)})=0, \tag{4.177}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_{\mathrm{S}}^{(1)}+R_{1\mathrm{S}}=0. \tag{4.178}$$

二阶周期项:

$$\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_{\mathrm{L}}^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2+\sum_j\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j+\sum_j\frac{\partial R_{1\mathrm{S}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right]_{\mathrm{L}}=0, \tag{4.179}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial_a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_{l\mathrm{L}}^{(2)}+\sum_j\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{l\mathrm{L}}^{(1)})_j+R_{2\mathrm{L}}\right]_{\mathrm{L}}=0, \tag{4.180}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_{\mathrm{S}}^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2+\sum_j\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j+\sum_j\frac{\partial R_{1\mathrm{S}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\sigma_{l\mathrm{L}}^{(1)})_j+R_{2\mathrm{S}}\right]_{\mathrm{S}}=0 \tag{4.181}$$

只写到二阶就够了,其中$[\quad]_{\mathrm{L}}$ 和$[\quad]_{\mathrm{S}}$ 分别表示括号内的长周期和短周期部分.

由(4.177)和(4.178)式直接得出

$$a_l^{(1)} + a_{l\mathrm{L}}^{(1)} = 0 \,, \tag{4.182}$$

$$a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) = 2a^2 R_{1\mathrm{S}} = \frac{2}{n^2 a} R_{1\mathrm{S}} \,. \tag{4.183}$$

此即前面平均根数法导出的结果,而通过能量积分却很容易得出这一结论.

对于二阶周期项,首先证明一个有趣的结论,即

$$a_{l\mathrm{L}}^{(2)} = 0 \,, \tag{4.184}$$

这表明所有带谐项 $J_l(l \geqslant 3)$对 a 的二阶长周期项均无贡献. 由(4.180)式,根据 $R_{1\mathrm{C}}$仅是 a,e,i 的函数可得

$$a_{l\mathrm{L}}^{(2)} = 2a^2 \left\{ -\frac{1}{a}\left(\frac{A_2}{p^2}\right)\sqrt{1-e}\tan i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right) i_{l\mathrm{L}}^{(1)} + R_{2\mathrm{L}} \right\} \,,$$

其中 $i_{l\mathrm{L}}^{(1)}$正是用 $R_{2\mathrm{L}}$代入摄动运动方程求得的,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_{l\mathrm{L}}^{(1)}) = \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R_{2\mathrm{L}}}{\partial \omega} \,,$$

而这里的 ω 应为

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \omega_1(t - t_0) \,,$$

因此有

$$\mathrm{d}\bar{\omega} = \omega_1 \mathrm{d}t = \frac{A_2}{p^2} n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\mathrm{d}t \,,$$

代入上式得

$$\mathrm{d}(i_{l\mathrm{L}}^{(1)}) = \frac{\cot i}{\frac{A_2}{p^2} n^2 a^2 \sqrt{1-e^2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)} \frac{\partial R_{2\mathrm{L}}}{\partial \omega}\mathrm{d}\omega \,,$$

即

$$i_{l\mathrm{L}}^{(1)} = \frac{\cot i}{\frac{A_2}{p^2} n^2 a^2 \sqrt{1-e^2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)} R_{2\mathrm{L}} \,,$$

以此代入上面 $a_{l\mathrm{L}}^{(2)}$ 的表达式即得

$$a_{l\mathrm{L}}^{(2)} = 2a^2\{-R_{2\mathrm{L}} + R_{2\mathrm{L}}\} = 0 \,,$$

这就是要证明的结果. 因此,a 的二阶长周期项仅与 J_2 有关,$a_{\mathrm{L}}^{(2)}$ 也就是 a 的完整的二阶长周期项,下面就来具体计算 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$和 $a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$.

(1) $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$

引进算符 D：

$$D=\sum_j(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\frac{\partial}{\partial\sigma_j}\,,\tag{4.185}$$

(4.179)式可写成

$$\left[-\frac{1}{2a^2}a_{\mathrm{L}}^{(2)}+\frac{1}{2a^3}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2+DR_{1\mathrm{S}}+\left(\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial e}e_{\mathrm{L}}^{(1)}+\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial i}i_{\mathrm{L}}^{(1)}\right)\right]_{\mathrm{L}}=0\,.$$

将 D 作用于(4.178)式，取其长周期部分：

$$\left\{-\frac{1}{2a}D\left(\frac{a_{\mathrm{S}}^{(1)}}{a}\right)+\frac{1}{2a^3}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2+DR_{1\mathrm{S}}\right\}_{\mathrm{L}}=0\,.$$

以上两式相减给出 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}$，即

$$a_{\mathrm{L}}^{(2)}=\left[aD\left(\frac{a_{\mathrm{S}}^{(1)}}{a}\right)+2a^2\left(\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial e}e_{\mathrm{L}}^{(1)}+\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial i}i_{\mathrm{L}}^{(1)}\right)\right]_{\mathrm{L}}\,.\tag{4.186}$$

经计算给出

$$\begin{aligned}\left[aD\left(\frac{a_{\mathrm{S}}^{(1)}}{a}\right)\right]_{\mathrm{L}}=\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2a\sqrt{1-e^2}\Bigg\{&\left[-\frac{1}{3}\sin^2 i(4-\sin^2 i)\,\overline{\cos 2f}+\right.\\&\left.e^2\sin^2 i\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{4}\sin^2 i\right)\right]\cos 2\omega+\\&\frac{e^4}{1-e^2}\left[\frac{7}{3}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega+\right.\\&\left.\frac{1}{32}\sin^4 i\,\cos 4\omega\right]\Bigg\}\,,\end{aligned}\tag{4.187}$$

$$2a^2\left(\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial e}e_{\mathrm{L}}^{(1)}+\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial i}i_{\mathrm{L}}^{(1)}\right)=-2a\left(\frac{A_2}{p^2}\right)\sqrt{1-e^2}\tan i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)i_{\mathrm{L}}^{(1)}\,.\tag{4.188}$$

将(4.142)式 $i_{\mathrm{L}}^{(1)}$ 的 A_2 部分与上两式一并代入(4.186)式，即得 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$ 的表达式：

$$\begin{aligned}a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)=\left(\frac{A_2^2}{p^4}a\right)\sqrt{1-e^2}\Bigg\{&\left[-\frac{1}{6}\sin^2 i(4-5\sin^2 i)\,\overline{\cos 2f}+\right.\\&\left.e^2\sin^2 i\left(\frac{17}{12}-\frac{19}{8}\sin^2 i\right)\right]\cos 2\omega+\\&\frac{e^4}{1-e^2}\left[\frac{7}{3}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega+\frac{1}{32}\sin^4 i\,\cos 4\omega\right]\Bigg\}\,.\end{aligned}\tag{4.189}$$

(2) $a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$

类似 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$ 的推导，将算符 D 引进(4.181)式，并将 D 作用于(4.178)

式，取其短周期部分，这两式相减就给出 $a_S^{(2)}(t)$，即

$$a_S^{(2)}(t) = \left\{ aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right) + 2a^2\left[\sum_j \frac{\partial R_{1C}}{\partial \sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j + \sum_j \frac{\partial R_{1S}}{\partial \sigma_j}(\sigma_L^{(1)} + \sigma_{lL}^{(1)})_j + R_{2S} \right] \right\}. \tag{4.190}$$

经简单计算就可给出具体表达式如下：

$$\begin{aligned}
a_S^{(2)}(t) = {} & \left\{ -\frac{2}{a} a_S^{(1)}(t) - \frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right\} a_S^{(1)} + \\
& \left\{ -a\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\tan i(4-5\sin^2 i)\right\}(i_S^{(1)} - \overline{i_S^{(1)}}) + \\
& \frac{A_2}{a}\left\{ 2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f - e(1-e^2)^{-5/2}\right] + \right. \\
& 3\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos f\cos 2(f+\omega) - \frac{4}{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^5\left(\sin f + \right. \\
& \left.\left.\frac{e}{4}\sin 2f\right)\sin 2(f+\omega)\right\}(e_S^{(1)} + e_L^{(1)} + e_{lL}^{(1)}) + \\
& \frac{A_2}{a}\left\{ \sin 2i\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^3 + (1-e^2)^{-3/2} + \right.\right. \\
& \left.\left.\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right]\right\}(i_S^{(1)} + i_L^{(1)} + i_{lL}^{(1)}) + \\
& \frac{A_2}{a}\left\{ -2\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2(f+\omega)\right\}(\omega_S^{(1)} + \omega_L^{(1)} + \omega_{lL}^{(1)}) + \\
& \frac{A_2}{a}\left\{ -\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin f\left[2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right) + \right.\right. \\
& \left. 3\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right] - 2\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^5\sin 2(f + \\
& \left.\omega)\right\}(M_S^{(1)} + M_L^{(1)} + M_{lL}^{(1)}) + 2a^2 R_{2S} - \\
& \left\{ \left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_C + \left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_L \right\},
\end{aligned} \tag{4.191}$$

其中

$$\begin{aligned}
\left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_C = {} & \left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 a\sqrt{1-e^2}\left\{ \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)^2\left[\left(\frac{16}{9}+\frac{19}{9}e^2\right) + \right.\right. \\
& \left.\frac{2}{9}\sqrt{1-e^2} + \frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{18}\right)\right] + \sin^2 i\left(1+\frac{2}{3}e^2\right) + \\
& \left.\sin^4 i\left[\left(-\frac{5}{6}+\frac{25}{24}e^2\right) + \frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{16}\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.192}$$

关于$\left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_L$，见(4.187)式. 注意，(4.191)式中$\sigma_S^{(1)}$与$\sigma_L^{(1)}$同时出现的地方，若$\sigma_S^{(1)}$不减去$\overline{\sigma_S^{(1)}}$，则$\sigma_L^{(1)}$中要舍去这一项.

从上面的推导过程可以看出，对根数的处理与平均根数法完全相同，但具体导出a的二阶周期项却简单得多，这就弥补了平均根数法的不足之处(即推导过程的复杂性).

§4.4 中心天体非球形引力摄动(Ⅱ)——主要田谐项摄动

主要带谐项(J_2项)反映天体的扁球形(两极扁，赤道隆起)，而主要田谐项($J_{2,2}$项)则反映天体赤道是椭圆状，该项对24^h地球同步卫星轨道的影响非常显著.

1. $J_{2,2}$项摄动函数

在标准单位系统中，仅考虑$l=m=2$这一项，由(4.69)式给出相应的摄动函数为

$$R_{2,2}=\frac{J_{2,2}}{r^3}P_{2,2}(\sin\varphi)\cos 2\bar{\lambda}, \tag{4.193}$$

有

$$\begin{cases} J_{2,2}=(C_{2,2}^2+S_{2,2}^2)^{1/2}, \\ \bar{\lambda}=\lambda_G-\lambda_{2,2}, \\ \tan 2\lambda_{2,2}=S_{2,2}/C_{2,2}. \end{cases} \tag{4.194}$$

注意，这里$J_{2,2}$的符号与我们过去的有关工作中采用的$J_{2,2}$正好相反. 显然，由(4.193)式表达的摄动函数对$\bar{\lambda}$而言是对称的，即

$$R_{2,2}(+\bar{\lambda})=R_{2,2}(-\bar{\lambda}).$$

这里$\bar{\lambda}$是从$\lambda=\lambda_{2,2}$的赤道“对称轴”(即赤道长轴)方向起量的经度. 根据P_{lm}的定义，$R_{2,2}$可写成下列形式：

$$R_{2,2}=\frac{3J_{2,2}}{r^3}\cos^2\varphi\cos 2\bar{\lambda}. \tag{4.195}$$

现在将$R_{2,2}$表示为轨道根数的形式. 这将涉及到地固坐标系与历元平赤道地心系(或轨道坐标系)之间的转换问题(见第一章 §1.1)，但对于一般问题可不考虑赤道的变化. 在这种情况下，可由图4.1来表示两坐标系之间的

关系. 图中 $\bar{x}$ 是“对称轴”方向，因此有

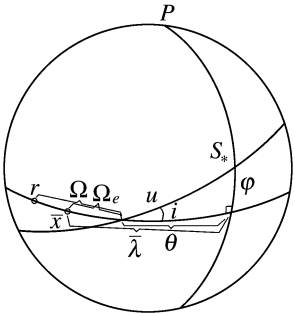

图 4.1　两种坐标系之间的关系

$$\begin{cases}\bar{\lambda} = \Omega_e + \theta, \\ \Omega_e = (\Omega - S_{2,2}) - n_e(t - t_0),\end{cases} \tag{4.196}$$

其中 $S_{2,2}$ 是历元 t_0 时“对称轴”方向的地方恒星时，n_e 是地球自转角速度. 由球面三角公式

$$\cos\varphi\cos\theta = \cos u, \quad \cos\varphi\sin\theta = \sin u\cos i,$$
$$\sin\varphi = \sin u\sin i,$$

得出

$$\begin{aligned}\cos^2\varphi\cos2\bar{\lambda} &= \cos^2\varphi(\cos2\theta\cos2\Omega_e - \sin2\theta\sin2\Omega_e) \\ &= \frac{1}{4}(1+\cos i)^2\cos(2u+2\Omega_e) + \\ &\quad \frac{1}{4}(1-\cos i)^2\cos(2u-2\Omega_e) + \frac{1}{2}\sin^2 i\cos2\Omega_e,\end{aligned}$$

其中 $u = f + \omega$. 将此式代入(4.195)式得

$$\begin{aligned}R_{2,2} = \frac{3J_{2,2}}{4a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3[&(1+\cos i)^2\cos(2u+2\Omega_e) + \\ &(1-\cos i)^2\cos(2u-2\Omega_e) + 2\sin^2 i\cos2\Omega_e].\end{aligned} \tag{4.197}$$

这就是主要田谐项摄动函数的根数形式，它与带谐项摄动函数有显著差别，即显含时间 t，这在 §4.2 中已提过.

由于摄动函数显含 t，又与真近点角 f 分不开，这给积分造成了困难，必须将 $\left(\frac{a}{r}\right)$ 和 f 等量展成平近点角 M 的三角级数，相应的摄动解对偏心率 e 将是不“封闭”的. 利用第二章 §2.2 中给出的结果 $R_{2,2}$ 中出现的 $\left(\frac{a}{r}\right)^3$，$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos2f$ 和 $\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin2f$ 展成 M 的三角级数，取到 e^2 项的形式为

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \left(1+\frac{3}{2}e^2\right)+3e\cos M+\frac{9}{2}e^2\cos 2M+\cdots, \tag{4.198}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f = -\frac{e}{2}\cos M+\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\cos 2M+\frac{7}{2}e\cos 3M+\frac{17}{2}e^2\cos 4M+\cdots, \tag{4.199}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2f = -\frac{e}{2}\sin M+\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\sin 2M+\frac{7}{2}e\sin 3M+\frac{17}{2}e^2\sin 4M+\cdots, \tag{4.200}$$

将此式代入(4.197)式得

$$\begin{aligned}R_{2,2} = \frac{3J_{2,2}}{4a^3}\Big\{&(1+\cos i)^2\Big[\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-\\&e\left(\frac{1}{2}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{2}\cos(3M+2\omega+2\Omega_e)\right)-\\&e^2\left(\frac{5}{2}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{17}{2}\cos(4M+2\omega+2\Omega_e)\right)\Big]+\\&(1-\cos i)^2\Big[\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-\\&e\left(\frac{1}{2}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{2}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)\right)-\\&e^2\left(\frac{5}{2}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{17}{2}\cos(4M+2\omega-2\Omega_e)\right)\Big]+\\&2\sin^2 i\Big[\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\cos 2\Omega_e+\\&\frac{3}{2}e(\cos(M+2\Omega_e)+\cos(M-2\Omega_e))+\\&\frac{9}{4}e^2(\cos(2M+2\Omega_e)+\cos(2M-2\Omega_e))\Big]\Big\}+O(e^3J_{2,2}).\end{aligned} \tag{4.201}$$

不难看出,$R_{2,2}$包含的全是短周期项,只有一项的周期稍长些,即 $\cos 2\Omega_e$,其周期为半天. 因此,$J_{2,2}$项对卫星轨道的影响基本上具有短周期性质,将 $R_{2,2}$ 代入摄动运动方程(3.75)式即得右函数 f_{2S}.

2. $J_{2,2}$项的摄动解

仅 $J_{2,2}$一项产生的摄动解应为

$$\sigma_S^{(2)}(t) = \int^t\left[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_S^{(2)}+f_{2S}\right]_{\bar\sigma}\mathrm{d}t,$$

考虑到实际情况和分析问题时的需要,解保留到 $O(e)$ 项就够了.积分后得

$$
\begin{aligned}
a_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{2a}\Bigg\{&(1+\cos i)^2\left[\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-\right.\\
&\frac{e}{2}\left(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{1-2\alpha/3}\cos(3M+2\omega+\right.\\
&\left.\left.2\Omega_e)\right)\right]+(1-\cos i)^2\left[\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-\right.\\
&\frac{e}{2}\left(\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{1-2\alpha/3}\cos(3M+2\omega-\right.\\
&\left.\left.2\Omega_e)\right)\right]+2\sin^2 i\left(\frac{3e}{2}\right)\left[\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e)\right]\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{4.202}
$$

$$
\begin{aligned}
e_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\Bigg\{&(1+\cos i)^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)+\right.\right.\\
&\left.\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega+2\Omega_e)\right)+\\
&\frac{e}{2}\left(-\frac{e}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)+\right.\\
&\left.\left.\frac{17}{2(1-\alpha/2)}\cos(4M+2\omega+2\Omega_e)\right)\right]+\\
&(1-\cos i)^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)+\right.\right.\\
&\left.\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)\right)+\\
&\frac{e}{2}\left(-\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)+\right.\\
&\left.\left.\frac{17}{2(1+\alpha/2)}\cos(4M+2\omega-2\Omega_e)\right)\right]+\\
&2\sin^2 i\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e)\right)+\right.\\
&\left.\frac{9}{4}e\left(\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M-2\Omega_e)\right)\right]\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{4.203}
$$

$$
\begin{aligned}
i_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\sin i\Bigg\{&-(1+\cos i)\left[\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-\right.\\
&e\left(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega+\right.\\
&\left.\left.2\Omega_e)\right)\right]+(1-\cos i)\left[\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-\right.
\end{aligned}
$$

$$e\left(\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-\right.$$
$$\left.\left.\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)\right)\right]+2\left[\frac{1}{\alpha}\cos(2\Omega_e)-\right.$$
$$\left.\left.\left.3e\left(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)-\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e)\right)\right]\right\},\tag{4.204}$$

$$\Omega_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\left\{-(1+\cos i)\left[\frac{1}{1-\alpha}\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)-\right.\right.$$
$$e\left(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega+\right.$$
$$\left.\left.2\Omega_e)\right)\right]+(1-\cos i)\left[\frac{1}{1+\alpha}\sin(2M+2\omega-2\Omega_e)-\right.$$
$$e\left(\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega-\right.$$
$$\left.\left.2\Omega_e)\right)\right]-2\cos i\left[\frac{1}{a}\sin(2\Omega_e)-\right.$$
$$\left.\left.3e\left(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M-2\Omega_e)\right)\right]\right\}.\tag{4.205}$$

$$\omega_S^{(2)}(t)=[\omega_S^{(2)}(t)]_1+[\omega_S^{(2)}(t)]_2.\tag{4.206}$$

其中

$$[\omega_S^{(2)}(t)]_1=-\cos\Omega_S^{(2)}(t),$$

$$[\omega_S^{(2)}(t)]_2=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\left(\frac{1}{e}\right)\left\{-(1+\cos i)^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+\right.\right.\right.$$
$$\left.2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega+2\Omega_e)\right)+$$
$$e\left(\frac{5}{2(1-\alpha)}\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)-\right.$$
$$\left.\left.\frac{17}{4(1-\alpha/2)}\sin(4M+2\omega+2\Omega_e)\right)\right]-$$
$$(1-\cos i)^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M+2\omega-2\Omega_e)-\right.\right.$$
$$\left.\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega-2\Omega_e)\right)+$$
$$e\left(\frac{5}{2(1+\alpha)}\sin(2M+2\omega-2\Omega_e)-\right.$$
$$\left.\left.\frac{17}{4(1+\alpha/2)}\sin(4M+2\omega-2\Omega_e)\right)\right]+$$
$$2\sin^2 i\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\Omega_e)+\right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+2\alpha}\ \sin(M-2\Omega_e)\Big)+\\
&\frac{9}{4}e\Big(-\frac{2}{3}\alpha\ \sin 2\Omega_e+\frac{1}{1-\alpha}\ \sin(2M+2\Omega_e)+\\
&\frac{1}{1+\alpha}\ \sin\ (2M-2\Omega_e)\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_S^{(2)}(t)=&-[\omega_S^{(2)}(t)]_2+\frac{9(J_{2,2})}{4a^2}\Big\{(1+\cos i)^2\Big[\frac{1}{1-\alpha}\Big(1-\\
&\frac{1}{2(1-\alpha)}\Big)\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)-\\
&e\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\Big(1-\frac{1}{2(1-2\alpha)}\Big)\ \sin(M+2\omega+2\Omega_e)-\\
&\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\ \Big(1-\frac{1}{2(1-2\alpha/3)}\Big)\ \sin(3M+2\omega+2\Omega_e)\Big)\Big]+\\
&(1-\cos i)^2\Big[\frac{1}{1+\alpha}\Big(1-\frac{1}{2(1+\alpha)}\Big)\ \sin(2M+2\omega-2\Omega_e)-\\
&e\Big(\frac{1}{1+2\alpha}\Big(1-\frac{1}{2(1+2\alpha)}\Big)\ \sin(M+2\omega-2\Omega_e)-\\
&\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\ \Big(1-\frac{1}{2(1+2\alpha/3)}\Big)\ \sin(3M+2\omega-2\Omega_{2,2})\Big)\Big]+\\
&2\sin^2 i\Big[-\frac{1}{\alpha}\ \sin(2\Omega_e)+\\
&3e\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\Big(1-\frac{1}{2(1-2\alpha)}\Big)\ \sin(M+2\Omega_e)+\\
&\frac{1}{1+2\alpha}\Big(1-\frac{1}{1+2\alpha}\Big)\ \sin(M-2\Omega_e)\Big)\Big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.207}
$$

以上各式中的 α 为“速度”比：

$$\alpha=n_e/\bar{n}, \tag{4.208}$$

即地球自转角速度 n_e 与卫星平运动角速度 $\bar{n}$ 之比. 各式中出现的根数应为平均根数.

从积分结果(4.202)～(4.207)**式可以看出，对于低轨卫星，$J_{2,2}$ 项摄动只是二阶短周期的，但有一项$\frac{1}{\alpha}\sin 2\Omega_e$（或$\frac{1}{\alpha}\ \cos 2\Omega_e$）例外. 因 $\alpha\approx 0.1$，该项要比二阶小量大一个量级，且周期稍长些，在某些人造卫星工作中还是应该考虑这一项的. 对于高轨卫星，特别是 24^h 地球同步卫星，$J_{2,2}$ 项的摄动影响将是显著的，下面予以讨论.**

3. 通约问题和 24^{h} 卫星

从上述 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$ 的表达式可以看出，当 $1-2\alpha, 1-\alpha, 1-2\alpha/3, 1-\alpha/2$ 四个因子中有一个为零，解就不能用，相应地有 $\dfrac{\bar{n}}{n_{\mathrm{e}}}=2,1,2/3,1/2$，这对应于 $12^{\mathrm{h}}, 24^{\mathrm{h}}, 36^{\mathrm{h}}, 48^{\mathrm{h}}$ 卫星，它们的平运动角速度与地球自转角速度成简单整数比，此即通约问题. 与 §4.3 中的 $i=i_{\mathrm{C}}$（临界倾角）问题类似，也是一种奇点（通约奇点）. 当 $\bar{n}/n_{\mathrm{e}}$ 接近 $2,1,2/3,1/2$ 时，$1-2\alpha, 1-\alpha, 1-2\alpha/3, 1-\alpha/2$ 的量级可达到 10^{-3}（即 J_2 的量级），出现小分母，二阶短周期项 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$ 的表达式(4.202)～(4.207)中相应的项（即通约项）将转化为一阶长周期项 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$. 因此，$J_{2,2}$ 对 $12^{\mathrm{h}}, 24^{\mathrm{h}}, 36^{\mathrm{h}}, 48^{\mathrm{h}}$ 卫星轨道的影响就比较显著，特别是对 24^{h} 卫星，其通约项前面无 e 因子. 下面具体给出 $J_{2,2}$ 项对这种卫星轨道的长周期摄动解.

考虑 $\alpha=n_{\mathrm{e}}/\bar{n}=1$ 的通约项，由(4.201)式立即可得 24^{h} 卫星通约项对应的摄动函数：

$$R_{2,2}=\frac{3(J_{2,2})}{4a^3}\left\{(1+\cos i)^2\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\cos(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})+\right.$$
$$\left.2\sin^2 i\left(\frac{9}{4}e^2\right)\cos(2M+2\Omega_{\mathrm{e}})\right\}, \tag{4.209}$$

将这一 $R_{2,2}$ 带入摄动运动方程(3.75)式，即得相应的右函数 $f_{2l}(J_{2,2})$. 由(4.38)式得出

$$\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\int^t\left[\delta\left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)a_{\mathrm{L}}^{(2)}+\sum_j\frac{\partial f_{1\mathrm{c}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j+f_{2\mathrm{L}}(J_{2,2})\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t. \tag{4.210}$$

另外，由于 $a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)\neq 0$，因此对 M 还应有一项，即

$$\int^t\left[\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{L}}^{(1)}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,$$

该项积分后变成零阶长周期项，方法失效. 因此，对于通约问题，与带谐项摄动中的临界角问题一样，不能简单地采用平均根数法，必须加以改进. 如拟平均根数法[3,4]，上述各间接部分

$$\frac{\partial n}{\partial a}(a_{\mathrm{L}}^{(1)}+a_{\mathrm{L}}^{(2)}),\ \sum_j\frac{\partial f_{1\mathrm{c}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j$$

都不出现. 故这里对六个根数只计算直接部分，即

$$\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\int^t[f_{2\mathrm{L}}(J_{2,2})]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t. \tag{4.211}$$

对于 24^{h} 卫星，通常是近圆轨道 $e\approx 0$. 因此，即使是一阶长周期项，也只要保留到 $O(e)$ 项就够了，由此积分后得

$$a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \frac{3(J_{2,2})}{2a}\bar{n}\left[(1+\cos i)^2\frac{\cos(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right], \tag{4.212}$$

$$e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \frac{3(J_{2,2})}{8a^2}\bar{n}e\left[-(1+\cos i)^2\frac{\cos(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}+9\sin^2 i\frac{\cos(2M+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+M_1)}\right], \tag{4.213}$$

$$i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \frac{3(-J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\sin i\left[-(1+\cos i)\frac{\cos(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right], \tag{4.214}$$

$$\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\left[-(1+\cos i)\frac{\sin(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right], \tag{4.215}$$

$$\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = [\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_1+[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2. \tag{4.216}$$

其中

$$[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_1 = -\cos i\ \Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t),$$

$$[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2 = \frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\left[-\frac{5}{2}(1+\cos i)^2\frac{\sin(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}+\frac{9}{2}\sin^2 i\frac{\sin(2M+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+M_1)}\right],$$

$$M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \frac{9(J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\left[(1+\cos i)^2\frac{\sin(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right]-[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2. \tag{4.217}$$

上述各式右端出现的根数均为平均根数 $\bar{\sigma}$，有 $\bar{\sigma}(t)=\bar{\sigma}_0+\sigma_1(t-t_0)$，其中 Ω_1,ω_1 和 M_1 的计算公式已在 §4.3 中给出，见(4.117)～(4.119)式.

4. 一点注解

上述结果是针对地球卫星的，地球自转较快，(4.208)式定义的速度比 α 不是太小. 但对于慢自转天体，如金星与月球，相应的 α 值很小，中心天体自转项 $n_{\mathrm{e}}t$ 将以慢变量出现在田谐项摄动函数 $R_{2,2}$(或一般项 $R_{l,m}$)中，与卫星运动的慢变量 Ω,ω 相当. 那么，在构造摄动解时，就不需要将摄动函数展成平近点角 M 的三角级数，相应的摄动解对偏心率 e 仍是封闭的. 关于如何构造金星轨道器和环月卫星的摄动分析解，请见参考文献[8]和[9].

§ 4.5　带谐项($J_l, l\geqslant 3$)摄动解的一般形式

在标准单位系统中,由(4.68)式给出一般带谐项($J_l, l\geqslant 3$)摄动函数的轨道根数表达形式如下[5]:

$$R_l = \sum_{l\geqslant 3} \frac{(-J_l)}{a^{l+1}} \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^{p} (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_2)} \times \right.$$
$$\left. \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q)} \right] \times$$
$$\left[(1-\delta_1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \cos(l-2p)u + \delta_1 \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sin(l-2p)u \right]. \tag{4.218}$$

式中 $u=f+\omega$,**符号** δ_1 **和** δ_2 **的定义如下**:

$$\delta_1 = \frac{1}{2}[1-(-1)^l] = \begin{cases} 1, & l\ \text{奇}, \\ 0, & l\ \text{偶}, \end{cases} \tag{4.219}$$

$$\delta_2 = \begin{cases} 0, & l-2p=0, \\ 0, & l-2p\neq 0. \end{cases} \tag{4.220}$$

用求平均值的方法即可将 R_l **分解成长期、长周期和短周期三个部分,即**

$$(R_l)_{\mathrm{C}} = \sum_{l(2)\geqslant 4} \frac{(-J_l)}{a^{l+1}} \left[\sum_{q=0}^{l/2} (-1)^{(l+2q)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{l+2q} \times \right.$$
$$\left. \binom{l}{l/2-q} \binom{l+2q}{l} \binom{2q}{q} (\sin i)^{2q} \right] K_{l+1}(e), \tag{4.221}$$

$$(R_l)_{\mathrm{L}} = \sum_{l\geqslant 3} \frac{(-J_l)}{a^{l+1}}$$
$$\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^{p} (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)(2l-2p+2q-1) \times \right.$$
$$\left. \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q)} \right] \times$$
$$K_{l+1}^{p}(e)[(1-\delta_1)\cos(l-2p)\omega + \delta_1 \sin(l-2p)\omega], \tag{4.222}$$

$$(R_l)_{\mathrm{S}} = R_l - [(R_l)_{\mathrm{C}} + (R_l)_{\mathrm{L}}]. \tag{4.223}$$

其中

$$
\begin{cases}
K_{l+1} = \overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^{l+1}}, \\
K_{l+1}^{p}(e) = \overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)f},
\end{cases}
\tag{4.224}
$$

这两个平均值的具体形式将在下面给出.

按平均根数法即可导出带谐项摄动的二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$,一阶长周期项 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$和轨道半长径 a 的二阶短周期项 $a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$,下面分别给出.

1. $\boldsymbol{\sigma}_2$

$$
a_2=0,\quad e_2=0,\quad i_2=0,
\tag{4.225}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_2 = {} & n\cos i \sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{q=1}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}\times \\
& 2q\binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q}(\sin i)^{(2q-2)}K_1(e),
\end{aligned}
\tag{4.226}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_2 = {} & -\cos i\ \Omega_2 + \\
& n\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{q=0}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}\times \\
& \binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q}(\sin i)^{2q}\times \\
& [(2l-1)K_1(e)+(1-e^2)K_2(e)],
\end{aligned}
\tag{4.227}
$$

$$
\begin{aligned}
M_2 = {} & -\sqrt{1-e^2}(\omega_2+\cos i\Omega_2)+ \\
& n\sqrt{1-e^2}\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{q=0}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}2(l+1)\times \\
& \binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q}(\sin i)^{2q}K_1(e).
\end{aligned}
\tag{4.228}
$$

其中

$$
\begin{cases}
K_1(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=0}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha}, \\
K_2(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=2}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha/2}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha-2},
\end{cases}
\tag{4.229}
$$

上述各式中出现的根数 a, e, i 及 n, p_0 均为 $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{i}_0$ 和 $\bar{n}=\bar{a}_0^{-3/2}$, $\bar{p}_0=\bar{a}_0(1-\bar{e}_0^2)$.

2. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$

直接部分如下:

$$a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=0, \tag{4.230}$$

$$\begin{aligned}
e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) &= -\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right) i_{1}^{(1)}(t) \\
&= -(1-e^2)\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\times \\
&\quad \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right. \\
&\quad \left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times \\
&\quad \frac{1}{e}K_3(e)I(\omega),
\end{aligned} \tag{4.231}$$

$$\begin{aligned}
i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) &= \cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right. \\
&\quad \left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q-1)}\right]\times \\
&\quad K_3(e)I(\omega),
\end{aligned} \tag{4.232}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) &= \cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right) \\
&\quad \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}(l-2p+2q)\times\right. \\
&\quad \binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q} \\
&\quad \left.(\sin i)^{(l-2p+2q-2)}\right]K_3(e)H(\omega),
\end{aligned} \tag{4.233}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) &= -\cos i\,\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+ \\
&\quad \sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right. \\
&\quad \left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times \\
&\quad \left[(2l-1)K_3(e)+(1-e^2)K_4(e)\right]H(\omega),
\end{aligned} \tag{4.234}$$

$$M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\sqrt{1-e^2}\left[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\cos i\,\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)\right]+$$

$$\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\times\right.$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}2(l+1)\times\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\times$$
$$\left.\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]K_3(e)H(\omega). \tag{4.235}$$

对 Ω,ω,M 还有间接部分,公式如下:

$$\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}=\frac{5\cos i}{(2-5\sin^2 i/2)}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)$$
$$\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right.$$
$$\left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times$$
$$K_3(e)H(\omega), \tag{4.236}$$

$$\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}=\frac{(13-15\sin^2 i)}{(2-5\sin^2 i/2)}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\times$$
$$\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right.$$
$$\left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times$$
$$K_3(e)H(\omega), \tag{4.237}$$

$$M_{\mathrm{L}}^{(1)}=-3\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}$$
$$\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right.$$
$$\left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times$$
$$K_3(e)H(\omega). \tag{4.238}$$

上述各式中有关量由下列各式表达:

$$\begin{cases}K_3(e)=\sum\limits_{\alpha(2)=l-2p}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{(\alpha-l+2p)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha},\\ K_4(e)=\sum\limits_{\alpha(2)=l-2p}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{(\alpha-l+2p)/2}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha-2},\end{cases} \tag{4.239}$$

$$\begin{cases} I(\omega)=\left(\dfrac{n}{\omega_1}\right)\left[(1-\delta_1)\cos(l-2p)\omega+\delta_1\sin(l-2p)\omega\right], \\ H(\omega)=\left(\dfrac{n}{\omega_1}\right)\left[(1-\delta_1)\dfrac{1}{l-2p}\sin(l-2p)\omega-\delta_1\dfrac{1}{(l-2p)}\cos(l-2p)\omega\right]. \end{cases} \tag{4.240}$$

上述各式中出现的根数除 a,e,i 及 n,p_0 与 σ_2 中相同外，ω 亦为平均根数 $\bar{\omega}(t)$，相应的 ω_1 是其一阶长期项的变率，见(4.118)式.

3. $a_S^{(2)}(t)$ 中的 J_L 部分

由摄动运动方程 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ 的表达式和 $(R_l)_S$ 的特征，不难给出 $a_S^{(t)}$，如下：

$$a_S^{(2)}(t)=\frac{2}{n^2a}R_{2S}=2a^2(R_l)_S. \tag{4.241}$$

$(R_l)_S$ 的表达式前面已给出，见(4.223)式，涉及到的两个平均值 $K_{l+1}(e)$ 和 $K_{l+1}^p(e)$ 由下式表达：

$$\begin{cases} K_{l+1}(e)=(1-e^2)^{-\left(l-\frac{1}{2}\right)}K_1(e), \\ K_{l+1}^p(e)=\delta_3(1-e^2)^{-\left(l-\frac{1}{2}\right)}K_3(e), \end{cases} \tag{4.242}$$

其中

$$\delta_3=\begin{cases} 0, & p=0 \\ 1, & p\neq 0 \end{cases} \tag{4.243}$$

§4.6 田谐项($J_{l,m},l\geqslant 2,m=1\sim l$)摄动解的一般形式

利用线性变换的方法，可将球谐函数 $P_{lm}(\sin\varphi)\cos\lambda_G$ 和 $P_{lm}(\sin\varphi)\sin\lambda_G$ 表示成轨道根数 $u=f+\omega$ 和 Ω 的三角函数的线性组合[10]，从而将(4.66)式给出的田谐项摄动函数 ΔV_2 写成下列形式：

$$\begin{aligned} R_{lm} = {} & \frac{GM}{a}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_e}{a}\right)^l F_{lmp}(i)\left(\frac{a}{r}\right)^{(l+1)} \\ & \{[(1-\delta_m)C_{lm}-\delta_m S_{lm}]\cos((1-2p)u+m(\Omega-S_G))+ \\ & [(1-\delta_m)S_{lm}+\delta_m C_{lm}]\sin((l-2p)u+m(\Omega-S_G))\}. \end{aligned} \tag{4.244}$$

其中倾角函数 $F_{lmp}(i)$ 后面将具体给出，而符号 δ_m 定义如下：

$$\delta_m=\frac{1}{2}[1-(-1)^{l-m}]. \tag{4.245}$$

进一步将其中的$\left(\dfrac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)u$和$\left(\dfrac{a}{r}\right)\sin(l-2p)u$展成平近点角$M$的三角级数，最终将$R_{lm}$的形式表达如下：

$$R_{lm}=\frac{GM}{a}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\sum_{p=0}^{l}\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}F_{lmp}(i)\sum_{q=-\infty}^{\infty}G_{lpq}(e)S_{lmpq}(M,\omega,\Omega;S_{\mathrm{G}}).\tag{4.246}$$

其中

$$\begin{aligned}S_{lmpq}&=[(1-\delta_{lm})C_{lm}-\delta_{lm}S_{lm}]\cos\psi_{lmpq}+\\&\quad[(1-\delta_{lm})S_{lm}+\delta_{lm}C_{lm}]\sin\psi_{lmpq},\end{aligned}\tag{4.247}$$

$$\psi_{lmpq}=(l-2p+q)M+(l-2p)\omega+m(\Omega-S_{\mathrm{G}}),\tag{4.248}$$

$$G_{lpq}(e)=X_{(l-2p+q)}^{-(l+1),(l-2p)}(e).\tag{4.249}$$

(4.249)式右端即第 2 章 § 2.2 中给出的汉森系数.

与$J_{2,2}$一样，对于地球卫星，田谐项摄动均为短周期效应，包括地球自转效应，相应的短周期项记为$\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$，有

$$\begin{cases}\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=\displaystyle\sum_{L\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\sum_{p=0}^{l}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\Delta\sigma_{lmpq},\\ \Delta\sigma_{lmpq}=\begin{cases}C_{lmpq}^{\sigma}\,S_{lmpq}, & \text{对 } a,e,i,\\ C_{lmpq}^{\sigma}\,S_{lmpq}^{*}, & \text{对 } \Omega,\omega,M,\end{cases}\end{cases}\tag{4.250}$$

$$\begin{aligned}S_{lmpq}^{*}&=[(1-\delta_{lm})C_{lm}-\delta_{lm}S_{lm}]\sin\dot{\psi}_{lmpq}-\\&\quad[(1-\delta_{lm})S_{lm}+\delta_{lm}C_{lm}]\cos\psi_{lmpq}.\end{aligned}\tag{4.251}$$

C_{lmpq}^{σ}的具体形式如下：

$$C_{lmpq}^{a}=2a\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}(l-2p+q)F_{lmp}(i)G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right),\tag{4.252}$$

$$\begin{aligned}C_{lmpq}^{e}&=\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}\frac{\sqrt{1-e^{2}}}{e}\left[(l-2p+q)\sqrt{1-e^{2}}-(l-2p)\right]F_{lmp}(i)\times\\&\quad G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right),\end{aligned}\tag{4.253}$$

$$C_{lmpq}^{i}=\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}\frac{1}{\sqrt{1-e^{2}}\,\sin i}[(l-2p)\cos i-m]F_{lmp}(i)\,G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right),\tag{4.254}$$

$$C_{lmpq}^{\Omega}=\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}\frac{1}{\sqrt{1-e^{2}}\,\sin i}F'_{lmp}(i)G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right),\tag{4.255}$$

$$C_{lmpq}^{\omega}=-\cos i\,C_{lmpq}^{\Omega}+\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}\frac{\sqrt{1-e^{2}}}{e}F_{lmp}(i)\,G'_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right),\tag{4.256}$$

$$C^{M}_{lmpq} = -\sqrt{1-e^2}\,(C^{\omega}_{lmpq} + \cos i\, C^{\Omega}_{lmpq}) + \left(\frac{a_e}{a}\right)^l \Big[2(l+1) - 3(l-2p+q)\left(\frac{n}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right)\Big] F_{lmp}(i)\, G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right). \tag{4.257}$$

其中$\dot{\psi}_{lmpq}$可按下式取近似值：

$$\begin{cases} \dot{\psi}_{lmpq} = (l-2p+q)\,\dot{\bar{M}} + (l-2p)\,\dot{\bar{\omega}} + m(\dot{\bar{\Omega}} - n_e) \\ \qquad\quad \approx (l-2p+q)\bar{n} - m\,n_e = \bar{n}[(l-2p+q) - m\,\alpha]. \\ \alpha = n_e/\bar{n}, \qquad \bar{n} = \bar{a}^{-3/2}. \end{cases} \tag{4.258}$$

n_e是地球自转角速度，即恒星时变率，在历元地心平赤道系和轨道坐标系中均可采用下列数值：

$$n_e = 360^\circ.985647365/d. \tag{4.259}$$

相应的上述坐标系中的格林尼治恒星时 S_G 可用平恒星时$\bar{S}_G$，计算公式如下：

$$\bar{S}_G = 280^\circ.460619 + 360^\circ.985647365d, \tag{4.260}$$

$$d = \mathrm{JD}(t) - \mathrm{JD}(\mathrm{J}2000.0), \tag{4.261}$$

其中 d 为 J2000.0 起算的儒略日.

倾角函数 $F_{lmp}(i)$和汉森系数 $G_{lpq}(e)$以及它们的导数分别由下列各式表达：

$$\begin{aligned} F_{lmp}(i) &= \frac{(l+m)!}{2^l p!(l-p)!}\sum_{k=k_1}^{k_2}(-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2}\binom{2l-2p}{k}\binom{2p}{l-m-k}\times \\ &\quad \left(\sin\frac{i}{2}\right)^{-(l-m-2p-2k)}\left(\cos\frac{i}{2}\right)^{(3l-m-2p-2k)} \\ &= \frac{(l+m)!}{2^{2l} p!(l-p)!}\sum_{k=k_1}^{k_2}(-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2}\binom{2l-2p}{k}\binom{2p}{l-m-k}\times \\ &\quad (\sin i)^{-(l-m-2p-2k)}(1+\cos i)^{(2l-m-2p-2k)}, \end{aligned} \tag{4.262}$$

$$k_1 = \max(0, l-m-2p), \quad k_2 = \min(l-m, 2l-2p), \tag{4.263}$$

$$\begin{aligned} F'_{lmp}(i) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}F_{lmp}(i) \\ &= \frac{(l+m)!}{2^l p!(l-p)!}\left(\frac{1}{\sin i}\right)\sum_{k=k_1}^{k_2}(-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2}\times \\ &\quad \binom{2l-2p}{k}\binom{2p}{l-m-k}\times \end{aligned}$$

$$\left[-2l\sin^2\frac{i}{2}-(l-m-2p-2k)\right]\times$$
$$\left(\sin\frac{i}{2}\right)^{-(l-m-2p-2k)}\times\left(\cos\frac{i}{2}\right)^{(3l-m-2p-2k)}. \tag{4.264}$$

精确到 $O(e^2)$ **项有**

$$X_p^{l,p}(e)=1+\frac{1}{4}(l^2+l-4p^2)e^2, \tag{4.265}$$

$$\begin{cases}X_{p+1}^{l,p}(e)=-\dfrac{1}{2}(l-2p)e,\\ X_{p-1}^{l,p}(e)=-\dfrac{1}{2}(l+2p)e,\end{cases} \tag{4.266}$$

$$\begin{cases}X_{p+2}^{l,p}(e)=\dfrac{1}{8}[l^2-(4p+3)l+p(4p+5)]e^2,\\ X_{p-2}^{l,p}(e)=\dfrac{1}{8}[l^2+(4p-3)l+p(4p-5)]e^2.\end{cases} \tag{4.267}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_p^{l,p}(e))=\frac{1}{2}(l^2+l-4p^2)e, \tag{4.268}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p+1}^{l,p}(e))=-\dfrac{1}{2}(l-2p),\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p-1}^{l,p}(e))=-\dfrac{1}{2}(l+2p),\end{cases} \tag{4.269}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p+2}^{l,p}(e))=\dfrac{1}{4}[l^2-(4p+3)l+p(4p+5)]e,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p-2}^{l,p}(e))=\dfrac{1}{4}[l^2+(4p-3)l+p(4p-5)]e.\end{cases} \tag{4.270}$$

上述(4.244)～(4.257)**式中出现的地球参考椭球体赤道半径** a_e **和地心引力常数** GM**,在前面采用的标准单位中均有** $a_e=1$,$GM=1$,**在下述公式中不再出现.**

除计算单位外,为了简便,采用前面§4.4 **中的表达式,将田谐项的两个谐系数** C_{lm} **和** S_{lm} **改用下列形式表达:**

$$\begin{cases}C_{lm}=J_{lm}\cos m\lambda_{lm}, \qquad S_{lm}=J_{lm}\sin m\lambda_{lm},\\ J_{lm}=(C_{lm}^2+S_{lm}^2)^{1/2},\\ m\lambda_{lm}=\arctan(S_{lm}/C_{lm}),\end{cases} \tag{4.271}$$

由此,S_{lmpq} **和** S_{lmpq}^* **的表达式**(4.247)**和**(4.251)**以及相应的**$\dot{\psi}_{lmpq}$ **变为下列形式:**

$$S_{lmpq}=J_{lm}[(1-\delta_{lm})\cos\dot{\psi}_{lmpq}^*+\delta_{lm}\sin\dot{\psi}_{lmpq}^*], \tag{4.272}$$

$$S_{lmpq}^*=J_{lm}[(1-\delta_{lm})\sin\dot{\psi}_{lmpq}^*-\delta_{lm}\cos\dot{\psi}_{lmpq}^*], \tag{4.273}$$

$$\dot{\psi}^*_{lmpq} = \dot{\psi}_{lmpq} - m\lambda_{lm}$$
$$= (l-2p+q)M + (l-2p)\omega + m\Omega_{lm}, \tag{4.274}$$
$$\Omega_{lm} = \Omega - (S_G + \lambda_{lm}). \tag{4.275}$$

由 R_{lm} 的表达式(4.246)或 $\sigma_S^{(2)}(t)$ 的表达式(4.252)~(4.257)式可以看出,当

$$l-2p+q=m\alpha,$$

即

$$\frac{\bar{n}}{n_e} = \frac{m}{l-2p+q} \tag{4.276}$$

时,卫星平运动角速度与地球自转角速度成简单整数比,上述摄动解无意义,这就是前面讨论 $J_{2,2}$ 项时所说的通约问题,(4.276)式即通约问题的判别准则. 显然,$(n-2p+q)$ 要取正值,即

$$l-2p+q=1,2,\cdots.$$

因此,对于任何一个卫星,几乎都存在通约问题. 特别是 24^h 卫星,所有田谐项都引起通约问题. 对于 2^h 近地卫星,有 $\bar{n}/n_e=12$,相应地 $m=12,24,\cdots$,即 $J_{12,12},J_{13,12},\cdots;J_{24,24},J_{25,24},\cdots$ 都会引起通约问题,只不过这些通约项含有因子 $1/r^{13},\cdots,1/r^{25},\cdots$,通约现象不显著.

当接近通约时,摄动解 $\sigma_S^{(2)}(t)$ 中有些项相应地转化为长周期项,这与前面 $J_{2,2}$ 项类似,不再论述.

§4.7 几类特殊卫星轨道

1. 太阳同步卫星与极轨道卫星

太阳同步卫星,即其轨道升交点(经度为 Ω)的进动速度 $\dot{\Omega}$ 与地球绕日公转的平运动速度 n_S 相等的卫星,也就是说,该卫星轨道平面在空间的移动与太阳向东运动(从地球上看)同步. 这是一种常见的应用卫星,如我国的第一代气象卫星风云 1 号等. 极轨卫星是指轨道倾角 $i=90°$ 的卫星,其轨道平面几乎不变,即 $\dot{\Omega}=0$.

这两种卫星轨道能否实现,可从地球非球形引力摄动导致的卫星轨道变化规律中找到答案. 根据 §4.3 中得到的结果,在主要带谐项(J_2)的影响下,轨道升交点经度变化的一阶长期项系数(即变率)为

$$\Omega_1 = -\frac{3J_2}{2p^2} n\cos i.$$

由此可知，当 $i=90°$时，轨道平面不动；又根据 $\Omega_1=n_S$ 的条件，在给定 a 和 e 两个根数的前提下，可以确定倾角 i，使轨道平面的运动与太阳同步. 但这些都仅仅是根据一阶长期摄动项（当然，也是最主要的摄动项）的结果而得出的结论，若完整地考虑各种摄动源的影响，上述结论是否还能保持，本节将对此作进一步的阐明.

（1）卫星轨道变化的有关规律

上述两种卫星都涉及到轨道平面的定向问题，前者是进动速度保持定值问题，而后者则是轨道平面保持不变的问题. 关于轨道平面的两个定向根数（i，Ω），在受摄情况下，所满足的微分方程如下

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\cos i\dfrac{\partial R}{\partial \omega}-\dfrac{\partial R}{\partial \Omega}\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial R}{\partial i}, \end{cases} \tag{4.277}$$

或

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r\cos(f+\omega)}{na^2\sqrt{1-e^2}}W, \\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r\sin(f+\omega)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W, \end{cases} \tag{4.278}$$

其中 R 是摄动函数，W 是摄动加速度的轨道平面法向分量，其他各量 a，e 等皆为常用的符号，不再说明.

根据前面几节的结果，我们已了解到如下几点：

1）对于地球非球形引力位的带谐项 J_l（即 $C_{l,0}$，$l=1,2,\cdots$）部分，相应的摄动函数 $R(J_l)$与 Ω 无关，而且含有因子 $\sin i$（奇次带谐项）或 $\sin^2 i$（偶次带谐项）. 因此，相应的方程(4.277)有如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\cos i\,\Phi_1(J_l;a,e,i,\omega,M), \\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=-\cos i\,\Phi_2(J_l;a,e,i,\omega,M), \end{cases} \tag{4.279}$$

显然，该方程有一特解

$$\begin{cases} a=a(t),\quad e=e(t),\quad \omega=\omega(t),\quad M=M(t), \\ i=90°, \\ \Omega=\Omega_0, \end{cases} \tag{4.280}$$

其中 Ω_0 为$[0,2\pi)$上的任意实数.

2）对于田谐项 J_{lm}（$l=1,2,\cdots,m=1,2,\cdots,l$）部分，相应的摄动函数 $R(J_{lm})$不再有上述特征，既与 Ω 有关，又不再含有公共因子 $\sin i$（或$\sin^2 i$），

故对 i 和 Ω 的变化而言，不再满足类似(4.279)的方程、但是，田谐项 J_{lm} 对卫星轨道的影响，除高轨卫星会因通约小分母的出现引起共振项外，仅有较小的短周期效应，即相应于解(4.280)致使 i 在 $90°$附近摆动，Ω 在 Ω_0 附近摆动.

3）对于地球非球形引力摄动，消除角变量(包括快变量 M 和慢变量 Ω 和 ω)后，即得到平均根数$\bar{i}$和$\overline{\Omega}$所满足的微分方程，有

$$\frac{\mathrm{d}\,\bar{i}}{\mathrm{d}t}=0,\quad \bar{i}=\bar{i}_0, \tag{4.281}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{\Omega}}{\mathrm{d}t}=-\cos i\left[\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)n+O(J_2^2,J_{2l})\,\bar{\psi}(\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0)\right]. \tag{4.282}$$

其中 $J_{2l}(l=2,\cdots)$ 对应偶次带谐项，$p=a(1-e^2)=\bar{a}_0(1-\bar{e}_0^2)$，$n=\bar{n}_0=\bar{a}_0^{-3/2}$. 这里顺便提一句，即使考虑日、月摄动，$\overline{\Omega}$的变化亦含有共同因子 $\cos i$，后面第五章中将要介绍.

(2) 太阳同步卫星轨道的参数选择

根据上述特征(4.282)式和太阳同步轨道的要求$\dot{\Omega}=n_{\mathrm{S}}$，可得

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{S}}=&-\cos i\left(\frac{3J_2}{2p^2}n\right)\left\{1+\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}\right)-\right.\right.\\ &\sin^2 i\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\right)-\\ &\left.\left.\frac{35}{18}\left(\frac{J_4}{J_2^2}\right)\left(\frac{6}{7}+\frac{9}{7}e^2-\sin^2 i\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}e^2\right)\right)+O\left(\frac{J_{2l}}{J_2^2}\right)_{l\geqslant 3}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{4.283}$$

当给定 a,e 后即可确定相应的倾角 $i=i(n_{\mathrm{S}};a,e)$. 严格地说，这里的 i 和 a，e 均为$\bar{i}$和 $\bar{a}$，$\bar{e}$. 但在进行轨道设计选择参数时，就可当作瞬时根数，而无需像精密定轨那样严格要求. 如果同时考虑日、月摄动，仅在(4.282)式右端增加相应的项，除像 24^{h} 地球同步卫星那样的高轨卫星外，所增加的项与 J_2^2 项相当.

关于太阳同步卫星轨道设计中主要参数 a,e,i 的选择问题，通常采用近圆轨道，剩下的问题是 a 的选择，当 a,e 确定后即可由(4.283)式确定 i 值. 按(4.283)式由 a,e 确定 i 时，是否同时考虑一阶项(J_2)和二阶项(J_2^2,J_{2l})比只考虑一阶项好？事实上，无法真正严格地确定 i 值，即使同时考虑 J_2^2，J_{2l}和日、月等摄动项，也只能包含长期项，而且还有一些摄动因素无法按(4.283)式考虑，那么，按前者选择就不一定比后者好. 既然如此，还是仅考虑一阶项既简单又实用，即

$$\cos i = -n_{\mathrm{S}} \Big/ \left(\frac{3J_2}{2p^2} n \right) \tag{4.284}$$

(3) 极轨道的保持问题

根据前面第 1 段的阐述，在地球非球形引力位带谐项(J_l)的影响下，极轨道是存在的，即

$$i = i_0 = 90°, \Omega = \Omega_0.$$

而同时考虑日、月摄动的长期的长期效应时亦有上述结论，对于静止(非旋转)大气，亦不影响上述结论. 因此，极轨道基本上能实现的，在周期摄动影响下，真实的轨道平面将作相应的摆动. 为此，下面给出算例，使读者了解这一摆动的幅度.

以 2^{h} 卫星为背景，取初值

$$i_0 = 90°, \Omega = 45°,$$

对完整的摄动运动方程积分 10^4 圈(这一弧段已相当长)，以显示极轨道保持的状况，计算结果列与表 4.1.

表 4.1 中四种类型分别为：

Ⅰ型：只考虑 J_2, J_3, J_4 的摄动影响；

Ⅱ型：同时考虑 J_2, J_3, J_4 和 $J_{2,2}$ 的摄动影响；

Ⅲ型：同时考虑 J_2, J_3, J_4 和日、月引力的摄动影响；

Ⅳ型：同时考虑 $J_2, J_3, J_4, J_{2,2}$，日、月引力，太阳光压和大气阻力摄动的影响. 取光压和大气阻力摄动量级各为 10^{-7} 和 10^{-8}，且不考虑地影和大气旋转，故这两种摄动对轨道平面的影响不大，关于这一点，下一章会仔细介绍.

表 4.1　极轨道的保持与变化范围

类型	i/度	Ω/度
Ⅰ	90.0(不变)	45.0(不变)
Ⅱ	89.993～90.0017	44.9999～45.0310
Ⅲ	89.9966～90.0376	44.9785～45.9359
Ⅳ	89.9975～90.0395	44.9900～46.0597

对于较高轨道(如 Lageos 卫星)的计算，所得结果的特征与 2^{h} 卫星基本相同. 由结果可以看出，前面的分析是正确的，极轨道是可以保持的，即使在各种摄动力的影响下，运行时间足够长时，轨道平面的摆动范围仍然较小.

2. 拱线静止轨道及其稳定性

拱线静止轨道即轨道半长轴指向不变的轨道，也就是说近地点幅角 ω

不变的轨道.这是另一类型的应用卫星,如美国 1985 年 3 月 12 日发射的一颗海洋测高卫星 Geosat,就设计成这样的轨道.拱线静止轨道是靠相应的小偏心率 e 来维持的.确定的 e 和 ω 值可以保持卫星地面高度在同一地区几乎不变,这种轨道也称为冻结轨道(frozen orbit).文献[11]曾在仅考虑地球非球形引力位 J_2 和 J_3 项摄动时,给出了这种轨道存在的条件,这里将对其作较深入的分析与讨论.

(1) 讨论拱线静止轨道存在的基本方程

根据前几节的讨论,考虑地球非球形引力摄动时,在历元地心平赤道系中,略去岁差章动和极移的影响,卫星轨道变化满足下列方程

$$\dot{\sigma}=f(\sigma,t,\beta). \tag{4.285}$$

这里 σ 即六个轨道向量

$$\sigma=(a\quad e\quad i\quad \Omega\quad \Omega\quad M)^{\mathrm{T}}, \tag{4.286}$$

T 表示转置.(4.285)式右端向量函数 f 中的 β 则表示地球非球形引力场参数,f 显含 t,是地球自转(通过田谐项)的反映.显然,这一非自治系统(4.285)不存在 $\dot{\omega}=0$ 的特解,因此严格的拱线静止轨道是不存在的.

如果消除方程组(4.285)中的快变量(即分离出变化特征取决于平近点角 M 的短周期项,包括地球自转项),而对于非高轨卫星,田谐项部分又不会产生摄动效应明显增强的共振项,那么方程组(4.285)就退化为下列 4 维自治系统

$$\begin{cases}\dot{X}=f(X;J_l)\\ X=(a\quad e\quad i\quad \omega)^{\mathrm{T}}\end{cases}. \tag{4.287}$$

这里的 X 实为仅消除短周期项的拟平均根数 $\bar{\sigma}$,其变化只包含长期项和长周期项,为了书写方便,仍记作 a,e,i,ω.方程组(4.287)的右函数不仅不显含 t,亦与轨道升交点经度 Ω 无关,故 Ω 和 M 可与 a,e,i,ω 分离开.这就是上述方程组(4.285)在分离出短周期项后退化为 4 维自治系统(4.287)的原因.方程组(4.287)正是讨论拱线静止轨道存在性的基本方程,即在一定条件下,该方程组存在对应 $\dot{\omega}=0$ 的特解.

将方程组(4.287)中的右函数 f 记为

$$f=\begin{pmatrix}(f_a)\\(f_e)\\(f_i)\\(f_\omega)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\end{pmatrix}, \tag{4.288}$$

则四个分量 f_1,f_2,f_3,f_4 分别为 a,e,i,ω 四个根数各自对应的右函数.若记

$$\begin{cases} f_j = \sum_{k=1}^{N} f_j^{(k)} = f_j^{(1)} + f_j^{(2)} + \cdots + f_j^{(N)}, \\ f_j^{(k)} = O(\varepsilon^k), \quad j = 1,2,3,4, \end{cases} \tag{4.289}$$

其中 $\varepsilon = J_2 = O(10^{-3})$，$f_j$ 各有如下特点

$$f_1 = f_1^{(3)} + f_1^{(4)} + \cdots, \tag{4.290}$$

$$\begin{cases} f_1^{(3)} = f_1^{(3)}(J_2^3), \\ f_1^{(4)} = f_1^{(4)}(J_2^4, \cdots), \end{cases} \tag{4.291}$$

$$f_j = f_j^{(2)} + f_j^{(3)} + f_j^{(4)} + \cdots, \quad j = 2,3, \tag{4.292}$$

$$\begin{cases} f_j^{(2)} = f_j^{(2)}(J_2^2, J_3, J_4, \cdots), \\ f_j^{(3)} = f_j^{(3)}(J_2^3, J_2 J_3, J_2 J_4, \cdots), \\ f_j^{(4)} = f_j^{(4)}(J_2^4, J_2^2 J_3, J_2^2 J_4, \cdots, J_3^2, J_4^2, \cdots, J_{lm}^2), \end{cases} \tag{4.293}$$

$$f_4 = f_4^{(1)} + f_4^{(2)} + f_4^{(3)} + f_4^{(4)} + \cdots, \tag{4.294}$$

$$\begin{cases} f_4^{(1)} = f_4^{(1)}(J_2), \\ f_4^{(2)} = f_4^{(2)}(J_2^2, J_3, J_4, \cdots), \\ f_4^{(3)} = f_4^{(3)}(J_2^3, J_2 J_3, J_2 J_4, \cdots), \\ f_4^{(4)} = f_4^{(4)}(J_2^4, J_2^2 J_3, J_2^2 J_4, \cdots, J_3^2, J_4^2, \cdots, J_{lm}^2). \end{cases} \tag{4.295}$$

不失一般性，右函数 f 只取到 3 阶项（J_{lm}^2 项将不再出现），并以 J_3 和 J_4 分别代表二阶奇次带谐项 J_{2l-1} 和偶次带谐项 J_{2l}，$l=1,2,3,\cdots$，因为右函数中的这两部分能反映与讨论拱线静止轨道直接有关的“特征”，包括 $\frac{1}{e}$ 因子以及含有幅角 $\omega, 3\omega, \cdots, 2\omega, 4\omega, \cdots$ 的三角函数的状况. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = f_1 = f_1^{(3)}, \tag{4.296}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = f_2 = -\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right) f_3, \tag{4.297}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = f_3 = f_3^{(2)} + f_3^{(3)}, \tag{4.298}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = f_4 = f_4^{(1)} + f_4^{(2)} + f_4^{(3)}. \tag{4.299}$$

其中

$$\begin{aligned} f_1^{(3)} = &\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^3 n \left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) a\sqrt{1-e^2} \cdot \\ &\left\{\left[\frac{1}{3}\sin^2 i\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) c f - \right.\right. \\ &\left.\sin^2 i\left(\frac{17}{12} - \frac{19}{8}\sin^2 i\right) - \frac{e^2}{1-e^2}\left(\frac{7}{3}\sin^2 i\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right] \times \end{aligned}$$

$$2e^2\ \sin 2\omega - \frac{1}{1-e^2}\left[\frac{1}{32}\ \sin^4 i\right] 4e^2\ \sin 4\omega\Big\},\tag{4.300}$$

$$\begin{aligned} f_3^{(2)} =& \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n\ \sin 2i\left[\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\ \sin^2 i\right)+\frac{1}{6}\left(2-\frac{5}{2}\ \sin^2 i\right)cf\right]e^2\times \\ & \sin 2\omega+\left(\frac{35J_4}{8p^4}\right)n\ \sin 2i\left[\frac{9}{28}-\frac{3}{8}\ \sin^2 i\right]e^2\ \sin 2\omega+ \\ & \left(\frac{3J_3}{4p^3}\right)n\ \cos i\left[2-\frac{5}{2}\ \sin^2\ i\right]e\cos\omega,\end{aligned}\tag{4.301}$$

$$\begin{aligned} f_3^{(3)} =& I_1(J_2^3;a,e,i)e^2\ \sin 2\omega+[I_{22}(J_2J_4;a,e,i)\ e^2\ \sin 2\omega+ \\ & I_{24}(J_2J_4;a,e,i)e^4\sin 4\omega]+[I_{31}(J_2J_3;a,e,i)e\ \cos\omega+ \\ & I_{33}(J_2J_3;a,e,i)e^3\ \cos 3\omega],\end{aligned}\tag{4.302}$$

$$f_4^{(1)} = \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)n\left(2-\frac{5}{2}\ \sin^2 i\right),\tag{4.303}$$

$$f_4^{(2)} = f_{4\mathrm{C}}^{(2)}+f_{4\mathrm{L}}^{(2)},\tag{4.304}$$

$$\begin{aligned} f_{4\mathrm{C}}^{(2)} =& \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n\left[\left(4-\frac{103}{12}\ \sin^2 i+\frac{215}{48}\ \sin^4 i\right)+\right. \\ & e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{3}{8}\ \sin^2 i-\frac{15}{32}\ \sin^4 i\right)+ \\ & \left.\sqrt{1-e^2}\ \left(2-\frac{11}{2}\ \sin^2 i+\frac{15}{4}\ \sin^4 i\right)\right]- \\ & \left(\frac{35J_4}{8p^4}\right)n\left[\left(\frac{12}{7}-\frac{93}{14}\ \sin^2 i+\frac{21}{4}\ \sin^4 i\right)+\right. \\ & \left.e^2\left(\frac{27}{14}-\frac{27}{4}\ \sin^2 i+\frac{81}{16}\ \sin^4 i\right)\right],\end{aligned}\tag{4.305}$$

$$\begin{aligned} f_{4\mathrm{L}}^{(2)} =& \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n\left[\sin^2 i\left(2-\frac{5}{2}\ \sin^2 i\right)\ \left(\frac{1}{4}+\frac{1-e^2}{3}cf\right)+\right. \\ & e^2\left(\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\ \sin^2 i+\frac{10}{3}\ \sin^4 i\right)\ cf- \\ & \left.\sin^2 i\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\ \sin^2 i\right)+e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{79}{24}\ \sin^2 i+\frac{45}{16}\ \sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega+ \\ & \left(\frac{35J_4}{8p^4}\right)n\left[-\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\ \sin^2 i\right)+e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{15}{4}\ \sin^2 i+\right.\right. \\ & \left.\left.\frac{27}{8}\ \sin^4 i\right)\right]\ \cos 2\omega+\left(\frac{3J_3}{4p^3}\right)n\ \frac{1}{e}\left[\sin i\left(2-\frac{5}{2}\ \sin^2 i\right)-\right. \\ & \left.\frac{e^2}{\sin i}\left(2-\frac{35}{2}\ \sin^2 i+\frac{35}{2}\ \sin^4 i\right)\right]\sin\omega,\end{aligned}\tag{4.306}$$

$$f_4^{(3)} = f_{4\mathrm{C}}^{(3)}+f_{4\mathrm{L}}^{(3)},\tag{4.307}$$

$$f_{4C}^{(3)} = \omega_c(J_2^3, J_2J_4; a, e, i), \tag{4.308}$$

$$\begin{aligned} f_{4L}^{(3)} = {} & \omega_1(J_2^3; a, e, i)\cos 2\omega + \omega_{22}(J_2J_4; a, e, i)\cos 2\omega + \\ & \omega_{24}(J_2J_4; a, e, i)e^2\cos 4\omega + \omega_{31}(J_2J_3; a, e, i)\frac{1}{e}\sin\omega + \\ & \omega_{33}(J_2J_3; a, e, i)e\sin 3\omega. \end{aligned} \tag{4.309}$$

上述各式中的有关量为

$$n = a^{-3/2}, \quad p = a(1-e^2), \tag{4.310}$$

$$cf = \frac{1}{e^2}\overline{\cos 2f} = \frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2} = \frac{3}{4} + O(e^2). \tag{4.311}$$

尽管 $f_3^{(3)}$ 和 $f_4^{(3)}$ 并未完全将具体形式写出，即 $I_1(J_2^3; a, e, i), \cdots, \omega_{33}(J_2J_3; a, e, i)$，但已清楚地表明了相应函数的具体特征，即奇次和偶次带谐项以及它们的联合项中分别包含 $\sin\omega, \cos\omega, \cdots, \sin 2\omega, \cos 2\omega, \cdots$ 的区别，特别是有关这些项中 e（或$\frac{1}{e}$）因子出现的不同形式；还有 a, e, i 和 ω 相应右函数中出现上述各项的差异. 这些正是讨论拱线静止轨道存在性所必须了解的特征.

(2) 拱线静止轨道——方程组(4.296)～(4.299)的特解

首先根据上一段给出的右函数特征之一，即对于 a, e, i，右函数中出现的是 $\sin 2\omega, \sin 4\omega, \cdots, \cos\omega, \cos 3\omega, \cdots$，当 $\omega = 90°$和 $\omega = 270°$时，显然有

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

再看右函数的特征之二，即对于 ω，右函数中出现的是 $\cos 2\omega, \cos 4\omega, \cdots, \sin\omega, \sin 3\omega, \cdots$，当 $\omega = 90°$和 $\omega = 270°$时，分别有

$$\cos 2\omega = -1, \quad \cos 4\omega = 1, \cdots$$

$$\sin\omega = \pm 1, \quad \sin 3\omega = \mp 1, \cdots$$

这里$\pm$或$\mp$号依次分别对应 $\omega = 90°$和 $\omega = 270°$. 将 ω 值带入(4.299)式后即可给出 a, e, i 所满足的一个关系式，从而获得 $e = e(a, i)$，只要该关系合理即可. 然而根据 $J_2 > 0, J_3 < 0$，以 $\omega = 270°$代入方程(4.299)后，在一般条件下，给出的结果 $e < 0$. 因此，方程组(4.296)～(4.299)有如下特解

$$a \equiv a_0, e \equiv e_0, i \equiv i_0, \omega \equiv \omega_0 = 90°. \tag{4.312}$$

a_0, e_0, i_0 所满足的关系如下

$$\begin{aligned} e_0 = {} & \left\{\frac{3(-J_3)}{4p}\sin i\left[\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) - \frac{e^2}{\sin^2 i}\left(2 - \frac{35}{2}\sin^2 i + \frac{35}{2}\sin^4 i\right)\right] + \right. \\ & \left. O\left(\frac{J_5}{p^3}, \cdots\right)\right\} \times \left\{\frac{3J_2}{2}\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) + \left(\frac{3J_2}{2p}\right)^2\left[\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) \times \right.\right. \end{aligned}$$

$$\left(3-\frac{79}{24}\sin^2 i\right)-e^2\left(\frac{5}{12}-\frac{19}{8}\sin^2+\frac{75}{32}\sin^4 i\right)+O(e^4)\Big]+$$

$$\frac{35(-J_4)}{8p^2}\left[\left(\frac{12}{7}-\frac{93}{14}\sin^2 i+\frac{21}{4}\sin^4 i\right)+e^2\left(\frac{27}{14}-\frac{27}{4}\sin^2 i\right)\times\right.$$

$$\left.\left(\frac{81}{16}\sin^4 i\right)\right]+O(J_2^3,J_2J_4,\cdots)_{\mathrm{C}}-\left(\frac{3J_2}{2p}\right)^2\left[\sin^2 i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\times\right.$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1-e^2}{3}cf\right)+e^2\left(\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\sin^2 i+\frac{10}{3}\sin^4 i\right)cf-$$

$$\left.\sin^2 i\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{79}{24}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right]-$$

$$\frac{35(-J_4)}{8p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)-e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{15}{4}\sin^2 i+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{27}{8}\sin^4 i\right)\right]+O(J_2^3,J_2J_4,J_2J_3,\cdots)_{\mathrm{L}}\Big\}^{-1}. \tag{4.313}$$

该式右端出现的 a,e,i 皆为 $a_0,e_0,i_0,p=a_0(1-e_0^2)$，而 $O(\cdots)_{\mathrm{C}}$ 和$O(\cdots)_{\mathrm{L}}$则表示相应的长期和长周期部分对应的项. 若 i_0 不十分接近临界角 $i_c=63°26'$，即当$\left|2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i_0\right|>10^{-3}$时，上式的主要部分为

$$e_0=\left(\frac{-J_3}{J_2}\right)\frac{1}{2a_0}\sin i_0\left[1+O(e_0^2)\right]=O(10^{-3}), \tag{4.314}$$

这表明拱线静止轨道是以近圆轨道实现的. 当 $i_0\to i_c$ 进入临界角范围，则将出现相应的轨道共振问题，见参考文献[12].

(4.312)式和(4.313)式即拱线静止轨道解及相应轨道根数之间的关系，给定 a_0,i_0 后就可确定相应的 e_0 值，而 $\omega_0\equiv 90°$，近地点指向不变. 至于根数 Ω 的变化(东进或西退)对该轨道特征无影响.

根据右函数中表现出的规律，除 J_2和 J_3 项外，同时考虑 J_{2l-1}项，J_{2l}项($l=2,3,\cdots$)和田谐项 J_{lm}，也不会改变上述结论(指平均系统). 但这仅仅是地球卫星的情况，对于不同的中心天体将有不同的结论. 从上述特解可以看出，奇次带谐项 J_{2l-1}将起着重要作用，只是地球非球形引力位的 $J_5,J_7,\cdots$相对 J_3 而言较小，不改变前面的结论，而对月球则不然，相应的 J_5,J_7,J_9项相对 J_3 项而言，对低轨卫星更重要，冻结轨道的解有差别，详见参考文献[13]和[14].

(3) 拱线静止轨道解的稳定性问题

上述轨道解所对应的是一个平均系统的特解，那么在原完整力学系统中，这种特解所固有的特征——拱线指向不变是否还能保持，这就涉及到该特解的稳定性问题. 若仅限于线性意义下的稳定性，那是容易回答这一问题

的,略去证明过程,结论为:拱线静止轨道对应的特解(4.312)是稳定的.

至于非线性情况,特别是除地球非球形引力摄动外,还有更复杂的摄动因素,对相应的完整力学系统,上述特解是否还保持稳定,目前还难以回答.但人们关心的是在有限扰动下,这种轨道特征的变化状况.因此,用具体计算来表明该轨道特征的保持或变化,显得更具实际意义.计算表明,如果适当选取初始条件可以使拱线在较长间隔内保持小范围摆动的状态,即这种特殊轨道在一定条件下是可以实现的.不过,实际轨道中拱线的摆动(甚至摆动幅度较大),在具体工程任务中是要考虑的,特别是需要在较长间隔内保持拱线“静止”状态的那种应用卫星.

3. 地球同步卫星的运动特征及其漂移

地球同步卫星的轨道周期与地球自转周期相同,除周期相同外,如果轨道面又与地球赤道面“重合”(即轨道倾角 $i\approx 0$),且偏心率 $e\approx 0$,这种卫星相对地面固定点将是静止的,所以也称为地球静止卫星,常作为通信卫星.关于这种卫星,地球非球形引力位的田谐项(特别是 $C_{2,2}$, $S_{2,2}$ 项)对其轨道的摄动作用会产生一种通约小分母所导致的共振项.这种卫星轨道的一个基本特征,即当轨道周期有误差时,只要误差在一定范围内,它会围绕地球赤道短轴方向摆动,却不会远离原定点方向“漂移而去”.这里将直接从原运动方程着手,阐明在一定条件下它围绕地球赤道短轴方向摆动的力学机制.

(1) 运动方程

考虑地球非球形引力位中的主要项(扁率项和椭率项)J_2 和 $J_{2,2}$ 项的影响,引用地心赤道坐标系 $O-r,\lambda,\phi$,略去岁差、章动和极移,并采用标准计算单位,则相应的地球引力位函数为

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{r}\left[1-\frac{J_2}{r^2}P_2(\sin\varphi)+\frac{J_{2,2}}{r^2}P_{2,2}(\sin\varphi)\cos 2\bar{\lambda}\right] \\
&= \frac{1}{r}-\frac{J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)+\frac{J_{2,2}}{r^3}(3\cos^2\varphi)\cos 2\bar{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{4.315}
$$

其中 $\bar{\lambda}$ 是卫星相对地球赤道长轴方向(该方向在地固坐标系中的经度为 $\lambda_{2,2}$)的经度,这在前面 §4.4 中已有阐述.

在上述球坐标系中,卫星的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达如下

$$
\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\tag{4.316}
$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}\dot{r}\\ r\cos\varphi\dot{\lambda}\\ r\dot{\varphi}\end{pmatrix},\tag{4.317}$$

其中

$$\dot{\lambda}=\dot{\bar{\lambda}}+\dot{S}_{2,2}=\dot{\bar{\lambda}}+n_e,\tag{4.318}$$

n_e 即地球自转角速度. 相应的卫星的动能(去掉质量因子)T 即表示为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2+r^2\dot{\varphi}^2).\tag{4.319}$$

根据动力学中运动方程的拉格朗日形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q}=\dfrac{\partial V}{\partial q},\\ q=\begin{pmatrix}r\\ \lambda\\ \varphi\end{pmatrix},\dot{q}=\begin{pmatrix}\dot{r}\\ \dot{\lambda}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix},\end{cases}\tag{4.320}$$

可给出卫星运动的基本方程如下

$$\begin{cases}\ddot{r}-r\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2-r\dot{\varphi}^2=-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{3J_2}{r^4}\left(\dfrac{3}{2}\sin^2\varphi-\dfrac{1}{2}\right)-\\ \qquad\dfrac{9J_{2,2}}{r^4}\cos^2\varphi\cos2\bar{\lambda},\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda})=-\dfrac{6J_{2,2}}{r^3}\cos^2\varphi\sin^2\bar{\lambda},\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})+\dfrac{1}{2}r^2\sin2\varphi\dot{\lambda}^2=\dfrac{3J_2}{2r^3}\sin2\varphi-\dfrac{3J_{2,2}}{r^3}\sin2\varphi\cos2\bar{\lambda}.\end{cases}\tag{4.321}$$

(2) 运动方程的特解——地球同步卫星的运动特征

不难证明,方程(4.321)存在如下特解

$$\dot{r}\equiv r_0,\quad \bar{\lambda}\equiv\bar{\lambda}_0,\quad \varphi\equiv0.\tag{4.322}$$

证明如下:

此时有

$$\dot{r}=0,\qquad \ddot{r}=0;$$

$$\dot{\lambda}=\dot{\bar{\lambda}}+n_e=n_e,\quad \ddot{\lambda}=0;$$

$$\dot{\varphi}=0,\quad \ddot{\varphi}=0.$$

以此代入运动方程(4.321)得

$$\begin{cases} -r_0 n_e^2 = -\dfrac{1}{r_0^2} - \dfrac{3J_2}{2r_0^4} - \dfrac{9J_{2,2}}{r_0^4}\cos 2\bar{\lambda}, \\ 0 = \dfrac{6J_{2,2}}{r_0^3}\sin 2\bar{\lambda}_0, \\ 0 = 0, \end{cases} \tag{4.323}$$

只要能由该方程确定 r_0 和 $\bar{\lambda}_0$ 即得证. 由方程(4.323)的第二式可知

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda}_{01},\ \bar{\lambda}_{02}, \\ \bar{\lambda}_{01} = 90°,\ 270°, \\ \bar{\lambda}_{02} = 0°,\ 180°. \end{cases} \tag{4.324}$$

由此,第一式变为下列形式:

$$r_0 n_e^2 = \frac{1}{r_0^2} + \left[\frac{3J_2}{2r_0^4} \mp \frac{9J_{2,2}}{r_0^4}\right], \tag{4.325}$$

其中 $J_{2,2}$ 项前的"$-$"号和"$+$"号分别对应 $\bar{\lambda}_{01}$ 和 $\bar{\lambda}_{02}$. r_0 的解可写成

$$r_0^{-3} = n_e^2 - \left(\frac{3}{2}J_2 \mp 9J_{2,2}\right)/r_0^5. \tag{4.326}$$

该式确实可得 r_0 的两个实解. 由于 J_2, $J_{2,2}$ 是小量,可用简单迭代法求解 r_0,最后得运动方程(4.321)的两个特解,即

$$r \equiv r_{01},\quad \bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda}_{01} = 90°, 270°,\quad \varphi \equiv 0; \tag{4.327}$$

$$r \equiv r_{02},\quad \bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda}_{02} = 0°, 180°,\quad \varphi \equiv 0. \tag{4.328}$$

这两个特解分别表示卫星定点在地球赤道短轴和长轴上空. 如果取

$$J_2 = 1.082637 \times 10^{-3},\ J_{2,2} = 1.771156 \times 10^{-6},$$

则由(4.326)式解得

$$r_{01} = 42164.71346\ \text{km}(\text{短轴上空}), \tag{4.329}$$

$$r_{02} = 42164.72371\ \text{km}(\text{长轴上空}). \tag{4.330}$$

上述特解即平衡解. 容易证明解(4.327)和(4.328)分别对应中心和鞍点,后者是不稳定的,前者容易证明是线性稳定的. 至于在非线性意义下是否稳定,这并无实际意义,关键在于同时考虑其他摄动因素时(即不同性质的有限扰动),该平衡解是否稳定,或者说得确切一些,即在此情况下,卫星是否在上述稳定平衡点(地球赤道短轴上空)附近"摆动". 这里的特征量即 $\bar{\lambda}$,如果稳定,则 $\bar{\lambda}$ 在平衡位置 90°(或 270°)附近的变化范围 $\Delta\bar{\lambda}$ 应小于 ±90°,实际计算证实了这一特征,具体变化特点如下:

1) 同步卫星在地球赤道短轴上空附近摆动的特征明显,并不因初始轨道周期有误差就从平衡点漂移离去而不返回.

2) 仅考虑地球非球形引力摄动时,e 和 i 的变化很小,而考虑日、月引

力和光压摄动后,则变化范围明显增大,特别是轨道倾角 i,这是低轨卫星轨道变化没有的现象. 关于这一问题,下一章中将要介绍,主要原因是日、月引力(特别是月球引力)摄动效应所致.

根据地球同步卫星运动的特点,作为地球上空的定点通信工具显然是可行的,这已广为采用. 但不可能都定点在地球赤道短轴上空的两个位置上(即东经 75°和西经 105°),因此,就有东西向漂移问题和倾角变化引起的南北漂移现象,这都需要不断进行轨控.

§4.8 双曲线轨道的扁率摄动

对于深空探测器的运动,当它从地球停泊轨道上飞抵目标天体附近时,未变轨前,相对目标天体的运动通常是双曲线轨道. 要使其变为绕目标天体运动的轨道器,就必须再次变轨,将双曲线轨道变为椭圆轨道;或者仅需要接近探测过程中的某个目标天体,绕飞或接近目标天体后离去. 无论是前一种探测形式,还是后一种,探测器接近目标天体时,相对该天体总有一段运行轨道是双曲线轨道. 为了更好了解探测器的运动状态,给地面测控系统或者星上自主设备提供必要的轨道信息(不仅仅是孤立点上的位置速度值),有必要对双曲线轨道的变化特征进行研究,给出类似椭圆轨道变化的一些基本特征. 而接近目标天体时,该天体的扁率效应显然是主要的,因此这一节将给出双曲线轨道在扁率摄动影响下的变化规律.

仍采用标准单位系统,即长度、质量和时间单位取下列值:

$$\begin{cases}[L]=R_e\text{(中心天体赤道半径)}\\ [M]=M_0\text{(中心天体质量)}.\\ [T]=(R_e^3/GM_0)^{1/2}\end{cases}\tag{4.331}$$

在此计算单位系统中,$G=1$,$\mu=GM_0=1$.

扁率(J_2)项对应的摄动函数为

$$\begin{aligned}R&=-\frac{J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{J_2}{2a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2u\right],\end{aligned}\tag{4.332}$$

其中 $u=f+\omega$. 将 R 代入摄动运动方程(3.75)即可得轨道变化对应的小参数方程:

$$\dot{\sigma}=f(\sigma,t;\varepsilon).\tag{4.333}$$

由于双曲线轨道是“开放的”,近点角 f 和 M 的变化不同于椭圆轨道,

故相应摄动解无长期项和周期项之分，因此可将轨道解记为

$$\sigma(t)=\sigma(t_0)+\Delta\sigma(t). \tag{4.334}$$

根据解的特征，这里的 $\Delta\sigma(t)$ 又记为下列形式：

$$\Delta\sigma=\sigma_S(t)-\sigma_S(t_0). \tag{4.335}$$

式中 $\sigma_S(t)$ 的一阶形式如下（略去推导过程）：

$$a_S(t)=-\frac{3J_2}{2a}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\sin^2 i\cos(2f+2\omega)\right],$$

$$e_S(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(1+\frac{e^2}{4}\right)\cos f+\frac{e}{2}\cos 2f+\frac{e^2}{12}\cos 3f\right]+\sin^2 i\left[\frac{1}{16}e^2\cos(f-2\omega)+\left(\frac{1}{4}+\frac{11}{16}e^2\right)\cos(f+2\omega)+\frac{5}{4}e\cos(2f+2\omega)+\left(\frac{7}{12}+\frac{17}{48}e^2\right)\cos(3f+2\omega)+\frac{3}{8}e\cos(4f+2\omega)+\frac{1}{16}e^2\cos(5f+2\omega)\right]\right\}, \tag{4.337}$$

$$i_S(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2i\right)\left[\frac{e}{2}\cos(f+2\omega)+\frac{1}{2}\cos(2f+2\omega)+\frac{e}{6}\cos(3f+2\omega)\right], \tag{4.338}$$

$$\Omega_S(t)=-\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\left[(f+e\sin f)-\frac{e}{2}\sin(f+2\omega)-\frac{1}{2}\sin(2f+2\omega)-\frac{e}{6}\sin(3f+2\omega)\right], \tag{4.339}$$

$$\omega_S(t)=-\cos i\,\Omega_S(t)+\frac{3J_2}{2p^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[f+\left(\frac{1}{e}+\frac{3}{4}e\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\frac{1}{16}e\sin(f-2\omega)-\left(\frac{1}{4e}-\frac{7}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+\frac{3}{4}\sin(2f+2\omega)+\left(\frac{7}{12e}+\frac{11}{48}e\right)\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+\frac{1}{16}e\sin(5f+2\omega)\right]\right\}, \tag{4.340}$$

$$M_S(t)=\frac{3}{2a}a_S(t_0)M+\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{(e^2-1)}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{4}e\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\frac{1}{16}e\sin(f-2\omega)-\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+\left(\frac{7}{12e}-\frac{1}{48}e\right)\sin(3f+\right.\right.$$

$$2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+\frac{1}{16}e\sin(5f+2\omega)\Big]\Big\}, \tag{4.341}$$

上述各式中 $a=a_0$, $e=e_0$, $i=i_0$, $\Omega=\Omega_0$, $\omega=\omega_0$, $M=M(t)$, $M_0=M(t_0)$.

以月球探测器为例，探测器飞抵月球作用范围边界时，相对月球为双曲线运动. 作为算例，选取向月飞行轨道的一种，即探测器到达该作用范围边界（月心距为 57800 km$=33.26R_e$, $R_e=1738$ km 是月球赤道半径）时，相对月球的速度为 0.903783403 km/s$=0.538105019$，相应的近月点高度为 100 km. 这一双曲线轨道（这里取顺行轨道，对逆行轨道，计算情况相同）的 6 个初始根数为

$$\begin{cases} a_0=4.358728198, & \Omega_0=45^\circ, \\ e_0=1.242625222, & \omega_0=45^\circ, \\ i_0=45^\circ, & M_0=-338^\circ.88866330. \end{cases} \tag{4.342}$$

分别用高精度数值解（积分器为 RKF7(8)[15]）和上述摄动分析解，计算探测器从进入月球作用范围（图 4.2 中的 A 点）到飞离作用范围（图 4.2 中的 B 点）这一关键弧段上双曲线轨道的变化. 按二体问题，这一弧段的飞行时间为 $1^d.2892668=1856^m.544192$，计算结果列于表 4.2.

表 4.2　两种方法给出的根数和坐标速度矢量的结果

根数	数值法	分析法	坐标速度	数值解	分析解
$a(R_e)$	4.358728041280	4.358728041277	$x(R_e)$	−22.5037946917	−22.5037946623
e	1.24263185315	1.242623181860	$y(R_e)$	−24.4517219010	−24.4517219719
$i(^\circ)$	44.9997324696	44.9997320198	$z(R_e)$	−1.3956476350	−1.3856470591
$\Omega(^\circ)$	44.9857322459	44.9857333244	$\dot{x}$(km/s)	−0.5671864971	−0.5671864968
$\omega(^\circ)$	45.0150039744	45.0150023362	$\dot{y}$(km/s)	−0.6975563433	−0.6975563457
$M(^\circ)$	338.8885835763	338.8885835407	$\dot{z}$(km/s)	−0.0924072365	−0.0924072201

从计算结果可以看出，以数值解为标准，分析解的误差也只有 10^{-8}，这于上述一阶摄动解的精度是相当的，在这一弧段上，月球扁率摄动量级为 $10^{-5}\sim10^{-4}$，而且又是保守力摄动，二阶摄动的量级应为 10^{-8}. 对于探测器的运动，另一种重要摄动源是第三体（地球）的引力摄动，但其影响不会超过月球扁率摄动. 故上述双曲线轨道的一阶摄动分

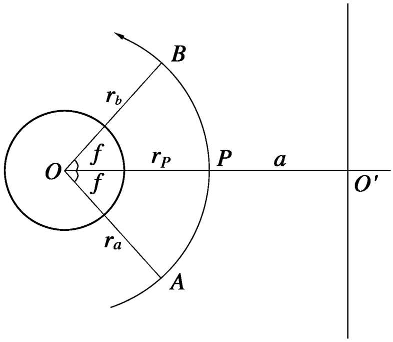

图 4.2　双曲线轨道

析解还是有其实际意义的，而建立第三体引力摄动也并不困难.

这一章结合卫星运动中最主要的摄动源——中心天体非球形引力摄动，对构造小参数幂级数解的方法及其具体过程作了详尽的阐述，剩下的问题是级数解中出现的奇点如何处理？关于根数变化的周期项中出现的小 e 和小 i 问题，只要采用第三章 §3.3 中提出的无奇点根数即可. 另一个奇点问题是长周期项中出现的通约（通常所说的小分母）问题，这是平均根数法带来的，作为本章的结束，对此再作必要的阐述，简要介绍问题解决的一种途径.

针对平均根数法出现该问题的特点，可对摄动法采用更进一步的改进，即用拟平均根数代替平均根数作为参考解. 拟平均根数的定义与平均根数稍有差别，但仍用$\bar{\sigma}(t)$表示，精确到二阶长期项的表达式如下：

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}_0 + (\delta \bar{n}_0 + \sigma_1 + \sigma_2)(t - t_0) + \Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t),$$

$$\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0),$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 - [\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)].$$

相应的瞬时根数 $\sigma(t)$即由下式表达：

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(t) + \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t).$$

因为通约问题发生在长周期项中，故应对其另行处理，将其变化 $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$以二阶长期项对待，放入拟平均根数中，由此即可解决相应的小分母问题. 在此参考解的基础上即可构造相应的无奇点的小参数幂级数解，其原理和过程与平均根数法类似，详见参考文献[3～5].

参 考 文 献

[1] Kozai Y. The motion of a close earth satellite. Astron. J. 1959，64(9)：367～377

[2] Cook G E. Basic theroy for prod，a program for computing the devolopment of satellite orbits. Celest. Mech，1973，7(3)：301～314

[3] 刘林. 人造地球卫星在临界角附近运动的解. 天文学报，1974，15(2)：230～240

LIU Lin. A Solution of the Motion of an Artificial Satellite in the Vicinity of the Critical Inclination. Chin. Astron. Astrophys. 1977，1(1)：31～42

[4] 刘林. 一种人造地球卫星的摄动计算方法. 天文学报，1975，16(1)：65～80

LIU Lin. A Method of Calculation the Perturbation of Artificial Satellites. Chin. Astron. Astrophys，1977，1(1)：63～78

[5] 刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京：高等教育出版社，1992

[6] Brouwer D. Solution of the Problem of Artifical Satellite Theory without Drag. Astron. J, 1959, 64(9): 378～397

[7] **刘林, 章圣泮. 非正则形式的变换方法及其应用. 中国科学**(A), 1983, 13(5): 455～465

LIU Lin, ZHANG Sheng-pan. A Transformation Method of Non-Hamiltonian Systems and Its Application. SCIENCE IN CHINA(Series A), 1983, 26(8): 861～873

[8] **刘林**, Chum C K. **在非球形引力摄动下金星轨道器运动的分析解. 中国科学**(A), 1999, 29(10): 952～960

LIU Lin, Chum C K. Analytic Perturbation to the Venusian Orbiter Due to the Nonspherical Gravitational Potential. SCIENCE IN CHINA(Series A), 2000, 43(5): 552～560

[9] **刘林, 王家松. 月球卫星轨道变化的分析解. 天文学报**, 1998, 39(1): 81～102

[10] **刘林. 航天器轨道理论(第五章). 北京: 国防工业出版社**. 2000

[11] Cook G E. Perturbations of near-circular orbits by the earth's gravitational potential. Planet. Space Sci, 1966, 14(3): 433～444

[12] **刘林**, Iunanen K. A. **关于人造卫星运动中的临界角和通约问题. 天文学报**, 1986, 27(1): 1～8

LIU Lin, Iunanen K. A. Problem of Critical Inclination and Commensurability in the Motion of Artificial Satellites. Chin. Astron. Astrophys, 1986, 10(3): 245～251

[13] **刘林, 刘世元, 王彦荣. 关于大行星(或月球)轨道器的冻结轨道. 飞行器测控学报**, 2003, 22(2): 19～24

[14] **刘林, 王歆. 月球卫星轨道力学综述. 天文学进展**, 21(4): 281～288

[15] Fehlberg E. Classical Fifith- sixth- seventh and Eighth Order Runge-Kutta with Stepsize Control. NASA TR R-287, 1968

第 5 章　第三体引力摄动、非引力摄动及后牛顿效应

对于可以处理成受摄二体问题的航天器运动而言，除中心天体的非球形引力摄动外，还有另外几类摄动源，即第三体（其他天体）引力摄动，非引力摄动（大气的耗散效应和一般情况下的太阳辐射压作用）及后牛顿效应等.

就人造地球卫星的运动而言，第三体主要指太阳和月球，即通常所说的日、月摄动，如果是环月轨道器的运动，则第三体即地球和太阳. 不管是第三体引力摄动，还是非引力中的太阳辐射压摄动和大气阻力摄动，都将涉及到太阳的坐标或太阳和月球的坐标. 因此本章将首先介绍日、月坐标的计算方法.

§5.1　日、月坐标

对于轨道摄动的分析解，着重的是卫星轨道变化规律，并不要求高精度. 因此，计算可采用日、月平均轨道，即长期进动椭圆，而在几天的弧段内，还可采用"不变椭圆"轨道. 下面给出日、月在历元地心平赤道坐标系中的位置计算方法和相应的计算公式.

1. 日、月的平均轨道

太阳在 J2000.0 地心天球坐标系（即地心平赤道坐标系）中的平均轨道根数 $\bar{\sigma}'$ 为[1]

$$\begin{cases} \bar{a}=1.00000102(\mathrm{AU}), \quad \mathrm{AU}=1.49597870\times10^{8}\ \mathrm{km}, \\ \bar{e}=0.016709, \\ \bar{i}=\varepsilon=23^\circ.4393, \\ \bar{\Omega}=0^\circ.0, \\ \bar{\omega}=282^\circ.9373+0^\circ.32T, \\ \bar{M}=357^\circ.5291+0^\circ.9856d, \end{cases} \tag{5.1}$$

月球在 J2000.0 地心平黄道坐标系中的平均轨道根数 $\bar{\sigma}'$ 为[1]

$$
\begin{cases}
\bar{a}=384747.981\ \mathrm{km}, \\
\bar{e}=0.054880, \\
\bar{i}=J=5^\circ.1298, \\
\bar{\Omega}=125^\circ.0446-1934^\circ.14T, \\
\bar{\omega}=318^\circ.3087+6003^\circ.15T, \\
\bar{M}=134^\circ.9634+13^\circ.0650d,
\end{cases}
\tag{5.2}
$$

上述两公式中出现的 T **和** d **分别为由标准历元** J2000.0 **起算的世纪数和儒略日.**

2. 日、月在历元(J2000.0)地心平赤道坐标系中的轨道根数 σ'

在日、月引力摄动解中将会出现的轨道根数 σ':a',e',i',Ω',$u'=f'+\omega'$,**对太阳有**

$$
\begin{cases}
a'=\bar{a}, \quad e'=\bar{e}, \quad i'=\bar{i}=\varepsilon, \quad \Omega'=0^\circ.0, \\
u'=\bar{f}+\bar{\omega}.
\end{cases}
\tag{5.3}
$$

其中 $\bar{f}$ **将通过解** Kepler **方程由** $\bar{e}$,$\bar{M}$ **给出** $\bar{E}$,**再由** $\bar{E}$,E **给出该真近点角. 对月球有**

$$
a'=\bar{a}, \quad e'=\bar{e}.
\tag{5.4}
$$

而 i',Ω',u' **的计算公式如下:**

$$
\begin{cases}
\cos i'=\cos\varepsilon\cos J-\sin\varepsilon\sin J\cos\bar{\Omega}, \\
\sin i'=\sqrt{1-\cos^2 i'},
\end{cases}
\tag{5.5}
$$

$$
\begin{cases}
\sin\Omega'=\dfrac{\sin J\sin\bar{\Omega}}{\sin i'}, \\
\cos\Omega'=\dfrac{\cos J-\cos\varepsilon\cos i'}{\sin\varepsilon\sin i'},
\end{cases}
\tag{5.6}
$$

$$
\begin{cases}
u'=(\bar{f}+\bar{\omega}+\bar{\Omega})-(\bar{\Omega}-\varphi), \\
\sin(\bar{\Omega}-\varphi)=\dfrac{\cos\varepsilon\sin\bar{\Omega}}{\sin i'}\sin J-\dfrac{\sin\varepsilon\sin 2\bar{\Omega}}{\sin i'}\sin^2\dfrac{J}{2}.
\end{cases}
\tag{5.7}
$$

在日、月引力摄动长周期项中将要涉及到变率 Ω_C' **和** n',**对太阳,见**(5.1),**有**

$$
\Omega_C'=0, n'=0^\circ.9856/d.
\tag{5.8}
$$

对月球,由(5.5)**和**(5.6)**式给出**

$$
\begin{cases}
\Omega_C'=\left(\dfrac{\sin J}{\cos J-\cos^2\varepsilon}\right)\cos\bar{\Omega}\cdot\dot{\bar{\Omega}}, \\
n'=13^\circ.0650/d,
\end{cases}
\tag{5.9}
$$

其中 $\dot{\overline{\Omega}}$ 由(5.2)式 $\overline{\Omega}$ 的计算公式给出,即$-1934°.14/T$,T 是世纪数.

§5.2　第三体引力摄动

关于第三体引力摄动,基本上有两大类. 一种是外摄情况,即摄动天体到中心天体的距离 r' 大于运动天体(卫星)到中心天体的距离 r,即$(r/r')<1$. 另一种是内摄情况,即$(r'/r)<1$. 对于外摄情况,有两种可能,$r/r'\ll 1$ 或 $m'\ll M$(这里 m' 和 M 分别为摄动天体即第三体的质量和中心天体的质量),或两者兼而有之. 对于内摄情况,则有些不同,通常要求 $m'\ll M$,而并不需要 $r'/r\ll 1$;如果同时有 $r'/r\ll 1$,即摄动天体非常靠近中心天体,在此情况下,往往改为讨论运动天体相对中心天体和第三体两者质心的运动.

就低轨卫星(不仅是低轨地球卫星)的运动而言,显然属于外摄情况. 对于地球卫星,在历元地心平赤道坐标系中,运动方程如下:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}-Gm'\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3}+\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right).$$

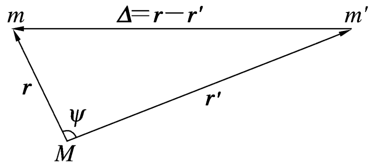

图 5.1　三天体的相对位置

其中各量见图 5.1,如采用标准计算单位,则上式变化如下简单形式:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-m'\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3}+\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right),\tag{5.10}$$

这里 m' 是第三体的以中心天体质量 M 为单位的无量纲质量. 相应的摄动函数 R 的形式如下:

$$\begin{cases}R=m'\left(\dfrac{1}{\Delta}-\dfrac{r}{r'^2}\cos\psi\right),\\[2ex] \cos\psi=\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}'}{r'}\right).\end{cases}\tag{5.11}$$

对于外摄情况有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta}&=(r^2+r'^2-2rr'\cos\psi)^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\psi)\left(\frac{r}{r'}\right)^l,\end{aligned}\tag{5.12}$$

其中 $P_l(\cos\psi)$是上一章出现过的勒让德多项似式,上一章已出现过,只不过变量 $\sin\varphi$ 变为 $\cos\psi$,有

$$\begin{cases} P_0(\cos\psi) = 1, P_1(\cos\psi) = \cos\psi, \\ P_2(\cos\psi) = \dfrac{3}{2}\cos^2\psi - \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

将这些关系引入(5.11)式得

$$R = m'\left[\frac{r^2}{r'^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}\right) + \frac{r^3}{r'^4}\left(\frac{5}{2}\cos^3\psi - \frac{3}{2}\cos\psi\right) + \cdots\right]. \tag{5.13}$$

对于低轨人造地球卫星而言，日、月引力摄动量级为二阶小量，即由(5.10)式给出下列估计：

$$|\boldsymbol{F}_\varepsilon| / |\boldsymbol{F}_0| \approx \left(\frac{m'}{M}\right)\left(\frac{r}{r'}\right)^3 = O(J_2{}^2).$$

就一阶摄动解而言，只需要给出二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$、一阶长周期项$\sigma_L^{(1)}(t)$和轨道半长径 a 的二阶短周期项. 但考虑到对稍高的地球卫星，以及其他类型的探测器，第三体引力摄动的重要性，这里仍将六个轨道根数的二阶短周期项一并给出. 而且，日、月引力摄动将用“同一”公式表达，应用时可分开. 既然日、月摄动量为二阶小量，则相应的摄动函数(5.13)式可取为下列简单形式：

$$R = \frac{m'}{r'^3}r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}\right). \tag{5.14}$$

利用位置矢量与根数的关系(见第二章§2.3)，不难导出

$$\cos\psi = A\cos f + B\sin f. \tag{5.15}$$

其中

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{4}\{&(1-\cos i)[(1+\cos i')\cos(\omega-\theta+u') + (1-\cos i')\cos(\omega-\theta \\ &- u')] + (1+\cos i)[(1+\cos i')\cos(\omega+\theta-u') + \\ &(1-\cos i')\cos(\omega+\theta+u')] + 2\sin i\sin i'[\cos(\omega-u') - \\ &\cos(\omega+u')]\}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} B = -\frac{1}{4}\{&(1-\cos i)[(1+\cos i')\sin(\omega-\theta+u') + \\ &(1-\cos i')\sin(\omega-\theta-u')] + (1+\cos i)[(1+\cos i')\sin(\omega + \\ &\theta-u') + (1-\cos i')\sin(\omega+\theta+u')] + 2\sin i\sin i'[\sin(\omega-u') - \\ &\sin(\omega+u')]\}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

这里

$$\theta = \Omega - \Omega', u' = f' + \omega'. \tag{5.18}$$

所有带“′”的根数 i'，Ω'，ω'，f' 等均为摄动天体相对同一中心天体的轨道根

数，下面不再说明. 将 $\cos\psi$ 代入(5.14)式，得

$$R = \frac{3}{2}\beta\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(A^2+B^2)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}(A^2-B^2)\cos 2f + AB\sin 2f\right], \tag{5.19}$$

$$\beta = m'/r'^3. \tag{5.20}$$

对于 $\left(\frac{r}{r'}\right)\ll 1$ 的外摄情况，上述表达式比较理想，因为在这种情况下，只有运动天体的真近点角 f 是快变量，而 Ω,ω 和摄动天体的 Ω',ω',f' 都是慢变量，上述表达式正好将快、慢变量完全分离开，这便于求相应摄动解的各种摄动项.

利用下列平均值

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2} = 1+\frac{3}{2}e^2,\ \overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f} = \frac{5}{2}e^2,\ \overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f} = 0, \tag{5.21}$$

可将摄动函数 R 分解为

$$R = R_{\mathrm{C}} + R_{\mathrm{L}} + R_{\mathrm{S}}, \tag{5.22}$$

$$R_{\mathrm{C}} = \frac{3}{2}\beta\alpha^2\left[C\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\right], \tag{5.23}$$

$$R_{\mathrm{L}} = \frac{3}{2}\beta\alpha^2\left[L_1\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)+L_2\left(\frac{5}{2}e^2\right)\right], \tag{5.24}$$

$$R_{\mathrm{S}} = \frac{3}{2}\beta\alpha^2\left\{S_1\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2-\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\right]+S_2\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f-\frac{5}{2}e^2\right]+\right.$$

$$\left.S_3\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f\right\}. \tag{5.25}$$

其中

$$C = \frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right), \tag{5.26}$$

$$L_1 = \frac{1}{16}\left\{\sin^2 i[2\sin^2 i'\cos 2\theta + (1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u') +\right.$$

$$(1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')] + 2\sin 2i[2\sin 2i'\cos\theta -$$

$$\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u') + \sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')] +$$

$$\left.4\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)[\sin^2 i'\cos 2u']\right\}, \tag{5.27}$$

$$L_2 = \frac{1}{16}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_1 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_2 + \sin^2 i D_3 +\right.$$

$$\left.2\sin i(1-\cos i)D_4 + 2\sin i(1+\cos i)D_5\right\}, \tag{5.28}$$

$$S_1 = C + L_1, \tag{5.29}$$

$$S_2 = L_2, \tag{5.30}$$

$$S_3 = -\frac{1}{16}\Big\{\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_6 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_7 + \sin^2 i D_8 + 2\sin i(1-\cos i)D_9 + 2\sin i(1+\cos i)D_{10}\Big\}. \tag{5.31}$$

关于 $D_1, D_2, \cdots, D_{10}$ **的表达式如下：**

$$\begin{cases} D_1 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega - 2\theta) + (1+\cos i')^2\cos(2\omega - 2\theta + 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\cos(2\omega - 2\theta - 2u'), \\ D_2 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega + 2\theta) + (1+\cos i')^2\cos(2\omega + 2\theta - 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\cos(2\omega + 2\theta + 2u'), \\ D_3 = 2(2-3\sin^2 i')\cos 2\omega + 3\sin^2 i'\cos(2\omega - 2u') + \\ \qquad 3\sin^2 i'\cos(2\omega + 2u'), \\ D_4 = \sin i'[2\cos i'\cos(2\omega - \theta) - (1+\cos i')\cos(2\omega - \theta + 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')\cos(2\omega - \theta - 2u')], \\ D_5 = \sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega + \theta) + (1+\cos i')\cos(2\omega + \theta - 2u') - \\ \qquad (1-\cos i')\cos(2\omega + \theta + 2u')], \end{cases} \tag{5.32}$$

$$\begin{cases} D_6 = 2\sin^2 i'\sin(2\omega - 2\theta) + (1+\cos i')^2\sin(2\omega - 2\theta + 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\sin(2\omega - 2\theta - 2u'), \\ D_7 = 2\sin^2 i'\sin(2\omega + 2\theta) + (1+\cos i')^2\sin(2\omega + 2\theta - 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\sin(2\theta + 2\omega + 2u'), \\ D_8 = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega + \\ \qquad 3\sin^2 i'\sin(2\omega - 2u') + 3\sin^2 i'\sin(2\omega + 2u'), \\ D_9 = \sin i'[2\cos i'\sin(2\omega - \theta) - (1+\cos i')\sin(2\omega - \theta + 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')\sin(2\omega - \theta - 2u')], \\ D_{10} = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega + \theta) + (1+\cos i')\sin(2\omega + \theta - 2u') - \\ \qquad (1-\cos i')\sin(2\omega + \theta + 2u')], \end{cases} \tag{5.33}$$

将上述分解后的摄动函数 R_C, R_L **和** R_S **分别代入摄动运动方程，即可给出卫星轨道变化所满足的小参数方程，同时考虑一阶量** J_2**（扁率项），有**

$$\frac{d\sigma}{dt} = f_0(a) + f_1(\sigma, J_2) + f_2(\sigma, \beta). \tag{5.34}$$

其中 f_2 **有三项，即**

$$f_2 = f_{2C} + f_{2L} + f_{2S}. \tag{5.35}$$

采用平均根数法构造小参数幂级数解，在一阶摄动意义下，下面给出第三体引力摄动相应的摄动项[2].

1. 长期项 $\boldsymbol{\sigma}_2(t-t_0)$ 的变率 $\boldsymbol{\sigma}_2$

$$a_2 = 0, e_2 = 0, i_2 = 0, \tag{5.36}$$

$$\Omega_2 = -\left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-1/2} n\cos i, \tag{5.37}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+\frac{1}{2}e^2\right](1-e^2)^{-1/2} n, \tag{5.38}$$

$$M_2 = -\left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(\frac{7}{3}+e^2\right)n. \tag{5.39}$$

各式右端出现的根数 a, e, i，和 n 均为平均根数 $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$ 和 $\bar{n}_0 = \bar{a}_0^{-\frac{3}{2}}$. 日、月有关量 β 的定义如下：

$$\beta = m'/r'^3. \tag{5.40}$$

上述各式中，凡带有“′”的量（包括质量 m' 和根数 $a', e', i', \cdots$）均为第三体（即摄动天体日、月）的有关量. 下面不再说明.

对于中低轨卫星的定轨，基本上涉及的弧段不会太长，日、月位置（或轨道）变化不大，可采用简单模型（例如平均椭圆轨道）计算日、月的轨道及相应的距离量 r'，具体计算方法见 §5.1.

2. 长周期项 $\sigma_L^{(1)}(t)$

$$a_L^{(1)}(t) = 0, \tag{5.41}$$

$$e_L^{(1)}(t) = -\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\left(5e\sqrt{1-e^2}\right)nH_1, \tag{5.42}$$

$$i_L^{(1)}(t) = \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\frac{n}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\times \left[(5e^2)\cos iH_1 - 2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)H_2 - (5e^2)H_3\right], \tag{5.43}$$

$$\Omega_L^{(1)}(t) = \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\frac{n}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\left[\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)H_4 + \left(\frac{5}{2}e^2\right)\cos iH_5\right] + \left(\frac{3}{2}\beta\right)\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[(25e^2)\cos iH_1^* - 2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)H_2^* - (5e^2)H_3^*\right], \tag{5.44}$$

$$\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right) n \left\{ \sqrt{1-e^2}(3H_6 + 5H_7) - \frac{\cos i}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\left[\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)H_4 + \left(\frac{5}{2}e^2\right)H_5\right]\right\} - \left(\frac{3}{2}\beta\right)\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[(5e^2)(13-15\sin^2 i)H_1^* - 10\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\cos i\, H_2^* - (25e^2)\cos i\, H_3^*\right], \tag{5.45}$$

$$M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right) n[(7+3e^2)H_6 + (5+5e^2)H_7] - \left(\frac{3}{2}\beta\right)\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\left[(15e^2)\left(2-\frac{5}{2}\sin i\right)H_1^* - 6\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\cos i\, H_2^* - (15e^2)\cos i\, H_3^*\right]. \tag{5.46}$$

上述各式右端出现的各量，除在 σ_2 **中已出现过的之外，**$p=a(1-e^2)$**亦为平均根数，而** $H_1, H_2, \cdots, H_7$ **和** H_1^*, H_2^*, H_3^* **由下列各式表达：**

$$H_1 = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 K_1 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 K_2 + \sin^2 i\, K_3 + 2\sin i(1-\cos i)K_4 + 2\sin i(1+\cos i)K_5\right], \tag{5.47}$$

$$H_2 = \frac{1}{16}[\sin^2 i\, K_6 + \sin 2i\, K_7], \tag{5.48}$$

$$H_3 = \frac{1}{16}\left[-\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 K_1 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 K_2 - \sin i(1-\cos i)K_4 + \sin i(1+\cos i)K_5\right], \tag{5.49}$$

$$H_4 = \frac{1}{16}[\sin 2i\, K_{16} + 4\cos 2i\, K_{17} - 6\sin 2i\, K_{18}], \tag{5.50}$$

$$H_5 = \frac{1}{16}[\sin i(1-\cos i)K_{11} - \sin i(1+\cos i)K_{12} + \sin 2i\, K_{13} + 2(\cos i - \cos 2i)K_{14} + 2(\cos i + \cos 2i)K_{15}], \tag{5.51}$$

$$H_6 = \frac{1}{16}[\sin^2 i\, K_{16} + 2\sin 2i\, K_{17} + 2(2-3\sin^2 i)K_{18}], \tag{5.52}$$

$$H_7 = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 K_{11} + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 K_{12} + \sin^2 i\, K_{13} + 2\sin i(1-\cos i)K_{14} + 2\sin i(1+\cos i)K_{15}\right], \tag{5.53}$$

$$K_1 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega - 2\theta)/n_1 + (1+\cos i')^2\cos(2\omega - 2\theta + 2u')/n_3 +$$

$$(1-\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta-2u')/n_4, \tag{5.54}$$

$$K_2 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega+2\theta)/n_2+(1+\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta-2u')/n_5+ (1-\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta+2u')/n_6, \tag{5.55}$$

$$K_3 = 2(2-3\sin^2 i')\cos 2\omega/2\omega_1+3\sin^2 i'\cos(2\omega-2u')/n_7+ 3\sin^2 i'\cos(2\omega+2u')/n_8, \tag{5.56}$$

$$K_4 = \sin i'[2\cos i'\cos(2\omega-\theta)/n_9-(1+\cos i')\cos(2\omega-\theta+ 2u')/n_{11}+(1-\cos i')\cos(2\omega-\theta-2u')/n_{12}], \tag{5.57}$$

$$K_5 = \sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega+\theta)/n_{10}+(1+\cos i')\cos(2\omega+\theta- 2u')/n_{13}-(1-\cos i')\cos(2\omega+\theta+2u')/n_{14}], \tag{5.58}$$

$$K_6 = 2\sin^2 i'\cos 2\theta/2\theta_C+(1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u')/n_{15}+ (1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')/n_{16}, \tag{5.59}$$

$$K_7 = \sin 2i'\cos\theta/\theta_C-\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u')/n_{17}+ \sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')/n_{18}, \tag{5.60}$$

$$K_{11} = 2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta)/n_1+(1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u')/n_3+ (1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u')/n_4, \tag{5.61}$$

$$K_{12} = 2\sin^2 i'\sin(2\omega+2\theta)/n_2+(1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u')/n_5+ (1-\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta+2u')/n_6, \tag{5.62}$$

$$K_{13} = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega/2\omega_1+3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u')/n_7+ 3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u')/n_8, \tag{5.63}$$

$$K_{14} = \sin i'\Big[2\cos i'\sin(2\omega-\theta)/n_9-(1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+ 2u')/n_{11}+(1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')/n_{12}\Big], \tag{5.64}$$

$$K_{15} = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta)/n_{10}+(1+\cos i')\sin(2\omega+\theta- 2u')/n_{13}-(1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u')/n_{14}], \tag{5.65}$$

$$K_{16} = 2\sin^2 i'\sin 2\theta/2\theta_C+(1+\cos i')^2\sin(2\theta-2u')/n_{15}+ (1-\cos i')^2\sin(2\theta+2u')/n_{16}, \tag{5.66}$$

$$K_{17} = \sin 2i'\sin\theta/\theta_C-\sin i'(1+\cos i')\sin(\theta-2u')/n_{17}+ \sin i'(1-\cos i')\sin(\theta+2u')/n_{18}, \tag{5.67}$$

$$K_{18} = \sin^2 i'\sin 2u'/2n', \tag{5.68}$$

$$H_1^* = \frac{1}{16}\Big[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2K_1^*+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2K_2^*+\sin^2 i\,K_3^*+ 2\sin i(1-\cos i)K_4^*+2\sin i(1+\cos i)K_5^*\Big], \tag{5.69}$$

$$H_2^* = \frac{1}{16}[\sin^2 i\,K_6^*+\sin 2i\,K_7^*], \tag{5.70}$$

$$H_3^* = \frac{1}{16}\Big[-\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 K_1^* + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 K_2^* - \sin i(1-\cos i)K_4^* + \sin i(1+\cos i)K_5^*\Big], \tag{5.71}$$

$$K_1^* = 2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta)/n_1^2 + (1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u')/n_3^2 + (1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u')/n_4^2, \tag{5.72}$$

$$K_2^* = 2\sin^2 i'\sin(2\omega+2\theta)/n_2^2 + (1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u')/n_5^2 + (1-\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta+2u')/n_6^2, \tag{5.73}$$

$$K_3^* = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega/4\omega_1^2 + 3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u')/n_7^2 + 3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u')/n_8^2, \tag{5.74}$$

$$K_4^* = \sin i'[2\cos i'\sin(2\omega-\theta)/n_9^2 - (1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+2u')/n_{11}^2 + (1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')/n_{12}^2], \tag{5.75}$$

$$K_5^* = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta)/n_{11}^2 + (1+\cos i')\sin(2\omega+\theta-2u')/n_{13}^2 - (1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u')/n_{14}^2], \tag{5.76}$$

$$K_6^* = 2\sin^2 i'\sin 2\theta/4\theta_C{}^2 + (1+\cos i')^2\sin(2\theta-2u')/n_{15}^2 + (1-\cos i')^2\sin(2\theta+2u')/n_{16}^2, \tag{5.77}$$

$$K_7^* = \sin 2i'\sin\theta/\theta_C{}^2 - \sin i'(1+\cos i')\sin(\theta-2u')/n_{17}^2 + \sin i'(1-\cos i')\sin(\theta+2u')/n_{18}^2. \tag{5.78}$$

上述各式中的 $n_1, n_2, \cdots, n_{18}$ 均是慢变化的变化率，即

$$\begin{cases} n_1 = 2\omega_1 - 2\theta_C, & n_2 = 2\omega_1 + 2\theta_C, & n_3 = 2\omega_1 - 2\theta_C + 2n' \\ n_4 = 2\omega_1 - 2\theta_C - 2n', & n_5 = 2\omega_1 + 2\theta_C - 2n', & n_6 = 2\omega_1 + 2\theta_C + 2n' \\ n_7 = 2\omega_1 - 2n', & n_8 = 2\omega_1 + 2n', & n_9 = 2\omega_1 - \theta_C \\ n_{10} = 2\omega_1 + \theta_C, & n_{11} = 2\omega_1 - \theta_C + 2n', & n_{12} = 2\omega_1 - \theta_C - 2n' \\ n_{13} = 2\omega_1 + \theta_C - 2n', & n_{14} = 2\omega_1 + \theta_C + 2n', & n_{15} = 2\theta_C - 2n' \\ n_{16} = 2\theta_C + 2n', & n_{17} = \theta_C - 2n', & n_{18} = \theta_C + 2n' \end{cases} \tag{5.79}$$

其中

$$\begin{cases} \theta = \Omega - \Omega', \\ \theta_C = \Omega_1 - \Omega_C'. \end{cases} \tag{5.80}$$

Ω_1 和 ω_1 是卫星轨道根数 Ω 和 ω 的一阶长期项系数（即变率），即上一章给出的地球扁率（J_2）摄动项. 而 Ω_C' 和 n' 是日、月轨道根数 Ω' 和 u' 的长期变率. 关于 Ω_C'，对于太阳轨道，无此项，而对于月球轨道，见（5.9）式. 关于 n'，在上述摄动解中，就可当作日、月的平运动角速度，即相应平近点角 M' 的变率，具体计算公式见（5.1）和（5.2）式中 $\overline{M}$ 的表达式.

3. 短周期项 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$

$$a_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)2aG_1,\tag{5.81}$$

$$e_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\right)(\sqrt{1-e^2}G_1-G_2),\tag{5.82}$$

$$i_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i}(\cos iG_2-G_3),\tag{5.83}$$

$$\Omega_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i}G_4,\tag{5.84}$$

$$\omega_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\right)G_5-\cos i\Omega_{\mathrm{S}}(t),\tag{5.85}$$

$$M_{\mathrm{S}}(t)=-\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\left(\frac{1-e^2}{e}G_5+7G_6\right).\tag{5.86}$$

其中

$$\begin{aligned}G_1={}&S_1\left[-e^2-2e\cos E+\frac{1}{2}e^2\cos 2E\right]+\\&S_2\left[-e^2-2e\cos E+\left(1-\frac{1}{2}e^2\right)\cos 2E\right]+\\&S_3\sqrt{1-e^2}[-2e\sin E+\sin 2E],\end{aligned}\tag{5.87}$$

$$\begin{aligned}G_j(j=2,3,4,6)={}&S_{1j}\left[e\left(-2+\frac{3}{4}e^2\right)\sin E+\frac{3}{4}e^2\sin 2E-\frac{1}{12}e^3\sin 3E\right]+\\&S_{2j}\left[-\frac{5}{2}e\left(1-\frac{1}{2}e^2\right)\sin E+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)\sin 2E-\right.\\&\left.\frac{1}{6}e\left(1-\frac{1}{2}e^2\right)\sin 3E\right]+S_{3j}\sqrt{1-e^2}\left[\frac{5}{2}e\cos E-\right.\\&\left.\frac{1}{2}(1+e^2)\cos 2E+\frac{1}{6}e\cos 3E\right],\end{aligned}\tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}G_5={}&S_1\left[(-2+e^2)\sin E+\frac{1}{2}e\sin 2E\right]+\\&S_2\left[-3(1-e^2)\sin E-\frac{1}{2}e\sin 2E+\frac{1}{3}\sin 3E\right]+\\&S_3(1-e^2)^{-1/2}\left[3\left(1-\frac{11}{6}e^2\right)\cos E+\frac{1}{2}e(1+e^2)\cos 2E-\right.\\&\left.\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}e^2\right)\cos 3E\right].\end{aligned}\tag{5.89}$$

这里 S_1,S_2,S_3 和 $S_{1j},S_{2j},S_{3j}(j=2,3,4,6)$ 的表达式如下：

$$S_1 = \frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+$$
$$\frac{1}{16}\left\{\sin^2 i[2\sin^2 i'\cos 2\theta + (1+\cos i')^2\cos(2\theta - 2u') + \right.$$
$$(1-\cos i')^2\cos(2\theta + 2u')] +$$
$$2\sin 2i[\sin 2i'\cos\theta - \sin i'(1+\cos i')\cos(\theta - 2u') +$$
$$\left.\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta + 2u')] + 4\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)[\sin^2 i'\cos 2u']\right\}, \tag{5.90}$$

$$S_2 = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_1 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_2 + \sin^2 i D_3 + \right.$$
$$\left.2\sin i(1-\cos i)D_4 + 2\sin i(1+\cos i)D_5\right], \tag{5.91}$$

$$S_3 = -\frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_6 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_7 + \sin^2 i D_8 + \right.$$
$$\left.2\sin i(1-\cos i)D_9 + 2\sin i(1+\cos i)D_{10}\right]. \tag{5.92}$$

$$S_{12} = 0, \tag{5.93}$$

$$S_{13} = \frac{1}{16}\{-2\sin^2 i[2\sin^2 i'\sin 2\theta + (1+\cos i')^2\sin(2\theta - 2u') +$$
$$(1-\cos i')^2\sin(2\theta + 2u')] - 2\sin 2i[\sin 2i'\sin\theta -$$
$$\sin i'(1+\cos i')\sin(\theta - 2u') + \sin i'(1-\cos i')\sin(\theta + 2u')]\}, \tag{5.94}$$

$$S_{14} = -\frac{1}{4}\sin 2i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)+\frac{1}{16}\{\sin 2i[2\sin^2 i'\cos 2\theta +$$
$$(1+\cos i')^2\cos(2\theta - 2u') + (1-\cos i')^2\cos(2\theta + 2u')] +$$
$$4\cos 2i[\sin 2i'\cos\theta - \sin i'(1+\cos i')\cos(\theta - 2u') +$$
$$\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta + 2u')] -$$
$$6\sin 2i[\sin^2 i'\cos 2u']\}, \tag{5.95}$$

$$S_{16} = S_1, \tag{5.96}$$

$$S_{22} = 2S_3, \tag{5.97}$$

$$S_{23} = \frac{1}{16}[(1-\cos i)^2 D_6 - (1+\cos i)^2 D_7 +$$
$$2\sin i(1-\cos i)D_9 - 2\sin i(1+\cos i)D_{10}], \tag{5.98}$$

$$S_{24} = \frac{1}{16}[\sin i(1-\cos i)D_1 - \sin i(1+\cos i)D_2 +$$
$$\sin 2i D_3 + 2(\cos i - \cos 2i)D_4 + 2(\cos i + \cos 2i)D_5], \tag{5.99}$$

$$S_{26} = S_2, \tag{5.100}$$

$$S_{32} = -2S_2, \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned} S_{33} = \frac{1}{16}[&(1-\cos i)^2 D_1 - (1+\cos i)^2 D_2 + \\ &2\sin i(1-\cos i)D_4 - 2\sin i(1+\cos i)D_5], \end{aligned} \tag{5.102}$$

$$\begin{aligned} S_{34} = -\frac{1}{16}[&\sin i(1-\cos i)D_6 - \sin i(1+\cos i)D_7 + \\ &\sin 2iD_8 + 2(\cos i - \cos 2i)D_9 + 2(\cos i + \cos 2i)D_{10}], \end{aligned} \tag{5.103}$$

$$S_{36} = S_3. \tag{5.104}$$

$D_1, D_2, \cdots, D_{10}$ **都是慢变量的函数，它们的表达式如下：**

$$\left\{\begin{aligned} D_1 = {} & 2\sin^2 i'\cos(2\omega - 2\theta) + (1+\cos i')^2\cos(2\omega - 2\theta + 2u') + \\ & (1-\cos i')^2\cos(2\omega - 2\theta - 2u'), \\ D_2 = {} & 2\sin^2 i'\cos(2\omega + 2\theta) + (1+\cos i')^2\cos(2\omega + 2\theta - 2u') + \\ & (1-\cos i')^2\cos(2\omega + 2\theta + 2u'), \\ D_3 = {} & 2(2-3\sin^2 i')\cos 2\omega + \\ & 3\sin^2 i'\cos(2\omega - 2u') + 3\sin^2 i'\cos(2\omega + 2u'), \\ D_4 = {} & \sin i'[2\cos i'\cos(2\omega - \theta) - (1+\cos i')\cos(2\omega - \theta + 2u') \\ & (1-\cos i')\cos(2\omega - \theta - 2u')], \\ D_5 = {} & \sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega + \theta) + (1+\cos i')\cos(2\omega + \theta - 2u') \\ & (1-\cos i')\cos(2\omega + \theta + 2u')], \end{aligned}\right. \tag{5.105}$$

$$\left\{\begin{aligned} D_6 = {} & 2\sin^2 i'\sin(2\omega - 2\theta) + (1+\cos i')^2\sin(2\omega - 2\theta + 2u') + \\ & (1-\cos i')^2\sin(2\omega - 2\theta - 2u'), \\ D_7 = {} & 2\sin^2 i'\sin(2\omega + 2\theta) + (1+\cos i')^2\sin(2\omega + 2\theta - 2u') + \\ & (1-\cos i')^2\sin(2\theta + 2\omega + 2u'), \\ D_8 = {} & 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega + \\ & 3\sin^2 i'\sin(2\omega - 2u') + 3\sin^2 i'\sin(2\omega + 2u'), \\ D_9 = {} & \sin i'[2\cos i'\sin(2\omega - \theta) - (1+\cos i')\sin(2\omega - \theta + 2u') + \\ & (1-\cos i')\sin(2\omega - \theta - 2u')], \\ D_{10} = {} & \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega + \theta) + (1+\cos i')\sin(2\omega + \theta - 2u') - \\ & (1-\cos i')\sin(2\omega + \theta + 2u'), \end{aligned}\right. \tag{5.106}$$

§5.3 太阳光压摄动

太阳辐射压(简称光压)是一表面力,与承受辐射压的卫星表面形状和大小有关,因此光压摄动应与卫星姿态有关. 除球形卫星外,承受光压力的卫星截面积 $S=S(t)$是变化的,要严格计算光压力的大小有一定程度的困难,通常采用一确定值,即所谓的有效截面积 S. 如果对卫星姿态完全了解,可给出 $S(t)$随时间的变化规律,不管这一规律多么复杂,对数值求解光压摄动方程而言,不会遇到任何问题,但往往会给光压摄动分析解的建立带来困难. 故在构造光压摄动分析解时,通常采用固定值的有效截面积,即 $S=\text{const}$,我们亦作如此处理.

太阳光压摄动的另一个特点是:尽管光压力可以近似地处理成有心斥力(力心即作为质点的太阳),但常会遇到地影问题(从卫星上看即"日蚀"),在一定意义下,光压力实为一"间断力",摄动效应不同于一般保守力,相应摄动解的结构亦不同于中心天体非球形引力和第三体质点引力的摄动解形式.

1. 光压摄动加速度

从实用的角度来看,可对相应的光压摄动加速度进行一些合理简化. 其原始形式为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon=\mu_S\left(\rho_S\frac{\Delta_S^2}{\Delta^2}\right)\hat{\boldsymbol{\Delta}},\tag{5.107}$$

$$\mu_S=\frac{\kappa S}{m}.\tag{5.108}$$

这里 $\kappa=1+\eta$,η 是卫星表面反射系数,$0<\eta<1$. S/m 即卫星的有效面质比,ρ_S 是地球附近(距太阳 $\Delta_s=1.0\ \text{AU}$,AU 是天文单位)的太阳辐射压强度,有

$$\begin{aligned}\rho_S&=4.5605\times10^{-6}\ \text{N/m}^2\\&=0.3166\times10^{-17}.\end{aligned}\tag{5.109}$$

后一个无量纲值对应标准单位系统. $\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_S$,$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_S$ 各为卫星和太阳的地心位置矢量,$\hat{\boldsymbol{\Delta}}=\boldsymbol{\Delta}/\Delta$ 即单位矢量.

对于典型的有效截面积与质量之比(以下简称有效面质比)为 10^9 的人造地球卫星,光压摄动量级为

$$\varepsilon=\frac{|\boldsymbol{F}_\varepsilon|}{|\boldsymbol{F}_0|}=\begin{cases}10^{-8} & \text{中低轨卫星},\\10^{-7} & \text{高轨卫星}.\end{cases}\tag{5.110}$$

面质比为 10^9 相当于 $0.00681\ \mathrm{m^2/kg}$，一个半径为 1.5 m 重 1 t 的球形卫星的面质比即 1.038×10^9. 因此，对于低轨人造地球卫星的运动，光压摄动亦可当作二阶摄动小量. 既然如此，考虑到太阳离地球远得多，有 $\dfrac{r}{r_S}=O(10^{-4})$，那么进一步作些简化是合理的，即

(1) 可用 $-\boldsymbol{r}_S$ 代替 $\boldsymbol{\Delta}$；

(2) 可认为太阳光来自无穷远，为平行光，可采用圆柱型地影模型，相应的圆截面的半径 R 就采用地球参考椭球体赤道半径 a_e 值，最大误差也只有 10^{-3}（即地球几何扁率的量级）.

在上述近似处理下，光压摄动加速度变为下列形式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_\varepsilon=-k_0\boldsymbol{r}_S/r_S,\\ k_0=\left(\dfrac{kS}{m}\right)\rho_S,\end{cases}\tag{5.111}$$

$\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 的三个分量 S,T,W 即

$$S=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\hat{\boldsymbol{r}},\quad T=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\hat{\boldsymbol{t}},\quad W=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\hat{\boldsymbol{w}},\tag{5.112}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{t}},\hat{\boldsymbol{w}}$ 即卫星径向，横向和轨道面法向单位矢量. 不难给出

$$\begin{cases}S=-k_0(A\cos f+B\sin f),\\ T=-k_0(B\cos f-A\sin f),\\ W-k_0C,\end{cases}\tag{5.113}$$

$$C=\sin i[\sin(\Omega-u')+\sin(\Omega+u')]+\sin i\cos i'[\sin(\Omega-u')-\sin(\Omega+u')]+\cos i\sin i'[\sin u'].\tag{5.114}$$

A 和 B 的表达式见(5.16)和(5.17)，A,B 和 C 仅涉及慢变量，C 中的 i' 即黄赤交角. 由 S,T,W 三分量可给出受摄运动方程(3.73)的右函数 $f_2(\sigma,k_0)$.

2. 无地影情况的光压摄动解[2]

在此情况下只有长周期项和短周期项，分别为 $\sigma_L^{(1)}(t)$ 和 $\sigma_S^{(2)}(t)$.

(1) 长周期项 $\boldsymbol{\sigma}_L^{(1)}$

$$a_L^{(1)}(t)=0,\tag{5.115}$$

$$e_L^{(1)}(t)=-\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\sqrt{1-e^2}[(1-\cos i)G_1+(1+\cos i)G_2+2\sin i\,G_3],\tag{5.116}$$

$$i_L^{(1)}(t)=\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}[\sin i\,G_1-\sin i\,G_2+2\cos i\,G_3],\tag{5.117}$$

$$\Omega_L^{(1)}(t) = \left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\ \frac{e}{\sqrt{1-e^2}\sin i}[\sin i\ G_4 - \sin i\ G_5 + 2\cos i\ G_6], \tag{5.118}$$

$$\begin{aligned}\omega_L^{(1)}(t) = & -\cos i\Omega_L^{(1)}(t) + \\ & \left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}[(1-\cos i)G_4 + (1+\cos i)G_5 + \\ & 2\sin i\ G_6].\end{aligned} \tag{5.119}$$

$$M_L^{(1)}(t) = -\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\left(\frac{1+e^2}{e}\right)[(1-\cos i)G_4 + (1+\cos i)G_5 + 2\sin i\ G_6]. \tag{5.120}$$

其中 $\mu=GM=1$,G_1 **等量的表达式如下**:

$$\begin{cases} G_1 = (1+\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega+u')/n_1 + (1-\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega-u')/n_2, \\ G_2 = (1+\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega-u')/n_1 + (1-\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega+u')/n_2, \\ G_3 = \sin\varepsilon[\cos(\omega-u')/n_5 - \cos(\omega+u')/n_6], \end{cases} \tag{5.121}$$

$$\begin{cases} G_4 = (1+\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega+u')/n_1 + (1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega-u')/n_2, \\ G_5 = (1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-u')/n_1 + (1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+u')/n_2, \\ G_6 = \sin\varepsilon[\sin(\omega-u')/n_5 - \sin(\omega+u')/n_6], \end{cases} \tag{5.122}$$

$$\begin{cases} n_1 = \omega_1 - \Omega_1 + n', & n_2 = \omega_1 - \Omega_1 - n', \\ n_3 = \omega_1 + \Omega_1 + n', & n_4 = \omega_1 + \Omega_1 + n', \\ n_5 = \omega_1 - n', & n_6 = \omega_1 + n'. \end{cases} \tag{5.123}$$

这里 Ω_1 **和** ω_1 **即第四章给出的一阶长期项系数**(J_2 **项**),**而** u'**和相应的** n'**就是太阳平黄经及其变率,而** n'**亦可用太阳平运动角速度,黄赤交角** ε **的计算公式见**(5.1)**式.**

上述 $\sigma_L^{(1)}(t)$**是直接部分,而间接部分**(**即与地球扁率** J_2 **项的联合效应**)**如下,记作**$[\sigma_L^{(1)}]_2$:

$$\begin{cases} [\Omega_L^{(1)}(t)]_2 = \dfrac{5\sin i}{\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)}I, \\ [\omega_L^{(1)}(t)]_2 = -\tan i\ \dfrac{(13-15\sin^2 i)}{\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)}I, \\ [M_L^{(1)}(t)]_2 = -3\sqrt{1-e^2}\tan i\ I. \end{cases} \tag{5.124}$$

其中

$$
\begin{aligned}
I &= \int^{t} \omega_1 i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\left(\frac{3}{8}k_0\right) n a^2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} [-\sin i\, G_7 + \sin i\, G_8 - 2\cos i\, G_9],
\end{aligned}
\tag{5.125}
$$

$$
\begin{cases}
G_7 = (1+\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega+u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_1^2}\right) + (1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega-u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_2{}^2}\right), \\
G_8 = (1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_1^2}\right) + (1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_4^2}\right), \\
G_9 = \sin\varepsilon\left[\sin(\omega-u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_5^2}\right) - \sin(\omega+u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_6^2}\right)\right].
\end{cases}
\tag{5.126}
$$

(2)短周期项 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$

$$
a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = -2k_0 a^3\left[A\left(\cos E + \frac{1}{2}e\right) + B\sqrt{1-e^2}\sin E\right],
\tag{5.127}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = -k_0 a^2 \sqrt{1-e^2}\Bigg[&\sqrt{1-e^2}A\left(\frac{1}{4}\cos 2E\right) + \\
&B\left(-\frac{e}{2}\sin E + \frac{1}{4}\sin 2E\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{5.128}
$$

$$
\begin{aligned}
i_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = -\frac{1}{4}k_0 a^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\Bigg[&\sqrt{1-e^2}\left(\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \frac{e}{4}\cos 2E\right)H_1 - \\
&\left(\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E\right)H_2\Bigg],
\end{aligned}
\tag{5.129}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = -\frac{1}{4}k_0 a^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\Bigg[&\left(\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E\right)H_1 + \\
&\sqrt{1-e^2}\left(\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \frac{e}{4}\cos 2E\right)H_2\Bigg],
\end{aligned}
\tag{5.130}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = -\cos i\ \Omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) - k_0\frac{a^2}{e}\Bigg[&\sqrt{1-e^2}A\left(-\frac{e}{2}\sin E + \frac{1}{4}\sin 2E\right) + \\
&B\left(e\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \frac{1}{4}\cos 2E\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{5.131}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = &-\sqrt{1-e^2}[\omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) + \cos i\ \Omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)] + \\
&5k_0 a^2\Bigg\{A\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E\right] + \\
&B\sqrt{1-e^2}\left[-\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) + \frac{e}{4}\cos 2E\right]\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{5.132}
$$

其中

$$\begin{cases} H_1 = \sin i[(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega+u') + (1-\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega-u')] - \\ \qquad \sin i[(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega-u') + (1-\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega+u')] + \\ \qquad 2\cos i\sin\varepsilon[\cos(\omega-u') - \cos(\omega+u')], \\ H_2 = \sin i[(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega+u') + (1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega-u')] - \\ \qquad \sin i[(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-u') + (1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+u')] + \\ \qquad 2\cos i\sin\varepsilon[\sin(\omega-u') - \sin(\omega+u')]. \end{cases} \tag{5.133}$$

上述各式中出现的卫星根数，都是平均根数 $\bar{\sigma}$，有关太阳的各种量意义同前.

3. 地影存在情况下的光压摄动解

此时，光压摄动的结构不同于无地影情况，考虑到地影的空间几何位置相对卫星的运动而言变化缓慢，可处理成卫星每圈进、出地影的位置相同，或以计算弧段中间一圈的进、出地影位置代替整个弧段的相应值. 于是光压摄动解全部变成长周期项，在计算弧段不太长的情况下可按二阶长期项处理，但公式右端涉及到的 Ω，ω 以及太阳位置量 u'，宜取 $(t-t_0)$ 的中间时刻的平均根数 $\bar{\sigma}_{1/2}$. 摄动解变为如下形式：

$$\begin{aligned} \Delta\sigma(t) &= \sigma_2(t-t_0) \\ &= [\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{L}} + [\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{S}}, \end{aligned} \tag{5.134}$$

其中

$$[\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{L}} = (1-\Delta E/2\pi)[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)], \tag{5.135}$$

$$[\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2\pi}[\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_1) - \sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_0)]n(t-t_0), \tag{5.136}$$

其中 E_0 和 E_1 各为卫星出地影和进地影时的偏近点角，这将由求解地影方程给出，见下面第 4 段. 有两点说明：

(1) (5.135)式右端出现的 $\Delta E = \widehat{E_1 E_0}$，是卫星在地影内运行的弧段(用弧度单位表示)，当无地影时 $\Delta E = 0$，解(5.135)退化为(5.115)～(5.120)的形式，只是当作长周期变化项处理：$[\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{L}} = \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)$. 而此时短周期变化项(5.136)式消失，即无地影时 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_1) = \sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_0+2\pi)$，导致 $[\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{S}} = 0$，这相当于不计算光压摄动短周期项，亦是合理的. 故可用(5.135)～(5.136)式代替地影存在与否两种情况的计算公式，而不必分别处理.

(2) $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 与 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(E)$ 的公式除 $M_{\mathrm{S}}^{(2)}$ 外全部用(5.115)～(5.120)和(5.127)～(5.131)式的形式，而原(5.132)式给出的 $M_{\mathrm{S}}^{(2)}$ 由下列两部分代替.

$$[\Delta M(t)]_S = [\Delta M]_1 + [\Delta M]_2, \tag{5.137}$$

$$[\Delta M]_1 = \frac{1}{2\pi}[M_S^{(2)}(E_1) - M_S^{(2)}(E_0)]n(t-t_0); \tag{5.138}$$

$$M_S^{(2)}(E) = k_0\frac{a^2}{e}\left\{A\left[\frac{1}{2}(3-e^2)e\sin E + \frac{1}{4}(1-3e^2)\sin 2E\right] - \sqrt{1-e^2}B\left[e\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) + \frac{1}{4}(1-2e^2)\cos 2E\right]\right\}, \tag{5.139}$$

$$[\Delta M]_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2a}\right)[\Delta a(t)]_S n(t-t_0). \tag{5.140}$$

其中$[\Delta a(t)]_S$ 即由(5.136)式给出的 a 的变化部分.

从(5.137)～(5.140)式可以看出,当无地影时,$[\Delta M(t)]_S$ 的两个部分,直接部分$[\Delta M]_1$ 和由 Δa 导致的间接部分$[\Delta M]_2$ 均为 0,即 M 的短周期项 $M_S^{(2)}(t)$同样消失.

4. 地影方程的解

卫星进出柱形地影边界处满足如下条件:

$$\cos\psi = A\cos f + B\sin f, \sin\psi = R/r, \tag{5.141}$$

其中 ψ 即卫星进出地影边界径向与太阳方向的地心张角,由此不难导出地影方程如下:

$$\begin{cases}\sin(\theta+f) = -\dfrac{1}{K}\left[1-\dfrac{R^2}{p^2}(1+e\cos f)^2\right]^{1/2}, \\ K^2 = A^2 + B^2, \qquad (K>0), \\ \theta = \arctan(A/B).\end{cases} \tag{5.142}$$

A,B 的表达式前面已有注明,$p=a(1-e^2)$,而 R 是圆柱形地影圆截面的半径,可取 $R=a_e=1$.

求解地影方程即寻找满足方程(5.142)的两个真近点角 f 对应的 f_0(出地影)和 f_1(进地影),具体求解方法是一迭代过程:

(1)首先令 $e=0$,由

$$\sin(\theta+f)^{(0)} = -\frac{1}{K}\left[1-\left(\frac{R}{p}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{5.143}$$

给出 f_0 和 f_1 的迭代初值 $f_0^{(0)}$ 和 $f_1^{(0)}$. (5.143)式两个解分别在第三和第四象限,而根据地影的特点要求弧 $f_0f_1>180°$,因此$(\theta+f)^{(0)}$在第四象限的一个解给出的是 $f_0^{(0)}$,另一个是 $f_1^{(0)}$. 如果无解,即$|\sin(\theta+f)^{(0)}|>1$,则取 $\sin(\theta+f)^{(0)}=-1$,$(\theta+f)^{(0)}=270°$,$f_0{}^{(0)}=f_1{}^{(0)}=270°-\theta$.

(2)由初值 $f_0^{(0)}$ 和 $f_1^{(0)}$ 分别代入原方程(5.142)进行迭代:

$$\sin(\theta+f)^{(k)}=-\frac{1}{K}\left[1-\frac{R^2}{p^2}(1+e\cos f^{(k-1)})^2\right]^{\frac{1}{2}},\qquad k=1,2,\cdots,$$

(5.144)

直到 f_0 和 f_1 满足精度要求终止，即相邻两次的 f_0 和 f_1 满足下列条件：

$$|f_0^{(k)}-f_0^{(k-1)}|<\varepsilon\,|f_1^{(k)}-f_1^{(k-1)}|<\varepsilon. \tag{5.145}$$

ε 是所给的精度要求，根据光压摄动量的大小和所采用的各种近似，可取 $\varepsilon=10^{-3}$.

注意，迭代时，$f_0^{(k)}$ 和 $f_1^{(k)}$ 是分别进行的，它们始终分别对应 $(\theta+f)^{(k)}$ 在第四象限和第三象限.

在迭代过程中，只要再有一次 $|\sin(\theta+f)^{(k)}|>1$，就认为无地影，此时可取 $f_0=0, f_1=2\pi$.

求得出、进地影位置 f_0 和 f_1 后，根据下列几何关系即可给出最终需要的 E_0 和 E_1：

$$\sin E=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos f}\sin f,\quad \cos E=\frac{1-e^2}{1+e\cos f}\cos f+e. \tag{5.146}$$

§5.4 大气阻力摄动

对于典型的有效面质比为 10^9 的人造地球卫星，如果运行高度在 300 km以上，大气阻力摄动的量级不会高于 10^{-6}，即对中低轨卫星的运动而言，大气阻力摄动量级亦可当作二阶小量来处理.

1. 大气阻力摄动加速度的近似公式

对于 200 km 以上的高层大气而言，实属稀薄大气，对于尺度不是特别大的航天器而言，其运动是处于自由分子流中. 高马赫数的航天器在这种状态的稀薄气体中飞行，所受的气动力主要表现为一种阻力，并有很好的近似表达式：

$$\boldsymbol{D}=-\frac{1}{2}(C_{\mathrm{D}}S)\rho V^2\left(\frac{\boldsymbol{V}}{V}\right), \tag{5.147}$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}, \tag{5.148}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ 各为卫星和大气相对地心坐标系的速度矢量. 公式(5.147)中有几个量必须处理好，下面分别加以说明.

(1)阻力系数 C_{D}，通常取

$$C_{\mathrm{D}}=2.2. \tag{5.149}$$

当高度降低后，特别是 150 km 以下，大气状态将处于自由分子流和连续介质流之间的过渡状态，阻力系数要随高度变化，而且还没有严格的计算公式，这里暂不考虑它.

(2) 大气阻力亦是表面力，卫星承受阻力的截面积 S 很重要，对阻力加速度而言，即面质比 S/m. 与光压摄动类似，要严格给出相应的 S/m，必须了解卫星的形状和姿态. 如果缺乏这种信息，只能采用一个等效的面质比，亦称有效面质比，$S/m=\mathrm{const}$.

(3) 大气运动速度 v_a，通常大气运动表现为一个旋转运动，其旋转角速度 ω_a 比较复杂，其值有一个范围，即

$$\omega_a=(0.8\sim1.4)n_e,$$

其中 n_e 是地球自转角速度. 不过，对于大气阻力摄动特别重要的低轨卫星，飞行高度 $h=200\sim400$ km，可取

$$\omega_a=n_e. \tag{5.150}$$

随着飞行高度的增加，大气阻力的影响减小，因此对中低轨卫星的运动而言，就采用(5.150)式的值.

(4) 大气密度模式 $\rho=\rho(\boldsymbol{r},t)$，这是一个极其复杂的问题，在目前大气模式的精度还不够高的情况下，取如下指数模式：

$$\rho=\rho_0\exp\left(-\frac{r-\sigma(r_0)}{H(r)}\right). \tag{5.151}$$

其中 ρ_0 对应 r_0，$\sigma(r_0)$ 是过 r_0 的等密度椭球面（或称扁球面），有：

$$\sigma=r_0\ \frac{1-\epsilon\sin^2\varphi}{1-\epsilon\sin^2\varphi_0}, \tag{5.152}$$

ϵ 是地球几何扁率. 在 $h=200\sim600$ km 范围内，密度标高 $H(r)$ 随 r 线性变化，且有

$$H(r)=H_0+\frac{\mu}{2}(r-r_0),\quad \mu=0.1. \tag{5.153}$$

考虑到密度随时间的变化（太阳辐射效应），取

$$\rho_0=\bar{\rho}_0(1+F^*\cos\psi^*), \tag{5.154}$$

$$F^*=\frac{f^*-1}{f^*+1},\quad f^*=\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}, \tag{5.155}$$

$$\cos\psi^*=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_m. \tag{5.156}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{r}}_m$ 是密度周日峰方向的单位矢量，其地心赤道球坐标表达式为

$$\boldsymbol{r}_m=\begin{pmatrix}\cos\delta_S\cos(\alpha_S+\lambda_m)\\ \cos\delta_S\sin(\alpha_S+\lambda_m)\\ \sin\delta_S\end{pmatrix},\quad \lambda_m\geqslant30^\circ. \tag{5.157}$$

这里 α_S 和 δ_S 是太阳的赤经赤纬，λ_m 是否取 $30°$（即太阳偏西 2^h）可视具体情况而定.

在具体引用上述大气密度分布公式时，参考点总是取初始近地点 p_0 对应的 r_{p_0}，于是密度公式即写成下列形式：

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{p_0}\exp\left(-\frac{r-\sigma(p_0)}{H(r)}\right)\\ &= \bar{\rho}_{p_0}(1+F^*\cos\psi^*)\exp\left(-\frac{r-\sigma(p_0)}{H(r)}\right),\end{aligned}\tag{5.158}$$

其中

$$\begin{cases}F^* = \dfrac{f^*-1}{f^*+1}, \quad f^* = \left(\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\right)_{p_0},\\ \sigma(p_0) = r_{p_0}(1-\epsilon\sin^2\varphi)/(1-\epsilon\sin^2\varphi_{p_0}),\\ \sin\varphi = \sin i\sin(f+\omega)\sin\varphi_{p_0} = \sin i\sin\omega_0,\\ H(r) = H_{p_0}+\dfrac{\mu}{2}(r-r_{p_0}).\end{cases}\tag{5.159}$$

计算中需注意首先要提供参考点处的平均大气密度 $\bar{\rho}_{p_0}$，它对应高度 h_{p_0}，有

$$h_{p_0}=a_0(1-e_0)-(1-\epsilon\sin^2 i_0\sin^2\omega_0),\tag{5.160}$$

其中根数 a_0, e_0, i_0 和 ω_0 是取初始平均根数还是初始瞬时根数均无妨，这里指的是参考点，与具体求摄动分析解用什么方法无关，只要计算参考点及其相应的各种参量（见公式(5.159)），采用统一的根数值即可.

2. 大气阻力摄动运动方程

对于旋转大气，其旋转速度 v_a 在 (U,N,W) 三个方向的分量为

$$\begin{cases}(v_a)_U = (v_a)_T\sin\theta, & \cos\varphi\cos i' = \cos i,\\ (v_a)_N = (v_a)_T\cos\theta, & \cos\varphi\sin i' = \cos(f+\omega)\sin i,\\ (v_a)_W = -r\cos\varphi\, n_e\sin i'.\end{cases}\tag{5.161}$$

其中 $(v_a)_T = r\cos\varphi n_e\sin i'$，$i'$ 是大气旋转方向与轨道面横向 (T) 之间的夹角，θ 是径向与速度方向（即 U 向）之间的夹角，并有

$$\sin\theta=1+O(e^2), \quad \cos\theta=O(e).\tag{5.162}$$

而卫星运动速度 v 在上述三个方向的分量为 $(v,0,0)$. 考虑到大气模式本身的状况，且反映大气旋转的特征量

$$\frac{rn_e}{v}\approx O(10^{-1}).$$

可对大气阻力 D 作一些简化，三个阻力加速度分量 U,N,W 可以写成下列形式：

$$\begin{cases} U = -\dfrac{1}{2}A_1\ \dfrac{(1+2e\cos f+e^2)}{a(1-e^2)}\rho, \\ N = 0, \\ W = -\dfrac{1}{2}A_2 r\cos u\sin i\left[\dfrac{1+2e\cos f+e^2}{a(1-e^2)}\right]^{1/2}\rho, \end{cases} \tag{5.163}$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = \left(\dfrac{C_D S}{m}\right)F^2, \quad A_2 = \left(\dfrac{C_D S}{m}\right)n_{\mathrm{e}}F, \\ F = \left(1-\dfrac{rn_{\mathrm{e}}}{v}\cos i\right)\approx\left(1-\dfrac{r_{p_0}n_{\mathrm{e}}}{v_{p_0}}\cos i\right). \end{cases} \tag{5.164}$$

将 U,N,W 代入摄动运动方程即得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_1 na^2}{(1-e^2)^{3/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{3/2}\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_1 na}{(1-e^2)^{1/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(\cos f+e)\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_2 a\sin i}{4(1-e^2)}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(1+\cos 2u)\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_2 a}{4(1-e^2)}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\sin 2u\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_1 na^2}{e(1-e^2)^{1/2}}\sin f(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\partial n}{\partial a}\right)\Delta a+\dfrac{A_1 na}{e(1-e^2)}\left(\dfrac{r}{a}\right)\sin f(1+e\cos f+ \\ \qquad e^2)(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\rho. \end{cases} \tag{5.165}$$

由此还可给出近星距 $r_p=a(1-e)$ 的变化率，即

$$\frac{\mathrm{d}r_p}{\mathrm{d}t}=-\frac{A_1 na^2}{(1-e^2)^{3/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(1-\cos f)(1-e^2)\rho\leqslant 0. \tag{5.166}$$

从上述摄动运动方程可知，如果大气静止，运动天体的轨道面则不变，而无论大气是静止还是旋转，半长径 a 和近星距 r_p 都在不断减小. 虽然 $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$ 右端因子 $(\cos f+e)$ 并不恒大于零，但后面将会从平均效应得知，e 亦是减小的. 这就表明，阻力摄动效应的主要特点是使运动天体的轨道不断变小变圆，此即阻尼作用下，轨道能量耗散的一种表现，这种耗散效应将是低

轨地球卫星轨道寿命长短的决定性因素.

3. 大气阻力摄动解[2]

上述大气阻力摄动运动方程(5.165)实为完整的卫星受摄运动对应的小参数方程中的二阶小量部分,即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f_0(a)+f_1(J_2)+f_2(\boldsymbol{D}/m)$$

中的 $f_2(\boldsymbol{D}/m)$. 仍采用平均根数法构造小参数幂级数解,只需给出二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$.

只保留上述对球形静止平均大气模式各种修正的一次项(10^{-1} 的量级),它们彼此的联合效应(10^{-2} 的量级)均略去. 因为大气模式本身的误差可有 5%~10%(即 10^{-1}),故在构造 $\sigma_2(t-t_0)$时,密度公式中保留到与此相当的 10^{-1} 量级的摄动量,有如下形式:

$$\rho=\rho_{p_0}\exp\left(-\frac{1}{H_{p_0}}(a-a_0+a_0e_0)-C\cos 2\omega_0\right)\times$$
$$\{1+C\cos 2\omega\cos 2E-C\sin 2\omega\sin 2E+\Delta(\mu,F^*)\}\exp(z\cos E),\tag{5.167}$$

$$\Delta(\mu,F^*)=\mu z_0^2\left(\frac{3}{4}-\cos E+\frac{1}{4}\cos 2E\right)+$$
$$F^*A^*\left(-\frac{e}{2}+\cos E+\frac{e}{2}\cos 2E\right)+F^*B^*\left(\sin E+\frac{e}{2}\sin 2E\right).$$

其中

$$z=\frac{ae}{H_{p_0}},\quad z_0=\frac{a_0e_0}{H_{p_0}}.\tag{5.168}$$

以这种形式的密度公式代入摄动运动方程(5.165)即可给出右函数 $f_2(\boldsymbol{D}/v)$ 的具体形式. 与前面各种摄动影响不同,在分解该右函数求平均值时,将要出现下列形式的积分及其结果:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nE\exp(z\cos E)=0,\qquad (n=1,2,\cdots),\tag{5.169}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nE\exp(z\cos E)=I_n(z),\qquad (n=0,1,2,\cdots).\tag{5.170}$$

$I_n(z)$称为第一类虚变量的贝赛尔函数,具体计算公式后面第 4 段中介绍.

根据上述平均值的表达,二阶长期项系数 σ_2 的表达式如下:

$$a_2=-B_1a^2n\left\{(I_0+2eI_1)+C(\cos 2\omega I_2)+\mu z_0^2\left(\frac{3}{4}I_0-I_1+\frac{1}{4}I_2\right)+\right.$$

$$F^* A^* \left(\frac{e}{2} I_0 + I_1 + \frac{3}{2} e I_2\right)\Bigg\},\tag{5.171}$$

$$\begin{aligned}e_2 = &- B_1 an\Bigg\{\left(\frac{e}{2} I_0 + I_1 + \frac{e}{2} I_2\right) + \frac{C}{2}\cos 2\omega (I_1 + I_3) +\\ &\mu z_0^2\left(-\frac{1}{2} I_0 + \frac{7}{8} I_1 - \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{8} I_3\right) +\\ &F^* A^* \left(\frac{1}{2} I_0 + \frac{e}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 + \frac{e}{2} I_3\right)\Bigg\},\end{aligned}\tag{5.172}$$

$$i_2 = -\frac{1}{4} B_2 a \sin i [(I_0 + \cos 2\omega I_2)],\tag{5.173}$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{4} B_2 a\ I_2 \sin 2\omega,\tag{5.174}$$

$$\begin{aligned}\omega_2 = &-\cos i\Omega_2 - B_1 an\Bigg\{C\sin 2\omega\left[\frac{1}{4} I_0 - \frac{1}{2e} I_1 - I_2 + \frac{1}{2e} I_3 + \frac{3}{4} I_4\right] +\\ &F^* B^* \left[\left(\frac{1}{2e} + \frac{e}{16}\right) I_0 + \frac{1}{2} I_1 - \left(\frac{1}{2e} - \frac{e}{4}\right) I_2 - \frac{1}{2} I_3 - \frac{5}{16} e I_4 -\right.\\ &\left.\frac{e}{4}(I_0 - I_2)\right]\Bigg\},\end{aligned}\tag{5.175}$$

$$\begin{aligned}M_2 = &-(\omega_2 + \cos i\Omega_2) + B_1 an\left\{F^* B^* \left[\frac{e}{4}(I_0 - I_2)\right]\right\} -\\ &\frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2a}\right) a_2 (t - t_0).\end{aligned}\tag{5.176}$$

上述摄动解表达式右端出现的慢变量 Ω,ω 以及太阳平黄经 $u' = L$，宜取$(t - t_0)$的中间值 $\bar{\sigma}_{1/2}$，即

$$\begin{cases}\Omega = \bar{\Omega}_0 + \dfrac{1}{2}\Omega_1 (t - t_0),\\ \omega = \bar{\omega}_0 + \dfrac{1}{2}\omega_1 (t - t_0),\\ L = L_0 + \dfrac{1}{2} n' (t - t_0).\end{cases}\tag{5.177}$$

其中 Ω_1 和 ω_1 是第 4 章给出的一阶长期项系数(J_2 项)，n' 即太阳平运动角速度. 见(5.1)式.

注意，为了计算公式的统一，凡长周期项变化按长期项处理的计算公式中，出现 Ω,ω 以及有关量时，均取 $\bar{\sigma}_{1/2}$ 代替 $\bar{\sigma}_0$.

(5.171)～(5.176)式中有关大气阻力的几个参数 B_1, B_2, C, μ, F^* 和 A^*, B^*，除 μ 和 F^* 在前面(5.153)和(5.159)式已给出外，其他各变量意义如下：

$$B_1 = \left(\frac{C_D S}{m}\right)\bar{\rho}_{p_0} F^2 \exp\left(-\frac{1}{H_{p_0}}(a - a_0 + a_0 e_0) - C\cos 2\omega_0\right), \tag{5.178}$$

$$B_2 = \left(\frac{C_D S}{m}\right)\bar{\rho}_{p_0} F n_e \exp\left(-\frac{1}{H_{p_0}}(a - a_0 + a_0 e_0) - C\cos 2\omega_0\right), \tag{5.179}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{H_{P_0}} r_{p_0}\right)\sin^2 i_0. \tag{5.180}$$

$\epsilon = 1/298.257$ 即前面所提到的地球几何扁率，A^* 和 B^* 的表达式与上一章的 A 和 B 类似，见公式(5.16)和(5.17)，只是那里的 Ω 在 A^* 和 B^* 中改为 $\Omega - \lambda_m$ 即可. 剩下的一个问题是(5.178)和(5.179)式右端指数函数中包含的 a，这与计算参考点处各参数采用的 a_0, e_0 不一样，按平均根数法，它应取 $\bar{a}_0$. 考虑到有地影时的光压摄动和大气阻力摄动，轨道半长径 a 有二阶长期项 $a_2(t-t_0)$，可在计算弧段 $(t-t_0)$ 中取 $\bar{a}_{1/2} = \bar{a}_0 + \frac{1}{2}a_2(t-t_0)$ 代替 $\bar{a}_0$.

4. 第一类虚变量 Bessel 函数 $I_n(z)$ 的计算

计算公式为

$$\begin{cases} I_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+k)!k!}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{n+2k}, \\ I_{n+1} = I_{n-1} - \left(\dfrac{2n}{z}\right) I_n, \qquad (n \geqslant 1), \\ z = \dfrac{ae}{H_{p_0}} = \dfrac{\bar{a}\,\bar{e}}{H_{p_0}}, \end{cases} \tag{5.181}$$

有

$$I_n(z) = O(z^n). \tag{5.182}$$

计算中 k 的取值由相对精度控制，若记

$$\begin{cases} [I_n(z)]_N = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{(n+k)!k!}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{n+2k} = \sum\limits_{k=0}^{N} [I_n(z)]_k, \\ [I_n(z)]_{k=N+1} = \dfrac{1}{(n+N+1)!(N+1)!}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{n+2(N+1)}, \end{cases} \tag{5.183}$$

则要求满足下列条件：

$$[I_n(z)]_{k=N+1} \big/ [I_n(z)]_N < \varepsilon^*. \tag{5.184}$$

这里 ε^* 是精度控制值，根据具体要求取值.

计算 $I_n(z)$ 比较麻烦，对于偏心率较小的卫星轨道，高度变化幅度 Δh 不会太大，在精度要求不太高时，可将密度表达式中的 $\exp(z\cos E)$ 展开，表

示成$(z\cos E)$的幂形式，取其几项即可，这可在摄动解中避免出现 $I_n(z)$.

§5.5　后牛顿效应

这是高速问题中，广义相对论对牛顿力学的修正. 对于受摄二体问题，相应的后牛顿摄动加速度为

$$A_{\mathrm{PN}}=\frac{\mu}{c^2r^2}\left[\left(\frac{4\mu}{r}-v^2\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+4\dot{r}v\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{v}\right)\right],\tag{5.185}$$

显然有

$$\varepsilon=|A_{\mathrm{PN}}|\Big/\left(\frac{\mu}{r^2}\right)=O\left(\frac{v^2}{c^2}\right).\tag{5.186}$$

其中 c 是光速，$\mu=GM$ 是中心天体的引力常数，在标准单位系统中 $\mu=1$. 但下面仍然保持写为 μ 的形式.

在太阳系中，水星绕日运动和人造卫星绕地球运动，这一摄动量级分别为 10^{-8}和 10^{-9}. 对水星运动而言，后牛顿项相对其他天体的引力摄动是不太小的，而对人造地球卫星（确切地说是指近地卫星）的运动，后牛顿项相对地球扁率摄动仅为三阶小量，即 $O(J_2^3)$，但仍然给出相应的摄动解.

由 $\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}$与轨道根数之间的关系可知，用径向、横向和轨道面法向三个分量表达的形式为

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix},\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}\dot{r}\\r\dot{\theta}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\sin f\ \sqrt{\mu/p}\\(1+e\cos f)\sqrt{\mu/p}\\0\end{pmatrix},\tag{5.187}$$

其中 $p=a(1-e^2)$. 由此可得 A_{PN}的 S,T,W 三分量为

$$\begin{cases}S=\dfrac{\mu^2}{c^2a^3}\left[-3\left(\dfrac{a}{r}\right)^2+10\left(\dfrac{a}{r}\right)^3-4(1-e^2)\left(\dfrac{a}{r}\right)^4\right],\\T=\dfrac{\mu^2}{c^2a^3}\left[4e\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\sin f\right],\\W=0.\end{cases}\tag{5.188}$$

将其代入相应的摄动运动方程即得

$$\dot{\sigma}=f_0(a,e)+f_{\mathrm{PN}}(\sigma,\varepsilon),\tag{5.189}$$

这里的后牛顿项 f_{PN}实为三阶小量，且只有长期部分和短周期部分，即

$$f_{\mathrm{PN}}=f_{\mathrm{C}}(a,e)+f_{\mathrm{S}}(a,e,M).\tag{5.190}$$

由平均根数法，积分后给出摄动解的长期项和短周期项如下[2]：

$$a_C(t-t_0)=0,e_C(t-t_0)=0,i_C(t-t_0)=0, \tag{5.191}$$

$$\Omega_C(t-t_0)=0, \tag{5.192}$$

$$\omega_C(t-t_0)=\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{3}{p}n(t-t_0), \tag{5.193}$$

$$M_C(t-t_0)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{3}{p}(1-e^2)^{-1}\left(3+\frac{7}{2}e^2+e^4\right)n(t-t_0), \tag{5.194}$$

$$a_S(t)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)(1-e^2)^{-2}[(14+6e^2)e\cos f+5e^2\cos 2f], \tag{5.195}$$

$$e_S(t)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{1}{p}\left[(3+7e^2)\cos f+\frac{5}{2}e\cos 2f\right], \tag{5.196}$$

$$i_S(t)=0, \tag{5.197}$$

$$\Omega_S(t)=0, \tag{5.198}$$

$$\omega_S(t)=\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{1}{p}\left[3(f-M)-\left(\frac{3}{e}-e\right)\sin f-\frac{5}{2}\sin 2f\right], \tag{5.199}$$

$$M_S(t)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{1}{p}\sqrt{1-e^2}\left[3e\left(\frac{r}{a}\right)\sin f-\left(\frac{3}{e}+7e\right)\sin f-\frac{5}{2}\sin 2f\right]. \tag{5.200}$$

上述 $\omega_C(t-t_0)$,对水星运动而言就是水星近日点进动项,这是后牛顿效应的一个重要结果.对于人造卫星的运动,视精度要求而决定取舍.

参 考 文 献

[1] 中国紫金山天文台编.中国天文年历.北京:科学出版社

[2] 刘林.航天器轨道理论.北京:国防工业出版社.2000

第 6 章　航天器轨道设计和星座设计

§6.1　航天器轨道设计的基本内容

航天器轨道设计的目的就是根据飞行任务需求来确定航天器的运行轨道参数以及发射时机，并使得航天器的运行成本最低. 轨道设计是一个复杂的优化过程，它涉及到许多参数之间的权衡. 通常在航天器执行空间飞行任务的不同时期，往往有不同的飞行轨道，譬如：用来检测和存贮航天器的停泊轨道，用于航天器在不同轨道之间转移的转移轨道，航天器执行正常飞行任务的工作轨道以及航天器任务结束后进入的废弃轨道等. 一个完整的轨道设计应包括航天器在不同飞行阶段的各种轨道，但在任务设计早期，可主要着眼于航天器的工作轨道.

轨道设计没有绝对的规则可循，不同的飞行任务，其设计思想、设计方法也不尽相同. 这一节主要介绍一些卫星轨道类型、轨道选择以及发射窗口选择等有关人造地球卫星轨道设计的基本知识. 有兴趣的读者可进一步阅读文献[1]的第五、六章和文献[2]的第七章内容.

1. 轨道类型概述

轨道设计首先是根据任务要求选择的合适的轨道类型. 按照轨道高度或者轨道特征可以分为低地球轨道(LEO：Low Earth Orbit)、中地球轨道(MEO：Medium Earth Orbit)、地球同步轨道(GSO：GeoSynchronous Orbit)、大椭圆轨道(HEO：Highly Eccentric Orbit)等.

LEO 的轨道高度在 2000 km 以下，周期约在 90～120 分钟之间，LEO 的优点有：卫星和用户设备相对简单，成本较低；由于高度低，因此无线电发射功率可以降低. 但是，LEO 也有一些明显的缺陷：单颗卫星覆盖范围很小，可视时间短(对周期为 105 分钟的轨道，可视时间大约为 15 分钟). LEO 轨道受大气阻力摄动影响明显，在此摄动的影响下轨道将不断变圆、

变低,因此卫星需要额外的燃料来提供补偿轨道衰减所需的能量.这种轨道常用于资源勘测的资源卫星,用于地区侦察的军用侦察卫星,用于全球气象观测和预报的气象卫星以及空间站、载人航天器等.

MEO的轨道高度一般在5000 km以上,周期为200分钟到十几个小时,大气阻力影响可忽略,轨道相对较稳定,便于精密定轨和精密星历预报,目前,GPS、GLONASS和未来的GALILEO等卫星导航系统都选用了这种轨道.MEO卫星地面覆盖范围较大,可视时间较长,如一颗GPS卫星约可覆盖地球34%左右的面积,最大可视时间达9小时以上.但MEO轨道Doppler频移缓慢,卫星的发射成本相对LEO卫星也要高的多.

GSO的轨道高度约为35800 km,包括地球静止轨道卫星(GEO:Geostationary Earth Orbit)和倾斜同步轨道卫星(IGSO:Inclined GeoSynchronous Orbit).GEO是倾角为0的地球同步轨道,相对于地面观测者,卫星好像在赤道上空静止不动,其星下点轨迹是一个点.GEO卫星可以提供大范围的地面覆盖(约40%),在其覆盖区域内任何一点,卫星均24小时可见.GEO已用于通信、电视转播、气象和导航卫星系统的增强(如美国的WAAS系统、欧洲的EGNOS系统和日本的MSAS系统等).但GEO也存在一些缺陷:它不能提供对极区的覆盖,卫星发射费用高,多普勒频移很低,此外GEO需要较频繁的定点维持,不利于精密定轨和精密星历的长期预报.

IGSO是指倾角不为0的地球同步轨道,其星下点轨迹是一个跨南北半球的“8”字,其交叉点在赤道上.这种轨道可对极区可以提供很好的覆盖,其交叉点在赤道上除了有长期漂移外,还存在由田谐项共振引起的长周期漂移,这种共振影响在不同的交叉点位置也会有不同,考虑到与GEO卫星的碰撞危险和服务的稳定性,也会需要频繁的轨道维持.此外,IGSO卫星发射费用也高,且在国际上应用很少,这在技术上也会存在一些风险.

HEO为大椭圆轨道,近地点高度约几百千米,远地点高度通常在几万千米以上.卫星在远地点附近运动较慢,可见时间长,适合对特殊地区的覆盖(如高纬度地区),前苏联的闪电(Molniya)通信卫星系统就采用这种轨道.HEO轨道的偏心率大,要解决拱线指向(近地点方向)的长期进动使其保持拱线静止,轨道倾角就必须取临界倾角(63.43°或116.57°).还有,对于HEO,信号空间传输时的损耗在近地点和远地点相差10 dB以上,这导致信号跟踪性能的下降,当然,理论上可通过改变卫星天线的增益来改善跟踪性能,但这将导致硬件的复杂性.HEO的Doppler频移变化也很大,这也将导致地面设备的复杂化.此外,HEO存在一个严重的缺陷:卫星穿过

Van Allen辐射带(2000～10000 km),这有可能导致卫星机械和电子设备故障.

除了上面这些轨道分类外,还有其它一些以轨道特征来描述的特殊轨道,如回归轨道、太阳同步轨道、冻结轨道等.所谓回归轨道是指卫星的星下点轨迹在卫星运行 n 圈以后重复的轨道.太阳同步轨道和冻结轨道在前面第四章中均有介绍,前者是指卫星轨道面在赤道上的进动速度等于地球公转角速度,这类轨道有一特点,就是卫星同方向通过同一纬度圈时的地方时相同.后者也叫拱线静止轨道,它是指轨道拱线指向在空间保持不变的轨道,这类轨道的特征是轨道偏心率和轨道形状不变,近地点幅角保持在 $90°$,因此,卫星通过同一纬度地区的高度保持不变.这种轨道的实现,通常是通过适当选择轨道周期、倾角和偏心率来达到拱线静止的目的.

2. 轨道选择

轨道选择是指根据任务总体以及各分系统对轨道提出的一些技术要求来确定卫星的有关轨道参数.首先,轨道根数 a,e 表示了轨道的大小与形状,决定了轨道近地点、远地点高度和轨道周期,因此 a,e 的选择其实就是选择轨道周期和近地点高度.

又由 $\sin\varphi_p=\sin i\sin\omega$($\varphi_p$ 为近地点的地心纬度)知近地点幅角 ω 可以由轨道倾角 i 和近地点位置决定.于是近地点幅角的选择可以通过选择近地点位置来代替.

$$\omega=\begin{cases}\sin^{-1}(\sin\varphi_p/\sin i), & \text{近地点位于升轨},\\ 180°-\sin^{-1}(\sin\varphi_p/\sin i), & \text{近地点位于降轨}.\end{cases} \tag{6.1}$$

升交点赤经 Ω 通常在轨道设计中由发射时间来最后确定,因此,在轨道选择时用升交点经度 Ω_G 来代替 Ω,$\Omega_G=\Omega-S$(S 为卫星发射时刻的格林尼治恒星时).

$$\Omega_G=\begin{cases}\lambda-\sin^{-1}(\tan\varphi/\tan i), & \text{入轨点位于升轨},\\ 180°+\lambda+\sin^{-1}(\tan\varphi/\tan i), & \text{入轨点位于降轨}.\end{cases} \tag{6.2}$$

这里(λ, φ)为入轨点的地心经纬度.这样,升交点经度 Ω_G 的选择也就由入轨点位置选择来代替.

综上,这六个轨道根数的选择可以用轨道周期、近地点高度、轨道倾角、近地点位置、发射时间和入轨点位置的选择来代替.

下面来讨论这几个参数的选择问题.

(1) 轨道倾角的选择

轨道倾角选择所需考虑的约束因素主要有：

1）对 LEO 卫星，轨道倾角不应小于被观测区域的最高纬度或最低纬度的绝对值.

2）对一次入轨的卫星而言，轨道倾角不能小于发射场的地心纬度. 若要发射倾角小于发射场纬度的轨道，则必须经过变轨，且应选择纬度接近轨道倾角的发射场发射，因为变轨道面的轨道调整是最耗能量的. 小倾角轨道卫星一般都从低纬度地区的发射场发射就是这个原因.

3）倾角的选择必须考虑运载火箭的能力. 轨道倾角越大，消耗运载火箭的能量就越多.

4）倾角选择必须注意与轨道周期和升交点的配合，使星下点轨迹经过被观测区域的重点目标.

5）必须注意地面台站的布设，以保证对卫星的跟踪、测量和控制.

6）必须注意发射方向的限制(瞄准方向及各级火箭落点的安全).

7）一些特殊轨道(太阳同步轨道、极轨道、临界倾角轨道等)对倾角的要求.

(2) 近地点位置的选择

对侦察或资源卫星，为了提高地面分辨率，一般把近地点位置安排在所需侦察或勘察地区的中部上空较为合适.

对返回式卫星，一般把近地点位置放在制动点后边(飞行方向的前方)，只有这样，才可能使卫星速度方向与当地水平面的夹角是负的，这可以节省制动火箭的能量.

对像 Molniya 这一类 HEO 卫星，近地点位置应放在主要服务区的天底方向. 比如卫星的主要服务区在北半球，则近地点位置应放在南半球上空，以保证卫星对北半球的服务时间.

此外，一些冻结轨道对近地点位置有特殊的要求.

(3) 近地点高度与轨道周期的选择

影响轨道高度选择的约束条件主要有：

1）高度对地面覆盖的影响. 高度越高，地面覆盖范围就越大.

2）高度对地面分辨率的影响. 高度越高，地面分辨率就越差.

3）高度与地面台站的关系. 高度越高，卫星可见时间就越长.

4）与轨道寿命的关系. 轨道越高，受大气阻力影响越小，寿命就越长. 近地卫星的轨道高度不能过低，轨道寿命必须大于工作寿命.

5）与测轨精度的关系. 这也与大气阻力有关，高度越高，大气阻尼摄动

影响就越小，测轨精度相应就可能高些.

6）空间电磁辐射环境的影响，特别 Van Allen 辐射带的影响等.

在考虑以上轨道高度选择的因素后，可进一步选择轨道的近地点高度和轨道周期. 近地点高度选择的主要考虑因素有：

1）地面分辨率一般以近地点处的分辨率作参考，所以应对此加以考虑.

2）轨道寿命必须大于工作寿命. 对 LEO 和 HEO 卫星，因大气密度一般以近地点处的大气密度作参考，所以应考虑轨道寿命与近地点高度之间的关系.

3）与测轨精度、预报精度的关系.

4）运载火箭的能力以及有效载荷的质量. 高度越高，所需燃料就越多. 有效载荷的质量越大，要到达同样的轨道高度所需的燃料就越多.

轨道周期选择除了要考虑高度选择的一些约束条件外，还有以下几个约束因素：

1）对返回式卫星，应考虑返回制动点的高度、速度、速度方向与方位等. 还有最后一圈卫星星下点应通过回收区的期望落点.

2）对侦察和资源等一类照相卫星，要考虑摄影的旁向重叠率.

3）要求星下点轨迹重复的回归轨道对应的轨道周期限制.

（4）入轨位置的选择

卫星入轨位置由发射场、运载火箭发射轨道的飞行程序以及对卫星星下点轨迹的安排所确定，它还与入轨航程、主动段、入轨段的测控及火箭各子级落点的散布有关.

3. 发射窗口的选择

发射窗口的选择问题就是确定将卫星发射到所设计的轨道平面的时刻. 由于轨道平面在惯性空间中是不动的（二体条件下），因此发射时刻就是指地面发射点位置旋转通过轨道平面的时刻，这个时刻取决于发射点的经纬度、卫星轨道倾角和升交点赤经. 从理论上讲，每天地面发射点通过轨道面两次，因此，每天都有两次可供发射的时机. 但事实上，并不是任意一天就都能进行发射，具体的可发射时间，即发射窗口还必须根据卫星任务和星上设备的各种要求来确定.

发射窗口选择实际上是根据某些限制条件来选择卫星轨道跟太阳（和月球）的相对位置关系. 影响发射窗口选择的因素很多，这里给出几个约束条件：

（1）卫星运行期间，太阳对地面目标的光照条件.

（2）在卫星运行时，太阳能电池、卫星热控等对太阳照射卫星的方向的要求.

（3）卫星姿态测量精度所要求的地球、卫星、太阳三者之间的几何关系.

（4）卫星处于地影时间长短的要求以及进出地影时卫星在轨位置要求.

（5）卫星运行时，地面站对卫星测控条件的要求（地球、卫星、太阳三者之间的几何关系）.

（6）返回式卫星对回收时间要求.

（7）其他有关条件如交会、卫星组网的要求.

由于发射窗口的约束条件很多，因此这就需要用系统工程的方法去分析各种约束条件的合理性，协调相互矛盾的因素，建立各条件与发射时间之间的数学模型，计算出各约束条件对应发射时间的交集，从而得到发射窗口.

§6.2 星座设计的基本问题

随着卫星应用需求的日益发展，特别是 20 世纪 80 年代以来，越来越多的航天任务仅靠单颗卫星已不可能完成，于是由多颗卫星组成的卫星星座开始引起人们的关注，成为许多航天任务的首选方案. 这一节将介绍星座的有关基本知识.

1. 基本概念

这里介绍星座设计中常采用的几种星座类型和有关的基本概念.

（1）星形星座

星形星座是早期研究的一种星座. 星形星座以各条轨道有一对公共节点，以及相邻同向轨道之间有相等（或近似相等）的相对倾角为特征. 如极轨卫星组成的星座属于星形星座. 星形星座的理论分析比较方便，但覆盖特性很差. 主要表现有以下两大缺点：

1）所有轨道都在两个节点相交，在两个节点附件过于密集，而两节点间的其他区域，卫星比较稀疏，因此覆盖很不均匀.

2）同向相邻轨道之间的卫星，相对位置基本不变，但反向轨道之间的卫星相对相位经常变化，所以其覆盖特性变化比较剧烈，实用价值不大.

（2）Walker-δ 星座

Walker-δ 星座是由一些高度相同的圆轨道卫星构成的一类均匀星座.

它具有如下一些基本特性：

1）每个轨道平面所含卫星数目相同，且卫星在轨道平面内均匀分布；

2）相邻轨道面间卫星的相对相位为一常数；

3）各轨道平面相对某一参考面的夹角相同，该参考面不一定是赤道面；

4）各轨道面和参考面的交点沿参考面均匀分布.

Walker-δ 星座可以用三个参数 $T/P/F$ 来描述其相对几何结构，T 为星座中卫星总数，P 为星座轨道平面个数，F 为相邻轨道间卫星的相对相位的度量参数，表示当一条轨道上的一颗卫星经过升交点时，相邻的东侧轨道上的相应卫星已经过了它的升交点，对应的相位为 $360°F/T$，F 的取值为 0 到 $P-1$ 之间的任意整数. 若给定了 Walker-δ 星座的轨道高度、参考平面、相对参考平面的倾角和某个轨道面相对参考面的升交点位置，则 $T/P/F$ 三个参数就唯一确定了这个星座.

Walker-δ 星座有如下优点：星座中各卫星所受长期摄动影响的主要部分均相同，从而使星座的相对几何结构保持基本不变，便于星座的维持；其次，对全球连续覆盖，Walker-δ 星座的几何结构具有某种“均匀性”和“对称性”，因此在全球范围内的覆盖相对较为均匀.

对以赤道为参考平面，参数为 $T/P/F$ 的 Walker-δ 星座，若令其中任一轨道面为第一轨道面，对应升交点赤经为 Ω_0，令该轨道面上任一颗卫星作为计数的第一颗星，对应的相位为 u_0，则星座中第 i 轨道面上第 j 颗卫星，其升交点赤经 Ω 和相位 u 可用下式确定：

$$\Omega = \Omega_0 + (i-1)\frac{360°}{P}. \tag{6.3}$$

$$u = u_0 + (i-1)F\frac{360°}{T} + (j-1)P\frac{360°}{T}, \tag{6.4}$$

（3）Rosette 星座

Rosette 星座是 δ 星座 $P=T$ 的一种特殊星座，因为这种星座的轨道图形在固定的天球上的投影犹如一朵盛开的玫瑰，故称其为 Rosette 星座.

由 N 颗卫星组成的 Rosette 星座满足以下的关系：

$$\begin{cases} \alpha_i = 2\pi i/N \quad i = 0,1,2,\cdots,N-1, \\ \beta_i = \beta, \\ \gamma_i = m\alpha_i \quad m = 0,1,2,\cdots,N-1. \end{cases} \tag{6.5}$$

其中，α_i 为第 i 颗卫星的升交点赤经，β_i 为第 i 颗卫星的轨道倾角，γ_i 为第 i 颗卫星从升交点起算的初始相位角.

（4）σ 星座

σ 星座是 δ 星座的子星座. 其特点是星座中所有卫星的星下点轨迹只有一条,且卫星等间隔分布. σ 星座通常用两个整数 T 和 M 作参考码,它和 Walker-δ 星座的 $T/P/F$ 参数的关系满足下式:

$$\begin{cases} P = \dfrac{T}{H[M,T]}, \\ F = \left(\dfrac{T}{PM}\right)(KP - M - 1), \end{cases} \tag{6.6}$$

式中 $H[M,T]$表示取 M 和 T 的最大公因子. 由于 F 为 0 到 $P-1$ 间的整数,因此整数 K 可以唯一确定.

（5）覆盖性能参数[2]

星座的覆盖品质需要一些覆盖性能指标来量化. 最普遍的也最常用的覆盖性能指标有覆盖百分比、最大覆盖间隙、平均覆盖间隙、时间平均间隙和平均响应时间等. 这里给出这些指标的定义:

覆盖百分比(Percent Coverage):地面上任一点的覆盖百分比等于被一颗或多颗卫星覆盖的时间除以总的仿真时间. 覆盖百分比可以直接表示地面某一点或某一地区被覆盖多少次,但它并不提供有关覆盖间隙分布的任何信息.

最大覆盖间隙(Maximum Coverage Gap):等于单独一个点所遇到的最大的覆盖间隙. 当研究多个点的统计特性时,我们可以取其最大覆盖间隙的平均值或其中的最大值,因此全球平均最大间隙是全部个别点的最大间隙的平均值,而全球最大间隙则是某一个别点覆盖间隙的最大值. 这个统计特性可给出某种最坏情况的信息,但由于用一个点或几个点就可确定这一结果,故它不能正确地排定星座覆盖性能地优劣. 因此,最大覆盖间隙是一个不好的性能指标.

平均覆盖间隙(Mean Coverage Gap):是指地面上任意一点的覆盖间隙的总长度除以覆盖间隙的次数. 覆盖间隙次数指在给定的仿真时间段中该点不被卫星覆盖的次数,覆盖间隙总长度是指该点不被卫星覆盖的总时间.

时间平均间隙(Time Average Gap):时间平均间隙是指按时间平均的平均间隙持续时间,也就是说,时间平均间隙就是间隙长度的平均. 该指标在数值上等于各次覆盖间隙长度的平方和除以总的仿真时长.

平均响应时间(Mean Response Time):响应时间是指从我们接收到要观测某点的随机请求开始到可以观测到该点为止的时间长度,最大响应时

间等于最大覆盖间隙. 如果一颗卫星在给定的一个时间步长内位于该点的视场中,则该时间步长的响应时间为 0;如果所讨论的点在某个覆盖间隙内,则响应时间就是到覆盖间隙终点的时间长度. 平均响应时间就是指在仿真时段内,各个时间步长的响应时间的总和对总的仿真时间的平均. 事实上,在计算平均响应时间时,由于对称性,响应时间可以用到覆盖间隙开始时的时间长度来代替,而这并不影响平均响应时间的最后计算结果,且方法更加简单. 这个性能指标既考虑了覆盖的统计特性,又考虑了间隙的统计特性,因此可以确定整个系统的响应能力. 平均响应时间是评价响应能力的最好的覆盖性能指标.

2. 卫星导航星座的常用性能指标

在卫星导航星座的设计中,还会有一些特殊的性能要求,如共视卫星个数、星座值、导航精度和服务可用性等,下面介绍几个常用的性能指标.

(1) 共视性要求

对同时提供三维定位和定时能力的导航星座而言,共视性要求就是在规定的截止仰角(如 5°)下,在任何时刻,服务区内任意地点同时可见的导航卫星数目应不少于 4 颗.

(2) 精度因子 DOP(Dilution of Precision)

对导航星座而言,系统所提供的定位几何是影响导航精度的一个重要因素. 一般导航系统的定位几何可以用 DOP 值来描述,定义为用户等效距离误差 UERE(User Equivalent Range Error)到最终定位误差或定时误差的放大系数,它反映了观测源几何位置对定位误差的影响. 常用的有下几种 DOP 参数: 几何精度因子 GDOP(Geometry Dilution of Precision)、位置精度因子 PDOP(Position Dilution of Precision),水平精度因子 HDOP(Horizontal Dilution of Precision)、垂直精度因子 VDOP(Vertical Dilution of Precision)和时间精度因子 TDOP(Time Dilution of Precision).

对同时支持用户解算接收机钟差的导航星座而言,各种 DOP 的计算如下:

在用户的本地坐标系(x 轴指向东,y 轴指向北,z 轴指向天顶)中,设矩阵 G 为用户到定位星 $S_i(i=1,2,\ldots,k,k\geqslant 4)$的方向余弦矩阵,即

$$G=\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_k & m_k & n_k & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

其中，l_i，m_i，n_i 分别为用户到定位星 S_i 的方向余弦. 记矩阵$(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G})^{-1}$的主对角线元素为 $\sigma_{ii}(i=1,2,3,4)$，则对零均值等精度的独立观测而言，各种 DOP 分别为

$$\mathrm{GDOP}=\sqrt{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}+\sigma_{44}},\tag{6.8}$$

$$\mathrm{PDOP}=\sqrt{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}},\tag{6.9}$$

$$\mathrm{HDOP}=\sqrt{\sigma_{11}+\sigma_{22}},\tag{6.10}$$

$$\mathrm{VDOP}=\sqrt{\sigma_{33}},\tag{6.11}$$

$$\mathrm{TDOP}=\sqrt{\sigma_{44}}.\tag{6.12}$$

需要注意的是，这些 DOP 的概念都是基于不加权的协方差矩阵得到的，而事实上来自各颗卫星的观测误差是不相同的，因此 DOP 并不能真实地反映系统的导航精度. 尽管如此，在星座设计时，为了撇开其他一些非星座因素的影响，人们还是经常用 DOP 值去衡量星座的导航性能.

(3) 星座值 CV(Constellation Value)

对导航星座，我们常用星座值 CV 来分析星座的导航性能. CV 反映了星座的几何特性和连续可用性，是星座性能的一个重要体现. 其定义为覆盖区内 DOP 值小于某一门限值的区域占整个服务区域的面积百分比在全时段上的平均值. 其计算公式为

$$\mathrm{CV}=\frac{\sum\limits_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}\sum\limits_{i=1}^{L}\mathrm{bool}(\mathrm{DOP}_t,i\leqslant \mathrm{DOP}_{\max})\times \mathrm{area}_i}{\Delta T\times \mathrm{Area}}\times 100\%.\tag{6.13}$$

这里，ΔT 为总的仿真时间，L 为网格个数，$\mathrm{bool}(X)$为布尔函数，若 X 为真则等于 1，若 X 为假则等于 0. $\mathrm{Area}=\sum\limits_{i=1}^{L}\mathrm{area}_i$ 为服务区域总面积，area_i 为第 i 个网格的面积.

(4) 可用性(Availability)[3]

可用性是指系统能为用户提供可用的导航服务的时间百分比，在卫星星座性能的评估中. 可用性是一个普遍使用的术语，依照对系统不同的性能需求，可定义为各种类型的可用性，如精度可用性，连续可用性等.

一个系统性能的可用性要求可在三个层次上进行计算：瞬间的，局部的，服务区域的. 瞬时可用性(IAL：Instantaneous Availability Level) $\alpha(i,t)$定义为在特定地点(i)和特定时刻(t)满足系统性能需求的概率. 最简单的情况下，IAL 等于 0 或 1，而在一般情况下 IAL 为 0 和 1 之间的某个概率值. 因此，可定义一个瞬时可用性指示函数(IAI：Instantaneous Avail-

ability Indicator)$\beta(i, t)$：当 IAL 超过最低 IAL 要求 $\alpha_{\min}$，$\beta(i, t)$的值为 1，反之则为 0. IAL 和 IAI 之间的关系表达式如下：

$$\beta(i, t) = \text{bool}\{\alpha(i, t) \geqslant \alpha_{\min}\}. \tag{6.14}$$

局部可用性(LAL：Local Availability Level)是指对特定地点在某一时间间隔的“平均”可用性. 首先，定义时间平均的局部可用性(TALAL：Time - Averaged Local Availability Level)为对地点 l 在时间间隔$(t_0, t_0+\Delta T)$内的瞬时可用性的时间平均，即：

$$\bar{\alpha}(i) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}\alpha(i, t), \tag{6.15}$$

这里 ΔT 是所计算的时间间隔.

同样也定义一个局部可用性的时间百分比(LAPOT：Percentage-of-Time Local Availability Level)为一段时间间隔内特定地点的 IAI 的平均，即：

$$\bar{\beta}(i) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}\beta(i, t). \tag{6.16}$$

这两种定义的含义是不同的，如果说“PDOP<6 的平均概率至少是 0.95”指的是 TALAL；然而如果说“至少在 95%的时间 PDOP<6 的概率超过 0.999”则指 LAPOT.

服务区可用性(SAL：Service Availability Level)是对整个服务区域内所有地点的局部可用性的平均，同样有基于 IAL 和 IAI 两种可用性：

$$A_S = \frac{1}{\text{Area}}\sum_{i=1}^{L}[\bar{\alpha}(i) \times \text{area}_i] = \frac{1}{\text{Area} \times \Delta T}\sum_{i=1}^{L}\sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}[\alpha(i, t) \times \text{area}_i], \tag{6.17}$$

$$B_S = \frac{1}{\text{Area}}\sum_{i=1}^{L}[\bar{\beta}(i) \times \text{area}_i] = \frac{1}{\text{Area} \times \Delta T}\sum_{i=1}^{L}\sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}[\beta(i, t) \times \text{area}_i]. \tag{6.18}$$

由 CV 值的定义可知，CV 是 A_S 对于不考虑卫星故障的理想星座时的一个特例.

根据星座状态的不同，瞬时可用性还可以分为以下几种基本的类型：理想的可用性，降阶的可用性和期望的可用性.

理想的可用性是最早定义的可用性，它是基于没有卫星损坏的理想星座来定义的，可表示如下：

$$\alpha_0(i, t) = \text{bool}\{R(i, t)\}. \tag{6.1}$$

这里,$R(i,t)$表示满足某种导航性能需求的情况.对理想星座,IAL 仅取 0 或 1.例如:若 PDOP<6 是系统的性能需求,则当 PDOP<6 时 IAL=1;反之,当 PDOP≥6 时 IAL=0.此外对理想星座,IAI 的值与 IAL 相同.

降阶的可用性是指星座中有卫星故障发生时的降阶星座所提供的服务可用性.假设星座中有 k 颗卫星故障,则可用性定义为 k 颗卫星损坏的所有组合的可用性平均值:

$$\alpha_k(i,t)=\frac{1}{C_M^k}\sum_{n=1}^{C_M^k}\mathrm{bool}\{R_n(i,t)\},\quad k=0,\cdots,M. \tag{6.20}$$

这里,M 为理想星座的卫星个数,符号 C_M^k 表示星座的 k 卫星损坏的所有组合:

$$C_M^k=\frac{M!}{k!(M-k)!}, \tag{6.21}$$

$R_n(i,t)$表示系统在某 k 颗卫星故障时的满足导航性能需求的情况.这时,降阶星座的 IAL 不再刚好等于 0 或 1,而是 0 与 1 之间的某个值.注意理想星座的 IAL 是(6.20)式在 $k=0$ 时的特例.IAL 在当卫星故障数进一步增加时变得更坏.

期望的可用性是指考虑所有可能的降阶星座的可用性的加权平均值.在 M 颗卫星的星座里,有 $M+1$ 种可能状态,用 $S_k(k=0,1,\cdots,M)$表示.S_0 是没有卫星损坏的状态,S_1 是有一颗卫星损坏的状态,等等.对每种星座状态 S_k,均给定一个概率值 P_k,其中$\sum\limits_{k=0}^{M}P_k=1$.考虑星座各种状态概率的可用性定义如下:

$$\alpha(i,t)=\sum_{k=0}^{M}P_k\alpha_k(i,t)=\sum_{k=0}^{M}P_k\frac{1}{C_M^k}\sum_{n=1}^{C_M^k}\mathrm{bool}\{R_n(i,t)\}. \tag{6.22}$$

理性星座的可用性是(6.22)式的一种特殊情况,此时:

$$P_k=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}$$

K 颗卫星故障的降阶星座的可用性也是(6.22)式的特殊情况,此时:

$$P_k=\begin{cases}1, & k=K,\\ 0, & k\neq K.\end{cases}$$

与期望的可用性相关的一个很重要的问题是怎样对星座卫星的状态概率进行建模或计算.一般而言,卫星状态概率可以通过基于 Markov 链分析卫星的故障和恢复率来得到,文献[3],[4],[5],[6],[7]对此有详细的讨论.

3. 星座覆盖分析方法简介

在星座设计研究过程中,人们提出了各种星座覆盖分析方法,其中较著名的和得以广泛应用的主要有外接圆方法、覆盖带方法和格网方法. 这里给出这些方法的简单介绍,详细的描述请参阅相关文献.

外接圆方法由 Walker 提出[8],主要是研究全球连续单重覆盖和多重覆盖问题. 它主要针对 Walker-δ 星座,但方法本身并没有对此作出限制. 外接圆方法分析星座和覆盖特性的准则是: 保证全球各地在任何时候都能在某个最小仰角以上看到用户要求的卫星数量. 在覆盖分析中用离开卫星星下点最远的一些点(相邻三颗卫星的的星下点组成的球面三角形的外接圆圆心)进行评估. 不断改变星座轨道倾角,就能够找出最坏情况下的最小的外接圆半径,从而得到最佳星座. 外接圆方法是一种基于几何的方法,直观、易于理解和接受. 它主要用于解决全球的单重和多重连续覆盖问题. 但该方法也存在一些问题: 首先,随着卫星总数的增长,计算所需时间的增长极为迅速. 也许正因为如此,外接圆方法最近十几年来没有得到发展. Walker 本人也深知此缺陷,但他在公开文献中并没有提出解决办法,而是别转它径,试图用“网格”“正多面体”“半正多面体”的方法来弥补,但效果不佳. 因而,寻找新的算法势在必行. 其次,外接圆方法设计出的星座往往其轨道面数等于卫星总数,即 $T/T/F$. 这样的星座有两个较大的缺陷: 第一,性能台阶太高,导致每上一个覆盖性能台阶要花费较多的经费. 第二,导致响应用户要求的应变能力太弱. 最后,外接圆方法无法评估导航星座最为关心的导航精度.

覆盖带方法最初由 Luders 提出[9],经由 Rider[10],[11]、Adams[12],[13] 和 Hopkins 等人的发展,已用于区域连续覆盖和全球连续覆盖等各种星座的设计. 覆盖带方法一般假设所采用的星座具有如下性质:

(1) 所有轨道为同一高度的圆轨道;

(2) 各轨道的倾角均相同;

(3) 轨道面内卫星均匀分布;

(4) 每一轨道面内的卫星数目大于 3,因为覆盖带方法要求同一轨道面内卫星的有效覆盖区相互重叠,形成一条环带.

覆盖带方法利用这些基本的约定,将覆盖要求转化为一些约束方程,求解这些方程组就可以获得满足覆盖性能的星座,但须注意这星座未必是最优的. 覆盖带方法简洁明了,具有比外接圆方法高得多的计算效率,但也具有因基本约定带来的不足和缺陷,而且它同样也无法评估导航星座的精度

性能.

格网方法最初是由 Morrison 在 1973 年对由圆形轨道和椭圆轨道构成的星座进行多重覆盖研究时所采用[14]，他分析了在地球表面构成的格网($10^\circ \times 10^\circ$)的每个点上，在某个最小仰角以上能看到的卫星数目. 后来 Bogen 用类似方法研究了星座覆盖[15]，但他选用的是矩形网格，格网的纬度间距缩小到 5°，经度间距仍为 10°. 格网方法的缺点是：格网间距较大时，计算结果的精度较差. 为了提高精度，就要缩小格网的间距，这样又会带来很大的工作量. 但格网方法的优点是简单易于实现，便于统计各类覆盖性能指标，且适用于各种用途的星座设计.

4. 星座设计的基本过程和准则

在开始设计星座时，一般我们都是从最简单的星座入手，如从 Walker-δ 星座、单平面赤道轨道或者从具有 1 个、2 个或 3 个轨道平面的极轨道开始工作. 有时我们还可以考虑椭圆轨道，或者用它来构成一个完整的星座，或者用它来补充星座以增强其性能. 大致来讲，星座设计的基本过程可描述如下：

(1) 确定任务需求，特别是性能需求和指标，以及性能增长和降级台阶的目标；

(2) 进行星座性能的综合评估. 如选择星座类型，评估覆盖性能和其他一些性能指标，分析性能增长与台阶以及高度台阶等问题.

(3) 形成设计文件，设计过程反复迭代至得到满足任务需求的最优或近优星座.

在设计过程中，一般我们用下面三个标准来评价每个星座的设计.

(1) 覆盖性能或可用性等其他一些指标. 一般不要在只有一个指标时就着手整个星座的设计.

(2) 性能增长和降级. 星座的性能增长和降级是实际星座设计中的一个关键问题. 对每一种星座，性能增长或降级情况是不同的. 在评价增长或降级时，我们假定在轨道平面内重新定相所花的推进剂代价适中，而改变轨道面是不现实的.

(3) 性能台阶. 我们应该评价每一个星座，看看是否存在这样的性能台阶，使星座中轨道平面的数目、轨道高度或其他关键的特征参数成为离散的台阶.

在设计时，往往要确定大量的参数，表 6.1 给出了星座设计中的一些待定参数和选择准则.

表 6.1　星座设计中的一些基本因素和选择准则

因　素	影　响	选择准则
主要设计变量		
卫星数目	决定成本和覆盖的主要因素	选择最少的卫星满足覆盖和性能台阶的要求
轨道高度	覆盖、发射和变轨成本	通常是成本和性能之间的系统级权衡
轨道平面数目	灵活性、覆盖性能台阶、发展和降级使用	以最少的轨道平面满足覆盖性能的要求
其他设计变量		
轨道倾角	决定覆盖的纬度分布	纬度覆盖和成本的总和权衡
轨道平面的相位	决定覆盖的均匀性	在各组独立的相位取舍中选择最佳覆盖
偏心率	任务的复杂性、可达的高度和覆盖与成本的关系	一般取 0，除非为满足特别需求才选择其它值

§6.3　星座的相对几何和覆盖重复周期

1．Walker 的工作

在星座设计的早期研究中，Walker 指出[16]，卫星星座中每颗卫星的星下点轨迹在某些条件下完全分离，但是在另外一些条件下却可以部分重合或完全重合．对星座标记为 $T/P/F$ 的 Walker-δ 星座，如果星座卫星采用 α 天（恒星日，下同）β 圈回归的轨道，Walker 给出了该星座的星下点轨迹条数计算方法：

$$E_{\alpha,\beta}=\frac{T}{K},\tag{6.23}$$

这里，K 由下式计算：

$$K=H[G,PJ],\tag{6.24}$$

式中

$$G=s\alpha+F\beta,J=H[s,\beta].\tag{6.25}$$

$s=T/P$ 为每个轨道面上的卫星个数，$H[a,b]$表示取 a 和 b 的最大公因子．

星座的覆盖重复周期是指星座遍历了对覆盖特性而言的所有不同星座构型的一段时间间隔．Walker 也给出了覆盖重复周期（GCRP）的计算

公式：

$$\mathrm{GCRP} = T_{\mathrm{orbit}} \frac{yz}{4T}, \tag{6.26}$$

式中，T_{orbit} 为卫星的轨道周期，而

$$y = H[F,\ P],\ z = H\left[2,\ \frac{T}{y}\right]. \tag{6.27}$$

单就星座的覆盖性能而言，经过一个覆盖重复周期后，星座中的卫星构型就开始重复，因此，在对星座覆盖性能的仿真中，一般只要取一个覆盖重复周期即可.

需要注意，Walker 给出的星下点轨迹的计算公式仅适用于 Walker 星座，而对于在区域星座中经常用到的非 Walker-δ 星座或由 Walker 星座中的部分卫星构成的星座，则不再成立，因此还有必要对星座的卫星相对几何关系进行进一步的分析. 此外，Walker 给出的星座覆盖重复周期的计算利用了球的旋转对称性，忽略了地球自转，因此只对全球覆盖的 Walker-δ 星座有效，而无法用以确定 Walker-δ 星座和其他一些非 Walker-δ 星座对某特定地区和地点的覆盖重复周期(为了和 Walker 给出的覆盖重复周期相区别，就称这种星座对某地区或地点的覆盖重复周期为区域覆盖重复周期).

2. 星座的相对几何

(1) 星座中任意两颗卫星是否有同一条星下点轨迹的判别法则

对参数为 $T/P/F$ 的 Walker-δ 星座中任一卫星$(i,\ j)$(表示第 i 轨道面第 j 颗卫星，$i=1,2,\cdots,P$；$j=1,2,\cdots,T/P$，下文同)，在 t_0 时刻其相位和升交点赤经分别为

$$u_{i,\ j} = u_0 + 360\left[\frac{F}{T}(i-1) + \frac{P}{T}(j-1)\right], \tag{6.28}$$

$$\Omega_{i,\ j} = \Omega_0 + \frac{360}{P}(i-1), \tag{6.29}$$

其中 u_0 为第 1 轨道面第 1 颗星的相位，Ω_0 为第一轨道面的升交点赤经.

定义这颗卫星星下点轨迹在 t_0 时刻前第一次由南向北过赤道时对应点的经度为该星下点轨迹的升交点经度 $\Omega_{i,\ j}^{\mathrm{G}}$，其值为

$$\Omega_{i,\ j}^{\mathrm{G}} = \Omega_{i,\ j} - S_0 + \frac{u_{i,\ j}\omega_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{s}}}, \tag{6.30}$$

其中 ω_{e} 为地球自转角速度，n_{S} 为卫星平均运动，S_0 对应 t_0 时刻的恒星时.

对 α 天 β 圈回归的回归轨道(在二体问题的情况下)而言，式(6.30)可

改写为

$$\Omega_{i,j}^{G}=\Omega_{i,j}-S_0+\frac{u_{i,j}\alpha}{\beta}. \tag{6.31}$$

下面对回归轨道讨论星下点轨迹重合的问题(下文若对卫星轨道没有特别说明,均是指回归轨道).对星座中任意的两颗卫星(i,j)和(m,n),若它们在同一条星下点轨迹上,则它们满足

$$\Delta\Omega^{G}=\Omega_{i,j}^{G}-\Omega_{m,n}^{G}=\kappa\frac{360}{\beta}, \tag{6.32}$$

其中 κ 为任意的整数.

把式(6.28),(6.29)和(6.31)代入式(6.32)整理后有

$$\left(\frac{\beta}{P}+\frac{\alpha F}{T}\right)(i-m)+\frac{\alpha P}{T}(j-n)=\kappa. \tag{6.33}$$

上式就是 Walker-δ 星座中卫星的星下点轨迹是否重合的一个判断准则.

(2) 一条星下点轨迹中两颗卫星间的轨迹长度和卫星相对顺序

对于在同一条星下点轨迹上的任意两颗卫星(i,j)和(m,n),它们星下点之间的轨迹长度(时间间隔)$\Delta\lambda$ 可用下式计算:

$$\Delta\lambda=T_{\text{orbit}}\left[\frac{360\,K-(\Delta\Omega_{m,n}^{G}-\Delta\Omega_{i,j}^{G})}{360\,\alpha/\beta}\right]_{\text{int}}+\frac{u_{m,n}-u_{i,j}}{n_{S}}. \tag{6.34}$$

式中方括号的下标 int 表示 K 为 1 到 α 之间惟一确定的整数,它使得方括号的值为 0 和 β 之间的整数,下文出现的 int 下标的含义也是如此;T_{orbit} 为卫星轨道周期.

应用式(6.28)和(6.32),式(6.34)可改写为

$$\Delta\lambda=T_{\text{orbit}}\left[\frac{K\beta-\kappa}{\alpha}\right]_{\text{int}}+T_{\text{orbit}}\left[\frac{F}{T}(i-m)+\frac{P}{T}(j-n)\right]. \tag{6.35}$$

或应用式(6.28),(6.32)和(6.33),式(6.34)亦可写为

$$\Delta\lambda=T_{\text{orbit}}\left[\frac{K\beta}{\alpha}-\left(\frac{\beta}{\alpha P}+\frac{F}{T}\right)(i-m)-\frac{P}{T}(j-n)\right]_{\text{int}}+T_{\text{orbit}}\left[\frac{F}{T}(i-m)+\frac{P}{T}(j-n)\right]. \tag{6.36}$$

下面来讨论 Walker-δ 星座中任一星下点轨迹上各卫星的的相对顺序.令 N 为一条星下点轨迹上的卫星个数,若指定卫星(i,j)为 0 号星,则 $\Delta\lambda$ 与卫星(m,n)相对 0 号星由西向东的顺序编号 l 之间存在以下关系:

$$\Delta\lambda=l\frac{\beta}{N}T_{\text{orbit}},l=1,\cdots,N-1. \tag{6.37}$$

综合式(6.34)和(6.37)不难得到确定卫星顺序编号 l 的关系式

$$\Delta\lambda = T_{\text{orbit}}\left[\frac{360\,K-(\Delta\Omega_{m,n}^{\mathrm{G}}-\Delta\Omega_{i,j}^{\mathrm{G}})}{360\alpha/\beta}\right]_{\text{int}}+\frac{(u_{m,n}-u_{i,j})}{n_{\mathrm{S}}}=T_{\text{orbit}}\frac{\beta}{N}l. \tag{6.38}$$

根据式(6.28)和(6.32),上式也可改写为

$$\left[\frac{K\beta-\kappa}{\alpha}\right]_{\text{int}}+\frac{F}{T}(i-m)+\frac{P}{T}(j-n)=\frac{\beta}{N}l, \tag{6.39}$$

或把式(6.28),(6.32)和(6.33)代入式(6.38)便可得另一形式的表达式:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{K\beta}{\alpha}-\left(\frac{\beta}{\alpha P}+\frac{F}{T}\right)(i-m)-\frac{P}{T}(j-n)\right]_{\text{int}}+\\&\frac{F}{T}(i-m)+\frac{P}{T}(j-n)=\frac{\beta}{N}l.\end{aligned} \tag{6.40}$$

(3) 相邻星下点轨迹间两相邻升交点的经度差

在进行区域星座的优化时,也需要调整卫星的的升交点经度,为了提高优化的效率,需要确定合适的升交点经度的调整范围,因此就需要确定星座相邻两条星下点轨迹之间的两相邻升交点之间的经度差. 对 Walker-δ 星座,这里给出计算升交点经度差的计算公式:

$$\Delta\Omega_{\mathrm{G}}=\frac{360}{\beta E_{\alpha,\beta}}. \tag{6.41}$$

3. 区域覆盖重复周期

Walker 给出了 Walker-δ 星座对全球的覆盖特性重复周期的计算公式,但是它既不适用于对任意指定区域或地点的覆盖重复周期的计算,也不适用于非 Walker-δ 星座的重复周期的计算.

在讨论星座的覆盖重复周期之前,我们先定义星下点重复周期为该条星下点轨迹上卫星星下点的分布出现重复的时间间隔,称其中最小的时间间隔为最小重复周期. 下文若无特别说明,星下点重复周期就是指最小重复周期.

对一个均匀分布的 Walker-δ 星座而言,其每条星下点轨迹上的卫星个数记为 N,卫星轨道周期记为 T_{orbit},则对于由其中任意 M ($M\leqslant N$)颗卫星的星下点重复周期 T_{sub},满足以下规律:

(1) $T_{\text{sub}}=\gamma T_{\text{orbit}}\dfrac{\beta}{N}$,$\gamma$ 为 N 的因子,当 $M=N$ 时,$\gamma=1$;

(2) 若(M, N)互为质数,则 $T_{\text{sub}}=\beta T_{\text{orbit}}$;

(3) 用一个 N 位二进制序列 $S_0(N)=a_1a_2\cdots a_N$(a_i,$i=1,\cdots,N$ 的取值为 0 或 1)来表示 M 颗卫星的分布,0 表示不选取此卫星,1 表示选取此

卫星,对这个二进制序列施以如下移位运算:

$$S_1(N) = \text{shift}(S_0) = a_N a_1 a_2 \cdots a_{N-1}. \tag{6.42}$$

若经过 L(显然,$1 \leqslant L \leqslant N$)次这样的移位运算后得到的一个二进制序列 S_L:

$$S_L = a_{N-L+1} a_{N-L+2} \cdots a_N a_1 a_2 \cdots a_{N-L}.$$

等于初始的二进制序列 S_0,则这 M 颗卫星分布的重复周期为$LT_{\text{orbit}}\beta/N$;

(4) 若在所有 M 颗卫星中相邻两颗星之间的轨迹长度中有一个等于 $(N-M)T_{\text{orbit}}\beta/N$,则这 M 颗卫星分布的重复周期 $T_{\text{sub}}=\beta T_{\text{orbit}}$.

我们接着定义:对某一特定区域或地点,我们称其上空的卫星几何构形重复出现的时间间隔为星座对该区域或地点的覆盖重复周期,称其中最小的重复间隔为最小覆盖重复周期(简称区域覆盖重复周期:RCRP).下文若无特别说明,重复周期均指最小重复周期.

假设我们所要讨论的卫星星座有 $E_{\alpha,\beta}$ 条星下点轨迹,记各条星下点轨迹的星下点重复周期为 $T^i_{\text{sub}}, i=1,2,\cdots,E_{\alpha,\beta}$,则该星座对任一地点的覆盖重复周期 RCRP 为:

$$\text{RCRP} = [T^1_{\text{sub}}, T^2_{\text{sub}}, \cdots, T^{E_{\alpha,\beta}}_{\text{sub}}]. \tag{6.43}$$

这里,式中的方括号表示取 $T^1_{\text{sub}}, T^2_{\text{sub}}, \cdots, T^{\text{E}_{\alpha,\beta}}_{\text{sub}}$ 的最小公倍数.注意对 GEO 卫星,我们定义其星下点重复周期为 1.

特别的,对 Walker-δ 星座,其对特定地区或地点的区域覆盖重复周期可以由下式计算:

$$\text{RCRP} = \frac{\alpha E_{\alpha,\beta}}{T}. \tag{6.44}$$

对任意指定区域,若星座的星下点轨迹在该区域上的分布不是对称的,则星座对该区域的覆盖重复周期也可以由(6.43)式计算.此外,需要指出的是,对星下点分布对称的区域,用(6.43)式求得的覆盖重复周期不一定是最小重复周期,其最小重复周期与星下点轨迹和该区域本身的对称程度以及卫星的具体分布有关.

§6.4　星座结构演化

根据第四章对卫星运动各种摄动的分析知,地球引力场的扁率摄动是对卫星运动影响最大的一种摄动因素.此外,由于在星座组网时卫星不可能准确进入其设计轨道,实际轨道与设计轨道之间总会存在一个偏差(下文称之为入轨偏差).通常这种入轨偏差在设计指标允许范围之内,但是它仍然

能够引起实际轨道和设计轨道在摄动变化上的不可忽略的差异，而且还存在因轨道半长轴偏差导致的卫星位置在轨道沿迹方向上的长期变化. 因此，这一节主要就地球非球形引力场的扁率摄动和入轨偏差的影响来讨论星座的结构演化.

1. 卫星轨道演化

(1) 卫星轨道摄动

卫星在地球中心引力和 J_2 项的作用下，其对应运动方程的轨道解包括长期变化项的形式可写为下列形式：

$$\begin{cases} a = a_0, \quad e = e_0, \quad i = i_0, \\ \Omega = \Omega_0 + \Omega_1(t - t_0) + O(J_2^2), \\ \omega = \omega_0 + \omega_1(t - t_0) + O(J_2^2), \\ \lambda = \omega + M = \omega_0 + M_0 + (n + \lambda_1)(t - t_0) + O(J_2^2), \end{cases} \tag{6.45}$$

其中下标“0”表示卫星的初始状态，λ 为卫星的沿迹量. 轨道长期变化率由下式表达：

$$\Omega_1 = -\frac{3J_2}{2p^2} n\cos i, \tag{6.46}$$

$$\omega_1 = \frac{3J_2}{2p^2} n\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right), \tag{6.47}$$

$$\lambda_1 = \omega_1 + M_1 = \frac{3J_2}{2p^2} n\left[\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) + \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1 - e^2}\right]. \tag{6.48}$$

这里，$p = a(1 - e^2)$. 以上(6.45)～(6.48)式中的轨道根数均为平根数.

从上面几个式子可以看出，对于轨道高度、偏心率和倾角相同的一组卫星，它们在地球扁率摄动作用下的轨道长期变化是相同的.

(2) 入轨偏差引起的轨道演化

卫星入轨偏差将导致实际轨道和设计轨道在摄动上的差异，而且还会因轨道半长轴偏差导致卫星位置在轨道沿迹方向上长期变化. 下面来分析入轨偏差的影响.

记卫星的入轨偏差为 $(\delta a_0, \delta e_0, \delta i_0, \delta\Omega_0, \delta w_0, \delta M_0)$，则由(6.46)和(6.48)式可得到由入轨偏差引起的轨道长期摄动的变化为

$$\delta\Omega_1 = \frac{7\Omega_1}{2a}\delta a_0 + \frac{4ae\Omega_1}{p}\delta e_0 - \frac{\sin i\,\Omega_1}{\cos i}\delta i_0, \tag{6.49}$$

$$\delta\lambda_1 = -\frac{7\lambda_1}{2a}\delta a_0 + \frac{ae}{p}\left[\frac{3J_2}{2p^2} n\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) + 3\lambda_1\right]\delta e_0 -$$

$$\frac{3J_2}{4p^2}n(5+3\sqrt{1-e^2})\sin 2i\delta i_0. \tag{6.50}$$

另外，半长轴偏差还将引起沿迹方向的长期变化，由(6.45)式中的最后一个方程可知这种变化为

$$\Delta\lambda = \delta n_0(t-t_0) = -\frac{3n}{2a}\delta a_0(t-t_0). \tag{6.51}$$

由于 Ω_1 和 λ_1 都是 $O(J_2 n/a^2)$ 的量级，相对于平运动 n 而言均为小量，因此在一般情况下，轨道半长轴的入轨偏差是决定卫星实际轨道相对设计轨道演化的主要因素. 在考察影响轨道面相对变化时，对小倾角的轨道，倾角的入轨偏差影响小而半长轴和偏心率的误差影响大，当星座采用极轨道时，倾角的入轨偏差影响达到最大而半长轴和偏心率误差的影响最小. 若星座采用小偏心率轨道时，偏心率入轨偏差的影响就可予以忽略.

2. 星座的结构演化

星座的几何结构可以用卫星的绝对位置或(和)卫星间的相对几何关系来确定. 一般卫星相对设计位置的变化反映了星座结构在时空中的绝对变化(称之为时空变化或绝对变化)，而卫星间相对位置变化则反映了星座结构的空间几何的相对变化(称之为空间几何变化或相对变化). 前面讨论的卫星轨道演化结果可以很清楚地描述星座结构时空变化的规律，这里不再重复，下面给出星座结构的相对变化.

(1) 空间几何变化的一般规律

卫星的相对位置关系可以用卫星轨道半长轴、偏心率、倾角以及卫星相位和升交点位置关系等来描述. 从前面的分析得知，地球扁率摄动不会引起卫星轨道半长轴、偏心率和倾角的长期变化，但会导致卫星相位和升交点赤经的长期变化，因此可以用卫星之间的相位和升交点赤经的变化来描述星座结构的空间几何变化.

对于星座中任意的两颗卫星 i 和 j，由式(6.46)和(6.48)可得地球扁率摄动引起的卫星轨道面之差和相位差的长期变化率为

$$\Delta\Omega_1 = -\frac{3J_2}{2}\left(\frac{n_i\cos i_i}{p_i^2} - \frac{n_j\cos i_j}{p_j^2}\right), \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_1 = \frac{3J_2}{2}\Bigg\{&\frac{n_i}{p_i^2}\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i_i\right)-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i_i\right)\sqrt{1-e_i^2}\right]-\\&\frac{n_j}{p_j^2}\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i_j\right)-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i_j\right)\sqrt{1-e_j^2}\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{6.53}$$

这里，$\Delta\Omega_1$ 为两卫星的轨道面赤经差的长期变化率，$\Delta\lambda_1$ 为两卫星相位差的

长期变化率. 式中的下标"i"表示卫星 i 的轨道参数,下标"j"表示卫星 j 的轨道参数.

由上两式可见,对卫星的轨道半长轴、偏心率和倾角均相同的星座,地球扁率摄动不会引起卫星之间的相位差和升交点赤经差的长期变化,这说明地球扁率的长期摄动不会引起这类星座结构的空间几何变化. 这个性质是很有意义的,因为尽管星座结构发生了时空变化,但只要星座的空间几何结构保持不变,则通过简单的坐标旋转和时间平移就可以证明星座的全球覆盖性能不会发生变化.

对于卫星的入轨偏差的影响,将两颗卫星各自的入轨偏差引起的轨道变化相减便可得两星之间位置的长期变化率为

$$\delta\Omega = (\delta\Omega_1)_i - (\delta\Omega_1)_j, \tag{6.54}$$

$$\delta\lambda = (\delta\lambda_1 + \Delta\lambda)_i - (\delta\lambda_1 + \Delta\lambda)_j, \tag{6.55}$$

式中的 $\delta\Omega_1$,$\delta\lambda_1$ 和 $\Delta\lambda$ 由(6.49)~(6.51)式分别给出.

对这种变化,即使这两卫星的轨道长期摄动影响相同,但由于两星入轨偏差的影响,两颗卫星之间的相位差和轨道面的位置差也会有缓慢的长期变化,从而引起星座结构的变化.

上面的讨论均是在历元地心天球坐标系这个"惯性"空间中进行的,反映了各种星座结构演化的一般特征. 特别是对全球覆盖星座,这些规律已基本描述了它的结构演化特征,但对区域覆盖星座,尚不能反映出它相对服务区域的地域性变化规律.

(2) 区域覆盖星座的地域性结构演化

这里所谓的地域性结构演化是指星座的几何结构相对地球上某一地点或地区的演化情形. 这种变化显然与地球自转相关,因而无法用上面给出的一般规律来描述,而应选择一些地固系中的参数来进行分析. 这里以星座卫星星下点轨迹的变化、同一条星下点轨迹上任意两颗卫星过轨迹上任意一点的时间间隔和相邻星下点轨迹上两颗卫星相继从南向北过赤道的时间间隔的变化为参数来讨论地域性的结构演化.

1) 星下点轨迹的变化

对星下点轨迹的变化,可以用卫星过升交点时刻对应的升交点经度 Ω_G 和星下点轨迹的最高纬度相对设计值的变化来描述. 星下点轨迹的最高纬度由卫星轨道倾角确定,由于倾角在 J_2 项和入轨偏差的作用下没有长期变化,因此最高纬度是一个常值.

对卫星在 t 时刻过升交点时对应的升交点经度 Ω_G 有

$$\Omega_G = \Omega - S_t = \Omega - S_0 - \mathrm{int}\left(\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{orbit}}}\right)\omega_e T_{\mathrm{orbit}}, \tag{6.56}$$

这里，Ω 为该时刻的升交点赤经，S_t 为该时刻的格林尼治恒星时，S_0 为卫星在 t_0 过升交点时的格林尼治恒星时，ω_e 为地球自转角速度，T_{orbit} 为卫星轨道周期.

上式对时间求导，有

$$\dot{\Omega}_G = \dot{\Omega} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{int}\left(\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{orbit}}}\right)\omega_e T_{\mathrm{orbit}}\right]. \tag{6.57}$$

式中，$\dot{\Omega}$为升交点赤经的长期变率，可用(6.46)和(6.49)式计算. 由于卫星轨道周期没有长期变化，但与设计值存在 $\delta T_{\mathrm{orbit}}$ 的入轨偏差，

$\delta T_{\mathrm{orbit}} = (3T_{\mathrm{orbit}}\delta a)/(2a)$，因此，在 t 时刻 Ω_G 的相对设计值变化为

$$\Delta\Omega_G = \delta\Omega_0 + \Omega_1(t-t_0) + \left[\delta\Omega_1(t-t_0) - \mathrm{int}\left(\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{orbit}}}\right)\omega_e \delta T_{\mathrm{orbit}}\right]. \tag{6.58}$$

由于轨道高度、偏心率和倾角都相同的卫星，由地球扁率摄动引入的 Ω_1 均相同，因此，对由同种轨道类型的卫星构成的星座，Ω_1 带来的升交点赤经长期漂移是星座的一种系统性的整体漂移，这种系统性的整体漂移不会影响全球星座的性能，但对区域星座，将导致其服务区域的漂移. 对式中方括号部分，由于星座中各颗卫星各自入轨偏差不同(对具体星座而言，每颗卫星的入轨偏差虽然是确定的，但它们的分布可认为是随机的)，因此，方括号部分的值也各不相同，而且它们的分布也可认为是随机的(虽然对具体的一颗卫星而言，这误差是确定的可预报的)，从而使星座原先整齐规则的星下点轨迹排列逐渐变得杂乱无序. 此外，方括号中的 $\delta T_{\mathrm{orbit}}$ 项是破坏星座结构的主项.

2) 卫星星下点间隔的变化

定义星下点轨迹在地图上 0 度经线东边的第一个升交点为该轨迹的参考升交点. 按照理想的设计星座，对同一条星下点轨迹上的两颗卫星相继通过轨迹上任一点的时间间隔 ΔT 可写为：

$$\Delta T = (\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})T_{\mathrm{orbit}} + \frac{u^{(1)}}{n} - \frac{u^{(2)}}{n}, \tag{6.59}$$

这里，上标(1)和(2)分别表示卫星 1 和卫星 2，κ 为小于 β(β 为卫星的回归参数，β 圈后轨迹重复)的非负整数，表示从过参考升交点时刻起算的卫星所经过的轨道周期数，u 为卫星相位.

将(6.59)式对时间求导数，有

$$\Delta\dot{T}=(\kappa^{(1)}-\kappa^{(2)})\dot{T}_{\text{orbit}}+\frac{1}{n}\left[\dot{u}^{(1)}-\frac{u^{(1)}}{n}\dot{n}\right]-\frac{1}{n}\left[\dot{u}^{(2)}-\frac{u^{(2)}}{n}\dot{n}\right]. \tag{6.60}$$

由上式可知，ΔT 的变化跟卫星的相位和半长轴的变化相关. 在只考虑 J_2 项作用的情况下，卫星的轨道半长轴没有长期变化，卫星相位的长期变化也相同，因此有：$\Delta\dot{T}=0$，即 ΔT 在这种情形下是不变的. 若同时再考虑卫星的入轨误差，则由(6.50)、(6.51)和(6.60)式可得：

$$\begin{aligned}\Delta\dot{T}&=\frac{1}{n^{(1)}}\left[\delta\lambda_1^{(1)}-\frac{3n^{(1)}}{2a^{(1)}}\delta a^{(1)}\right]-\frac{1}{n^{(2)}}\left[\delta\lambda_1^{(2)}-\frac{3n^{(2)}}{2a^{(2)}}\delta a^{(2)}\right]\\&\approx\frac{1}{n}\left[\delta\lambda_1^{(1)}-\delta\lambda_1^{(2)}-\frac{3n}{2a}(\delta a^{(1)}-\delta a^{(2)})\right],\end{aligned} \tag{6.61}$$

式中的 $\delta\lambda_1^{(1)}$ 和 $\delta\lambda_1^{(2)}$ 可根据(6.50)式计算得到. 由上式可得到一段时间内 ΔT 的变化为

$$\delta(\Delta T)=\frac{1}{n}\left[\delta\lambda_1^{(1)}-\delta\lambda_1^{(2)}-\frac{3n}{2a}(\delta a^{(1)}-\delta a^{(2)})\right](t-t_0)+C. \tag{6.62}$$

这里，$C=\kappa^{(1)}\delta T_{\text{orbit}}^{(1)}-\kappa^{(2)}\delta T_{\text{orbit}}^{(2)}$，$\delta T_{\text{orbit}}^{(1)}$ 和 $\delta T_{\text{orbit}}^{(2)}$ 分别为卫星 1 和卫星 2 的入轨周期偏差，可由半长轴偏差转换得到.

由式(6.50)和式(6.62)可知，地球扁率摄动不会影响两卫星通过星下点轨迹上任一点的时间间隔变化，而导致时间间隔变化的主要因素是半长轴的入轨偏差.

接下来讨论任意两条星下点轨迹上的两颗星由南向北过赤道的时间间隔的变化. 记 t 时刻轨迹 1 和轨迹 2 上的两颗星的相位分别为 $u^{(1)}$ 和 $u^{(2)}$，则它们下一次通过各自的参考升交点的时间分别为

$$t+L^{(1)}T_{\text{orbit}}^{(1)}+\frac{2\pi-u^{(1)}}{n^{(1)}} \text{ 和 } t+L^{(2)}T_{\text{orbit}}^{(2)}+\frac{2\pi-u^{(2)}}{n^{(2)}},$$

这里，$L^{(1)}$ 和 $L^{(2)}$ 为小于 β 的非负整数. 于是它们通过各自的参考升交点的时间间隔 $\Delta\tau$ 为

$$\Delta\tau=(L^{(1)}T_{\text{orbit}}^{(1)}-L^{(2)}T_{\text{orbit}}^{(2)})+\left(\frac{2\pi-u^{(1)}}{n^{(1)}}-\frac{2\pi-u^{(2)}}{n^{(2)}}\right). \tag{6.63}$$

同样，在考虑 J_2 项和入轨偏差的情形下，$\Delta\tau$ 的变化率为

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\tau}=\frac{\dot{u}^{(2)}}{n^{(2)}}-\frac{\dot{u}^{(1)}}{n^{(1)}}&=\frac{1}{n^{(2)}}\left(\lambda_1^{(2)}+\delta\lambda_1^{(2)}-\frac{3n^{(2)}}{2a^{(2)}}\delta a^{(2)}\right)-\\&\quad\frac{1}{n^{(1)}}\left(\lambda_1^{(1)}+\delta\lambda_1^{(1)}-\frac{3n^{(1)}}{2a^{(1)}}\delta a^{(1)}\right),\end{aligned} \tag{6.64}$$

对上式积分便可得一段时间内 $\Delta\tau$ 的变化为

$$\delta(\Delta\tau)=\Big[\frac{1}{n^{(2)}}\Big(\lambda_1^{(2)}+\delta\lambda_1^{(2)}-\frac{3n^{(2)}}{2a^{(2)}}\delta a^{(2)}\Big)-\frac{1}{n^{(1)}}\Big(\lambda_1^{(1)}+\delta\lambda_1^{(1)}-\frac{3n^{(1)}}{2a^{(1)}}\delta a^{(1)}\Big)\Big](t-t_0)+C_1. \tag{6.65}$$

这里，$C_1=L^{(1)}\delta T_{\text{orbit}}^{(1)}-L^{(2)}\delta T_{\text{orbit}}^{(2)}$.

由(6.50)式和(6.65)式可知，导致任意两条星下点轨迹上的两颗星过参考升交点的时间间隔变化的主要因素也是半长轴的入轨偏差，由此可见，卫星轨道半长轴的入轨偏差将决定区域星座几何结构的稳定性.

3. 卫星编队飞行的构形与保持问题

卫星编队是指具有特殊几何构形要求，并且卫星间的相对位置要求保持在一定精度范围内的卫星系统. 这种特殊形式的星座常应用于一些对地观测任务（如空基雷达），在任务期间需要通过主动和被动技术来控制和维持其编队的几何形状. 对卫星编队，星—星之间虽然相距较近，但各卫星运动对应的轨道力学问题仍是单星运动状态. 因两星质量之小可以认为它们之间没有任何动力学联系，这是考虑卫星编队飞行时共同遵循的一个前提. 在此前提下，星—星之间的特殊几何构形是如何形成的，下面对这一问题作一简单介绍，在第 7 章 §7.5 将有详细的论述.

（1）卫星编队或伴飞运动的基本方程

目前国内在卫星总体研究（或轨道设计）中，对编队或伴飞问题，都是采用相对运动的模式[17]. 作为一对双星（一颗为中心卫星，一颗为伴星），它们各自遵循绕地球运动的规律，总体上可以保持一定的空间构形. 当两星相距不大时，为了研究它们之间在空间中的相对几何构形，将各自绕地球运动转化为伴星相对中心卫星的运动. 其坐标原点为中心卫星（确切地说是中心卫星的质心），XY 坐标面即中心卫星绕地球运行的轨道平面，X 轴方向即中心卫星的径向（由地心指向中心卫星的方向）. 在此卫星坐标系中，经简单的坐标转换，即可获得伴星相对中心卫星的运动方程：

$$\begin{cases}\ddot{X}-2\dot{Y}=3X,\\ \ddot{Y}+2\dot{X}=0,\\ \ddot{Z}+Z=0.\end{cases} \tag{6.66}$$

注意，这一卫星坐标系实为一旋转坐标系，给出该方程的过程中，已假

定中心卫星的轨道为圆形(这与星座编队情况基本符合),该圆运动角速度确定了旋转坐标系. 不仅如此,上述方程还是线性化的结果,即丢掉了相对坐标量 X,Y,Z(相对卫星的地心距而言看作一阶小量)的高阶小量,此方程由 Clohessy W. H. 给出,故被称为 C－W 方程. 由于该方程的形式类似于月球运动理论中 Hill 问题[18]~[21]的基本方程(即构造月球绕地球运动在太阳摄动下的中间轨道时采用的一种近似力学模型所得到的运动方程),故也有人称它为 Hill 方程.

C－W 方程存在条件周期解,此解即可表明两星之间的相对构形. 由于两星之间没有任何的力学联系,而结果是伴星绕着中心卫星作一种椭圆运动,这很难让人理解. 下面直接从形式上的相对运动进行简单论述. 事实上,伴星相对中心卫星的运动,就是伴星绕一种平衡点的运动[22],它是相应平衡点的一种条件稳定性的反映,这一力学机制将在第 7 章 §7.5 中详细论述.

(2) 卫星编队与伴飞运动的特殊构形

方程(6.66)中的 Z 分量可与问题分离,它对应一谐振动,即伴飞卫星相对 XY 平面作上下的小振动,而对 X,Y 两分量,相应的运动解为

$$\begin{cases} X = C_1 + C_2 t + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ \dot{X} = C_2 - C_3 \sin t + C_4 \cos t, \\ Y = \dfrac{3}{2} C_1 t - \dfrac{3}{4} C_2 t^2 - 2C_3 \sin t + 2C_4 \cot t, \\ \dot{Y} = -\dfrac{3}{2} C_1 - \dfrac{3}{2} C_2 t - 2C_3 \cot t - 2C_4 \sin t, \end{cases} \tag{6.67}$$

可选择适当的初始条件,使 $C_1 = 0, C_2 = 0$,构成一个条件周期解. 具体的初始条件为

$$t = t_0: X_0, Y_0, \dot{X}_0 = Y_0/2, \dot{Y}_0 = -2X_0, Z_0, \dot{Z}_0. \tag{6.68}$$

此时相对运动的解为如下周期解:

$$\begin{cases} X = X_0 \cos t + (Y_0/2) \sin t, \\ Y = -2X_0 \sin t + Y_0 \cot t, \\ Z = Z_0 \cos t + \dot{Z}_0 \sin t, \\ \dot{X} = -X_0 \sin t + (Y_0/2) \cos t, \\ \dot{Y} = -2X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \\ \dot{Z} = -Z_0 \sin t + \dot{Z}_0 \cos t, \end{cases} \tag{6.69}$$

如果初始条件 $\dot{Z}_0$ 同时也满足下列关系：

$$\dot{Z}_0 = \pm (Y_0/2X_0)Z_0. \tag{6.70}$$

那么它们在 XY 平面、XZ 平面和 YZ 平面上的构形均为一椭圆. 相应的 XY 平面和 YZ 平面上的两个椭圆方程如下：

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1, \frac{Y^2}{C^2} + \frac{Z^2}{D^2} = 1, \tag{6.71}$$

其中

$$\begin{cases} A^2 = X_0^2 + Y_0^2/4, B^2 = 4A^2, \\ C^2 = 4A^2 = B^2, D^2 = (4Z_0^2/X_0^2)A^2. \end{cases} \tag{6.72}$$

上述条件周期运动即卫星编队飞行或伴飞的一种依据，但两星之间地距离不能大，否则方程(6.66)右端略去的高阶项很快就起作用，伴飞的构形会遭破坏. 若要保持，就必须按条件(6.71)进行轨控.

(3) 轨道摄动变化对卫星编队飞行相对构形的影响

上述讨论是在无摄情况下进行的. 事实上，由于各种摄动因素的存在，卫星轨道变化导致的位置偏离远大于上述初值偏离量，那么是否有可能选择适当的轨道配置(由轨道设计提供)，使两星轨道变化的差别尽量接近，从而保持特殊的几何构形？另一个问题是，对于这种真实的受摄运动，前面给出的初值控制条件(6.71)是否仍旧有助于两星空间构形的保持？这些都是卫星编队飞行中保持星—星之间特殊构形的重要问题.

关于摄动的影响，前面已针对卫星星座的空间整体几何结构作了必要的阐述，下面则着重就星—星之间在相距较近的情况下摄动如何影响星间特殊构形展开讨论.

在各种摄动因素的影响下，卫星轨道有 3 种不同性质的变化，即随时间增长的长期项和振幅一定的长、短周期项. 周期项最大振幅的量级是 10^{-3}，而对两星相接近的轨道配置，相互之间的周期变化就很接近，故对卫星编队飞行和伴飞运动而言，主要考虑各自轨道的长期变化，而长期变化项只依赖于 3 个根数 a, e, i，只要两星的轨道配置使两星的这 3 个根数接近，那么两个卫星的轨道变化量之差就会很小(参见公式(6.52)和(6.53))，这种轨道变化量之差相对两星位置差实为高阶小量，与 C-W 方程线性化过程中丢掉的高阶项相当.

事实上，卫星编队飞行或伴飞的空间构形(确切地说是相对构形)主要取决于第(2)段所阐述的伴星相对中心卫星所作的一种条件周期运动. 而在两星轨道根数适当选择的情况下，各种摄动影响导致两星轨道变化的差别

与相对运动方程线性化过程中丢掉的高阶项是相当的. 因此,与无摄情况类似,它们的相对构形在一定时间内同样是可以保持的.

对于编队或伴飞情况,两星之间的距离不会很大,这很关键. 这样两星的轨道根数不可能有太大的差别,特别是 a,e,i 三个根数,对于近圆轨道而言,Ω 与沿迹量($M+\omega$)的差别也不可能很大. 因此,这就决定了两星的轨道是相近的,只要选择轨道半长径 a 基本相同的近圆(即两者 e 亦接近)轨道即可,i,Ω 的差别将由两星的距离来制约,显然亦是较小的.

当然,仅仅作上述选择是不够的,还必须按构形条件(6.68)作轨道校正(实际飞行中的轨控措施),这样才能保持两星在空间的相对构形.

通过对高、中、低轨三种类型的伴飞情况的仿真计算表明,考虑各种摄动影响,只要按照构形条件(6.68)进行轨控,两星之间的相对几何构形仍受前面所阐明的平衡点附近条件周期运动的制约,在较长的时间段内保持不变. 至于具体的定量结果(包括构形变化的范围、保持的时间长度等),则与卫星的初始位置差等各种条件有关,但其基本规律确实受构形条件(6.68)所制约.

参 考 文 献

[1] 杨嘉墀,范秦鸿,张云彤等. 航天器轨道力学与控制(上). 北京:宇航出版社,1995

[2] Wertz J. R. ,Larson W. J. Space Mission Analysis and Design(3rd Edition),CA:Microcosm Press,1999

[3] Quyen Hua. Availability:What is Availability?Availability of What?Proceedings of the National Technical Meeting, Santa Monica, CA, 1997:14～16

[4] Clifford W. Kelley and Boeing. GPS Constellation State Probabilities Historical & Projected, Proceedings of ION NTM-99, 1999

[5] Durand J. M. and Caseau A. , GPS Availability, Part Ⅱ:Evaluation of Probabilities for 21-Satellite and 24-Satellite Constellations, NAVIGATION,1990, 37(3):285～297

[6] Mitch Sams and et al. Availability and Continuity Performance Modeling, Proceedings of The 52nd Annual Meeting,1996:289～298

[7] Rhonda Slattery and et al. New and Improved GPS Satellite Constellation Availability Model. Proceedings of ION GPS-99, 1999

[8] Walker J. G. Circular Orbit Patterns Providing Continuous Whole Earth Coverage, Royal Aircraft Establishment Technical Report 70211,1970

［9］Luders R. D. Satellite Network for Continuous Zonal Coverage, J. ARS, 1961, 31: 179～184

［10］Rider L. Optimized Polar Orbit Constellation for Redundent Earth Coverage, J. Astro. Sci., 1985, 33(2): 147～161

［11］Rider L. Analytic Design of Satellite Constellation for Zonal Earth Coverage Using Inclined Circular Orbit, J. Astro. Sci, 1986, 34(1): 31～64

［12］Adams W. S., Rider L. Circular Polar Constellation Providing Continuous Single or Multiple Coverage above a Specificial Latitude, J. Astro. Sci., 1987, 35(2): 155～192

［13］Adams W. S., Hopkins R. G. Minimal Arbitrarily Phased Constellation with a Given Inclination Providing Single Global Coverage, AAS Paper 1991～508

［14］Morrison J. J. A System of Sixteen Synchronous Satellite for Worldwide Navigation and Surveillance. Report FAA－RD－73－30, 1973

［15］Bogen A. H. Geometric Performance of the Global Positioning System, Aerospace Corp. Report SAMSO－TR－74－169, 1974

［16］Walker J. G. Continuous Whole Earth Coverage by Circular Orbit Satellite Patterns. Royal Aircraft Establishment Technical Report 77044, 1977

［17］林来兴. 见：微小卫星编队飞行及应用论文集. 北京：国家高技术航天领域专家委员会，2000：1～34

［18］Hill G W. American Journal of Mathematics, 1978, 1: 5～26

［19］Brown E W. Introductory Treatise on Lunar Theory Cambridge University Press, 1896

［20］Дубошин Г Н, Небесная Механика, Москва: ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА, 1964. 297～336

［21］Szebehly V. Theory of Orbit, New York and London: Academic Press, 1967. 602～629

［22］王歆，刘林，张轲. 飞行器测控学报，2001，20(4)：7～10

第 7 章　深空探测器运动的轨道力学基础

深空探测器是指飞离地球引力作用范围的月球和行星际探测器. 卫星型航天器运动的基本动力学模型对应一个受摄二体问题，而深空探测器运动的基本动力学模型则对应一个受摄的限制性三体问题(确切地说是受摄圆型限制性三体问题). 本章即阐述其基础部分圆型限制性三体问题的有关知识. 尽管探测器飞抵探测目标天体引力作用范围内经变轨转化为绕飞目标天体的卫星，其运动与人造地球卫星类似，亦对应一个受摄二体问题，但由于各目标天体的引力位特征与地球不一定相同或类似，相应的卫星运动有它自身的特殊内容，如月球卫星就是如此，这将在后面第 9 章中另有介绍.

§7.1　限制性问题的提出

一个 N 体系统，$N=n+k$，其中 n 个大天体和 k 个小天体，它们的质量分别记作 $M_i(i=1,2,\cdots n)$ 和 $m_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,k)$，这里所谓的小天体，是指它们的存在并不改变 n 个大天体的运动，即 $m_\alpha \ll M_i(\alpha=1,2,\cdots,k,i=1,2,\cdots,,n)$，那么研究 n 个大天体的运动将与 k 个小天体无关，限制性问题就是关于这 N 体系统，在 n 个大天体的运动作为已知的情况下，研究 k 个小天体的运动问题.

在太阳系中，研究小行星的运动就对应一个典型的限制性问题. 其原因很简单，即绝大部分小行星的质量相对太阳和各大行星而言是如此之小，小到由于它们的存在，各大行星相对太阳的运动没有“任何”改变，至少在当今测量精度下还无法使它们的影响体现出来，完全符合采用限制性问题的基本前提. 类似的力学系统在太阳系中还有很多，因此，限制性问题的提出确实具有广泛的天文背景. 深空探测器就是一个典型的人造小天体，其质量相对而言是如此之小，它的存在不会改变太阳系中任何一个自然天体(大、小行星，自然卫星，彗星等)的运动状况，研究它的运动当然是一个限制性问题.

限制性问题中最简单的模型是限制性三体问题，这是一个 $N=(2+1)$ 体系统，该三体系统中有两个大天体和一个小天体，例如月球探测器的运动就涉及地、月两个大天体. 由于小天体对两个大天体的运动没有影响，因此两个大天体的运动即对应一个简单的二体问题，其相对运动（或相对该两个大天体质心的运动）的解是一圆锥曲线. 既然讨论构成一个系统的问题，当然排除抛物线和双曲线的情况，即只有圆运动和椭圆运动，分别对应圆型和椭圆型限制性三体问题. 对这样一类限制性三体问题，就是在两个大天体运动确定的情况下，研究第三个天体——小天体的运动.

太阳系中大多数天体的轨道偏心率都较小，作为第一近似可以看成是圆轨道，例如月球绕地球的运动轨道偏心率是 0.0549，地球绕太阳的运动轨道偏心率是 0.0167. 因此，作为深空探测器的运动，其基本动力学模型可以处理成一个圆型限制性三体问题，其中两个大天体在发射阶段和深空探测器进入目标轨道运动阶段可能对应不同的两个大天体. 例如发射月球探测器，在发射阶段和运行阶段，两个主要的大天体均是地球和月球；而如果是火星探测器，发射段可能是地球和太阳，而飞往目标天体（火星）附近，两个大天体则变为火星和太阳.

深空探测器的运动除受相关的两个大天体的引力作用外，还受其他大天体的影响等，但相对而言作用较小，故可以将深空探测器的实际运动处理成一个受摄限制性三体问题，而只有圆型限制性三体问题存在一些可引用的基本特征，故确切地说是处理成受摄圆型限制性三体问题.

§7.2　圆型限制性三体问题的基本方程与 Jacobi 积分

1. 坐标系的选择与无量纲化

对于限制性三体问题，由于两个大天体 P_1 和 P_2 的运动状况已知，在研究小天体 P 的运动时，根据各种运动状态与需要，往往涉及到下面四种坐标系的选择，即

（1）P_i（$i=1$ 或 2）固定坐标系；

（2）P_i（$i=1$ 或 2）旋转坐标系，亦称固连坐标系；

（3）质心（P_1 与 P_2 二体系统质心 C）惯性坐标系；

（4）质心旋转坐标系，亦称会合坐标系. 这四种坐标系的原点分别在 P_i（注意，三个天体 P_1，P_2 和 P 均处理成质点）和质心 C 上，它们的基本平面

(xy 坐标面)和主方向将根据不同的天体系统和不同的问题来选择.

小天体 P 在某一大天体 P_i 附近运动(例如月球探测器从地球上发射后的初始飞行段和到达月球附近的飞行段),往往选取第一种或第二种坐标系,而当小天体 P 在两个大天体之间运动时,则采用后三种坐标系之一,特别是后两种.

为了讨论运动问题和计算上的方便,往往采用无量纲形式,即类似于研究人造地球卫星运动时所采用的计算单位,不仅使各物理量无量纲化,而且使它们的量级"标准化",便于问题的分析. 在这里,若是第一种运动问题,即小天体在大天体 P_i 附近运动,则相应的质量单位$[M]$,长度单位$[L]$和时间单位$[T]$,分别取为

$$\begin{cases} [M]=M_i, & (i=1 \text{ 或 } 2), \\ [L]=a_e, & (P_i \text{ 的赤道半径}), \\ [T]=(a_e^3/GM_i)^{1/2}. \end{cases} \tag{7.1}$$

此时新系统的引力常数 $G=1$. 对于第二种运动问题,由于小天体在两个大天体之间运动,其涉及的运动"尺度"与前者不同,为此,计算单位有下述习惯取法:

$$\begin{cases} [M]=M_1+M_2, \\ [L]=a_{12}, \\ [T]=[a_{12}{}^3/G(M_1+M_2)]^{1/2}=1/n. \end{cases} \tag{7.2}$$

同样,新系统的引力常数 $G=1$. 上式中 a_{12} 是两个大天体之间的相互距离,n 是它们之间相对运动的角速度. 在此计算单位系统中,两个大天体的质量分别为

$$1-\mu=\frac{M_1}{M_1+M_2},\quad \mu=\frac{M_2}{M_1+M_2}. \tag{7.3}$$

它们到质心的距离各为

$$r_1'=\mu,\quad r_2'=1-\mu. \tag{7.4}$$

下面的论述,各物理量均采用无量纲形式,并着重介绍体现限制性三体问题特点的有关内容. 至于小天体在大天体附近的运动,则属于卫星型探测器的运动问题,主要内容已在前面各章中作过介绍,需要进一步阐述的内容将安排在后面两章中.

2. 不同坐标系中小天体的运动方程

(1) 质心惯性坐标系中小天体的运动方程

质心惯性坐标系记作 C-XYZ,其原点在质心 C 上,XY 坐标面即两个

大天体相对运动平面，X 轴方向的选择，对应初始时刻 $t=t_0$ 时，两个大天体处于该坐标轴上，且指向大天体 P_1. 在此坐标系中，小天体和两个大天体的坐标矢量分别记为 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}_1'$ 和 $\boldsymbol{R}_2'$，于是小天体相对两个大天体的坐标矢量各为

$$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1',\quad \boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2'. \tag{7.5}$$

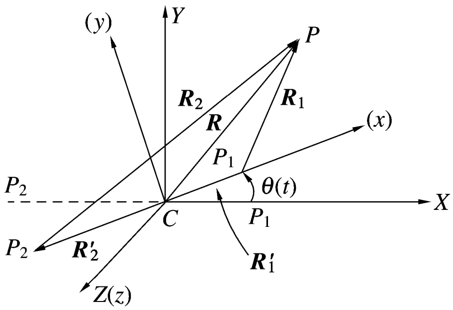

图 7.1　质心惯性系 C－XYZ 与质心旋转系 C－xyz

这些量的几何关系见图 7.1. 两个大天体相对质心 C 的运动为圆运动，其坐标矢量随时间 t 的变化关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}_1'=\begin{pmatrix}\mu\cos t\\ \mu\sin t\\ 0\end{pmatrix},\\ \boldsymbol{R}_2'=\begin{pmatrix}-(1-\mu)\cos t\\ -(1-\mu)\sin t\\ 0\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{7.6}$$

这里用到

$$t^*=t\cdot[T]=t/n,\quad \theta(t)=nt^*=t, \tag{7.7}$$

t^* 是有量纲时间，t 为无量纲时间，这表示在新计算单位系统中，两个大天体的圆运动角速度 $\dot{\theta}(t)=1$.

在上述坐标系和计算单位的选择下，小天体的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{R}}=\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)^{\mathrm{T}}=-(1-\mu)\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3}-\mu\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2^3}. \tag{7.8}$$

这里 U 为

$$U=U(R_1,R_2)=\frac{1-\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}, \tag{7.9}$$

其中

$$\begin{cases} R_1 = |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_1'| = [(X - \mu\cos t)^2 + (Y - \mu\sin t)^2 + Z^2]^{1/2}, \\ R_2 = |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_2'| = [(X + (1-\mu)\sin t)^2 + (Y + (1-\mu\cos t)^2 + Z^2]^{1/2}. \end{cases} \tag{7.10}$$

(2) 质心旋转坐标系中小天体的运动方程

质心旋转坐标系记作 $C\text{-}xyz$,该坐标系的旋转角速度就是两个大天体相对运动的角速度 $\dot{\theta}(t)$,即两个大天体一直处于 x 轴上,见图 7.1. 三个天体的坐标矢量各记为 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1'$和 $\boldsymbol{r}_2'$. 相应地小天体相对两个大天体的坐标矢量各为

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1', \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2', \tag{7.11}$$

其中

$$\boldsymbol{r}_1' = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2' = \begin{pmatrix} -(1-\mu) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

于是有

$$\begin{cases} r_1 = [(x-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} = R_1, \\ r_2 = [(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} = R_2. \end{cases} \tag{7.13}$$

$\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的转换关系为

$$\boldsymbol{r} = R_z(t)\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} X\cos t + Y\sin t \\ -X\sin t + Y\cos t \\ Z \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

$$\boldsymbol{R} = R_z(-t)\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x\cos t - y\sin t \\ x\sin t + y\cos t \\ z \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

这里 $R_z(t)$和 $R_z(-t)$是旋转矩阵,定义如下:

$$\begin{cases} R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \\ R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \\ R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{7.16}$$

由(7.15)式可给出

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{R}}=\dot{\boldsymbol{R}}_z(-t)\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}_z(-t)\dot{\boldsymbol{r}},\\ \ddot{\boldsymbol{R}}=\ddot{\boldsymbol{R}}_z(-t)\boldsymbol{r}+2\dot{\boldsymbol{R}}_z(-t)\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{R}_z(-t)\ddot{\boldsymbol{r}},\end{cases}\tag{7.17}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}_z(-t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\\ \dot{\boldsymbol{R}}_z(-t)=\begin{pmatrix}-\sin t & -\cos t & 0\\ \cos t & -\sin t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\ \ddot{\boldsymbol{R}}_z(-t)=\begin{pmatrix}-\cos t & \sin t & 0\\ -\sin t & -\cos t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\end{cases}\tag{7.18}$$

由上述转换关系，并利用旋转矩阵的性质：

$$\boldsymbol{R}_z^{-1}(t)=\boldsymbol{R}_z^{\mathrm{T}}(t)=\boldsymbol{R}_z(-t),\tag{7.19}$$

即可由质心惯性坐标系中的运动方程(7.8)转换为小天体在质心旋转坐标系中的运动方程，即

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+2\begin{pmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\\ 0\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{r}}\right)^{\mathrm{T}}.\tag{7.20}$$

其中

$$\Omega=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+U(r_2,r_2),\tag{7.21}$$

$$U(r_1,r_2)=\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}.\tag{7.22}$$

在限制性问题讨论中，为了某种需要，常将 Ω 表示为下列形式[1]：

$$\Omega=\frac{1}{2}[(x^2+y^2)+\mu(1-\mu)]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2},\tag{7.23}$$

进而可表示为一“对称”形式，即

$$\begin{aligned}\Omega&=\left\{\frac{1}{2}[(x^2+y^2+z^2)+\mu(1-\mu)]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right\}-\frac{1}{2}z^2\\&=\left\{\frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right\}-\frac{1}{2}z^2.\end{aligned}\tag{7.24}$$

为了与习惯用法相吻合，下面的论述中，如不加说明，Ω 的形式即(7.23)式.

(3) P_1(或 P_2)坐标系中小天体的运动方程

为了对某种问题分析的方便，将坐标原点从质心 C 移至两个大天体之

一，如P_1（或P_2）上. 将非旋转坐标系和旋转坐标系分别记为P_1-XYZ和P_1-xyz，XY坐标面仍为两个大天体相对运动的轨道平面，但X轴方向在起始时刻是由P_1指向P_2，在相应的旋转坐标系P_1-xyz中，P_2处于x轴的正方向上，见图7.2. 不妨称此坐标系为P_1和P_2固连坐标系.

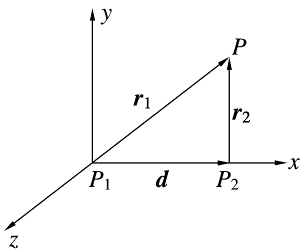

图7.2　P_1-xyz固连坐标系

在P_1-XYZ坐标系中，小天体相对P_1的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_1=-\frac{GM_1}{R_1^3}\boldsymbol{R}_1-GM_2\left(\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2^3}+\frac{\boldsymbol{D}}{D^3}\right),\tag{7.25}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}D\cos\theta\\D\sin\theta\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{D},\tag{7.26}$$

D是P_1到P_2之间的距离，θ是P_2绕P_1运转的角度，有$\dot{\theta}=n$.

在固连坐标系P_1-xyz中，小天体的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1=-\frac{GM_1}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1-GM_2\left(\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}+\frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right)+n^2\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\0\end{pmatrix}+2n\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\-\dot{x}_1\\0\end{pmatrix},\tag{7.27}$$

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}D\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{d},\tag{7.28}$$

若采用前面的无量纲量，则该方程变为下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1=-\frac{1-\mu}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1-\mu\left(\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}+\frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right)+\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\-\dot{x}_1\\0\end{pmatrix},\tag{7.29}$$

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}x_1-1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}.\tag{7.30}$$

3. Jacobi积分

方程(7.20)与(7.8)的主要差别是$\Omega=\Omega(x,y,z)$不显含t，于是由方程

(7.20)立即可得

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}=\frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\dot{z},$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v^2)=\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\ v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2.\end{cases}\tag{7.31}$$

由此给出一积分:

$$2\Omega-v^2=C.\tag{7.31}$$

此即质心旋转坐标系中的 Jacobi 积分,这是到目前为止,圆型限制性三体问题中找到的唯一的一个积分.

尽管质心惯性坐标系中,因 U 显含 t,不能由上述途径直接给出一积分,但同是一个圆型限制性三体问题,当然应同样存在一积分,仅给出的途径不同而已,通过两个坐标系之间的坐标转换,即可给出质心旋转坐标系中的 Jacobi 积分在质心惯性坐标系中的相应形式. 需要转换的三个量如下:

$$r_1,\quad r_2;\quad x^2+y^2;\quad v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2.$$

而

$$\begin{cases}r_1=R_1,\quad r_2=R_2,\\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{R}_z(t)\boldsymbol{R})\cdot(\boldsymbol{R}_z(t)\boldsymbol{R}),\end{cases}\tag{7.33}$$

即

$$x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

但 $z=Z$,因此有

$$x^2+y^2=X^2+Y^2.\tag{7.34}$$

最后由(7.14)式给出

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{R}_z(t)\dot{\boldsymbol{R}}+\dot{\boldsymbol{R}}_z(t)\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}(\dot{X}+Y)\cos t+(\dot{Y}-X)\sin t\\ -(\dot{X}+Y)\sin t+(\dot{Y}-X)\cos t\\ \dot{Z}\end{pmatrix}.$$

于是有

$$\begin{cases}v^2=\dot{\boldsymbol{r}}^2=V^2+2(\dot{X}Y-X\dot{Y})+(X^2+Y^2),\\ V^2=\dot{\boldsymbol{R}}^2=\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2,\end{cases}\tag{7.35}$$

将上述关系代入 Jacobi 积分(7.32),即得该积分在质心惯性坐标系中的表达形式:

$$\begin{cases}2U-[V^2+2(\dot{X}Y-X\dot{Y})]=C-\mu(1-\mu),\\ U=\dfrac{1-\mu}{R_1}+\dfrac{\mu}{R_2}.\end{cases}\tag{7.36}$$

如果 Ω 采用原形式(7.21),则积分(7.30)右端的 $\mu(1-\mu)$ 将不出现,读者引用时请注意 Ω 采用的形式.

§7.3 圆型限制性三体问题的特解

虽然限制性三体问题解的存在性已有证明[1],但并不表明能将相应的解具体给出.至今,只找到一个 Jacobi 积分,而且在一般情况下又不能归结为受摄二体问题,因此构造小参数幂级数解的方法通常也无法采用.尽管如此,该问题却存在五个特解,习惯上称为平动解,即平衡解,而由这五个平衡解和上一节导出的 Jacobi 积分,可以了解小天体运动的一些规律和特征.这些规律有它的实用价值,例如它可确定深空探测器的发射条件和提供其轨道运动的一些有关信息.

1. 五个特解——平动解(平衡解)

显然,在会合坐标系中讨论问题比较简单,相应的基本方程即(7.20)式.所谓平衡解,即满足下列条件的特解:

$$x(t)\equiv x_0,\quad y(t)\equiv y_0,\quad z(t)\equiv z_0.\tag{7.37}$$

其中 x_0,y_0,z_0 由初始条件给定,相应地有

$$\begin{cases}\dot{x}=0,\quad \dot{y}=0,\quad \dot{z}=0,\\ \ddot{x}=0,\quad \ddot{y}=0,\quad \ddot{z}=0,\end{cases}\tag{7.38}$$

这表明由(7.37)式所确定的空间点是一平衡点(亦称平动点).由方程(7.20)不难看出,在这种平衡点处应满足

$$\Omega_x=0,\quad \Omega_y=0\quad \Omega_z=0.\tag{7.39}$$

这里的 $\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z$ 分别表示 $\Omega(x,y,z)$ 对 x,y,z 的偏导数.条件(7.39)的具体形式为

$$\begin{cases}\Omega_x=x-\dfrac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3}-\dfrac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}=0,\\ \Omega_y=y\left(1-\dfrac{1-\mu}{r_1^3}-\dfrac{\mu}{r_2^3}\right)=0,\\ \Omega_z=-z\left(\dfrac{1-\mu}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}\right)=0,\end{cases}\tag{7.40}$$

因

$$\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\neq 0,$$

故要求

$$z=z_0=0. \tag{7.41}$$

即平衡点在 xy 平面上. 由 $z=0$，条件(7.40)将有下列两种情况：

$$y=0,\quad \begin{cases} x+\dfrac{1-\mu}{(x-\mu)^2}+\dfrac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0, \\ x+\dfrac{1-\mu}{(x-\mu)^2}-\dfrac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0, \\ x-\dfrac{1-\mu}{(x-\mu)^2}+\dfrac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0, \end{cases} \tag{7.42}$$

$$y\neq 0,\quad \begin{cases} 1-\dfrac{1-\mu}{r_1^3}-\dfrac{\mu}{r_2^3}=0, \\ x-\dfrac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3}-\dfrac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}=0. \end{cases} \tag{7.43}$$

对于第一种情况，方程(7.42)有三个实解：$x_1(\mu)$，$x_2(\mu)$，$x_3(\mu)$. 相应的三个平衡点在 x 轴上，分别记作 L_2，L_1，L_3，称为共线平衡点(亦称共线平动点)，其分布见图 7.3.

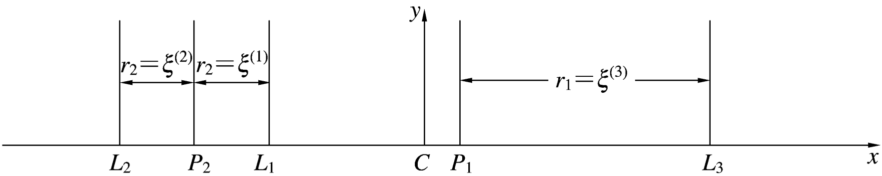

图 7.3　三个共线平衡点 L_1，L_2，L_3 与两个大天体 P_1，P_2 的相对位置

图中 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$ 各为平衡点 L_1 和 L_2 到大天体 P_2 的距离，$\xi^{(3)}$ 是平衡点 L_3 到大天体 P_1 的距离. 它分别由下列三个 μ 的幂级数表达[1]：

$$\xi^{(1)}=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}}+\cdots\right], \tag{7.44}$$

$$\xi^{(2)}=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}}-\cdots\right], \tag{7.45}$$

$$\begin{cases} \xi^{(3)}=1-\nu\left[1+\dfrac{23}{84}\nu^2+\dfrac{23}{84}\nu^3+\dfrac{761}{2352}\nu^4+\dfrac{3163}{7056}\nu^5+\dfrac{30703}{49392}\nu^6\right]+O(\nu^8), \\ \nu=\dfrac{7}{12}\mu. \end{cases} \tag{7.46}$$

相应的三个共线平衡解 $x_i(\mu)$ 即

$$x_1(\mu)=-(1-\mu)+\xi^{(1)}, \tag{7.47}$$

$$x_2(\mu)=-(1-\mu)-\xi^{(2)}, \tag{7.48}$$

$$x_3(\mu)=\mu+\xi^{(3)}, \tag{7.49}$$

这三个共线平衡解亦称为共线平动解.

当 $\mu=0$ 时,有

$$\begin{cases} x_1(\mu)=x_2(\mu)=-1, \\ x_3(\mu)=1, \end{cases} \tag{7.50}$$

而当 $\mu=1/2$ 时,则有

$$\begin{cases} x_1(\mu)=0, \\ x_2(\mu)=-1.198406, \\ x_3(\mu)=-x_2(\mu), \end{cases} \tag{7.51}$$

三个共线平衡解的位置 $x_i(\mu)$ 以及两个大天体的位置 $x(P_1)$ 和 $x(P_2)$ 在 x 轴上随 μ 值的变化,见图 7.4.

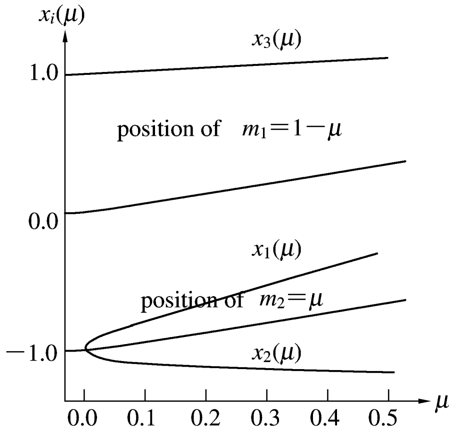

图 7.4 平衡解和大天体的位置随 μ 值的变化

对于后一组方程(7.43),其解为

$$r_1=r_2=1. \tag{7.52}$$

这表示相应平衡点与两个大天体呈等边三角形,故称此平衡解为等边三角形解(亦称三角平动解). 该解有两个对称平衡点 L_4 和 L_5,各对应

$$\begin{cases} x_4=x_5=-\dfrac{1}{2}+\mu, \\ y_4=+\sqrt{3}/2, \quad y_5=-\sqrt{3}/2. \end{cases} \tag{7.53}$$

2. Jacobi 常数及其五个临界值 $C_i(i=1,2,\cdots,5)$

根据(7.32)式表达的 Jacobi 积分：

$$2\Omega(x,y,z)-v^2=C,$$

可给出五个平衡点 $L_i(i=1,2,\cdots,5)$对应的 $C_i(\mu)$值. 在 L_i 处，有 $v^2=0$(注意，这是会合坐标系中的速度)，因此给出平衡点对应的 C 值如下：

$$C_i(\mu)=2\Omega(x_i(\mu),0,0),\quad i=1,2,3; \tag{7.54}$$

$$C_i(\mu)=2\Omega(x_i(\mu),y_i,0,),\quad i=4,5. \tag{7.55}$$

其中 $y_4=\sqrt{3}/2,y_5=-\sqrt{3}/2$. 对 L_1,L_2,L_3 有

$$C_i(\mu)=[x_i^2(\mu)+\mu(1-\mu)]+2\left[\frac{1-\mu}{|x_i(\mu)-\mu|}+\frac{\mu}{|x_i(\mu)+(1-\mu)|}\right], \tag{7.56}$$

对 L_4 和 L_5 有

$$C_4(\mu)=C_5(\mu)=3. \tag{7.57}$$

由(7.56)和(7.57)两式和 $x_i(\mu)$与 μ 值的关系可知，五个平衡点处对应的 Jacobi 积分常数值 $C_i(\mu)$有如下关系：

$$3=(C_4,C_5)\leqslant C_3(\mu)\leqslant C_2(\mu)\leqslant C_1(\mu)\leqslant 4.25, \tag{7.58}$$

它们各自随 μ 值的变化见图 7.5.

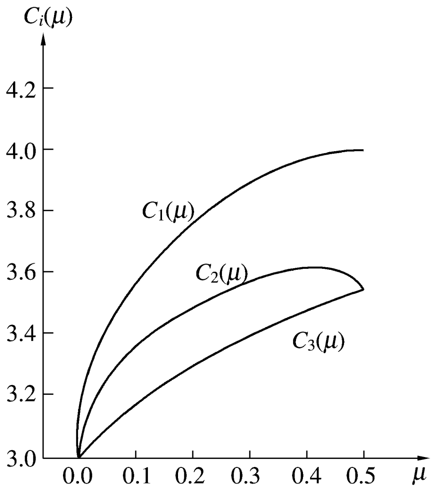

图 7.5　Jacobi 常数随 μ 值的变化

太阳—行星系统和地—月系统对应的圆型限制性三体问题，三个共线平动点的位置 $x_i(\mu)$及其相应的 Jacobi 常数 $C_i(\mu)$，分别列于表 7.1 和 7.2：

表 7.1 共线平动点的位置 $x_i(\mu)$

	μ	x_2	x_1	x_3
太阳—水星	0.00000017	−1.00382039	−0.99618898	1.00000007
—金星	0.00000245	−1.00937503	−0.99067832	1.00000102
—地 月	0.00000304	−1.01007019	−0.98999093	1.00000126
—火 星	0.00000032	−1.00476578	−0.99524867	1.00000013
—木 星	0.00095388	−1.06883052	−0.93236559	1.00039745
—土 星	0.00028550	−1.04605727	−0.95476098	1.00011896
—天王星	0.00004373	−1.02458081	−0.97572949	1.00001822
—海王星	0.00005177	−1.02601130	−0.97433032	1.00002157
—冥王星	0.00000278	−1.00977551	−0.99028227	1.00000116
地—月	0.01215057	−1.15568210	−0.83691521	1.00506264

表 7.2 共线平动点对应的 Jacobi 常数 $C_i(\mu)$

	μ	C_2	C_1	C_3
太阳—水 星	0.00000017	3.00013043	3.00013065	3.00000033
—金 星	0.00000245	3.00077756	3.00078083	3.00000490
—地 月	0.00000304	3.00089604	3.00090009	3.00000607
—火 星	0.00000032	3.00020261	3.00020304	3.00000065
—木 星	0.00095388	3.03844172	3.03971380	3.00190682
—土 星	0.00028550	3.01771636	3.01809709	3.00057092
—天王星	0.00004373	3.00521010	3.00536840	3.00008745
—海王星	0.00005177	3.00582087	3.00588991	3.00010354
—冥王星	0.00000278	3.00084481	3.00084851	3.00000556
地—月	0.01215057	3.18416325	3.20034388	3.02415006

这里说明两点:

(1) 表 7.1 和表 7.2 中的数据是直接引用文献[1]中给出的结果,所用的有关各大行星和月球的基本数据和目前给出的数值可能有微小差别,故这里列出的数据只是为了说明所阐述内容. 读者如有需要,可直接根据前两段给出的方法,利用新的基本数据进行计算,但结果与表 7.1 和表 7.2 的数

据不会有明显差别.

（2）关于三个共线平动点的排列，若按原有习惯[1]，是按三个平动点的 x 坐标进行排列的，而在当今的某些领域，特别是航天界，是按“能量”大小排列的（这种排列有它的特点），将 L_1 和 L_2 的位置互换，即两个大天体之间的平动点称为 L_1，另一个为 L_2，本书的排列就是这样，请读者注意.

3. 零速度面与运动可能区域

（1）零速度面及其变化

既然 Jacobi 积分（7.32）是圆型限制性三体问题的一个积分，因此，下列曲面

$$2\Omega(x,y,z)=C, \tag{7.59}$$

即为零速度面，在此曲面上小天体的运动速度为 0，积分常数由初始条件确定，有

$$C=2\Omega(x_0,y_0,z_0)-v_0^2, \tag{7.60}$$

零速度面的几何结构将随 Jacobi 常数 C 值的变化而变化. 为了便于看清这一变化，用零速度面在 xy 平面上的截线（零速度线）来描述，随 C 值的变化见图 7.6～7.9.

（2）运动可能区域

上述四幅图（图 7.6～7.9）中，零速度面将整个空间分为两种区域，阴影部分对应 $v>0$，此即小天体运动的可能区域，而阴影外的另一部分则对应 $v<0$，此即运动的禁区，小天体不可能从 $v>0$ 的阴影区穿过零速度面而进入禁区（因 $v<0$ 是不可能的）. 小天体在运动过程中若达到零速度面，那只可能沿零速度面的法线方向与其相接，而相接后又沿此法向返回原区域.

从上述四幅图的变化可以看出，当 C 值较大时，即图 7.6，零速度面将整个空间分为四个部分，而随着 C 值的减小，分别包围两个大天体 P_1 和 P_2 的零速度面逐渐增大、靠近、相接（在 L_1）、直至连通，即图 7.7；当 C 值再减小时，内部的零速度面扩大，与外部逐渐缩小的零速度面靠近、相接（在 L_2）而连通，即图 7.8；最后通过 L_3 进而变为图 7.9. 注意，由 Jacobi 积分可以看出，积分常数 C 值的减小就意味着在同一位置处速度的增大. 这表明，随着小天体初始速度的增大而使其运动的可能区域增大. 对于第一种情况，C 值大，v_0 小，小天体只能在大天体 P_1 或 P_2 附近的区域运动，而不可能从一个大天体附近运行到另一个大天体附近.

由上述讨论可知，小天体运动可能区域对应的连通性变化都是通过五个平衡点发生的，故将相应的 Jacobi 常数 C_i 称为临界值.

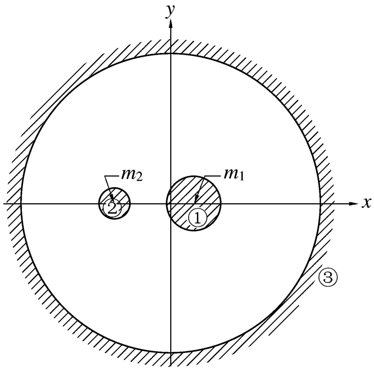

图 7.6 $C>C_1$ 的情况

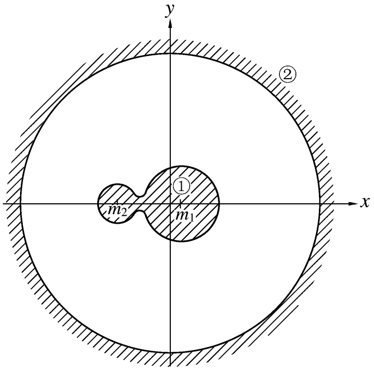

图 7.7 $C_2<C<C_1$ 的情况

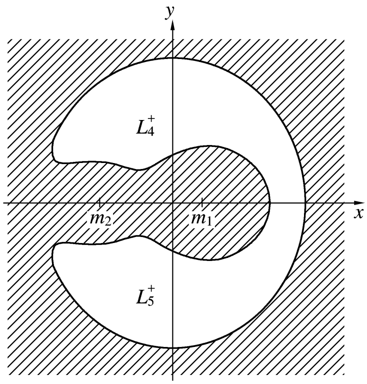

图 7.8 $C_3<C<C_2$ 的情况

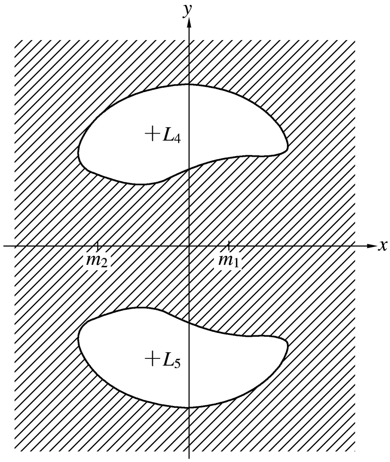

图 7.9 $C_4<C<C_3$ 的情况

4. 发射深空探测器的有关问题

以月球探测器为例，若月球绕地球运行的轨道为圆，那么，要从地球上发射一个月球探测器，在初始停泊轨道上，必须经变轨让其运行速度达到使相应的 C 值满足 $C_2<C<C_1$，它才有可能从地球附近飞向月球. 若探测器的轨道速度大到满足 $C_3<C<C_2$，则它不仅可以飞向月球，而且还可能从月球附近飞离地月系统，变为人造小行星. 下面介绍几个有关问题[2].

(1) 引力范围与作用范围

关于深空探测器 P 的运动，往往是在两个大天体 P_1 和 P_2 共同作用下的运动. 由于探测器 P 在运动过程中可能会接近 P_1，也可能会接近 P_2，通

常不能处理成受摄二体问题，对应的是一个限制性三体问题. 但是，由于探测器总是要接近被探测天体（例如 P_2），那么，当探测器 P 进入以 P_2 为中心的某一范围内，P_2 的引力作用将成为探测器运动的主要力源，在此范围内可近似地看成 P 相对 P_2 运动的一个二体问题，而在此范围外，则近似地看成 P 相对 P_1 运动的二体问题，这种近似将有助于对一个复杂问题进行初步分析. 关于这一范围，有如下两种定义：

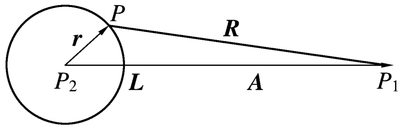

图 7.10　P_2 的引力范围与作用范围

1）**引力范围**　见图 7.10，在 P_2 的引力范围边界上，P 受到两个大天体 P_1 和 P_2 的引力大小相等. 有

$$\frac{GM_2}{r^2}=\frac{GM_1}{R^2}, \tag{7.61}$$

其中 M_1 和 M_2 分别为两个大天体 P_1 和 P_2 的质量. 当 M_2/M_1 较小时，根据图 7.10 的几何构形，可将 L 点到 P_2 的距离近似地作为引力范围的半径，记作 r_1. 由此根据（7.61）式容易给出

$$r_1=\sqrt{\mu}A,\quad \mu=M_2/M_1, \tag{7.62}$$

其中 $A=|\boldsymbol{A}|$，即两个大天体 P_1 与 P_2 之间的距离.

2）**作用范围**　引用上述引力范围作简化不太合理，因在考虑 P 相对 P_2（或 P_1）的运动时，另一大天体 P_1（或 P_2）对该系统存在"摄动"作用. P 相对 P_1 和 P_2 的运动方程分别为

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{r}}=-\dfrac{GM_2}{r_2}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+GM_1\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\dfrac{\boldsymbol{A}}{A^3}\right),\\[2ex] \ddot{\boldsymbol{R}}=\dfrac{GM_1}{R_2}\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}\right)-GM_2\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\dfrac{\boldsymbol{A}}{A^3}\right).\end{cases} \tag{7.63}$$

考虑两种作用力的平衡，即定义出作用范围，相应的边界由下式确定：

$$GM_1\left|\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\frac{\boldsymbol{A}}{A^3}\right|\left(\frac{GM_2}{r^2}\right)^{-1}=Gm_2\left|\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{A}}{A^3}\right|\left(\frac{GM_1}{R^2}\right)^{-1}. \tag{7.64}$$

同样以图 7.10 中 L 点的位置作为边界，在 M_2/M_1 较小时，给出作用范围的半径 r_2 为

$$r_2=\left(\frac{\mu^2}{2}\right)^{1/5}A\ \text{或}\ (\mu^2)^{1/5}A,\quad \mu=M_2/M_1. \tag{7.65}$$

这种作用范围（也可以称作引力作用范围）可以用来为深空探测器发射轨道设计提供初始选择，但在此基础上引入的双二体问题的拼接方法在当今计算条件下就没有什么实际意义了.

（2）希耳（Hill）范围

在讨论探测器（例如月球探测器）发射条件时，往往需要给出另一种范围，即必须同时考虑 P_1（地球）和 P_2（月球）的引力作用，才能确切地给出从地球上发射探测器能达到月球附近的最小速度，此即讨论的问题．当初始条件（P 相对 P_1 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 和速度矢量 $\boldsymbol{v}_0$）确定的 Jacobi 常数 C 值分别为 $C>C_1$ 和 $C_2<C<C_1$ 时，它们各对应图 7.6 和图 7.7．当 $C>C_1$ 时，探测器只能在地球（P_1）附近，即图 7.6，那么图 7.11 即临界状况．此时围绕 P_1 和 P_2 的范围（阴影部分）即为希耳范围，L_1 即图 7.3 中给出的排列第二的共线平衡点．若以 L_1 到 P_2 的距离作为 P_2 的希耳范围大小，记作 r_3，则由（7.45）式给出

$$r_3=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}A,\quad \mu=\frac{M_2}{M_1+M_2}. \tag{7.66}$$

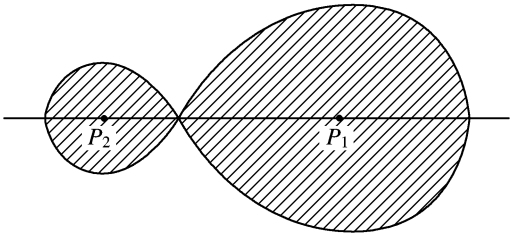

图 7.11　希尔范围

对于地—月系统，日—地系统和日—地月系统，相应的月球、地球和地月系作为各自系统中较小天体 P_2 的上述三个范围的数据列于表 7.3．

表中 A 为 P_1 与 P_2 之间的平均距离．其他大行星的上述三个范围可分别由（7.62）式，（7.65）式和（7.66）式计算，这里不再具体列出．

表 7.3　三个系统的引力范围、作用范围和希耳范围

系统	引力范围（10^4 km）	作用范围（10^4 km）	希耳范围（10^4 km）	A（10^4 km）
地—月	4.27	5.78	6.14	38.5327374
日—地	25.9	80.5	149.7	14959.7870
日—地月	26.1	80.9	150.3	14959.7870

（3）第二宇宙速度 $\boldsymbol{v}_2$

v_2 即脱离地球引力场的最小速度，也就是从地面发射探测器相对地球的抛物线（$a\to\infty$，$e=1$）速度，有

$$v_2=\sqrt{\frac{2GE}{a_e}}=\sqrt{2}v_1=11.1799\ \mathrm{km/s} \tag{7.67}$$

对于从地球上发射星际探测器而言，人们首先关心的是第二宇宙速度 v_2，从地球表面发射和从近地停泊轨道上发射，相应的 v_2 相差不大，例如从地面高度 200 km 处发射，相应的 v_2 为 11.0086 km/s. 但是，如果考虑到月球的引力加速作用，发射速度并不需要这么大，下段给出.

(4) 向月球发射探测器的最小速度

如果按地—月—探测器圆型限制性三体问题来考虑，在近地停泊轨道（假定为地面高度 200 km 的圆轨道）上“发射”探测器，并假定该停泊轨道经轨道调整已使其轨道平面与月球绕地运动的白道面重合. 那么，只要以停泊轨道半径为近地距 $r_p=a_e+200\ \mathrm{km}$，发射速度 $v_p=10.8746\ \mathrm{km/s}$，即可使相应的 Jacobi 常数 $C=C_1$，亦即发射速度比这一 v_p 值稍大一点，探测器即有可能经月球引力加速飞抵月球附近. 上述轨道的主要根数为

$$a=135893.7198\ \mathrm{km},\quad e=0.9516,$$

相应的轨道周期 $T_S=5^d.77$. 但是以这种轨道方式飞往月球，需绕地球运行若干圈后才有可能，因此所耗费的时间远比 T_S 长得多. 发射月球探测器通常不会采用这样的最小速度轨道，而实际问题往往使考虑能量消耗小（即最小能量轨道）和运行时间短这两个重要条件，关于这一问题后面第八章中将有论述.

§7.4　平动点附近的运动与晕轨道

就航天应用而言，必须了解平动解的稳定性，稳定或不稳定各具不同的应用价值.

1. 平动解的稳定性

记平动解为

$$x_0=a,\quad y_0=b,\quad z_0=0, \tag{7.68}$$

初始扰动记作

$$\Delta x=\xi,\quad \Delta y=\eta,\quad \Delta z=\zeta. \tag{7.69}$$

将 $x=x_0+\Delta x=a+\xi$，$y=y_0+\Delta y=b+\eta$ 和 $z=z_0+\Delta z=\zeta$ 代入运动方程得

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=\Omega_{xx}^0\xi+\Omega_{xy}^0\eta+\Omega_{xz}^0\zeta+O(2),\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=\Omega_{yx}^0\xi+\Omega_{yy}^0\eta+\Omega_{yz}^0\zeta+O(2),\\ \ddot{\zeta}=\Omega_{zx}^0\xi+\Omega_{zy}^0\eta+\Omega_{zz}^0\zeta+O(2),\end{cases} \tag{7.70}$$

其中 $O(2)$ 表示 ξ,η 和 ζ 的二阶以上(包括二阶)小量，$\Omega_{xx}^0,\Omega_{xy}^0,\cdots,\Omega_{zz}^0$ 表示 Ω 的两阶偏导数在平衡点上取值，有

$$\begin{cases}\Omega_x^0=0, \quad \Omega_y^0=0, \quad \Omega_z^0=0,\\ \Omega_{xy}^0=\Omega_{yx}^0,\\ \Omega_{xz}^0=\Omega_{zx}^0=\Omega_{yz}^0=\Omega_{zy}^0=0.\end{cases} \tag{7.71}$$

于是方程(7.70)变为

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=\Omega_{xx}^0\xi+\Omega_{xy}^0\eta,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=\Omega_{yy}^0\eta+\Omega_{yx}^0\xi,\\ \ddot{\zeta}=\Omega_{zz}^0\zeta.\end{cases} \tag{7.72}$$

方程(7.72)是常系数线性齐次方程组，ζ 分量可以分离掉，它对应一个简谐振动，即小天体不会远离 xy 平面. 下面只需讨论 xy 平面的情况，即方程组(7.72)前面两个关于 ξ,η 的扰动性质. 相应的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda^2-\Omega_{xx}^0 & -2\lambda-\Omega_{xy}^0\\ 2\lambda-\Omega_{xy}^0 & \lambda^2-\Omega_{yy}^0\end{vmatrix}=0. \tag{7.73}$$

这是关于特征量 λ 的四次代数方程，即

$$\lambda^4+(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)\lambda^2+(\Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0-\Omega_{xy}^{0\,2})=0. \tag{7.74}$$

(1) 共线平动解(L_1,L_2,L_3)的情况

对于 $0<\mu<1/2$(任何一个限制性三体问题，除 $M_1=M_2$ 外均符合这一条件)，有

$$\begin{cases}\Omega_{xx}^0=1+2C_0>0, \quad \Omega_{yy}^0=1-C_0<0, \quad \Omega_{zz}^0=-C_0<0,\\ C_0=\dfrac{(1-\mu)}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}.\end{cases} \tag{7.75}$$

$$\begin{cases}\Omega_{xy}^0=0, \quad \Omega_{xx}^0>0, \quad \Omega_{yy}^0<0,\\ \Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0-(\Omega_{xy}^0)^2<0.\end{cases} \tag{7.76}$$

其中 C_0 右端出现的 r_1,r_2 分别为三个共线平动点到两个大天体的距离，即 $r_1=|x_i-\mu|,r_2=|x_i+1-\mu|$. 于是方程(7.73)的四个特征根分别为

$$\begin{cases}\lambda_{1,2}=\pm S_1^{1/2},\\ \lambda_{3,4}=\pm S_2^{1/2}\end{cases} \tag{7.77}$$

$$\begin{cases}S_1=\dfrac{1}{2}\{-(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)+[(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)^2-4\Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0]^{1/2}\},\\ S_2=\dfrac{1}{2}\{-(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)-[(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)^2-4\Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0]^{1/2}\}.\end{cases} \tag{7.78}$$

其中 $S_1>0, S_2<0$，故有一正实根，三个共线平动解是不稳定的.

(2) 三角平动解(L_4, L_5)的情况

容易给出

$$\begin{cases} \Omega_{xx}(L_{4,5})=\dfrac{3}{4}, \Omega_{yy}(L_{4,5})=\dfrac{9}{4}, \\ \Omega_{xy}(L_4)=+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\mu-\dfrac{1}{2}\right), \\ \Omega_{xy}(L_5)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\mu-\dfrac{1}{2}\right), \end{cases} \tag{7.79}$$

此时特征方程(7.73)变为

$$\lambda^4+\lambda^2+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0. \tag{7.80}$$

令 $S=\lambda^2$，方程变为

$$S^2+S+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0, \tag{7.81}$$

解为

$$S_{1,2}=\frac{1}{2}\{-1\pm[1-27\mu(1-\mu)]^{1/2}\}. \tag{7.82}$$

相应的特征根 λ 如下：

$$\begin{cases} \lambda_1=+\sqrt{S_1}, \lambda_2=-\sqrt{S_1}, \\ \lambda_3=+\sqrt{S_2}, \lambda_4=-\sqrt{S_2}. \end{cases} \tag{7.83}$$

特征根的性质取决于(7.82)式中的 $d=1-27\mu(1-\mu)$，当

$$0<1-27\mu(1-\mu)<1$$

时，即

$$\mu(1-\mu)<\frac{1}{27} \tag{7.84}$$

时，特征根为两对纯虚根，此时三角平动解有线性稳定性，相应的 μ 的临界值 μ_0 满足

$$\mu_0(1-\mu_0)=\frac{1}{27}. \tag{7.85}$$

注意 $\mu<\dfrac{1}{2}$，故有

$$\mu_0=\frac{1}{2}(1-\sqrt{69}/9)=0.038520896504551\cdots, \tag{7.86}$$

上述线性稳定性条件为

$$0<\mu<\mu_0. \tag{7.87}$$

对太阳系中处理成限制性三体问题的各个系统，如日—木—小行星，日—地—月球，……，相应的 μ 值均满足条件(7.87).

对于 $\mu_0<\mu<\frac{1}{2}$ 的情况，显然是不稳定的. 至于 $\mu=\mu_0$，非线性稳定情况，以及椭圆型限制性三体问题中的三角平动解情况，读者如有兴趣请阅读文献[1]和[3].

2. 平动点附近的运动状况

在上述线性稳定性的讨论中，相应的扰动量构成的线性方程(7.70)，其解就可以描述平衡点附近的运动状况. 关于三角平动解，当条件(7.85)满足时，相应平衡点附近的运动即简单的周期运动，不再讨论. 这里主要讨论三个共线平动解的情况.

前面(7.77)式给出的四个特征根可写成下列形式：

$$\begin{cases}\lambda_{1,2}=\pm d_1, \\ \lambda_{3,4}=\pm d_2 i, \quad i=\sqrt{-1}.\end{cases} \tag{7.88}$$

这里 $d_1>0$，$d_2>0$，具体值为

$$\begin{cases}d_1=\left[\frac{1}{2}(9C_0^2-8C_0)^{1/2}-\left(1-\frac{C_0}{2}\right)\right]^{1/2}, \\ d_2=\left[\frac{1}{2}(9C_0^2-8C_0)^{1/2}+\left(1-\frac{C_0}{2}\right)\right]^{1/2}.\end{cases} \tag{7.89}$$

在线性意义下，三个共线平动解是不稳定的，考虑高阶项后亦如此. 相应平动点附近的运动有如下形式：

$$\begin{cases}\xi=C_1e^{d_1t}+C_2e^{-d_1t}+C_3\cos d_2t+C_4\sin d_2t, \\ \eta=\alpha_1C_1e^{d_1t}-\alpha_1C_2e^{-d_1t}-\alpha_2C_3\sin d_2t+\alpha_2C_4\cos d_2t,\end{cases} \tag{7.90}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_1=\frac{1}{2}(d_1-\Omega_{xx}^0/d_1), \\ \alpha_2=\frac{1}{2}(d_2+\Omega_{xx}^0/d_2).\end{cases} \tag{7.91}$$

上述 C_1,C_2,C_3 和 C_4 在这里是四个积分常数，由初始扰动条件 $t_0=0$，ξ_0，$\dot{\xi}_0$，η_0，$\dot{\eta}_0$ 确定. 这表明，尽管小天体初始运动状态满足共线平动解的条件，但经小扰动后即会远离平动点，远离的快慢取决于 d_1 值的大小. 对于日—(地+月)—小天体系统，三个共线平动点 L_2，L_1，L_3 处的 d_1 值分别为 2.53265918，2.48431672 和 0.00282501，因此 L_1 和 L_2 点的不稳定性要比

L_3点的不稳定性强得多，也就是说 L_1 和 L_2 点附近的小天体要比 L_3 点附近的小天体的远离快得多.

虽然共线平动解是不稳定的，但可选取适当的初始扰动，使相应平动点附近的运动仍为周期运动或拟周期运动. 即选取这样的初始扰动 ξ_0，$\dot{\xi}_0$ 和 η_0，$\dot{\eta}_0$ 使 $C_1=0$，$C_2=0$，从而使解(7.90)退化为周期解，相应的运动变为稳定的，这种稳定称为条件稳定.

在会合坐标系中，若小天体偏离 $L_j(j=1,2,3)$，有一初始位置小扰动 ξ_0 和 η_0，那么按下述条件加一速度小扰动 $\dot{\xi}_0$ 和 $\dot{\eta}_0$，即可使小天体在 L_j 附近摆动. 具体条件为

$$\begin{cases}\dot{\xi}_0=\left(\dfrac{d_2^2}{\alpha_2 d_2}\right)\eta_0, \\ \dot{\eta}_0=(-\alpha_2 d_2)\xi_0,\end{cases} \tag{7.92}$$

其中

$$\alpha_2 d_2=\frac{1}{2}(d_2^2+\Omega_{xx}^0). \tag{7.93}$$

在上述选择下，有 $C_1=0$ 和 $C_2=0$，相应的解退化为下列周期解：

$$\begin{cases}\xi=\xi_0\cos d_2 t+(\eta_0/\alpha_2)\sin d_2 t, \\ \eta=(-\alpha_2\xi_0)\sin d_2 t+\eta_0\cos d_2 t,\end{cases} \tag{7.94}$$

小天体在 xy 平面上相对共线平衡点 L_j 的运动状态实为一个椭圆曲线，即

$$\begin{cases}\dfrac{\xi^2}{A^2}+\dfrac{\eta^2}{B^2}=1, \\ A^2=\xi_0^2+(\eta_0/\alpha_2)^2,B^2=\alpha_2^2 A^2.\end{cases} \tag{7.95}$$

尽管上述结果是由线性系统给出的，还是有一定实用意义的. 至于非线性情况，同样可找到相应的条件周期解[1,4].

3. 深空探测器定位在共线平动点附近运动的晕轨道以及有关借力加速问题

深空探测器就是一个人造小天体，如果需要定位在共线平动点附近，只要按照条件(7.92)进行轨控，它就可以被保持在平动点附近而不远离，在一定的工作寿命期间完成探测任务[4]. 不仅在 xy 平面上它是一个周期运动，而且在 z 方向也是一个周期振动，但是由于两个频率因子 d_1 和 d_2 一般不通约，其相对平动点的轨道实为一拟周期轨道，如果通约则为周期轨道. 这常被人们称为 Lissajous Trajectory 或 Halo Orbit(即晕轨道)，对于后者，即从 x 方向(视线方向)去看，在 yz 平面上的轨道投影围绕平动点像一种

晕. 对于线性系统中 d_1 和 d_2 不通约的情况,可以考虑扰动方程(7.70)右端的高阶项,以此来改变相应扰动解的状态,从而获得条件周期轨道,即晕轨道.

上述共线平动点的条件稳定性,可在深空探测中被利用. 而其不稳定性亦可在深空探测器的发射上得到利用,正如§7.3 中所阐述的共线平动点 $L_j(j=1,2,3)$附近亦是一种节能通道,发射深空探测器通过这些点飞往目标天体需要的能量最小,平动点的这种利用,也是一种借力加速机制.

§7.5 限制性二体问题与航天器编队飞行的动力学机制

我们要讨论的问题是,两个卫星绕地球运动(或两个探测器绕同一探测目标天体运动). 不妨假定地球是 P_1,中心卫星是 P_2,绕地球作圆运动,另一个伴飞卫星即小天体 P. 由于卫星质量之小,相距不太近时(如超过 100 m),它们之间的相互引力可略去,因此这对应上述限制性三体问题中的 $\mu=0$. 此时,限制性三体问题退化为限制性二体问题,且会合坐标系的坐标原点移至 P_1(即地心).

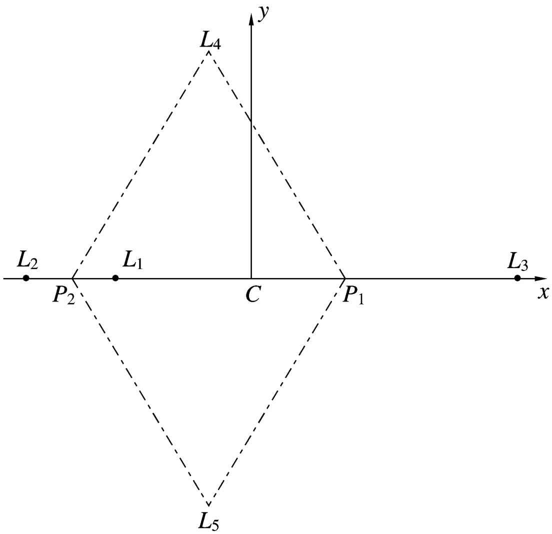

图 7.12 平动点的位置

对于这种限制性二体问题,在地心旋转坐标系(旋转角速度即中心卫星的绕飞角速度)中,伴飞卫星的运动方程变为如下形式:

$$\begin{cases}\ddot{x}-2\dot{y}=U_x=(x-\dfrac{x}{r^3}),\\ \ddot{y}+2\dot{x}=U_y=(y-\dfrac{y}{r_3}),\\ \ddot{z}=U_z=-\dfrac{z}{r^3}.\end{cases}\tag{7.96}$$

原来的五个平衡点 $L_i(i=1,2,3)$和 $L_i(i=4,5)$,退化为下列状况:

L_1 和 L_2 合一,位置为　$x=-1$,　$y=0$;

L_3 的位置为　$x=+1$,　$y=0$;

L_4 和 L_5 的位置为　$x=-\dfrac{1}{2}$,　$y=\pm\sqrt{3}/2$.

事实上,从方程(7.96)不难看出 $U_x=0,U_y=0,U_z=0$ 对应

$$z=0,\quad r=1,\tag{7.97}$$

即在 xy 平面上,以地球(P_1)为中心的单位圆(r 即中心卫星的圆轨道半径)上每个点都是平衡点,这一点并不难理解. 回到上述五个相应的平衡点,略去证明,结论是五个平衡点 L_i 和 L_j 均是不稳定的. 关于 L_4 和 L_5 的性质发生变化也是不难理解的,此时另一保持其平衡的力源 P_2 实际上已不存在,因 $\mu=0$.

为了与星上轨道坐标系相吻合,我们仍旧关心的是三个与伴飞有关的共线平衡点. 尽管它们是不稳定的,但在线性意义下,与限制性三体问题一样,其附近小领域内的运动,仍然可以维持一种周期运动,即条件周期运动.

在 $L_i(i=1,2,3)$位置上给一小扰动,扰动坐标分量各记作 ξ,η,ζ,代入方程(7.96)得

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=U_{xx}\xi+U_{xy}\eta+U_{xz}\zeta+O(0),\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=U_{yx}\xi+U_{yy}\eta+U_{yz}\zeta+O(2),\\ \ddot{\zeta}=U_{zx}\xi+U_{zy}\eta+U_{zz}\zeta+O(2),\end{cases}\tag{7.98}$$

其中 $O(2)$表示高阶小量. 不难算出,在 $L_i(x=\pm1,y=0,z=0)$处有

$$\begin{cases}U_{xx}=3,\quad U_{xy}=0,\quad U_{xz}=0,\\ U_{yx}=0,\quad U_{yy}=0,\quad U_{yz}=0,\\ U_{zx}=0,\quad U_{zy}=0,\quad U_{zz}=-1.\end{cases}\tag{7.99}$$

代入方程(9.97),略去高阶项,即得 L_i 附近小扰动方程线性化的结果如下:

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=3\xi,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=0,\\ \ddot{\zeta}+\ \zeta=0,\end{cases}\tag{7.100}$$

此即前面第 6 章 § 6.4 中提到的伴飞的 C – W 方程. 因两卫星之间无引力作用,中心卫星可以是虚拟的,是否存在无所谓,只要旋转坐标系按相应虚拟卫星的圆轨道角速度旋转即可. 若把上述平衡点放在单位圆上的 $x=0$, $y=\pm 1$ 处,其附近小扰动运动方程的线性化形式即

$$\begin{cases} \ddot{\xi}-2\dot{\eta}=0, \\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=3\eta, \\ \ddot{\zeta}+\zeta=0, \end{cases} \tag{7.101}$$

它对应

$$U_{xx}=0,\quad U_{yy}=3,\quad U_{zz}=-1. \tag{7.102}$$

根据上述讨论可知,尽管两卫星之间无任何动力学联系,但是只要它们相距较近,仍然可由限制性二体问题中平衡点附近的运动这一动力学机制来理解它们之间相对构形形成的原因. 无论是方程(7.100)还是(7.101),ζ 分量可与问题分离,对应一谐振动,即伴飞卫星在 xy 平面上下作小振动. 而对 ξ,η 两分量,相应的特征方程为

$$\lambda^4+\lambda^2=0. \tag{7.103}$$

存在一对重根 $\lambda_{1,2}$ 和一对共轭虚根 $\lambda_{3,4}$,即

$$\lambda_{1,2}=0,\quad \lambda_{3,4}=\pm\sqrt{-1}. \tag{7.104}$$

相应的运动解为

$$\begin{cases} \xi=C_1+C_2t+C_3\cos t+C_4\sin t, \\ \dot{\xi}=C_2-C_3\sin t+C_4\cos t, \\ \eta=\dfrac{3}{2}C_1t-\dfrac{3}{4}C_2t^2-2C_3\sin t+2C_4\cos t, \\ \dot{\eta}=-\dfrac{3}{2}C_1-\dfrac{3}{2}C_2t-2C_3\cos t-2C_4\sin t. \end{cases} \tag{7.105}$$

可选择适当的初始条件,使 $C_1=0, C_2=0$,构成一个条件周期解,具体的初始条件为

$$t=t_0:\ \xi_0,\eta_0,\dot{\xi}_0=\eta_0/2,\dot{\eta}_0=-2\xi_0,\zeta_0,\dot{\zeta}_0. \tag{7.106}$$

此时小扰动运动的解为如下“拟”周期解:

$$\begin{cases} \xi=\xi_0\cos t+(\eta_0/2)\sin t,\quad \dot{\xi}=-\xi_0\sin t+(\eta_0/2)\cos t, \\ \eta=-2\xi_0\sin t+\eta_0\cos t,\quad \dot{\eta}=-2\xi_0\cos t-\eta_0\sin t, \\ \zeta=\zeta_0\cos t+\dot{\zeta}_0\sin t,\quad \dot{\zeta}=-\zeta_0\sin t+\dot{\zeta}_0\cos t, \end{cases} \tag{7.107}$$

在(x,y)平面上的构形为一椭圆,如果初始扰动 $\dot{\zeta}_0$ 满足下列条件:

$$\dot{\zeta}_0=\pm(\eta_0/2\xi_0)\zeta_0, \tag{7.108}$$

那么在(y,z)平面上的构形亦为一椭圆.相应的上述两个椭圆方程如下:

$$\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}=1, \tag{7.109}$$

$$\frac{\eta^2}{C^2}+\frac{\zeta^2}{D^2}=1. \tag{7.110}$$

其中

$$A^2=\xi_0^2+\eta_0^2/4,\quad B^2=4A^2, \tag{7.111}$$

$$C^2=4A^2=B^2,D^2=(4\zeta_0^2/\xi_0^2)A^2. \tag{7.112}$$

上述条件周期运动,即卫星编队飞行或伴飞的一种动力学机制,但两星相距不能大,否则方程(7.98)右端略去的高阶项 $O(2)$很快即起作用,若仍按条件(7.108)控制,伴飞的构形会遭破坏,此时必须考虑高阶项,相应的条件(7.108)将会改变.从上述讨论不难看出,卫星编队构形,实际上就是二体问题对应的运动不稳定性在条件(7.108)约束下的结果,只是直接从二体问题对应的运动不稳定性着手讨论比较麻烦,而从限制性三体问题过渡到退化后的限制性二体问题,从而获得编队构形,显得很自然.

注意,限制性三体问题中共线平动点附近的运动,对应的特征频率 $d_1\neq0$(见前面第二段给出的数据),而上述卫星编队问题中,$d_1=0$,前者对 t 而言是指数不稳定(或称强不稳定),而后者则是线性不稳定(或称弱不稳定).因此,这两种情况所需要的轨控能量有较大差别,对于卫星编队飞行,需要的轨控能量相对而言要小得多[6].

参 考 文 献

[1] Szebehely, V. Theory of Orbits. Academic Press, New York and London, 1967

[2] 刘林. 航天器轨道理论(第十六章). 北京:国防工业出版社,2000

[3] Siegel , C. L. & Moser, J. K.. Lectures on Celestial Mechanics(chapter 3). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York,1971

[4] Gómez, G. etc. Dynamics and Mission Design Near Libration Points, Vol. Ⅲ Adavanced Methods for Collinear Points. World Scientific, Singapore. New Jersey. London. Hong Kong, 2001

[5] 刘林,侯锡云,王建峰,王海红. 关于空间探测器定位在太阳系中特殊点上的有

关问题．天文学进展，2005，23(2)：

［6］**刘林，王海红，马剑波．关于星座小卫星的编队飞行问题．天文学报**，2004，45(1)：57～67

LIU Lin, Wang Haihong, MA Jian-bo. On the Formation Flying of Satllite Constellations. Chin. Astro. Astrophy.，2004，28(2)：188～199

第 8 章　轨道机动与轨道过渡

§8.1　脉冲式轨道机动与轨道过渡

轨道机动或轨道过渡有两种方式，其中第一种就是传统的大推力脉冲式的变轨方式. 脉冲式的大推力推进器多采用化学推进剂，推进器的排气速度小、推力大、工作时间短，在轨道计算中通常是将这种脉冲式的推力（实为由推力获得的加速度）处理成瞬间的速度变化 Δv.

1. 脉冲式变轨的基本原理

无论是航天器运行过程中的轨道调整或向目标轨道过渡的轨道转移，都涉及到轨道改变问题，即给一速度增量 Δv，从而获得所需的轨道变化. 因此首先要了解各轨道根数（$a, e, \cdots$）与瞬时冲量（或一速度增量 Δv）之间的关系. 前面第二章 §2.6 中已就二体问题简单介绍了各轨道根数随速度（包括大小和方向）变化的状况. 本章将在受摄运动模型下阐述这类问题，包括大推力的脉冲式变轨和小推力持续式变轨，这一节讨论的是脉冲式变轨问题. 第三章 §3.3 和 §3.4 中已分别给出了椭圆运动和双曲线运动的受摄运动方程. 本节具体讨论椭圆轨道的变轨问题，涉及的受摄运动方程有两种形式，即以（S, T, W）表达的（3.73）式，和以（U, N, W）表达的（3.74）式.

对于大推力脉冲式变轨，因作用时间间隔 Δt 很短，可以近似处理成一个瞬时过程，以短暂的间隔 Δt 和相应的根数变化 $\Delta\sigma$ 代替 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\sigma$. 机动力（相当于一种摄动源）提供的加速度可以作为一种摄动加速度，通过间隔 Δt 内的速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 来表达，有

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{v} &= (\Delta v_r, \Delta v_\theta, \Delta v_W) \\ &= (\Delta v_U, \Delta v_N, \Delta v_W)\end{aligned} \tag{8.1}$$

和

$$\begin{cases}\Delta v_r = S\Delta t, \quad \Delta v_\theta = T\Delta t, \quad \Delta v_W = W\Delta t, \\ \Delta v_U = U\Delta t, \quad \Delta v_N = N\Delta t, \quad \Delta v_W = W\Delta t.\end{cases} \tag{8.2}$$

其中速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的切向(即速度方向)分量是 Δv_U 常记作 Δv,与前面第 2 章 §2.8 中的表达一致,以下就将 Δv_U 记作 Δv,注意,它区别于 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的模 $|\Delta\boldsymbol{v}|$. 在上述处理下,即可由受摄运动方程(3.73)和(3.74)给出在脉冲式变轨中轨道根数 σ 的变化 $\Delta\sigma$ 与速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 之间的关系,即

$$\begin{cases}\Delta a = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[e\sin f\Delta v_r + (1+e\cos f)\Delta v_\theta], \\ \Delta e = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}[\sin f\Delta v_r + (\cos f + \cos E)\Delta v_\theta], \\ \Delta i = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\Delta v_W, \\ \Delta\Omega = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\Delta v_W, \\ \Delta\omega = -\cos i\Delta\Omega + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-\cos f\Delta v_r + \left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\Delta v_\theta\right], \\ \Delta M = -\dfrac{1-e^2}{nae}\left[-\left(\cos f - 2e\dfrac{r}{p}\right)\Delta v_r + \left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\ \Delta v_\theta\right],\end{cases} \tag{8.3}$$

和

$$\begin{cases}\Delta a = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\Delta v, \\ \Delta e = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2(\cos f+e)\Delta v - \\ \qquad \sqrt{1-e^2}\sin E\Delta v_N], \\ \Delta i = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\Delta v_W, \\ \Delta\Omega = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\Delta v_W, \\ \Delta\omega = -\cos i\Delta\Omega + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\times \\ \qquad [2\sin f\Delta v + (\cos E+e)\Delta v_N], \\ \Delta M = -\dfrac{1-e^2}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[\left(2\sin f + \dfrac{2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)\Delta v + \right. \\ \qquad \left.(\cos E - e)\Delta v_N\right].\end{cases} \tag{8.4}$$

上述受摄运动方程中的 $u=f+\omega$. 注意,原受摄运动方程 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ 的右端有 n 这一项,对于瞬间获得速度增量的变轨方式,因无“过程”,右端 n 项与脉冲式变轨无关,后面§8.2 中阐述的小推力持续式变轨中将涉及到该项.

按上述处理,即可根据速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 得知轨道根数的变化 $\Delta\sigma(\Delta a,\Delta e,\cdots,\Delta M)$. 若给一特殊的速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$:

$$\Delta\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\Delta v_U\\ \Delta v_N\\ \Delta v_W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta v\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\tag{8.5}$$

那么根据方程(8.4)和瞬时椭圆的相应关系很容易给出 a,e 的变化 Δa 和 Δe,即

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(v\Delta v),\tag{8.6}$$

$$\Delta e=\left[\frac{2}{ve}\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{rv^2}{\mu}-1\right)\right]\Delta v,\tag{8.7}$$

这与前面第 2 章§2.8 中直接在二体问题意义下导出的关系式(2.205)和(2.206)是一致的. 推导(8.6)和(8.7)式利用到下列瞬时椭圆关系式:

$$\begin{cases}v^2=\mu\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{\mu}{p}(1+2e\cos f+e^2),\\[2mm] \dfrac{rv^2}{\mu}-1=1-\dfrac{r}{a},\\[2mm] \cos f+e=\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{p}{r}\right)\left(1-\dfrac{r}{a}\right).\end{cases}\tag{8.8}$$

事实上,无论是轨道调整,还是作为由初始轨道向目标轨道过渡的转移过程,主要涉及如何由脉冲能量(归结为速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$)去改变轨道的大小和形状(a 和 e),轨道面的空间定向(i 和 Ω)以及拱线的指向(ω). 因此,上述关系式(8.3)和(8.4),还有(8.6)式,就轨道而言,它们都是脉冲式变轨的理论基础. 从(8.6)式不难看出,在近地点处(此处速度 v 极大)变轨,所需能量(即 Δv)极小. 从(8.3)或(8.4)式中的 Δi 和 $\Delta\Omega$ 的表达式可以看出,对于轨道平面的改变,只依赖速度增量的轨道面法向分量 Δv_W,而且在 $u=0$ 或 $180°$时(即处于升交点或降交点处),改变倾角 i 最节省能量,对轨道面的进动($\Delta\Omega$)而言,在 $u=90°$或 $270°$处变轨最节省能量.

前面的讨论尽管是对椭圆轨道所作的,但对双曲线轨道亦有类似的结果,讨论方法相同,只要将受摄运动方程(3.73)和(3.74)改为双曲线运动的受摄运动方程(3.82)和相应的以(U,N,W)表达的形式即可,同样可以获得与椭圆轨道类似的轨道机动遵循的关系式. 但必须说明一点,上述结果的获

得,不管是(8.3)和(8.4)式,还是(8.6)和(8.7)式,只是定性准确地表明了轨道根数的变化与瞬时脉冲(以 Δv 体现)之间的关系,而从定量上来看,这些结果只是一个近似,它仅适用于 $\Delta\sigma$ 为小量的情况,即无论是简单的轨道调整还是轨道过渡,只有变轨前后的轨道相差较小时,才能引用这些结果.如果轨道相差(即 $\Delta\sigma$)较大时,只能根据变轨处对应两个不同轨道速度给出冲量(Δv)要求,下一段将会讨论这一问题.

2. 霍曼(W. Hohmann)转移轨道

航天器从初始轨道(或停泊轨道)向目标轨道的过渡,就是一种轨道转移,它由轨道机动来完成,即变轨.轨道转移有多种形式,按变轨(由脉冲式轨道机动实现)次数分为一次、两次或多次变轨实现,最终完成过渡.只有在初始轨道和目标轨道相交时,才有可能用一次变轨完成转移.初始轨道和目标轨道可以分别为圆轨道、椭圆轨道,甚至是双曲线轨道,它们两者之间可以是共面的,也可以是不共面的、相交的或不相交的.转移轨道可以是椭圆,为了节省时间也可以是双曲线.在轨道过渡中,如何选择适当的转移轨道,往往是寻求能量最省的过渡形式,但这是一个理论问题,在具体的航天任务中,需要综合考虑能量消耗大小、飞行时间长短、制导精度要求高低以及测量和控制是否方便等条件,从中选择一种可以实现的最佳过渡方式.这里就变轨原理阐述轨道过渡中的转移过程,并以一种节能的霍曼转移轨道为例来介绍轨道过渡的实现.

考虑一种较简单的轨道过渡:初始轨道和目标轨道为两个共面的同心(中心天体的质心)圆轨道,见图8.1.图中轨道1和轨道2各为低圆轨道和高圆轨道,无论是从低圆轨道过渡到高圆轨道,还是从高圆轨道过渡到低圆轨道,在限定只用两次脉冲推力的情况下,采用与两个圆轨道相切的椭圆轨道(见图8.1中通过切点1和切点2的转移轨道)过渡,耗费能量最小,这是霍曼在1925年首先提出的,人们称其为霍曼过渡,相应的轨道即称为霍曼转移轨道.

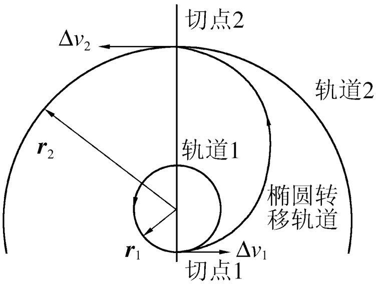

图8.1 霍曼转移轨道

事实上,上述过渡就是两次改变轨道半长径的转移过程.两个圆轨道的半长径各为 r_1 和 r_2,如果从低圆轨道(作为初始轨道)向高圆轨道(作为目标轨道)过渡,则霍曼转移轨道的半长径 a_1 应变为

$$a_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \tag{8.9}$$

相应的半长径改变量为

$$\Delta a_1 = a_1 - r_1 = \frac{1}{2}(r_2 - r_1). \tag{8.10}$$

由此在切点 1 处点火脉冲，取得相应的速度增量 Δv_1 即可. 如果根据(8.6)式，有

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\right], \tag{8.11}$$

而准确的 Δv_1 值应由切点 1 处对应的变轨前后的速度差给出，即

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= \sqrt{\mu}\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_1}\right)^{1/2} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left[\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}\right)^{1/2} - 1\right].\end{aligned} \tag{8.12}$$

两种结果之差为

$$\sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left\{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\right] - \left[\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}\right)^{1/2} - 1\right]\right\},$$

这种差别还是明显的，当 $r_2 = 2r_1$ 时，括号“{　}”内的差别达 $0.095 \approx 10\%$. 而只有当 r_2 与 r_1 相差较小时，两种结果才可能在一定精度意义下相符. 例如，一个 $a = 7000$ km 的低圆轨道若在轨道机动过程中，半长径调高 70 km，即 $r_2 = 1.01r_1$，则上述括号{　}内的差别只有 1.6×10^{-5}. 不难看出，上一段给出的结果(8.6)式，不仅有定性的意义，而且在轨道调整中亦有定量应用的价值.

上述霍曼过渡的第二次变轨是在切点 2 处点火脉冲，取得相应的速度增量 Δv_2，使其变为半径为 r_2 的目标圆轨道. 根据切点 2 处变轨前后的速度差给出

$$\begin{aligned}\Delta v_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\mu}\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_1}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\left[1 - \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2}\right)^{1/2}\right].\end{aligned} \tag{8.13}$$

根据同样的原理，若要从高轨向低轨过渡，则需两次减速，是上述过程的逆向转移. 这种霍曼转移轨道虽然节能，但飞行时间和飞行路线较长，因此过渡的最佳选择应根据具体问题作综合考虑.

如果初始轨道和目标轨道均为椭圆，则还涉及到拱线(ω)的改变问题. 如果两轨道不共面，则还需考虑轨道面(i, Ω)的改变问题，但脉冲(包括推

力的大小和方向)的基本依据仍然是上一段的结果(8.3)和(8.4),这里不再一一具体阐明.

§8.2 小推力持续式变轨

近年来随着小推力发动机制造技术的成熟,越来越多的航天任务特别是深空探测任务采用不同于大推力脉冲式的小推力持续式变轨,2003 年 9 月欧空局发射的月球探测器 SMART-1 就是一个成功的例子. 脉冲式的大推力可使航天器在较短时间内获得较高的速度(加速度大),但所需要的推进剂多,从而减少了有效载荷. 小推力推进器则克服了上述缺点,推进器排气速度大,推力小(加速度小),可长时间连续工作几十天甚至几年. 航天器的加速过程虽然缓慢,但发动装置小,并可将更多的有效载荷送入轨道,而且通过长期的连续加速,航天器仍然可以获得很高的速度. 经过足够长的时间,可以获得比脉冲式变轨更高的速度. 这些特点都更加适合目前深空探测的需要. 对于行星际飞行(尤其是木星以远),相比脉冲式的轨道过渡可以大大缩短飞行时间.

小推力持续式变轨过程可以看成是一个连续过程,即使小推力的过程也有间隙,但只要是均匀喷气,仍可处理成一个平均化的连续过程,而且可以将小推力看成一种机动力的摄动作用,具体摄动量级将视不同的变轨过程和小推力的大小而定. 相应的分析解可以提供小推力变轨过程中航天器轨道变化的一些规律. 尽管这种小推力摄动分析解仅在持续时间不长的情况下是适用的,而对于星际飞行这样的长时间过程和具体的力学背景(已不是简单的受摄二体问题),分析解并不完全适用,但对于持续时间不太长的卫星轨道机动过程,了解其轨道变化规律,还是有必要给出相应的分析解. 至于长时间的小推力轨道过渡的有关问题,将视具体的动力学模型而采用相应的分析.

考虑均匀加速过程,并分两种情况给出均匀喷气过程中轨道的变化规律:一是径向、横向和轨道面法向均有加速过程,另一种是仅在卫星运动方向上有加速过程. 前者有

$$S = \text{const}, \quad T = \text{const}, \quad W = \text{const} \tag{8.14}$$

而后者只有 U 分量(即切向分量),且

$$U = \text{const}, \tag{8.15}$$

两种形式的受摄运动方程即第三章给出的(3.73)和(3.74)式. (S, T, W) 型的形式如下:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[Se\sin f + T(1+e\cos f)], \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}[\,S\sin f + T(\cos f + \cos E)], \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\dfrac{1}{\sin i}W, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\cos i\,\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right], \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \dfrac{1-e^2}{nae}\left[-S\left(\cos f - 2e\,\dfrac{r}{p}\right) + T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right].
\end{cases}
\tag{8.16}
$$

(U,N,W)型的形式为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}U, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2(\cos f+e)U - \sqrt{1-e^2}\sin E N], \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\dfrac{1}{\sin i}W, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\cos i\,\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{dt} + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\times \\
\qquad [2\sin f U + (\cos E+e)N], \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \dfrac{1-e^2}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\Bigg[\left(2\sin f + \dfrac{2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)U + \\
\qquad (\cos E - e)N\Bigg].
\end{cases}
\tag{8.17}
$$

1．喷气加速度(S,T,W)三分量导致的卫星轨道变化

当 S,T,W 三分量均为常数时，上述方程(8.16)的右函数 $f(\sigma,t;\varepsilon)$用求平均值的方法即可将其分解成 f_C，f_L 和 f_S 三个部分，显然，i 和 Ω 的右函数无长期部分，即

$$(f_i)_C = 0, \quad (f_\Omega)_C = 0.$$

因此,这种轨道机动过程中,轨道平面无长期变化.

由于相应的$(f_i)_L$,$(f_\Omega)_L$,$(f_\omega)_L$不为0,有积分降阶问题(除非小推力摄动比中心天体扁率摄动小得多),不能采用平均根数法,只能采用拟平均根数法,即解的构造形式应为

$$\sigma(t) = \bar{\sigma} + \sigma_S(t), \tag{8.18}$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}_0 + (\delta\bar{n} + \sigma_C)(t - t_0) + \Delta\sigma_L(t), \\ \Delta\sigma_L(t) = \sigma_L(t) - \sigma_L(t_0), \end{cases} \tag{8.19}$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma(t_0) - [\sigma_S(t_0)], \tag{8.20}$$

(8.19)式中的$\delta\bar{n}$在第4章中已有说明,即对应平近点角M的0阶长期项.

长期项$\sigma_C(t-t_0)$的变率σ_C的表达式如下:

$$a_C = 2\sqrt{1-e^2}(T/n), \tag{8.21}$$

$$e_C = -\frac{3\sqrt{1-e^2}}{2a}e(T/n), \tag{8.22}$$

$$i_C = 0, \tag{8.23}$$

$$\Omega_C = 0, \tag{8.24}$$

$$\omega_C = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a}(S/n), \tag{8.25}$$

$$M_C = -\left(\frac{3}{a}\right)(S/n) - \frac{3n}{4a}a_C(t-t_0). \tag{8.26}$$

右端出现的根数a,e,i及n均为$\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$和$\bar{n}_0=\sqrt{\mu}\,\bar{a}_0^{(-3/2)}$.

长周期变化项$\Delta\sigma_L(t)$的表达式为

$$\Delta a_L(t) = 0, \tag{8.27}$$

$$\Delta e_L(t) = 0, \tag{8.28}$$

$$\Delta i_L(t) = -\frac{3}{2a\sqrt{1-e^2}}e\cos\bar{\omega}_0(W/n)(t-t_0), \tag{8.29}$$

$$\Delta\Omega_L(t) = -\frac{3}{2a\sqrt{1-e^2}\sin i}e\sin\bar{\omega}_0(W/n)(t-t_0), \tag{8.30}$$

$$\Delta\omega_L(t) = -\cos i\Delta\Omega_L(t), \tag{8.31}$$

$$\Delta M_L(t) = 0. \tag{8.32}$$

各式右端出现的根数a,e,i和n,其定义同前.

短周期项$\sigma_S(t)$如下:

$$a_S = \frac{2}{n^2}\left[-Se\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) + T\sqrt{1-e^2}\,e\sin E\right], \tag{8.33}$$

$$e_S = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 a}\left\{-S\sqrt{1-e^2}\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) + T\left[\left(2-\frac{3}{2}e^2\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E\right]\right\}, \tag{8.34}$$

$$i_S = \frac{W}{n^2 a\sqrt{1-e^2}}\left\{\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E\right]\cos\omega + \sqrt{1-e^2}\left[\cos E - \frac{e}{4}\cos 2E\right]\sin\omega\right\}, \tag{8.35}$$

$$\Omega_S = \frac{W}{n^2 a\sqrt{1-e^2}\sin i}\left\{\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E\right]\sin\omega - \sqrt{1-e^2}\left[\cos E - \frac{e}{4}\cos 2E\right]\cos\omega\right\}, \tag{8.36}$$

$$\omega_S(t) = -\cos i\,\Omega_S(t) - \frac{1}{n^2 ae}\left\{S(1-e^2)^{3/2}\sin E + T\left[(2-e^2)\cos E - \frac{e}{4}\cos 2E\right]\right\}, \tag{8.37}$$

$$M_S(t) = \frac{1}{n^2 ae}\left\{S\left[\left(1+3e^2-\frac{3}{2}e^4\right)\sin E - \frac{5}{4}e^3\sin 2E\right] + T\sqrt{1-e^2}\left[2(1+e^2)\cos E - \frac{e}{4}(1+3e^2)\cos 2E\right]\right\}. \tag{8.38}$$

各式右端出现的根数 σ 均为拟平均根数 $\bar{\sigma}$，E 是偏近点角.

2．喷气加速度 U 分量导致的卫星轨道变化

对于这一加速分量，$\dot{\sigma}$ 的右函数中出现 $(1+2e\cos f+e^2)^{\pm 1/2}$ 的因子，求解时就会涉及相应的级数展开问题，无法构造对 e 封闭形式的摄动解，既然如此，就将右函数展成平近点角 M 的三角级数，取到 e^2 项的结果如下：

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{n}U\left[\left(1-\frac{1}{4}e^2\right) + e\cos M + \frac{3}{4}e^2\cos 2M\right], \tag{8.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{na}U\left[-\frac{1}{2}e + (1-e^2)\cos M + \frac{e}{2}\cos 2M + \frac{e^2}{2}\cos 3M\right], \tag{8.40}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{8.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{8.42}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{nae}U\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin M + \frac{e}{2}\sin 2M + \frac{e^2}{2}\sin 3M\right], \tag{8.43}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n-\frac{2}{nae}U\left[\sin M+\frac{e}{2}\sin 2M+\frac{e^2}{2}\sin 3M\right]. \tag{8.44}$$

不难看出,与 S,T 分量的影响有所不同,相应摄动运动方程$\dot{\sigma}=f(\sigma,t;\varepsilon)$的右函数对六个根数都只包含 f_C 和 f_S 两部分,$f_L=0$. 可用完整的平均根数法构造摄动分析解的长期项和短周期项.

长期项 $\sigma_C(t-t_0)$的变率为

$$a_C=2\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)(U/n), \tag{8.45}$$

$$e_C=-\frac{e}{a}(U/n), \tag{8.46}$$

$$i_C=0, \tag{8.47}$$

$$\Omega_C=0, \tag{8.48}$$

$$\omega_C=0, \tag{8.49}$$

$$M_C=-\frac{3}{2a}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)U(t-t_0). \tag{8.50}$$

短周期项 $\sigma_S(t)$为

$$a_S(t)=\frac{2}{n^2}\left[e\sin M+\frac{3}{8}e^2\sin 2M\right]U, \tag{8.51}$$

$$e_S(t)=\frac{2}{n^2a}\left[(1-e^2)\sin M+\frac{e}{4}\sin 2M+\frac{e^2}{6}\sin 3M\right]U, \tag{8.52}$$

$$i_S(t)=0, \tag{8.53}$$

$$\Omega_S(t)=0, \tag{8.54}$$

$$\omega_S(t)=-\frac{2}{n^2ae}\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\cos M+\frac{e}{4}\cos 2M+\frac{e^2}{6}\cos 3M\right]U, \tag{8.55}$$

$$M_S(t)=\frac{2}{n^2ae}\left[\cos M+\frac{e}{4}\cos 2M+\frac{e^2}{6}\cos 3M\right]U+\left(\frac{3}{2a}\right)\frac{2}{n^2}\left[e\cos M+\frac{3}{16}e^2\cos 2M\right]U. \tag{8.56}$$

上述各式右端出现的 a,e 及 n 均为平均根数 $\bar{a}_0,\bar{e}_0$ 和 $\bar{n}_0=\sqrt{\mu}\,\bar{a}^{\left(-\frac{3}{2}\right)}$.

这里必须说明一点,对于大偏心率情况(如接近或超过 Laplace 极限值 0.6627),上述展成 M 的三角级数的方法不再适用,但正如本节开始所提到的,这里主要针对持续时间不太长的卫星轨道机动中的小推力变轨过程,或变轨量不大的轨道过渡问题,所涉及到的初始轨道和目标轨道的偏心率都不大. 而对于深空探测中涉及大偏心率的轨道过渡的全过程,已不是受摄二体问题,当然不会再采用上述处理方法. 不过,即使偏心率较大,不宜采用展

成 M 的三角级数的方法，可改为直接对 f 或 E 的积分方法，只是将方程(8.17)中的 $(1+2e\cos f+e^2)^{\pm 1/2}$ 等项按二项式展开即可，同样可构造摄动分析解. 保留到 $O(e^2)$ 的长期项变率和短周期项公式如下：

$$a_C = \frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)U, \tag{8.57}$$

$$e_C = -\frac{1}{na}eU, \tag{8.58}$$

$$M_C = -\frac{3}{2a}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)U(t-t_0), \tag{8.59}$$

$$a_S = \frac{2}{n}(e\sin E)U, \tag{8.60}$$

$$e_S = -\frac{1}{n^2a}\left(2\sin E+\frac{e}{2}\sin 2E\right)U, \tag{8.61}$$

$$\lambda_C = \frac{4}{n^2a}(e\cos E)U, \tag{8.62}$$

这里 $\lambda=M+\omega$. 从结果可看出，保留到 $O(e^2)$ 项，解的具体形式与前面的结果仍旧是类似的.

由上述分析解，可以了解小推力变轨的一些重要特征，对于不同的变轨要求，可采用相应的变轨方式（即 S,T,W 或 U,N,W 的选择）和变轨时机（即轨道状态，它由轨道根数来反映）.

§8.3　轨道过渡中的光压加速机制

除短时间过程的小推力轨道机动技术外，长时间的小推力轨道过渡技术也已实现，而无论是大推力过渡还是小推力过渡，还可以借助其他力因素加速，其中光压就是一个很好的力源. 关于光压作用，对于太阳系自然天体的运动几乎无影响，但对于航天器的运动而言就完全不同了，其原因之一是光压作用的性质不同于引力，它与承受客体的有效面质比有关，这在前面第 5 章 §5.3 中讨论人造地球卫星的运动时有过介绍，对于一个典型大小的卫星而言，其面质比是地球面质比的 10^8 倍，光压作用大，但这一原因远不足以说明问题，因光压是一个有心斥力，通常是不会对卫星型或行星型的探测器运动起到加速或减速作用的，之所以对卫星运动有显著影响还有另一个重要原因，即地影间断，这将导致光压作用区别于一般的中心力（如引力）作用，它会使卫星轨道半长径和偏心率出现周期长、变幅大的长周期变化，在一定的长时间间隔内，卫星会得到加速作用. 尽管深空探测器在向目标轨道

过渡中不会遇到地影作用，但可利用航天器太阳能帆板的特殊定向，使其在过渡轨道上得到光压力的加速，这就可以使光压力作为轨道过渡（特别是小推力过渡）中的一种辅助能源. 如果帆的面积足够大，甚至可以使航天器像一个太空帆，在无其他动力的情况下向目标轨道过渡，这就是一种光压加速机制.

1．动力模型与加速机制

以月球探测器的发射为例，在地—月—探测器限制性三体问题基础上进一步考虑太阳引力和太阳光压的摄动影响，即处理成一个受摄的限制性三体问题. 可不必拘泥于限制性三体问题的坐标系取法[1]，采用地心坐标系 $O-xyz$ 较为方便，基本平面（xy 坐标面）就取月球绕地球运动的轨道面，在此假定日、月运动可采用平均轨道（甚至不变椭圆）来体现，这不影响实质问题，于是相应的作为小天体的月球探测器相对地球的运动方程可写成下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon, \tag{8.63}$$

$$\boldsymbol{F}_0 = -GM\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{8.64}$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3. \tag{8.65}$$

即形式上写成受摄二体问题，F_0 是地球的中心引力加速度，F_ε 是月球引力、太阳引力和太阳光压摄动加速度. 当探测器飞近月球时，其运动性质会发生变化，但这并不影响上述动力模型数学表达的正确性. 摄动加速度的具体形式如下：

$$\boldsymbol{F}_1 = -GM_1\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_1}{\Delta_1^3} + \frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}\right), \tag{8.66}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -GM_2\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_2}{\Delta_2^3} + \frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right). \tag{8.67}$$

上述各式中的 M, M_1 和 M_2 分别为地球、月球和太阳的质量，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 各为探测器、月球和太阳的地心位置矢量，相应地有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}_1 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2 \end{cases}. \tag{8.68}$$

关于光压摄动加速度 F_3，其具体表达形式与探测器（包括探测器的帆板）的姿态有关，这里不作细节性的讨论，而是以一有效面质比 S/m 代替，m 是探测器的质量，S 是相应的有效截面积（主要取决于较大帆板本身的面积）. 如果该有效截面对应的法线指向太阳方向，则有

$$\boldsymbol{F}_3 = \left(\frac{\kappa S}{m}\rho_{\mathrm{S}}\right)\left(\frac{\Delta_{\mathrm{S}}^2}{\Delta_2^2}\right)\frac{\boldsymbol{\Delta}_2}{\Delta_2}, \tag{8.69}$$

这一表达式在第 5 章 § 5.3 中出现过，见(5.107)式，其中 $\kappa=1+\eta$，η 是探测器表面材料的反射系数，ρ_{S} 是 $\Delta_2=\Delta_{\mathrm{S}}$ 处的光压强，而当 $\Delta_{\mathrm{S}}=1\mathrm{AU}$(天文单位)时，$\rho_{\mathrm{S}}=4.5605\times10^{-6}\mathrm{kg/ms^2}$. 当无地影时，这种指向导致的光压力是一连续的中心斥力，仍为保守力，对探测器绕地球运行(在飞抵月球之前)的轨道只有短周期摄动影响，光压不会起加速作用. 而当帆板的法线为太阳到探测器的方向($\boldsymbol{\Delta}_2/\Delta_2$)与探测器运动方向($\boldsymbol{v}/v$)夹角的平分线时，探测器在太空运行的过程中，就会得到光压的加速[2,3]. 这与海洋中行驶的帆船能得到风力的加速有类似的力学机制，帆板的特殊定向会使光压合力在探测器整个运行过程中不会形成一种"阻力". 此时公式(8.69)变为下列形式：

$$\boldsymbol{F}_3 = \left(\frac{S}{m}\rho_{\mathrm{S}}\right)\left(\frac{\Delta_{\mathrm{S}}^2}{\Delta_2^2}\right)\cos\Psi^*\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_2}{\Delta_2}+\eta\,\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right), \tag{8.70}$$

其中

$$\Psi^* = \Psi/2, \tag{8.71}$$

$$\cos\Psi = \left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_2}{\Delta_2}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right). \tag{8.72}$$

$\Psi^*<90^\circ$，**有** $\cos\Psi^*=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\Psi\right)^{1/2}>0$.

2. 数值验证结果与分析

为了证实上述动力模型和帆板有特殊定向的光压加速作用，分别对下面 4 种模型作了计算，即

(1) **受摄椭圆限制性三体问题，即只考虑太阳引力摄动，月球与太阳的轨道均取为椭圆，代替真实轨道，这对所讨论的问题无实质性影响.**

(2) **在(1)的基础上再加入光压，但帆板对太阳定向，即其法线方向一直指向太阳.**

(3) **将帆板的法线取为上述角平分线方向.**

(4) **在探测器绕地球运行过程中向着太阳飞行的那"半圈"，干脆使帆板法线垂直太阳方向(即这半圈光压为零).**

初始条件是这样选取的，探测器在近地停泊轨道已经过一次脉冲式变轨，耗费不大的能量，使其变为近地点高度为 1000 km，远地点地心距为地月平均距离的一半的大椭圆轨道，$e=0.926127$. 在此假定下，探测器的初始绕地球运动周期为 $3^{\mathrm{d}}.635706552$，近地点速度 $v_p=10.2009$ km/s，相应的 Jacobi **常数** C **的值为**

$$C = 4.2293857311 > C_1.$$

根据第 7 章 §7.3 中给出的结论，在这样的条件下，如果不借助于光压加速，探测器是不可能飞抵月球的. 对于第(1)中情况，探测器始终保持在地球周围，至少在相当长的间隔内是如此；在第(2)中情况中尽管考虑了光压，但由于帆板的定向，不可能起加速作用，探测器轨道长轴有长周期转动，这是光压的作用，但半长轴的大小亦无明显变化. 只有在(3)和(4)两种情况下，光压明显起着加速作用，探测器的轨道半长径不断地增大，经 60 多天就飞抵月球附近.

计算中，为了表明光压的明显作用，在上述(2)～(4)种情况中，帆板的截面积$\frac{S}{m}$取得较大，有

$$\frac{S}{m} = (120 \times 120\ )\mathrm{m}^2/500\ \mathrm{kg}.$$

具体探月飞行中未必采用这么大的帆板，但这不影响对光压加速机制的探讨.

关于(3)和(4)两种情况，探测器轨道半长径的变化并无明显差别，但两种情况相比，显然前者优于后者，其原因如下：

(1) 对于第(4)种情况，当探测器向着太阳飞行的半圈中，无光压作用，而第(3)种情况，在这半圈中光压不仅无阻力方向的分量，而且仍有较小的“加速”作用.

(2) 更重要的是，从姿态控制角度来看，第(4)种情况为了使光压不起阻力作用，在探测器每向着太阳飞行的半圈中需将帆板的指向作“间断”性的调节，而第(3)种情况在探测器整个飞行过程中保持“一种”状态的控制，即根据两个确定方向(太阳方向和探测器运动方向)所决定的指向加以控制，这和第(2)种情况帆板单一地对太阳定向的的控制并无多大差别，显然比第(4)种情况控制简单. 因此在探测器运行的全过程中采用第(3)种情况加速较有利.

根据上述加速机制的分析和数值验证的结果表明，只要将探测器上太阳帆板的法线方向取上述特殊方向，那么太阳辐射作用既可作为一种能源，又可起到动力加速作用. 从使用角度来看，帆板的截面积可减小些，它不会改变加速机制，可成为发射某种月球探测器轨道的一种节能途径.

§8.4 轨道过渡中引力加速的一种节能机制

轨道过渡中可以借助于第三体的引力加速，使探测器在节能条件下到

达目标天体，在此过渡中探测器与第三体必须有特殊的相对位置，这是不难理解的，这里将不予讨论. 下面将针对月球探测（也称为亚深空探测）和行星际探测，分别阐述轨道过渡中的另一种特殊形式，即如何借助于共线平动点 L_1 和 L_2 附近的“狭窄走廊”飞向目标天体的节能机制.

1. 地月系中的过渡问题

从低地球轨道（LEO）或地球同步转移轨道（GTO）上经变轨向目标天体（月球）过渡可采用脉冲式的大推力过渡，所需能量较大，相应的 Jacobi 常数 C 较小，往往比 C_1 值小得多，相应的原分别包围地球和月球的零速度面已连通，且共线平动点 L_1 附近的“走廊”大大敞开，见第 7 章图 7.7. 如果采用低能量的奔月方式，只要相应的过渡轨道初始速度使相应的 Jacobi 常数 $C \leqslant C_1$（接近或稍小于），此时上述两个零速度面相接或从平动点 L_1 处稍稍打开了一个“狭窄走廊”，探测器有可能越过这一通道后奔月. 但要注意，L_1 处有一个狭窄通道只是探测器可以越过该通道后奔月的一个必要条件，而不是充分条件，还要看转移轨道的起始状态. 可以做这样的数值试验，即把探测器“放”到联结 L_1 点的内稳定流形上等待系统的演化，结果探测器不能“返回”到达地球附近，即对转移轨道的初始状态有要求. 也就是说，从 L_1 点沿内稳定流形的反向积分，结果经几个月球绕地运动周期的间隔后探测器仍不能“返回”地球附近，离地球的距离约为 0.35 个地月距离（这是一个算例）. 根据这一状态，若转移轨道要在地球附近起航，则按上述最小能量不足以将探测器推向月球，需要加大初速，让 L_1 点附近的“走廊”开得大一些. 更好的选择是增加一次机动，其条件可由上述反向积分获得，在离地球0.35 个地月距离处加一次机动（反向），使其接近地球，找出适当的起始转移轨道. 曾有人采用这种转移方式进行过仿真计算[4]，结果比大推力过渡（例如 Hohmann 转移轨道）方式明显节能，但转移时间较长. 至于如何选择转移方式，是否要采用借力加速的节能方式，对转移时间的长短又如何选择等，这要看具体的航天任务而定，在众多约束（包括节能）前提下选优.

2. 行星际过渡问题

同样可借助于共线平动点附近的通道，采取节能式的过渡. 如果说上述奔月是利用内 Lagrange 点 L_1，那么行星际转移将是利用外 Lagrange 点 L_2，此时初始状态对应的 Jacobi 常数 C 满足条件 $C_3 < C < C_2$，对应第七章图 7.8. 例如从地球到火星的过渡，出发的转移轨道是通过日—地系对应的 L_2 点的不稳定流形，到达火星附近的转移轨道是通过日—火星对应的 L_2

点的稳定流形，见图 8.2 和图 8.3.

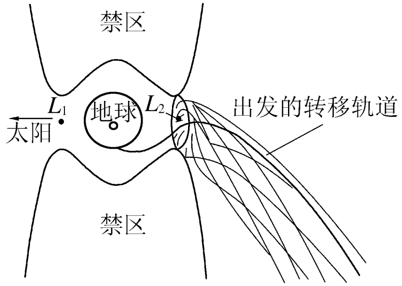

图 8.2　出发的转移轨道示意图

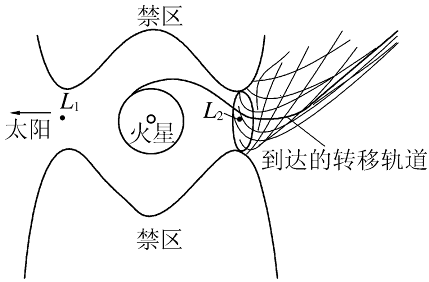

图 8.3　到达的转移轨道示意图

上述两类探测背景下的节能式轨道过渡，都是利用共线平动点 L_1 和 L_2 的动力学特征获得的. 尽管这是在限制性三体问题（更确切地说是圆型限制性三体问题）前提下得出的结论，但它毕竟是一种动力学机制的反映，对于实际问题，上述结果可以作为低能过渡轨道（转移轨道）设计的一种初选，这显然是有意义的.

参 考 文 献

［1］ Szebehely V. Theory for Orbits. New York and London：Academic Press，1967

［2］ Liu L. Using Light Pressure to Guide a Probe to the Moon. Proceeding of 50th International Astronautical Congress. Amsterdam，The Netherlands，IAF-99-A. 7.06，1999

［3］ 刘林. 借助光压将探测器推向月球，天文学报，2001，42(1)：70～74 LIU Lin. To Guide a Lunar Probe with Light Pressure. Chin. Astron. Astrophys.，2001，25(3)：343～348

［4］ Topputo F. Vasile M. & Bernaelli-Zazzera F. Interplanetary and Lunar Transfers Using Libration Points. in Proceeding of the 18th International Symposium on Space Flight Dynamics，Munich，Germany，2004，583～588

第 9 章　月球卫星运动的轨道力学

要达到对太阳系中各种天体探测的目的，必然要近距离接近目标天体，更有效的手段是在探测器接近目标天体后，再次机动变轨使其转化为环绕目标天体的轨道器，此即目标天体的人造卫星. 尽管这种卫星的运动与人造地球卫星的运动属于同一类，其动力学模型都是对应一个受摄二体问题，但由于各目标天体之间的各种差异，不能完全照搬研究人造地球卫星运动的方法和结果. 深空探测的首选目标——月球，就是另一种典型，它是太阳系中的一个慢自转天体（自转周期与绕地球运行的公转周期相同），其引力位与地球引力位有明显差异，而中心天体非球形引力又是绕其运行的卫星轨道变化的主要摄动源，因此，本书选择月球卫星的运动作为深空探测器轨道力学的一个重要内容很有必要，它可以使读者对卫星型探测器的运动及其轨道变化特征有更广泛的了解.

§ 9.1　月球非球形引力位的主要特征

在第 4 章 § 4.2 中已对太阳系天体非球形引力位作过介绍，其一般表达式即(4.63)式：

$$V=\frac{GM}{R}\left[1+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{R}\right)^{l}P_{lm}(\mu)(C_{lm}\cos m\lambda_{\mathrm{G}}+S_{lm}\sin m\lambda_{\mathrm{G}})\right],\quad(9.1)$$

在这里，(9.1)式中的 GM 是月心引力常数，a_{e} 是月球参考椭球体赤道半径，R，λ_{G}，φ 是月固坐标系中的球坐标分量，即月心距、经度和纬度. 同样非归一化的缔合勒让德球函数 $P_{lm}(\sin\varphi)$ 和相应的谐系数 C_{lm}，S_{lm} 与归一化的 $\overline{P}_{lm}(\sin\varphi)$ 和 $\overline{C}_{lm}$，$\overline{S}_{lm}$ 有如下关系

$$\begin{cases}\overline{P}_{lm}(\mu)=P_{lm}(\mu)/N_{lm},\\ \overline{C}_{lm}=C_{lm}N_{lm},\overline{S}_{lm}=S_{lm}N_{lm},\end{cases}\quad(9.2)$$

$$\begin{cases} N_{lm}=\left[\dfrac{1}{(1+\delta)}\dfrac{(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\right]^{1/2}, \\ \delta=\begin{cases}0, & m=0, \\ 1, & m\neq 0.\end{cases}\end{cases} \tag{9.3}$$

为了进一步了解月球引力位的特征，本书附录三中列出了地球和月球引力场模型的部分球谐项系数，其中美国 JPL 的 LP75G 和 LP165 两种模型是目前公认较好的月球引力场模型. 尽管对月球的探测还仍未达到对地球探测的程度，由于各种原因，月球引力场模型的精度还不够理想，但还是可从这两种引力场模型得到一些重要的信息. 从引力场模型球谐系数值可以看出，除月球由于自转较慢，动力学扁率 $J_2=-C_{2,0}$ 较小(10^{-4})外，对轨道偏心率影响较大的奇次带谐项系数$\overline{C}_{2l-1,0}(l\geqslant 2)$与$\overline{C}_{2,0}$之比$|\overline{C}_{2l-1,0}/\overline{C}_{2,0}|$的量级接近($10^{-1}$)，而地球引力场相应系数之比的量级只有 10^{-3}，这将导致环月运行探测器的轨道(特别是偏心率 e)出现振幅较大的长周期变化，从而导致一些人造地球卫星不会出现的现象.

月球自转慢，除动力学扁率系数 $C_{2,0}$ 的值与其他球谐系数的值不像地球中相差那么大(几乎是 10^3 倍)以外，还将使非球形引力位中田谐项对月球卫星轨道的影响也明显地不同于地球对其卫星轨道的影响. 所有这些，都将在后面 §9.4 和 §9.5 中进行详尽的介绍.

§9.2 月球物理天平动简介与参考系问题

月球天平动可以分为两类，即视天平动和物理天平动. 视天平动是由于运动的原因而使地球上的观测者看到的不仅是月球对着地球的“半面”，而是超过“半面”，这仅是视觉效果而没有力学效应；而物理天平动是月球也象陀螺一样在空间呈现真实的摆动(即赤道面的摆动)，它导致了月球引力场在空间的变化，从而影响月球卫星的轨道运动.

1. 物理天平动的两种表达形式

根据月球自转理论，给出了天平动三个参数(σ,ρ,τ)的分析表达式[1~5]，但类似于地球章动理论给出的章动序列，(σ,ρ,τ)的分析表达式亦包含几百项. 因此，对月球物理天平动的分析解和数值解均有必要作一介绍. 但在某些问题中，可以采用简化的分析表达式. 关于物理天平动的分析解有多种形式，也在不断的改进. 作为一例，下面列出 Hayn 结果中(σ,ρ,τ)的主要项(前三项)[2]：

$$
\begin{cases}
\tau = 0^\circ.0163888\sin l_s - 0^\circ.003333\sin l_m + 0^\circ.005\sin 2\omega_m, \\
\rho = -0^\circ.0297222\cos l_m + 0^\circ.0102777\cos(l_m + 2\omega_m) - \\
\quad 0^\circ.0030556\cos(2l_m + 2\omega_m), \\
\sin I\sigma \approx I\sigma = -0^\circ.0302777\sin l_m + 0^\circ.0102777\sin(l_m + 2\omega_m) - \\
\quad 0^\circ.0030556\sin(2l_m + 2\omega_m).
\end{cases}
\tag{9.4}
$$

该式中 l_s 和 l_m 分别为太阳和月球的平近点角，ω_m 是月球近地点幅角. 至于三个天平动参数(σ,ρ,τ)的几何意义，将在下面介绍参考系时具体表明.

物理天平动的另一种表达为数值形式，JPL 的 DE405 数值列表中就直接给出了表达天平动的三个欧拉角(Ω',i_s,Λ)每天的具体数值. 这三个欧拉角与分析表达形式中的三个参数有不同的几何意义，它们将在建立不同的赤道坐标系中分别有相应的应用.

2. 月心赤道坐标系和月固坐标系

与研究人造地球卫星的运动类似，由于有物理天平动现象，研究月球卫星的运动，同样也涉及到历元(取 J2000.0)月心平赤道坐标系和真赤道坐标系以及月固坐标系.

对于月球平赤道，根据 Cassini 定律，月球轨道，黄道与月球平赤道交于一点 N，见图 9.1. 有

$$
\begin{cases}
\psi = \Omega_m, \\
I = I_m, \\
\varphi = \theta_m + \pi = L_m - \Omega_m + \pi,
\end{cases}
\tag{9.5}
$$

其中 Ω_m, I_m, L_m 表示月球轨道的平根数，分别为月球轨道升交点平黄经，平倾角和月球平黄经.

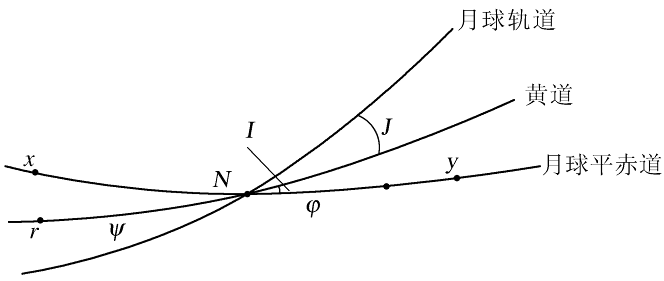

图 9.1　月球轨道、黄道与月球平赤道之间的几何关系

对于月球真赤道，它与平赤道的关系见图 9.2，有

$$
\begin{cases}
\psi' = \Omega_m + \sigma, \\
I' = I_m + \rho, \\
\varphi' = \theta_m + \pi + (\tau - \sigma),
\end{cases}
\tag{9.6}
$$

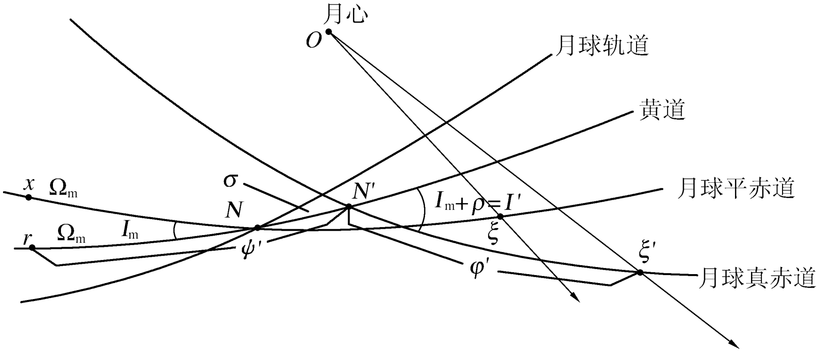

图 9.2　月球真赤道与月球平赤道之间的关系

这里以三个天平动参数(σ,ρ,τ)表明了平赤道与真赤道之间的几何关系. 图 9.2 中,通过真赤道也描述了月固坐标系,$O\xi'$方向即过月面上 Sinus Medii 的子午线的方向(亦即月球指向地球的那一惯性主轴方向).

DE405 数值历表中直接给出的另三个欧拉角(Ω',i_s,Λ)表明了月心地球平赤道坐标系与月固坐标系之间的关系,见图 9.3.

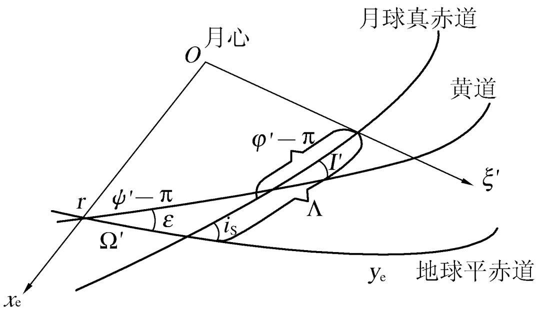

图 9.3　月心地球平赤道坐标系与月固坐标系的关系

图中 $O-x_ey_ez_e$ 即月心地球平赤道坐标系,ξ'是月固坐标系的 X 轴指向,三个欧拉角(Ω',i_s,Λ)在图中已表明清楚,不必再加注明,ε 是黄赤交角.

两种物理天平动参数的表达形式(σ,ρ,τ)和(Ω',i_s,Λ),分别用两种方式描述了月球真赤道面的摆动,同时也分别定义了不同的月心坐标系,即月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$,月心地球平赤道坐标系 $O-x_ey_ez_e$(以下称月心天球坐标系)和月心月球平赤道坐标系 $O-xyz$(以下称月心赤道坐标系). 它们之

间的转换关系在研究月球卫星的运动和表达月球卫星在月面上的星下点位置时必然要涉及到.

若记月心天球坐标系 $O-x_e y_e z_e$ 中的卫星位置矢量为 r_e，它与月固坐标系中卫星相应的位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 之间的关系如下：

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{r}_e=(\boldsymbol{M}_2)\boldsymbol{r}_e, \tag{9.7}$$

这里两个转换矩阵 M_1 和 M_2 各由上述两种物理天平动参数的表达形式给出. 根据图 9.3 表明的几何关系不难给出转换矩阵$(\boldsymbol{M}_1)$和$(\boldsymbol{M}_2)$的表达式如下：

$$(\boldsymbol{M}_1)=\boldsymbol{R}_z(\Lambda)\boldsymbol{R}_x(i_s)\boldsymbol{R}_z(\Omega'), \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{M}_2)&=\boldsymbol{R}_z(\varphi'-\pi)\boldsymbol{R}_x(I')\boldsymbol{R}_z(\psi'-\pi)\boldsymbol{R}_x(\varepsilon)\\&=\boldsymbol{R}_z(\psi')\boldsymbol{R}_x(-I')\boldsymbol{R}_z(\psi')\boldsymbol{R}_x(\varepsilon).\end{aligned} \tag{9.9}$$

(9.9)式第一行是按图 9.3 给出的，而第二行是按图 9.2 给出的，两者实为同一转换关系. 上述两种转换关系之间的差别取决于(σ,ρ,τ)的取项多少，若取前面(9.4)式给出一例的前三项，分别计算 2003 年 11 月 1 日 0 时和 2004 年 6 月 15 日 0 时月球表面“上空”一点的空间坐标转换到月固坐标系中的位置，两种转换结果之差为公里级，相应的转换矩阵元素的最大差别达到 7.6×10^{-4}. 如果采用 Eckhardt 等人结果中(σ,ρ,τ)的前四项[3~5]（量级与 Hayn 结果中的前三项相当），亦同样有上述差别.

根据上述比较可知，直接采用物理天平动分析解的简化表达式，在某些问题中是不能满足精度要求的. 但同时告诉我们，仅取 σ,ρ,τ 主项的简化表达式与 DE405 数值历表的差别小于 10^{-3}，这种差别在考虑物理天平动对月球卫星轨道的影响时，在一定精度要求的前提下，则无妨. 定轨或预报中涉及轨道外推弧段为 10^2 时（对低轨卫星为 1～2 天的间隔），要保证 10 米级甚至米级精度是可以达到的.

鉴于上述比较的结果，加上要建立月球卫星轨道理论，了解轨道变化的规律，或直接反映月球卫星相对月心坐标系的几何状况，又必须采用月心赤道坐标系，而不是月心地球赤道坐标系，那么就要由(σ,ρ,τ)来建立月心赤道坐标系 $O-xyz$（对应所选取的历元，如目前惯用的 J2000.0）与月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$ 之间的关系. 而若要通过历元月心赤道坐标系 $O-xyz$ 与月心天球坐标系 $O-x_e y_e z_e$ 之间的转换关系（即利用高精度的 Ω',i_s,Λ 值）来计算月球卫星在月固坐标系中的精确位置 $\boldsymbol{R}$ 也很简单，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{r}_e, \quad \boldsymbol{r}_e=(\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r},\\(\boldsymbol{N})=\boldsymbol{R}_z(-\Omega_m)\boldsymbol{R}_x(-I_m)\boldsymbol{R}_z(\Omega_m)\boldsymbol{R}_x(\varepsilon),\end{cases} \tag{9.10}$$

$\boldsymbol{r}$ 是通过定轨或预报给出的月心赤道坐标系中的月球卫星位置矢量. 这里

变换矩阵(N)并不涉及到物理天平动的表达形式,转换的精度只取决于月球卫星定轨或预报的精度.

§9.3 月球卫星运动的受力分析

研究月球卫星(特别是低轨卫星)的空间运动与研究人造地球卫星的运动一样,显然采用历元(J2000.0)月心赤道坐标系 $O-xyz$ 为宜,考虑月球非球形引力摄动时,将涉及到月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$. 这两种坐标系之间的几何关系在前面的图 9.2 中已清楚地表明. 若记两种坐标系中卫星位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$,则有

$$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{A})\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{R}=(\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}. \tag{9.11}$$

其中$(\boldsymbol{A})$为两种坐标系之间的转换矩阵,不难给出

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{R}_z(-\Omega_{\mathrm{m}})\boldsymbol{R}_x(-I_{\mathrm{m}})\boldsymbol{R}_z(-\sigma)\boldsymbol{R}_x(I')\boldsymbol{R}_z(-\varphi') \\ &=\boldsymbol{R}_z(-\Omega_{\mathrm{m}})\boldsymbol{R}_x(-I_{\mathrm{m}})\boldsymbol{R}_z(-\sigma)\boldsymbol{R}_x(I_{\mathrm{m}}+\rho)\boldsymbol{R}_z(-(\varphi+\tau-\sigma)),\end{aligned} \tag{9.12}$$

$$\varphi=L_{\mathrm{m}}-\Omega_{\mathrm{m}}+\pi, \tag{9.13}$$

$$I_{\mathrm{m}}=1^{\circ}32'32''.7. \tag{9.14}$$

L_{m} 和 Ω 的含义前面已有说明.

在历元月心赤道坐标系 $O-xyz$ 中,月球卫星的运动方程如下:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon), \tag{9.15}$$

其中 $\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 分别为月球中心引力加速度(对应无摄运动)和各种摄动加速度,有

$$\boldsymbol{F}_0=-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{9.16}$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon). \tag{9.17}$$

为了便于问题的分析和计算上的某种需要,同样采用类似研究人造地球卫星运动时所采用的标准计算单位,即长度、质量和时间单位分别为

$$\begin{cases}[L]=a_{\mathrm{e}}=1738.0\ \mathrm{km}, \\ [M]=M,\qquad M\ \text{是月球质量,对应月心引力常数}\ \mu=GM, \\ [T]=(a_{\mathrm{e}}^3/GM)^{1/2}\approx 17^{\mathrm{m}}.2465\cdots,\end{cases} \tag{9.18}$$

在此标准单位系统中,$\mu=GM=1$,$G=1$,$[L]$,$[M]$和$[T]$的准确值取决于所采用的月球引力场模型.

在上述坐标系和标准单位系统中,各种物理量归结为无量纲形式. 在历元月心赤道坐标系中,相应的 $\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon)$涉及下列 10 种摄动源:

月球非球形引力摄动(C_{lm}, S_{lm}) $\boldsymbol{F}_1(J_l, J_{lm})$,
地球引力摄动(m'_1) $\boldsymbol{F}_2(m'_1)$,
太阳引力摄动(m'_2) $\boldsymbol{F}_3(m'_2)$,
月球固体潮摄动$(\kappa_2 J_2)$ $\boldsymbol{F}_4(\kappa_2 J_2)$,
月球物理天平动(σ, ρ, τ) $\boldsymbol{F}_5(\sigma, \rho, \tau)$,
太阳光压摄动 $\boldsymbol{F}_6(\rho_s)$,
月球扁率间接摄动 $\boldsymbol{F}_7(m'_1 J_2)$,
地球扁率摄动 $\boldsymbol{F}_8(J'_2 m'_1)$,
大行星(金星,木星)引力摄动 $\boldsymbol{F}_9(m'_3)$,
月球引力后牛顿效应 $\boldsymbol{F}_{10}(v^2/c^2)$.

对于低轨月球卫星($\bar{h}=100\sim300$ km),上述各摄动源对应的摄动量级 $\varepsilon_j(j=1, \cdots, 10)$分别为

$\varepsilon_1(J_2)=O(10^{-4})$, $\varepsilon_1(J_{2,2})=O(10^{-5})$, $\varepsilon_1(C_{lm}, S_{lm}, l\geqslant 3)=O(10^{-6}-10^{-5})$,
$\varepsilon_2=O(10^{-5})$,
$\varepsilon_3=O(10^{-7})$,
$\varepsilon_4=O(10^{-7})$,
$\varepsilon_5=O(10^{-7})$,
$\varepsilon_6=O(10^{-9})$,对应一般面质比$(S/M)=10^8$ 的卫星,
$\varepsilon_7=O(10^{-11})$,
$\varepsilon_8=O(10^{-12})$,
$\varepsilon_9=O(10^{-12})$,
$\varepsilon_{10}=O(10^{-11})$.

根据以上对各项摄动源的量级分析可知,一般情况下只需考虑前面 5 种摄动源,即月球非球形引力摄动,地球和太阳引力摄动,月球固体潮摄动和月球物理天平动的影响.而最主要的是月球非球形引力摄动和地球引力摄动.

§9.4 月球卫星轨道变化的主要特征

研究月球卫星轨道的变化规律是月球卫星轨道力学的核心内容,而只有构造月球卫星轨道变化的分析解才能给出其变化规律.但由于月球卫星的受力状况(尤其是月球非球形引力位的影响)不同于地球卫星,故必须针对月球卫星的受力特点构造相应的摄动分析解.文[6～9]先后给

出相应的分析解，但正由于月球卫星的受力状况不同于地球卫星，文[6～8]给出的是半分析解，而文[9]也只能采用拟平均根数法[10,11]给出相应的分析解.

由于月球非球形引力位中的动力学扁率项(J_2)与其他球谐项(C_{lm}, S_{lm})以及地球引力摄动项相差不大，将导致长周期项中出现降阶问题，这种小分母的出现，不能采用完整的平均根数法按 $\varepsilon=O(J_2)$ 来构造相应的小参数幂级数解，而只能采用人为的小参数 $\varepsilon=10^{-2}$，按拟平均根数法来构造相应的幂级数解，这正是文[9]所做的工作.

真正导致月球卫星轨道变化(包括解的表达式)不同于地球卫星的主要摄动源是月球非球形引力摄动以及与其有差别的月球物理天平动引起的坐标系附加摄动. 本节将针对这一人们关心的焦点，给出月球卫星轨道的相应变化特征，为有关研究工作和环月探测器的轨道设计等提供必要的轨道信息.

1. 月球非球形引力摄动解

根据上一节对月球卫星运动受力分析可知，在小参数 ε 确定为 10^{-2} 的前提下，若以 σ 表示六个 Kepler 根数($a, e, i, \Omega, \omega, M$)，运动方程可以写成下列形式：

$$\begin{cases}\dot{\sigma}=f_0(a)+f_2(J_2)+f_3(C_{lm}, S_{lm}),\\ f_2=f_{2C}+f_{2L},\\ f_3=f_{3C}+f_{3L}+f_{3S},\end{cases} \tag{9.19}$$

右函数 f_2 和 f_3 由(9.1)式给出的非球形引力位部分 $\Delta V=V-\left(\dfrac{GM}{R}\right)$构成，其中 $J_2=-C_{2,0}$，物理天平动引起的坐标系附加摄动后面另行讨论.

非球形引力摄动对应的小参数幂级数解有如下形式：

$$\begin{cases}\sigma(t)=\bar{\sigma}(t_0)+(\delta\bar{n}_0+\sigma_{2C}+\sigma_{3C})(t-t_0)+\Delta\sigma_L^{(1)}(t)+\sigma_S^{(2)}(t),\\ \Delta\sigma_L^{(1)}(t)=\sigma_L^{(1)}(t)-\sigma_L^{(1)}(t_0),\\ \bar{\sigma}(t_0)=\sigma_0-\sigma_S^{(2)}(t_0),\end{cases} \tag{9.20}$$

其中 $\Delta\sigma_L^{(1)}(t)$是由除 J_2 项外所有非球形引力位的球谐项(C_{lm}, S_{lm})摄动导致的长周期变化项，对应方程(9.19)右函数中的 $f_{3L}(C_{lm}, S_{lm})$部分，积分降阶后给出. 这里只给到三阶长期项及与其相当的一阶长周期变化项和二阶短周期项，而对于沿迹量平近点角应同时给出 a 的三阶短周期项$a_S^{(3)}(t)$. 所有这些项与摄动源的关系如下：

$$\begin{cases}\sigma_{2C}=\sigma_{2C}(J_2),\\ \sigma_{3C}=\sigma_{3C}(J_l,l(2)\geqslant 4).\end{cases}\tag{9.21}$$

$$\Delta\sigma_L^{(1)}(t)=\Delta\sigma_L(t;J_l,l\geqslant 3;C_{lm},S_{lm},l\geqslant 2),\tag{9.22}$$

$$\begin{cases}\sigma_S^{(2)}(t)=\sigma_S^{(2)}(t;J_2),\\ a_S^{(3)}(t)=a_S^{(3)}(t;J_l,l\geqslant 3;C_{lm},S_{lm,l},l\geqslant 2).\end{cases}\tag{9.23}$$

由于 $\sigma_{1C}=0$**，故计算** σ_{2C},σ_{3C} **和** $\Delta\sigma_L^{(1)}$ **时，需要用到的**$\bar{\sigma}(t)$**均可用**$\bar{\sigma}_0=\bar{\sigma}(t_0)$**，于是各根数的具体表达形式如下：**

$$\begin{cases}a(t)=\bar{a}_0+a_S^{(2)}(t)+a_S^{(3)}(t)\\ e(t)=\bar{e}_0+\Delta e_L^{(1)}(t)+e_S^{(2)}(t)\\ i(t)=\bar{i}_0+\Delta i_L^{(1)}(t)+i_S^{(2)}(t)\\ \Omega(t)=\bar{\Omega}_0+(\Omega_{2C}+\Omega_{3C})(t-t_0)+\Delta\Omega_L^{(1)}(t)+\Omega_S^{(2)}(t)\\ \omega(t)=\bar{\omega}_0+(\omega_{2C}+\omega_{3C})(t-t_0)+\Delta\omega_L^{(1)}(t)+\omega_S^{(2)}(t)\\ M(t)=\bar{M}_0+(\bar{n}_0+M_{2C}+M_{3C})(t-t_0)+\Delta M_L^{(1)}(t)+M_S^{(2)}(t)\end{cases}.\tag{9.24}$$

其中 $\bar{n}_0=\bar{a}_0^{-3/2}$**，这里的** $\bar{a}_0=a_0-[a_S^{(2)}(t_0)+a_S^{(3)}(t_0)]$.

(1) 长期项系数 $\boldsymbol{\sigma}_C$

$$\Omega_{2C}=-\frac{3J_2}{2p^2}n\cos i,\tag{9.25}$$

$$\omega_{2C}=\frac{3J_2}{2p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right),\tag{9.26}$$

$$M_{2C}=\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\,n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right),\tag{9.27}$$

$$\Omega_{3C}=-n\cos i\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_2(i)K_1(e),\tag{9.28}$$

$$\omega_{3C}=-\cos i\Omega_{3C}-n\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_1(i)[(2l-1)K_1(e)+(1-e^2)K_2(e)],\tag{9.29}$$

$$\begin{aligned}M_{3C}=&-\sqrt{1-e^2}(\omega_{3c}+\cos i\Omega_{3C})-\\&n\sqrt{1-e^2}\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_1(i)[2(l+1)K_1(e)].\end{aligned}\tag{9.30}$$

其中 $p_0=a(1-e^2)$, a,e,i **均取** $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$ **值.** $F_1(i),\cdots,K_1(e),\cdots$**的表达式如下：**

$$\begin{cases} F_1(i) = \sum_{q=0}^{l/2} (-1)^{(l+2q)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)} C_{lq} (\sin i)^{2q} \\ F_2(i) = \sum_{q=1}^{l/2} (-1)^{(l+2q)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)} C_{lq} 2q (\sin i)^{2q-2} \\ C_{lq} = \binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q} = \dfrac{(l+2q)!}{(q!)^2 \left(\frac{l}{2}-q\right)! \left(\frac{l}{2}+q\right)!} \end{cases} \tag{9.31}$$

$$\begin{cases} K_1(e) = \sum_{\alpha(2)=0}^{l-2} C_{l\alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha} \\ K_2(e) = \sum_{\alpha(2)=2}^{l-2} C_{l\alpha} \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha-2} \\ C_{l\alpha} = \binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha/2} = \dfrac{(l-1)!}{(l-1-\alpha)! \left(\frac{\alpha}{2}!\right)^2} \end{cases} \tag{9.32}$$

上述各式中,求和时 $l(2)\geqslant 4$,$\alpha(2)\geqslant 2$ 表示按 $l=4,6,\cdots$,$\alpha=2,4\cdots$取值.

(2)一阶长周期变化项 $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)-\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)$

对于月球非球形引力摄动,长周期项可严格积分给出,由于相应的周期较长,亦可按长期项处理,即下面给出的表达式(9.33)~(9.38). 若要给出 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 的形式,也很简单,只要将表达式(9.34)~(9.38)中的 $I(\omega)n(t-t_0)$,$\Phi_{lmp}n(t-t_0)$,…改为下述积分:

$$\int^t I(w)n\mathrm{d}t,\ \int^t \Phi_{lmp}n\,\mathrm{d}t,\cdots$$

即可. 下面给出的 $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 相当于$[\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)/\mathrm{d}t](t-t_0)$,括号内的表达式正是下一节讨论月球卫星轨道变化所确定的某些特征时要引用的.

$$\Delta a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = 0, \tag{9.33}$$

$$\begin{aligned} \Delta e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = {} & (1-e^2) \sum_{l\geqslant 3} \left(\frac{J_l}{p_0^l}\right) \sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2} (l-2p) F_3(i) \left(\frac{1}{e} K_3(e)\right) \\ & I(\omega) n(t-t_0) - (1-e^2) \sum_{l\geqslant 2} \sum_{m=1}^{l} \left(\frac{1}{p_0^l}\right) \sum_{p=1}^{l-1} (l-2p) \\ & F_{lmp}(i) \left(\frac{1}{e} K_3(e)\right) \Phi_{lmp} n(t-t_0), \end{aligned} \tag{9.34}$$

$$\begin{aligned} \Delta i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = {} & -\cos i \sum_{l\geqslant 3} \left(\frac{J_l}{p_0^l}\right) \sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2} (l-2p)(F_3(i)/\sin i) K_3(e) I(\omega) n(t- \\ & t_0) + \sum_{l\geqslant 2} \sum_{m=1}^{l} \left(\frac{1}{p_0^l}\right) \sum_{p=1}^{l-1} [(l-2p)\cos i \\ & -m](F_{lmp}(i)/\sin i) K_3(e) \Phi_{lmp} n(t-t_0), \end{aligned} \tag{9.35}$$

$$\Delta\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(F_4(i)/\sin^2 i)K_3(e)H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(F'_{lmp}(i)/\sin i)K_3(e)\psi_{lmp}n(t-t_0), \tag{9.36}$$

$$\Delta\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\cos i\Delta\ \Omega_{\mathrm{l}}^{(1)}(t) - \sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}F_3(i)[(2l-1)K_3(e)+$$
$$(1-e^2)K_4(e)]H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}F_{lmp}(i)[(2l-1)K_3(e)+$$
$$(1-e^2)K_4(e)]\psi_{lmp}n(t-t_0), \tag{9.37}$$

$$\Delta\ M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\sqrt{1-e^2}\left[\ \Delta\omega_l^{(9.1)}(t)+\cos i\Delta\Omega_l^{(9.1)}(t)\ \right]-$$
$$\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}2(l+1)F_3(i)k_3(e)H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}2(l+1)F_{lmp}(i)K_3(e)\psi_{lmp}n(t-$$
$$t_0). \tag{9.38}$$

上述各式中的 p_0 即 $a(1-e^2)$，为了区别求和取值符号 p，用了 p_0 这一符号. 同样上述各式中出现的 a,e,i 和 Ω,ω 均用 $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0,\overline{\Omega}_0,\bar{\omega}_0$. $F_3(i)$，… 各表达式如下：

$$\begin{cases} F_3(i) = \displaystyle\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}C_{lpq}(\sin i)^{(l-2p+2q)}, \\ F_4(i) = \displaystyle\sum_{q=0}^{p}(l-2p+2q)(-1)^{(l+2q-\delta)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}\cdot \\ \qquad C_{lpg}(\sin i)^{(l-2p+2q)}, \\ C_{lpq} = \dbinom{l}{p-q}\dbinom{2l-2p+2q}{l}\dbinom{l-2p+2q}{q} \\ \qquad = \dfrac{(2l-2p+2q)!}{q!(p-q)!(l-p+q)!(l-2p+q)!}, \end{cases} \tag{9.39}$$

$$\delta_p = \begin{cases} 0, & l-2p=0, \\ 1, & l-2p\neq 0, \end{cases} \tag{9.40}$$

$$\left\{\begin{aligned}
K_3(e) &= \sum_{\alpha(2)=|l-2p|}^{l-2} C_{lp\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha},\\
K_4(e) &= \sum_{\alpha(2)=|l-2p|}^{l-2} C_{lp\alpha}\,\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha-2},\\
C_{lp\alpha} &= \binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\frac{1}{2}(\alpha-|l-2p|)}\\
&= \frac{(l-1)!}{(l-1-\alpha)!\left[\frac{1}{2}(\alpha-|l-2p|)\right]!\left[\frac{1}{2}(\alpha+|l-2p|)\right]!},
\end{aligned}\right. \tag{9.41}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&I(\omega)=-(1-\delta)\sin(l-2p)\omega+\delta\cos(l-2p)\omega,\\
&H(\omega)=(1-\delta)\cos(l-2p)\omega+\delta\sin(l-2p)\omega,\\
&\delta=\frac{1}{2}[1-(-1)^l].
\end{aligned}\right. \tag{9.42}$$

还有倾角函数 $F_{lmp}(i)$ 及其导数 $F'_{lmp}(i)$，在前面第四章中出现过，见(4.262)～(4.264)式.

(3) 短周期项 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$

$\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$ 除 $a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$ 外，只需给出 J_2 项，而 $a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)+a_{\mathrm{S}}^{(3)}(t)$ 可由下式给出：

$$a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)+a_{\mathrm{S}}^{(3)}(t)=2a^2R_{\mathrm{S}}(J_2;J_l,l\geqslant 3;C_{lm},S_{lm}) \tag{9.43}$$

其中

$$\left\{\begin{aligned}
R_{\mathrm{S}}(J_2) &= \frac{3J_2}{2a^3}\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.\\
&\qquad\left.\frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2u\right\},\\
u &= f+\omega,
\end{aligned}\right. \tag{9.44}$$

$$R_{\mathrm{S}}(J_l)=R(J_l)-R(J_l)_{\mathrm{C,L}}, \tag{9.45}$$

$$\begin{aligned}
R(J_l) = \sum_{l\geqslant 3}\frac{(-J_l)}{a^{l+1}}\sum_{p=0}^{\frac{1}{2}(l-\delta)}F_3(i)\Big[&(1-\delta)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)u+\\
&\delta\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\sin(l-2p)u\Big],
\end{aligned} \tag{9.46}$$

$$R(J_l)_{\mathrm{C,L}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\sum_{l\geqslant 3}\frac{(-J_l)}{p_0^l}\sum_{p=1}^{(l-\delta)/2}F_3(i)K_3(e)H(\omega), \tag{9.47}$$

$$R_{\mathrm{S}}(C_{lm},S_{lm})=R(C_{lm},S_{lm})-R_l(C_{lm},S_{lm}), \tag{9.48}$$

$$R(C_{lm},S_{lm}) = \sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{a^{l+1}}\sum_{p=0}^{l}F_{lmp}(i)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\times$$

$$\{[(1-\delta_m)C_{lm}-\delta_m S_{lm}]\cos((l-2p)u+m\Omega_G)+$$
$$[(1-\delta_m)S_{lm}+\delta_m C_{lm}]\sin((l-2p)u+m\Omega_G)\},$$
$$(9.49)$$

$$\delta_m=\frac{1}{2}[1-(-1)^{l-m}],$$

$$R_L(C_{lm},S_{lm})=\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{p_0^l}\sum_{p=1}^{l-1}F_{lmp}(i)K_3(e)\Psi_{lmp},\quad(9.50)$$

$$e_S^{(2)}(t)=\frac{3J_2}{2a^2}\left(\frac{1-e^2}{e}\right)\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.$$
$$\frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)-\frac{\sin^2 i}{2(1-e^2)^2}[e\cos(f+2\omega)+$$
$$\left.\cos 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)]\right\}-$$
$$\frac{3J_2}{2p^2}\sin^2 i\left(\frac{1-e^2}{6e}\right)\overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\quad(9.51)$$

$$i_S^{(2)}(t)=\frac{3J_2}{8p^2}\sin 2i\left[e\cos(f+2\omega)+\cos 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right]+$$
$$\frac{3J_2}{24p^2}\sin 2i\,\overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\quad(9.52)$$

$$\Omega_S^{(2)}(t)=-\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\left\{(f-M+e\sin f)-\frac{1}{2}\left[e\sin(f+2\omega)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\sin 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right]\right\}+$$
$$\frac{3J_2}{12p^2}\cos i\,\overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\quad(9.53)$$

$$\omega_S^{(2)}=\frac{3J_2}{2p^2}\left\{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)(f-M+e\sin f)+\right.$$
$$\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]-$$
$$\left[\frac{1}{4e}\sin^2 i+\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 i\right)e\right]\sin(f+2\omega)-$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin 2(f+\omega)+$$
$$\left[\frac{7}{12e}\sin^2 i-\left(\frac{1}{6}-\frac{19}{48}\sin^2 i\right)e\right]\sin(3f+2\omega)+$$
$$\frac{3}{8}\sin^2 i\sin(4f+2\omega)+$$

$$
\frac{e}{16}\sin^2 i\left[\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega)\right]\Big\}-
$$

$$
\frac{3J_2}{2p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1-e^2}{6e^2}\,\overline{\cos 2f}\right)+\frac{1}{6}\cos^2 i\,\overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega,\quad (9.54)
$$

$$
M_S^{(2)}(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\Big\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\right.
$$

$$
\left.\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)-\right.
$$

$$
\left(\frac{7}{12e}-\frac{e}{48}\right)\sin(3f+2\omega)-\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)-
$$

$$
\left.\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)-\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\right]\Big\}+
$$

$$
\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1+e^2/2}{6e^2}\,\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega.\qquad (9.55)
$$

上述各式中出现的$\left(\frac{a}{r}\right)$和真近点角 f 等量与根数 e,M 的关系在前面讨论人造地球卫星的运动时已出现过,即相应的二体问题基本关系式. $\overline{\cos 2f}$是由下式表达的平均值:

$$
\overline{\cos 2f}=\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2.\qquad (9.56)
$$

从上述月球非球形引力摄动解的具体形式不难看出动力学扁率 J_2 与奇次带谐项系数 $J_{2l-1}(l\geqslant 2)$相对大小(J_{2l-1}/J_2)的重要性,慢自转中心天体非球形引力位中田谐项对应的摄动解是以长周期项的形式出现,不像地球卫星那样,田谐项摄动解是以短周期项的形式出现,而又必须通过展成平近点角 M 的三角级数才能构造相应的短周期项,导致对大偏心率情况不适用的结果. 另外,关于卫星轨道变化的某些重要特征,对于地球卫星往往由 J_2 与 J_3,J_4 几项即可给出相应的可靠结果,而对于月球卫星而言,由于月球非球形引力位中 J_2 与 $J_{2l-1}(l\geqslant 2)$和所有田谐项系数(C_{lm},S_{lm})相差不大的原因,若要获得月球卫星轨道变化特征的可靠信息,还得审查众多的非球形引力项. 故前面必须给出相应的 J_l 和(C_{lm},S_{lm})项摄动解的完整结果,这才能保证在此基础上对有关问题分析所得结果的有效性.

2. 月球物理天平动引起的坐标系附加摄动

月球物理天平动与地球的岁差章动类似,都是引起赤道面在空间的摆动,导致在月心(或地心)平赤道坐标系中构造相应卫星轨道的摄动分析解时,均要考虑由于赤道面摆动导致的引力位的变化所带来的坐标系附加摄

动.但月球物理天平动与地球岁差章动的表达形式与结果不一样,因此不能照搬地球卫星运动中相应的摄动解部分[10,11].这里给出不同于参考文献[10,11]中采用的方法,而采用与建立月球赤道坐标系与月固坐标系之间的坐标转换关系相一致的表达形式,见(9.11)式,构造月心赤道坐标系 $O-xyz$ 中的由物理天平动引起的坐标系附加摄动解.

(1) 月心赤道坐标系中的附加引力位 ΔV

尽管物理天平动可以改变非球形引力位中的每一部分,但这里只讨论 $C_{2,0}$ 和 $C_{2,2}$ 两项的附加位,一是该两项是最主要的,另一原因是这两项分别为带谐项和田谐项的代表,仅就对这两项的讨论即可了解物理天平动对卫星轨道影响的全貌.

由于物理天平动的摄动量级即使对低轨卫星,也只有 10^{-7},故天平动参数可引用 简化的分析表达形式,这里就直接采用前面给出的简化公式(9.4).为了表达简洁,记

$$\begin{cases}\tau = \tau_1\ \sin l_{\mathrm{s}} + \tau_2\ \sin l_{\mathrm{m}} + \tau_3\ \sin 2\omega_{\mathrm{m}},\\ \rho = \rho_1\ \cos l_{\mathrm{m}} + \rho_2\ \cos(l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}) + \rho_3\ \cos(2l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}),\\ \sin I\sigma = \sigma_1\ \sin l_{\mathrm{m}} + \sigma_2\ \sin(l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}) + \sigma_3\ \sin(2l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}),\end{cases} \tag{9.57}$$

考虑到 $\rho_1 - \sigma_1 = 2''$,$(\rho_1 - \sigma_1)/\sigma_1 \approx 10^{-2}$,在一定精度下为了表达简明,可做近似处理,即 $\rho_i = \sigma_i(i=1,2,3)$,如果不作此近似处理亦不会影响讨论的结果.(9.57)式中 τ_1 等量的数值如下:

$$\begin{cases}\tau_1 = 59''.0 = 2.9\times10^{-4}(\mathrm{rad}),\\ \tau_2 = -12''.0 = -0.58\times10^{-4}(\mathrm{rad}),\\ \tau_3 = 18''.0 = 0.87\times10^{-4}(\mathrm{rad}),\end{cases} \tag{9.58}$$

$$\begin{cases}\sigma_1 = -109''.0 = -5.18\times10^{-4}(\mathrm{rad}),\\ \sigma_2 = 37''.0 = 1.8\times10^{-4}(\mathrm{rad}),\\ \sigma_3 = -11''.0 = -0.53\times10^{-4}(\mathrm{rad}),\end{cases} \tag{9.59}$$

$$\begin{cases}\sigma_{11} = \sigma_1 - \sigma_2 = -146''.0,\\ \sigma_{12} = \sigma_1 + \sigma_2 = -72''.0,\end{cases} \tag{9.60}$$

仅保留 ρ,σ,τ 的一阶量,可给出(9.12)式中月心赤道坐标系 $O-xyx$ 与月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$ 之间的坐标转换矩阵$(\boldsymbol{A})$的简化形式如下:

$$(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \tag{9.61}$$

其中

$$a_{11}=\cos(\varphi+\Omega_m)-(\tau-\sigma+\sigma\cos I)\sin(\varphi+\Omega_m),$$
$$a_{21}=\sin(\varphi+\Omega_m)+(\tau-\sigma+\sigma\cos I)\cos(\varphi+\Omega_m),$$
$$a_{31}=\sigma\sin I\cos\varphi-\rho\sin\varphi,$$
$$a_{12}=-\sin(\varphi+\Omega_m)-((\tau-\sigma+\sigma\cos I))\cos(\varphi+\Omega_m),$$
$$a_{22}=\cos(\varphi+\Omega_m)-(\tau-\sigma+\sigma\cos I)\sin(\varphi+\Omega_m),$$
$$a_{32}=-\sigma\sin I\sin\varphi-\rho\cos\varphi,$$
$$a_{13}=-\sigma\sin I\cos\Omega_m-\rho\sin\Omega_m,$$
$$a_{23}=-\sigma\sin I\sin\Omega_m+\rho\cos\Omega_m,$$
$$a_{33}=1.$$

其中天平动参数 σ,ρ,τ **由**(9.57)**式表达.**

由于

$$\begin{cases}I=1°32'32''.7=1°.542417=0.026920,\\ \sin I=0.0269,\quad \cos I=0.9996,\\ 1-\cos I=0.000362,\end{cases}\tag{9.62}$$

还可以作如下简化:

$$\tau-\sigma(1-\cos I)=\tau+O(6\times10^{-6}),\tag{9.63}$$

$$\sigma\sin I\cos\varphi-\rho\sin\varphi=(\sigma_1-\sigma_2)\sin\omega_m-\sigma_3\sin(l_m+\omega_m),\tag{9.64}$$

$$-\sigma\sin I\sin\varphi-\rho\cos\varphi=(\sigma_1+\sigma_2)\cos\omega_m+\sigma_3\cos(l_m+\omega_m).\tag{9.65}$$

采用以上简化,转换矩阵(**A**)**变为如下形式:**

$$(\mathbf{A})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\tag{9.66}$$

其中

$$a_{11}=-\cos L_m+\tau\sin L_m,$$
$$a_{21}=-\sin L_m-\tau\cos L_m,$$
$$a_{31}=\sigma_{11}\sin\omega_m-\sigma_3\sin(L_m+\omega_m),$$
$$a_{21}=\sin L_m+\tau\cos L_m,$$
$$a_{22}=-\cos L_m+\tau\cos L_m,$$
$$a_{32}=\sigma_{12}\cos\omega_m+\sigma_3\cos(L_m+\omega_m),$$
$$a_{13}=-\sigma_1\sin(L_m-\omega_m)-\sigma_2\sin(L_m+\omega_m)-\sigma_3\sin(2L_m-\Omega_m),$$
$$a_{23}=\sigma_1\cos(L_m-\omega_m)+\sigma_2\cos(L_m+\omega_m)+\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m),$$
$$a_{33}=1.$$

由于

$$C_{2,0}=2\times10^{-4},\quad C_{2,2}=0.25\times10^{-4},$$

对于外推月球低轨卫星 10^2 弧段的位置精度要求达到米级时，$C_{2,0}$ 的附加位必须考虑天平动中 τ_1,τ_2,τ_3 和 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的全部，而 $C_{2,2}$ 的附加位，只需考虑 τ_1 和 σ_{11},σ_{12} 部分. 略去推导过程，直接给出 $C_{2,0}$ 项对应的附加位如下：

$$\begin{aligned}V_2(C_{2,0})&=(-J_2/a^3)(a/r)^3[(3/2)(z/r)^2-(1/2)]\\&=(-J_2/a^3)(a/r)^3\{[(3/2)(z/r)^2-(1/2)]-\\&\quad 3\sigma_1(z/r)[(x/r)\sin(L_m-\omega_m)-(y/r)\cos(L_m-\omega_m)]-\\&\quad 3\sigma_2(z/r)[(x/r)\sin(L_m+\omega_m)-(y/r)\cos(L_m+\omega_m)]-\\&\quad 3\sigma_3(z/r)[(x/r)\sin(2L_m-\Omega_m)-(y/r)\cos(2L_m-\Omega_m)]\}.\end{aligned}\tag{9.67}$$

这里 $J_2=-C_{2,0}$，相应的以轨道根数表达的形式为

$$\begin{aligned}\Delta V_2=&(3J_2/4a^3)(a/r)^3\{-\sin 2i(1-\cos2u)\times[\sigma_1\cos(L_m-\omega_m-\\&\Omega)+\sigma_2\cos(L_m+\omega_m-\Omega)+\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)]+\\&2\sin i(\sin2u)[\sigma_1\sin(L_m-\omega_m-\Omega)+\sigma_2\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\\&\sigma_3\sin(2L_m-\Omega_m-\Omega)].\end{aligned}\tag{9.68}$$

其中 $u=f+\omega$，用求平均值的方法，可将 ΔV_2 分解成如下两部分：

$$\begin{aligned}\Delta V_{2L}&=\overline{\Delta V_2}\\&=-(3J_2/4a^3)\sin2i(1-e^2)^{-3/2}\times[\sigma_1\cos(L_m-\omega_m-\Omega)+\\&\quad\sigma_2\cos(L_m+\omega_m-\Omega)+\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)],\end{aligned}\tag{9.69}$$

$$\begin{aligned}\Delta V_{2S}=&\Delta V_2-\overline{\Delta V_2}=(3J_2/4a^3)\{-\sin2i[(a/r)^3-(1-e^2)^{-(3/2)}-\\&(a/r)^3\cos2u]\times[\sigma_1\cos(L_m-\omega_m-\Omega)+\sigma_2\cos(L_m+\omega_m-\Omega)+\\&\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)]+2\sin i(a/r)^3\sin2u[\sigma_1\sin(L_m-\omega_m-\Omega)+\\&\sigma_2\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\sigma_3\sin(2L_m-\Omega_m-\Omega)]\},\end{aligned}\tag{9.70}$$

ΔV_{2L} 和 ΔV_{2S} 分别为附加位的长周期和短周期两个部分.

同样给出 $C_{2,2}$ 项的附加位如下：

$$\begin{aligned}V(C_{2,2})&=(3C_{2,2}/a^3)(a/r)^3((x^2-y^2)/r^2)\\&=(3C_{2,2}/a^3)(a/r)\{[(1/r^2)(x^2-y^2)\cos2L_m+\\&\quad(2xy)\sin2L_m]-2\tau[(1/r^2)(x^2-y^2)\sin2L_m-\\&\quad 2(xy/r^2)\cos2L_m]-2\sigma_1(z/r)[(x/r)\sin(L_m+\omega_m)-\\&\quad(y/r)\cos(L_m+\omega_m)]-2\sigma_2(z/r)[(x/r)\sin(L_m-\omega_m)-\\&\quad(y/r)\cos(L_m-\omega_m)]\}.\end{aligned}\tag{9.71}$$

相应的轨道根数形式为

$$\Delta V_2(C_{2,2}) = -(3C_{2,2}/a^3)(a/r)^3\{\tau[\sin(2L_m - 2\Omega)(2\cos 2u + \sin^2(1 - \cos 2u)) - \cos(2L_m - 2\Omega)(2\cos i\ \sin 2u)] + \sigma_1\ \sin i[\sin(L_m + \omega_m - \Omega)\ \sin 2u - \cos i\ \cos(L_m + \omega_m - \Omega)\ (1 - \cos 2u)] + \sigma_2\ \sin i[\sin(L_m - \omega_m - \Omega)\ \sin 2u - \cos i\ \cos(L_m - \omega_m - \Omega)(1 - \cos 2u)]\}, \tag{9.72}$$

$$(\Delta V_{2,2})_L = -(3C_{2,2}/a^3)\ \sin i(1 - e^2)^{-3/2}\{\tau\ \sin i[\sin(2L_m - 2\Omega)] - \sigma_1\ \cos i[\cos(L_m + \omega_m - \Omega)] - \sigma_2\ \cos i[\cos(L_m - \omega_m - \Omega)]\}, \tag{9.73}$$

$$(\Delta V_{2,2})_S = -(3C_{2,2}/a^3)\{\sin i[\tau\ \sin i\ \sin(2L_m - 2\Omega) - \sigma_1\ \cos i\ \cos(L_m + \omega_m - \Omega) - \sigma_2\ \cos i\ \cos(L_m - \omega_m - \Omega)][(a/r)^3 - (1 - e^2)^{-3/2}] + \tau[(2 - \sin^2 i)\sin(2L_m - 2\Omega)(a/r)^3\ \cos 2u - (2\cos i)\cos(2L_m - 2\Omega)(a/r)^3\ \sin 2u] + \sigma_1\ \sin i[\sin(L_m + \omega_m - \Omega)(a/r)^3\ \sin 2u + \cos i\ \cos(L_m + \omega_m - \Omega)(a/r)^3\ \cos 2u] + \sigma_2\ \sin i[\sin(L_m - \omega_m - \Omega)\ (a/r)^3\ \sin 2u + \cos i\ \cos(L_m - \omega_m - \Omega)\ (a/r)^3\ \cos 2u\}. \tag{9.74}$$

(2) 天平动引起的坐标系附加摄动解

根据天平动引起的附加摄动位 $\Delta V(C_{2,0})$和 $\Delta V(C_{2,2})$可知,对月球卫星轨道只有长、短周期影响. 在米级精度要求下,只要给出长周期变化项即可,至于短周期项,只有轨道半长径 a 需要考虑,这是由于沿迹根数 M 的精度要求所致.

采用与前面相同的拟平均根数法,很容易建立相应的摄动解,相应的长周期变化项为

$$\Delta\sigma_L(t) = \sigma_L(t) - \sigma_L(t_0), \tag{9.75}$$

对于 $C_{2,0}$ 的附加部分 $\sigma_L(t)$的具体形式如下:

$$a_L(t) = 0, \tag{9.76}$$

$$e_L(t) = 0, \tag{9.77}$$

$$i_L(t) = -(3J_2/2p^2)\ \cos i\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\ \cos(L_m - \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_2}{\alpha_2}\ \cos(L_m + \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_3}{\alpha_3}\ \cos(2L_m - \Omega_m - \Omega)\right], \tag{9.78}$$

$$\Omega_L(t) = -(3J_2/2p^2)\ \frac{\cos 2i}{\sin i}\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\ \sin(L_m - \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_2}{\alpha_2}\ \sin(L_m + \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_3}{\alpha_3}\ \sin(2L_m - \Omega_m - \Omega)\right], \tag{9.79}$$

$$\omega_L(t) = (3J_2/2p^2)\frac{\cos i}{\sin i}(1-5\sin^2 i)\times\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\sin(L_m-\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\sin(2L_m-\Omega_m-\Omega)\right], \tag{9.80}$$

$$M_L(t) = -(9J_2/4p^2)\sqrt{1-e^2}\sin 2i\times\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\sin(L_m-\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\sin(2L_m-\Omega_m-\Omega)\right], \tag{9.81}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_1 = \dfrac{1}{n}(\dot{L}_m-\dot{\omega}_m-\dot{\Omega}) = O(10^{-3}),\\ \alpha_2 = \dfrac{1}{n}(\dot{L}_m+\dot{\omega}_m-\dot{\Omega}) = O(10^{-3}),\\ \alpha_3 = \dfrac{1}{n}(2\dot{L}_m-\dot{\Omega}_m-\dot{\Omega}) = O(10^{-3}).\end{cases} \tag{9.82}$$

对于 $C_{2,2}$ 的附加项部分，相应的结果如下：

$$a_L(t) = 0, \tag{9.83}$$

$$e_L(t) = 0, \tag{9.84}$$

$$i_L(t) = -(3C_{2,2}/p^2)\times\left[\frac{2\tau}{\alpha 4}\sin i\sin(2L_m-2\Omega)-\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\cos i\cos(L_m+\omega_m-\Omega)-\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\cos i\cos(L_m-\omega_m-\Omega)\right], \tag{9.85}$$

$$\Omega_L(t) = (3C_{2,2}/p^2)\times\left[\frac{2\tau}{\alpha_4}\cos i\cos(2L_m-2\Omega)+\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\frac{\cos 2i}{\sin i}\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{\cos 2i}{\sin i}\sin(L_m-\omega_m-\Omega)\right], \tag{9.86}$$

$$\omega_L(t) = -(3C_{2,2}/p^2)\times\left[\frac{\tau}{\alpha 4}(2-5\sin^2 i)\cos(2L_m-2\Omega)+\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\frac{\cos i}{\sin i}(1-5\sin^2 i)\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{\cos i}{\sin i}(1-5\sin^2 i)\sin(L_m-\omega_m-\Omega)\right], \tag{9.87}$$

$$M_L(t) = (9C_{2,2}/p^2)\sqrt{1-e^2}\times\left[\frac{\tau}{\alpha 4}\sin^2 i\cos(2L_m-2\Omega)+\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\sin i\cos i\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\sin i\cos i\sin(L_m-\omega_m-\Omega)\right], \tag{9.88}$$

其中

$$\alpha_4 = \frac{1}{n}(2\dot{L}_{\mathrm{m}} - 2\dot{\Omega}) = O(10^{-3}). \tag{9.89}$$

为了使平近点角 M 达到同样的精度要求，如有需要，应考虑轨道半长径 a 的短周期项，上述两部分（$C_{2,0}$ 和 $C_{2,2}$）附加摄动引起的 a 的短周期项为

$$a_{\mathrm{S}}(t) = 2a^2[(\Delta V_2)_{\mathrm{s}} + (\Delta V_{2,2})_{\mathrm{s}}]. \tag{9.90}$$

经数值验证表明，这里给出的月球物理天平动对月球卫星轨道影响的摄动分析解是正确的，其中 $C_{2,2}$ 项的影响要比 $C_{2,0}$ 项的影响小一个量级.

§9.5 月球卫星运动的轨道寿命与冻结轨道问题

众所周知，大气耗散作用是决定卫星轨道寿命的重要因素，就像人造地球卫星那样，特别是低轨卫星，由于大气耗散作用，轨道不断变小变圆，最终落入地球稠密大气层被烧毁而结束其轨道寿命. 但对于卫星轨道寿命问题，还有另一种动力学机制，即存在一种摄动作用，会使其轨道偏心率 e 增大（实为变幅较大的长周期项），导致其近星距 $r_{\mathrm{p}} = a(1-e) \leqslant a_{\mathrm{e}}$（中心天体赤道半径）而与中心天体相撞，结束其轨道寿命. 在这种动力学机制中，中心天体的动力学扁率 J_2 的大小起着决定性作用，相应的表现对于高轨卫星和低轨卫星有所不同.

1. 高轨卫星情况

无论是有或无大气的中心天体，对于它们的高轨卫星，耗散作用已不重要. 对于非耗散效应，如中心天体的扁率（J_2）和第三体质点引力，这两种重要的摄动源均为保守力摄动，相应的卫星轨道半长径 a 仅有微小的周期变化，而高轨卫星轨道偏心率 e 变化的幅度将是影响其轨道寿命的关键因素. 在保守力摄动下，尽管偏心率 e 没有长期变化，但可能有因小分母引起的变幅较大的长周期变化. 根据第四章和第五章分别给出的 J_2 项摄动和第三体引力摄动的摄动解，e 的长周期摄动项可分别写成如下形式：

$$[e_{\mathrm{L}}(t)]_1 = \mu a_{\mathrm{e}}^2\left(\frac{3J_2}{2a^2}\right)\sin^2 i\left[\left(\frac{7}{24} - \frac{5}{16}\sin^2 i\right)^{-1} + \frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{6(1+\sqrt{1-e^2})^2}\right]\left(\frac{e}{1-e^2}\right)\cos 2\omega, \tag{9.91}$$

$$[e_{\mathrm{L}}(t)]_2 = -\frac{15}{16}\left(\frac{\mu' a^3}{\mu a'^3}\right)(1-e'^2)^{-3/2}\sin^2 i(e\sqrt{1-e^2}) \times$$

$$\left(\frac{n}{\dot{\omega}}\right)\left[\cos 2\omega + O(\sin i')\right]. \tag{9.92}$$

其中 μ 和 μ' 分别为中心天体和摄动天体的质心引力常数，$\dot{\omega}$ 是卫星轨道拱线的进动速率，即摄动长期项的系数 $(\omega_1+\omega_2)$，有

$$\left(\frac{\dot{\omega}}{n}\right)=\left[\left(\frac{3J_2a_e^2}{2a^2}\right)+\left(\frac{3}{4}\ \frac{\mu' a^3}{a'^3}\right)\right]\left[\left(2-\frac{5}{2}\ \sin^2 i\right)+O(e^2, e'^2, \sin^2 i')\right]. \tag{9.93}$$

(9.92)式和(9.93)式右端的 $O(\sin i')$ 等项无需具体写出，因为摄动天体的 e' 和 i' 一般都较小，对讨论的问题无实质性影响. (9.91)～(9.93)式就是讨论高轨卫星轨道寿命的主要理论依据.

卫星近星距 r_p 的变化，关键在于 e 的变幅. 从(9.91)式可看出，对于扁率摄动，e 的变化幅度主要取决于因子 J_2/a^2，对一特定的中心天体(J_2 值确定)，轨道越高，e 的变化幅度越小. 而第三体摄动效应却不同，从(9.92)式可看出，e 的变化幅度在很大程度上依赖于由(9.93)式表达的 $\dot{\omega}$ 的大小. 对于低轨卫星，$\dot{\omega}$ 的大小取决于月球扁率 J_2，其值一般不太小. 对于高轨卫星，扁率摄动项减小，第三体引力摄动项增大，其临界值(亦即 $\dot{\omega}$ 的最小值，相应 e 的变化出现小分母)对应上述两项摄动量级相等的情况，有

$$\frac{3J_2a_e^2}{2a^2}=\frac{3}{4}\ \frac{\mu' a^3}{a'^3}. \tag{9.94}$$

由此可知，相应的卫星轨道半长径的临界值 a_c 为

$$a_c=\left[2\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)\left(\frac{a'}{a_e}\right)^3 J_2\right]^{1/5} a_e, \tag{9.95}$$

这里 a' 是第三体"相对"中心天体的轨道半长径.

对于地球—卫星—月球系统，$a_c=8.2a_e$(地球赤道半径)，而对于月球—卫星—地球系统，由于月球的 J_2 值小，$a_c=2.2a_e$(月球赤道半径). 当高轨卫星的轨道半长径 a 接近 a_c 时，e 的变幅会增大，有可能大到使卫星近星距 r_p 减小到等于 a_e 的状态，从而与地球或月球相撞. 文[13～15]中均有算例，像月球轨道器 $a_0=4.0a_e$，$e_0=0.20$，$i_0=85°$，运行不到 6 个恒星月，就因 e 增大，使 $r_p=a_e$，从而落到月球上. 这种动力学机制相当于起着"保护"作用的中心天体的动力学扁率较小，卫星轨道还是被第三体质点引力效应周期性地拉扁，扁到一定程度即出现上述卫星与中心天体相撞的现象.

2. 月球低轨卫星的轨道寿命

尽管月球无大气，但在非球形引力作用下，低轨卫星的近月距 $r_p=$

$a(1-e)$也会减小，当 $r_{\mathrm{p}}=a_{\mathrm{e}}$ 时，卫星将与月球相撞. 轨道半长径 a 在非球形引力作用下，只有振幅较小的短周期变化，主要源于月球动力学扁率 J_2 项摄动，变化量级只有 10^{-4}，不会导致 r_{p} 的明显变化. 显然，r_{p} 有明显减小趋势的原因是轨道偏心率 e 有振幅较大的长周期变化 Δe_{L}. 文[16]有过简单计算结果，文[17]讨论过简单的动力学机制，这里将进一步深入地讨论该问题.

在月球非球形引力和地球引力两种主要摄动源的作用下，消除短周期变化后，e 的长周期变化满足下列方程：

$$\frac{\mathrm{d}e_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}=n(1-e^2)\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(-1)^{(l-\delta)/2}(l-2p)F(i)\left[\frac{1}{e}K(e)\right]I(\omega)-$$
$$n(1-e^2)\sum_{l=2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(l-2p)\,F_{lmp}(i)\left[\frac{1}{e}K(e)\right]\Phi_{lmp}(\omega,\theta)+$$
$$O(em'). \tag{9.96}$$

此方程的原始形式在前面 §9.4 中曾给出过，为了探讨月球低轨卫星的轨道寿命问题，这里又作了一些必要的改变. (9.96)式右端第一和第二大项分别为带谐项($J_l=-C_{l,0}$)和田谐项摄动，第三大项为地球引力摄动，含有 e 因子. 方程中的 $n=a^{-3/2}$，采用符号 p_0 是为了与式中求和取值 p 区分开. 有关表达式改变后的形式如下：

$$\delta=\frac{1}{2}[1-(-1)^l]=\begin{cases}1, l\ \text{奇},\\ 0, l\ \text{偶},\end{cases} \tag{9.97}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{e}K(e)=\displaystyle\sum_{\alpha(2)=(l-2p)}^{l-2}C_{lp\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha}=\begin{cases}O(e^0), l\ \text{奇},\\ O(e),\ l\ \text{偶},\end{cases}\\ C_{lp\alpha}=\dbinom{l-1}{\alpha}\dbinom{\alpha}{\frac{1}{2}(\alpha-(l-2p))},\quad \dbinom{n}{m}=\dfrac{n!}{m!(m-n)!},\end{cases} \tag{9.98}$$

$$\begin{cases}F(i)=-\displaystyle\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}C_{lpq}(\sin i)^{(l-2p+2q)},\\ \delta_p=\begin{cases}0, l-2p=0,\\ 1, l-2p\neq 0,\end{cases}\\ C_{lpq}=\dbinom{l}{p-q}\dbinom{2l-2p+2q}{l}\left(\dfrac{l-2p+2q}{q}\right)\end{cases} \tag{9.99}$$

$$I(\omega)=-1(1-\delta)\sin(l-2p)\omega+\delta\cos(l-2p)\omega. \tag{9.100}$$

田谐项摄动中的 $\Phi(\omega,\theta)$涉及的 $\theta=\Omega-S(t)$，$S(t)$是月固坐标系中 X 轴(即 ξ'轴)方向的经度，随月球自转而变化. $\Phi(\omega,\theta)$的表达式和一般的倾角函数 $F_{lmp}(i)$以及地球引力摄动项 $O(em')$，不再具体给出，因下面的讨论表明，

可略去相应的两类摄动影响.

对(9.96)式作进一步分析,l 为奇数时,右函数中含有 $O(e^0)$因子,即以 $e^0\cos\omega$ 形式出现,l 为偶数时却含有 $O(e)$因子,是以 $e\sin 2\Omega$ 形式出现.而考虑月球低轨卫星寿命时,相应的 e 肯定是小量,有 $e<0.1$.事实上,对于平均高度为 100 km 的低轨卫星,只要 e 达到 0.05～0.06,即可使 r_p 接近 a_e 值,若 e 增大将会立即撞上月球.因此,(9.96)式中只有对应 l 为奇数的摄动项值得考虑,但与奇次带谐项相比,田谐项影响要小一个量级.故对于理论分析而言,只要保留(9.96)式中的奇次带谐摄动部分即可.舍去的各种摄动项的影响,可在后面对相应的完整力模型进行模拟计算中考察,实际计算结果将会证实上述简化的合理性.在(9.96)式中只保留奇次带谐项摄动部分,但仅取其 $O(e^0)$项,对应求和中 $l-2p=1$ 的取值,从而简化成下列形式:

$$\frac{\mathrm{d}e_L}{\mathrm{d}t}=\sin i\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)(l-1)(J_1/P_0^l)F^*(i)(n\cos\omega),\tag{9.101}$$

其中

$$\begin{cases}F^*(i)=\displaystyle\sum_{q=0}^{(l-1)/2}(-1)^q\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}C_{lpq}^*(\sin^2 i)^q,\\ C_{lpq}^*=\begin{pmatrix}l\\(l-1)/2-q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l+2q+1\\l\end{pmatrix}\left(\dfrac{2q+1}{q}\right),\end{cases}\tag{9.102}$$

(9.101)式求和中 $l(2)$表示取值“步长”为 2,即 $l(2)=3,5,\cdots$. $\omega=\bar{\omega}(t)=\bar{\omega}_0+\omega_C(t-t_0)$,$\omega_C$ 是$\bar{\omega}(t)$的长期变率,如果仅取其由 J_2 项给出的一阶变率 ω_1,有

$$\omega_C=\omega_1=\frac{3J_2}{2p_0^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right).\tag{9.103}$$

积分(9.101)式给出 e 的长周期变化 Δe_L 的表达式如下:

$$\Delta e_L=e_L(t)-e_L(t_0)=\sin i\left\{\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\frac{(l-1)}{3p_0^l}\left(\frac{J_l}{J_2}\right)F^*(i)\right\}\cdot$$
$$[\sin\bar{\omega}(t)-\sin\bar{\omega}(t_0)]\Big/\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right).\tag{9.104}$$

由此可以看出,e 的变幅主要取决于奇次带谐项系数 $J_{2l-1}(J\geqslant 2)$与 J_2 的相对大小以及倾角函数 $F^*(i)$的性质,有

$$|\Delta e_L|\sim O(J_{2l-1}/J_2)\cdot F^*(i).\tag{9.105}$$

对于地球卫星,由于

$$O(J_{2l-1}/J_2)=10^{-3},\tag{9.106}$$

相应的轨道偏心率的变幅很小,而月球卫星则不同,由于

$$O(J_{2l-1}/J_2)=10^{-1}. \tag{9.107}$$

故完全有可能使月球低轨卫星的轨道偏心率 e 增大到使 $r_p=a_e$ 的状态. 当然,这还要取决于 $(J_{2l-1}/J_2)F^*(i)$ 值的变化状况.

由于月球非球形引力位的特征,谐系数 J_{2l-1} 随阶 l 的升高并无明显地减小,由函数 $(J_{2l-1}/J_2)F^*(i)$ 的特征,长周期变化 Δe_L 的模 $|\Delta e_L|$ 随着不同的 i 值 $(0°<i\leqslant 90°)$ 将出现多个极小与极大值,相应的 r_p 值将不会达到 a_e 或必然会达到 a_e 值,亦即月球低轨卫星的轨道寿命既取决于奇次带谐项的摄动影响,又与轨道的空间定向有关. 由于 $\sin i$ 的特征,$90°\leqslant i<180°$ 的情况与 $0°<i\leqslant 90°$ 的情况类似.

因有关低轨月球卫星的轨道寿命与冻结轨道有某种联系,下面首先作一理论分析,然后再作相应的数值验证.

3. 关于冻结轨道

与地球卫星类似,在月球非球形引力作用下,相应的平均系统(即消除轨道变化的短周期部分)可能存在一种特解(详见第 4 章 §4.7):

$$\bar{a}(t)=a_0,\quad \bar{e}(t)=e_0,\quad \bar{i}(t)=i_0,\bar{\omega}(t)=\omega_0=90° \text{ 或 } 270°. \tag{9.108}$$

拱线不动,此即冻结轨道,此解对 i_0 无任何限制,对应不同的 i_0 有相应的 e_0 存在. 那么根据(9.104)式给出的 Δe_1,对于平均高度为 100 km 的低轨卫星,是否存在某些轨道配置,通过冻结轨道的选择保持 $r_p>a_e$ 使其不会与月球相撞呢?

首先考查冻结轨道的存在情况,同样由于月球引力场的特征,与地球卫星的冻结轨道状况亦有差别. 对于地球卫星,基本上由 J_2 和 J_3 两项即可确定冻结轨道解,而对月球卫星则不然,文[18]有过简单讨论,这里将进一步深入讨论. 对于平均轨道根数,仍记作 a,e,i,ω,略去推导过程,下面将直接给出相应的冻结轨道解. 当 a 值给定的情况下,对于任一 i 值,冻结轨道对应的 e 值满足下列条件:

$$e=\pm\sin i\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)(l-1)\left(\frac{J_l}{J_2}\right)F^*(i)\left(\frac{n}{\omega_C}\right), \tag{9.109}$$

其中 ω_C 是 ω 的长期变率. 与上一段讨论 e 的长周期变化对应,若只取由 J_2 给出的一阶变率 ω_1,则(9.109)式简化为下列形式:

$$e = \pm \sin i \left\{ \sum_{l(2) \geqslant 3} (-1)^{(l-1)/2} \frac{(l-1)}{3p_0^l} \left(\frac{J_l}{J_l}\right) F^*(i) \right\} \Big/ \left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right). \tag{9.110}$$

式中“+”号对应冻结轨道解 $\omega \equiv \omega_0 = 90^\circ$，“−”号对应 $\omega_0 = 270^\circ$，即前者对应(9.110)式右端值(除前面的±外)为正，而后者则对应右端值为负. 这一结果与地球卫星情况有差别，地球卫星的冻结轨道主要取决于 J_3 项，且总有 $\omega \equiv \omega_0 = 90^\circ$，由类似的(9.110)式给出的偏心率 e 对不同的 i 值均很小，即 $e_0 = O(10^{-3})$，而对于月球低轨卫星则不同，对不同的 i 值，冻结轨道解有两种可能，即 $\omega \equiv \omega_0 = 90^\circ$或 270°，且相应的 e_0 值可能较大.

从(9.110)式和上一段给出的(9.104)式可以看出，在考虑主要摄动因素的前提下，冻结轨道解的 e 值与 e 的长周期变化幅度 $|\Delta e_L|$ 是相同的，而这一解是在平均系统中给出的，且仅在 i 变化的小邻域内才能保持，对于月球卫星，由于月球非球形引力位的特征，实际状况是 $\omega(t)$ 有明显的变化幅度. 由此可知，当 $|\Delta e_L|$ 对应某些 i 值为极小时，即使冻结轨道不能保持(即 $\omega(t)$ 有大范围变化)，也不会出现 e 有明显增大的可能，r_p 不会降至 a_e 值；相反，当 $|\Delta e_L|$ 对应某些 i 值为极大时，即使冻结轨道(此时对应解的 e 值较大)能基本保持(即 $\omega(t)$ 的变化范围不大)，e 的变化也有可能使 r_p 降至 a_e 大小，结束其轨道寿命. 也就是说，月球低轨卫星的轨道寿命并不依赖冻结轨道的选择(即轨道偏心率 e 和倾角 i 按条件(9.110)的选择)，而主要取决于(9.104)式中所确定的 Δe_L 的模，这归结为月球非球形引力场的基本特征和卫星轨道倾角 i 的选择. 我们将在下一段给出相应的模拟计算来证实月球低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系.

4. 模拟计算——理论分析的数值验证

为了验证理论分析的正确性，对低轨卫星(平均高度 100 km)，可通过下列三种情况的计算来证实，即

(1) 根据分析解(9.104)，扫描似地从 $i = 0^\circ.5$ 到 $179^\circ.5$，间隔 1°，计算了对应的 $|\Delta e_L|$ 值，看极小与极大的分布状况.

(2) 根据分析解(9.110)式，同样对 $i = 0^\circ.5 \sim 179^\circ.5$，间隔 1°求出相应的冻结轨道解：e_0 和对应的 ω_0 值.

(3) 考虑主要摄动因素(月球非球形引力，地球引力和太阳引力)，对完整的运动方程计算低轨卫星(取平均高度$\bar{h} = 100$ km，$e_0 = 0.001$)随倾角 i_0 的不同，相应近月点高度 h_p 的变化情况，即轨道寿命与倾角 i 的关系.

上述第(3)部分的计算正是为了证实第(1)和第(2)两部分由分析解给

出的结果的正确性,从而确定月球低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系,同时也进一步证实这种结果主要是由月球非球形引力场特征所决定的.

计算中,月球引力场模型采用了美国 JPL 的 LP75G 模型,前两部分对引力场球谐展开式阶次 l 取 30～45,无实质性差别,第(3)部分是取完整的力模型,即 l 取到 75,m 取 $0\sim l$.

关于$|\Delta e_L|$,对应极小值有如下几个"稳定区"(即$|\Delta e_L|$值很小):

$$i=0°,\quad 27°,\quad 50°,\quad 77°,\quad 85°.$$

根据 $\sin i$ 的性质,在 90°～180°间有对应的"稳定区",即 95°,103°,….

关于冻结轨道,与上述$|\Delta e_L|$的情况对应,对应"稳定区"的倾角 i_0,相应的冻结轨道解 e_0 的值均较小,而对应"不稳定区"的倾角 i_0,则相应的解 e_0 值均较大. 表 9.1 列出了部分结果,对应 l 取 40.

根据上述结果,考虑完整力模型后,第(3)部分的计算应有如下预期结果,即在上述"稳定区"(即取 $i_0=0°,27°,\cdots$),低轨卫星的轨道寿命应很长,而相反,则轨道寿命应很短. 为了节省篇幅表 9.2 列出了对 i 取值有一定间隔的结果. 表中 $\min h_p=0.0$ 或接近 0.0,即表明与月球相撞,T_c 即为对应的轨道寿命值. 对所有 i_0 值计算间隔均为 10 年,当在较短间隔内 $h_p=0.0$ 时计算结束. 而在"稳定区",如 $i_0=85°$和 95°,即使卫星运行 10 年近月点高度 h_p 也不会明显降低,极小值仍有 60 多公里高. 图 9.4～图 9.7,分别为 $i_0=40°,90°$和 85°,95°时 h_p 随时间的变化状态,前者分别为 48 天和 172 天与月球相撞,后者 10 年期间的极小值还分别有 60 km 和 68 km 高.

上述数值结果一方面验证了理论分析的正确性,同时也给出了低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系. 但这些保持不与月球相撞的所谓"稳定区"的范围(对轨道倾角 i_0 值而言)都较小,考虑到各种因素(包括发射误差的影响),即使允许选择适当的倾角,也还要注意运行过程中的轨道控制(耗费较小能量的轨道机动).

最后说明两点:

(1) 低轨卫星的轨道寿命与轨道升交点 Ω 的初值无关,这一点从非球形引力位带谐项的性质不难看出,实际计算结果也证实了这一点,在上述第(3)种情况的计算中,改变 Ω 的不同初值,对计算结果 h_p 的变化无实质性影响.

(2) 月球卫星的冻结轨道难以保持,即使是那种特殊的冻结轨道,即临界倾角情况,$i=i_c=63°26'$,在采用实际力模型对应的第(3)种计算中,ω 仍在大范围内变化,未保持"冻结".

表 9.1　冻结轨道解

i(deg)	ω(deg)	e	i(deg)	ω(deg)	e
0.5	90.0	0.002831	5.0	90.0	0.025923
1.0	90.0	0.005647	10.0	90.0	0.040836
27.0	90.0	0.005333	20.0	90.0	0.021863
28.0	270.0	0.002481	35.0	270.0	0.060784
49.5	270.0	0.007062	40.0	270.0	0.047442
50.0	90.0	0.000870	45.0	270.0	0.046151
75.0	270.0	0.009016	55.0	90.0	0.140493
76.0	270.0	0.002874	60.0	270.0	0.253887
77.0	270.0	0.005638	63.0	270.0	0.188417
85.0	270.0	0.001753	80.0	90.0	0.026043
95.0	270.0	0.001728	90.0	270.0	0.043215

表 9.2　月球低轨卫星轨道寿命的状况

i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)	i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)
1.0	2723.1	0.0362	33.9	60.0	88.2	0.0548	0.0
2.0	549.0	0.0414	24.6	61.0	88.1	0.0547	0.0
3.0	1852.7	0.0479	13.0	63.43	85.9	0.0545	0.0
4.0	273.2	0.0550	0.0	65.0	88.0	0.0546	0.0
5.0	49.5	0.0548	0.0	67.0	115.5	0.0547	0.0
7.5	42.9	0.0545	0.0	69.0	224.1	0.0523	3.9
10.0	42.5	0.0545	0.0	70.0	3347.5	0.0464	14.9
12.5	43.9	0.0547	0.0	71.0	3407.0	0.0406	25.5
15.0	43.9	0.0547	0.0	72.0	2453.3	0.0348	36.2
17.5	46.3	0.0548	0.0	73.0	1469.4	0.0333	39.0
20.0	77.0	0.0547	0.0	74.0	1498.4	0.0339	37.8
22.0	80.7	0.0532	3.2	75.0	1500.5	0.0340	37.8
24.0	80.0	0.0525	4.4	76.0	1449.0	0.0336	38.5
26.0	2543.1	0.0515	6.0	77.0	3383.8	0.0381	30.4
27.0	2219.9	0.0419	23.6	79.0	401.1	0.0544	0.0
28.0	2599.4	0.0264	52.1	80.0	320.6	0.0545	0.0
29.0	1404.4	0.0251	54.4	81.0	294.0	0.0545	0.0
30.0	2084.1	0.0453	17.3	82.0	294.7	0.0547	0.0

续　表

i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)	i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)
31.0	91.6	0.0547	0.0	83.0	403.2	0.0544	0.0
33.0	46.2	0.0547	0.0	84.0	2941.4	0.0419	23.0
35.0	44.5	0.0546	0.0	85.0	1711.7	0.0220	59.6
37.0	45.2	0.0546	0.0	86.0	3401.8	0.0414	23.6
39.0	47.4	0.0548	0.0	87.0	308.8	0.0523	4.0
40.0	47.9	0.0547	0.0	88.0	174.6	0.0542	0.3
41.0	48.4	0.0546	0.0	89.0	171.3	0.0545	0.0
43.0	48.3	0.0548	0.0	90.0	172.0	0.0545	0.0
45.0	49.7	0.0544	0.7	91.0	193.0	0.0546	0.0
47.0	72.7	0.0545	0.0	92.0	226.7	0.0546	0.0
49.0	177.9	0.0546	0.0	93.0	309.9	0.0546	0.0
50.0	2522.0	0.0545	0.0	94.0	1133.9	0.0392	28.1
51.0	1908.1	0.0337	38.5	95.0	1102.0	0.0172	68.3
52.0	211.9	0.0547	0.0	96.0	1557.2	0.0253	53.6
54.0	88.9	0.0546	0.0	97.0	1118.8	0.0464	14.5
56.0	83.1	0.0547	0.0	98.0	236.2	0.0546	0.0
58.0	84.6	0.0546	0.0				

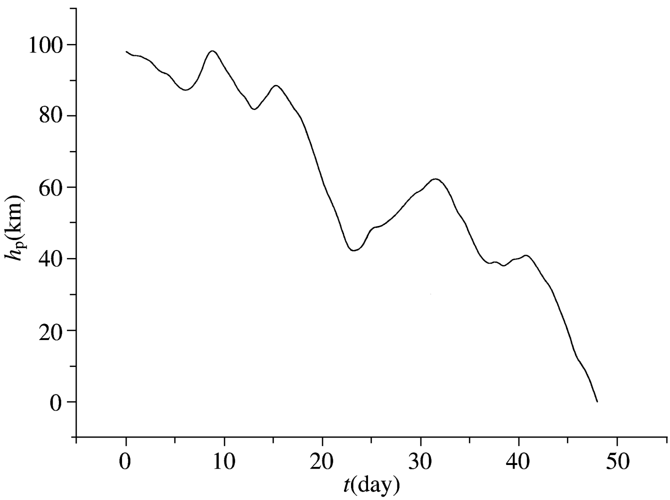

图 9.4　初始轨道倾角 $i_0=40°$的月球低轨卫星轨道寿命

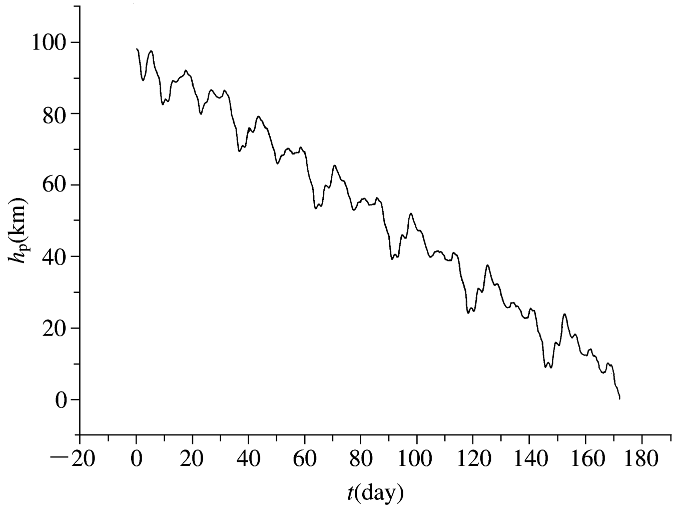

图 9.5　初始轨道倾角 $i_0=90°$的月球低轨卫星轨道寿命

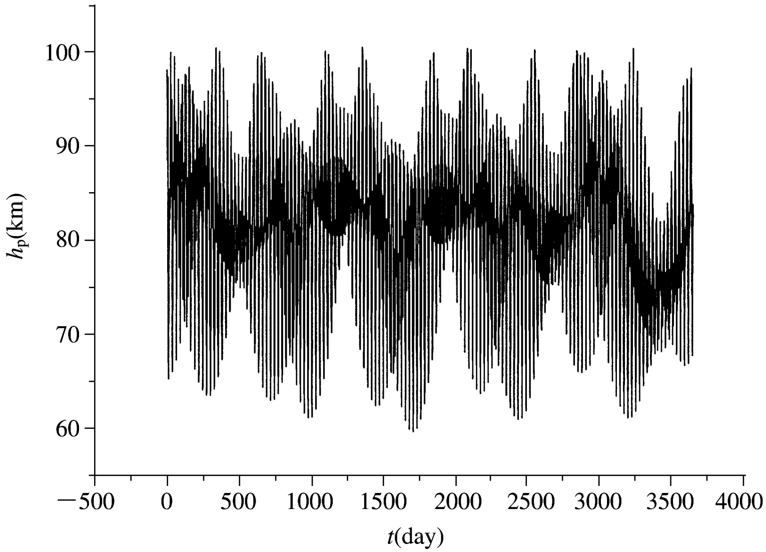

图 9.6　初始轨道倾角 $i_0 = 85°$的月球低轨卫星轨道寿命

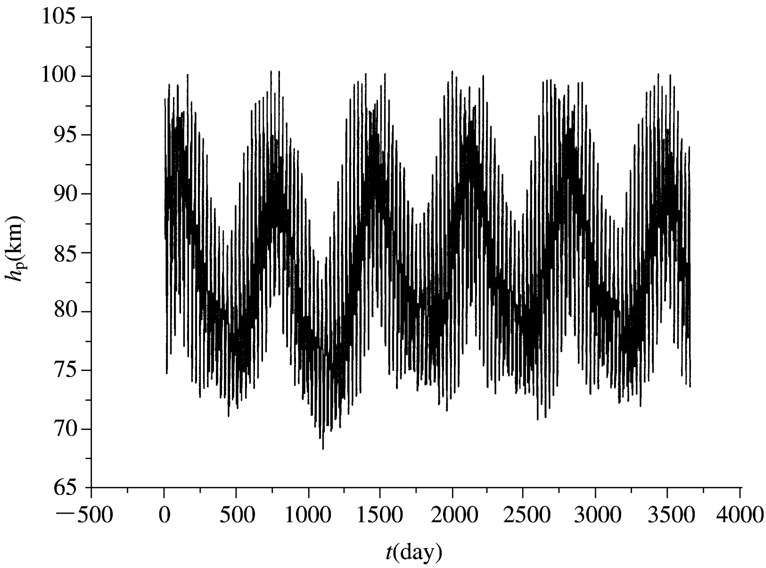

图 9.7 初始轨道倾角 $i_0=95°$的月球低轨卫星轨道寿命

参 考 文 献

[1] Koziel K. Physics and Astronomy of the Moon. Ed. by Kopal Z. New York: Academic Press,1962

[2] Gappellari J O. Velez C E & Fuchs A J. Mathematical Theory of Goddard Trajectory Determination System. Goddard Space Flight Center, Greenbeit, Maryland. 1976, N76-24291-24302: 3-31~ 3-32

[3] Eckhardt D H. Theory of the Libration of the Moon. The Moon and the Planets, 1981,25: 3~ 49

[4] Moons M. Physical Libration of the Moon. Celest. Mech. 1982,26(2) 131~142

[5] Newhall X. X. Estimation of the Lunar Physical Libration. Celest. Mech. 1997,66(1)21~30

[6] Oesterwinter C. The Motion of a Lunar Satellite. Celest. Mech. 1970, 1(3): 368~436

[7] Giacaglia G E O. Murphy J P. and Felsentreger T L. A Semi-Analytic Theory for the Motion of a Lunar Satellite. Celest. Mech. 1970, 3(1): 3~66

[8] Brumberg V A. Evdokimova L S. and Kochina N G. Analytical Methods for the Orbits of Artificial Satellites of the Moon. 1971, 3(2): 197~221

[9] Liu Lin and Wang Jia-song. An Analytic Solution of the Orbital of Lunar Satellites. Chin. Astron. Astrophys. 1998，22(3)：328～351

[10] **刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京：高等教育出版社**，1992

[11] **刘林. 航天器轨道理论. 北京：国防工业出版社**. 2000

[12] **张巍，刘林. 月球物理天平动对环月轨道器运动的影响. 天文学报**，2005，46(2)：196～206

[13] Marchal C. L. The Restricted Three-Body Problem Resisited. IAF－99－A. 7.01，50th International Astronautical Congress，4～8 Oct 1999，Amsterdam，The Netherlands

[14] **王歆，刘林. 目标天体极轨卫星的轨道寿命. 宇航学报**. 2001，22(5)：62～65

[15] Wang Xin，Liu Lin，Another Mechanism of Restricting the Lifetime of Orbiting Satellites. Chin. Astron. Astrophys. 2002，26(4)：489～496

[16] Meyer K W，Buglia J J，Desai P N. LifeTimes of Lunar Satellite Orbits. NASA Technical Paper 3394，1994

[17] Wang Xin，Liu Lin. Another Mechanism of Restricting the Lifetime of Orbiting Satellites (Continued). Chin. Astron. Astrophys. 2003，27(1)：107～113

[18] **刘林，刘世元，王彦荣. 关于大行星(或月球)轨道器的冻结轨道. 飞行器测控学报**，2003，22(2)：19～24

第 10 章　航天器姿态动力学简介

§10.1　航天器姿态与姿态控制概述

航天器的轨道描述了航天器的质心运动，而航天器的姿态则是描述航天器绕其质心的运动，它们都是航天器状态的不同体现. 研究航天器状态（或相应的状态参数）的变化规律就是航天动力学的主要研究领域，研究质心的运动即航天器轨道力学，这正是前面各有关章节的内容，而研究航天器各部分相对其质心的运动，则称为航天器姿态动力学.

在空间运动的物体（可以是刚体、准刚体、弹性体、刚体与挠性体的混合系统等），不论是自然天体还是人造航天器，它们的运动都可分解为两个部分，作为一个等效质点的平运动和该物体各个部分在外力矩作用下绕其质心的转动运动. 对于航天器的运动而言，即轨道运动和姿态运动. 所谓姿态就是航天器各部分（以具体的固连坐标系来体现）相对某空间参考系（或观测者）的方位或指向的统称. 早在人造地球卫星上天之前，天体力学家就曾对最熟悉的两个自然天体（地球和月球）的姿态运动进行了深入的研究，分别建立了地球自转轴在空间指向变化的岁差章动理论和月球自转轴在空间摆动的物理天平动理论. 人造天体上天后，为了充分利用各种航天器执行特定的航天任务，对其姿态运动提出了许多新要求、新理论，促使航天器姿态与控制的研究工作蓬勃发展，研究内容已不是一个简单的刚体定点转动了.

航天器执行航天任务时通常对其定向都有预定的要求. 例如对地观测卫星要把星上的遥感仪器（照相机镜头等）对准地面，通信卫星的定向通信天线也应指向地面，各种空间望远镜（包括太阳探测仪和巡天探测仪）都应使相应的探测镜头对准预定的天体或天区，卫星进行变轨机动时，星体推力方向也应有预定的方向等等. 多数航天器上的观测仪器及推力器等相对星体指向是固定的，这就要求航天器对某参考物体（地球、被探测天体，或相应的参考系）有给定的方位和指向，即一定的姿态. 而且由于受到外力矩的影

响,姿态将会发生变化,为了保证航天器所承担的特定的探测任务,必须对姿态进行控制,使其保持姿态稳定.

航天器的姿态确定不仅是执行特定航天任务的要求,它与轨道确定亦有密切联系. 对于轨道变化中的非引力摄动效应,就与姿态有关,更确切地说,它需要了解有效截面 S 的变化规律 $S=S(t)$. 要保证达到高精度的定轨和预报要求(也是轨控的需要),必须提供相应的姿态信息,否则在定轨中只能将相应的航天器有效面质比(S/m)当作待估参数去处理,而简单的处理又不能达到高精度的要求.

§ 10.2　描述航天器姿态的几种坐标系

姿态通常是用两坐标系之间的相对转动关系来描述,因此有必要介绍描述姿态的几种坐标系,而且同一坐标系在不同领域中可能有不用的名称,我们尽量使其统一.

1. 地心惯性坐标系 $O-xyz$

这一坐标系就是本书前面各章在轨道力学中引用的历元地心天球坐标系,即历元平赤道地心系,目前采用的历元即 J2000. 这已为读者所熟知,不再介绍.

2. 航天器轨道坐标系 $S-x_oy_oz_o$

这里的轨道坐标系并不是轨道力学中所引用的那种混合坐标系(即坐标原点为地心,xy 平面为瞬时真赤道面,Ox 轴方向即历元平春分点方向),而是一种对航天器而言的"当地"坐标系. 坐标原点为航天器的质心 S,Sz_o 轴指向地心,即轨道力学中的反径向,Sx_o 轴在轨道面内垂直 Sz_o,指向运动方向,即轨道力学中所说的横向,Sy_o 轴与 Sz_o,Sx_o 轴构成右手正交坐标系统,Sy_o 轴方向就是轨道力学中轨道面法向的反向. 这种坐标系随着航天器的质心运动(即轨道运动)在空间是旋转的. 上述对地定向的三轴稳定卫星(如遥感卫星、通信卫星)的姿态就定义在这种坐标系中,常把 Sx_o,Sy_o 和 Sz_o 三轴分别称为滚动轴,俯仰轴和偏航轴.

对于这种坐标系,三个坐标轴方向的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{x}}_o$,$\hat{\boldsymbol{y}}_o$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}_o$ 可由航天器的轨道运动量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$(即地心位置矢量和速度矢量)来定义:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{z}}_o = -\boldsymbol{r}/r = -\hat{\boldsymbol{r}}, \\ \hat{\boldsymbol{y}}_o = \dfrac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}|} = -\hat{\boldsymbol{w}}, \\ \hat{\boldsymbol{x}}_o = \hat{\boldsymbol{y}}_o \times \hat{\boldsymbol{z}}_o = \hat{\boldsymbol{t}}(\text{or} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}). \end{cases} \tag{10.1}$$

这里 $\hat{r}$,$\hat{t}$(or $\hat{\boldsymbol{\theta}}$)和 $\hat{w}$,即前各章常用到的径向、横向和轨道面法向单位矢量.

3. 航天器本体(自旋)坐标系 $S-x_by_bz_b$

坐标原点为航天器质心,Sx_b 轴为沿航天器纵轴方向指向航天器的前部,即航天器自旋转方向,Sy_b 轴在航天器纵对称面内,垂直于纵轴指向某特征点方向,Sz_b 轴即与 Sx_b,Sy_b 轴构成右手正交坐标系统.

4. 航天器惯性主轴坐标系 $S-x_ly_lz_l$

坐标原点仍为航天器质心,Sx_l,Sy_l,Sz_l 三个坐标轴方向即分别沿航天器三个惯性主轴方向. 航天器姿态动力学研究中常用这一坐标系.

§10.3 航天器姿态参数

描述航天器的轨道参数即六个轨道根数,而描述航天器的姿态参数即通常所说的一组欧拉角,亦称姿态角. 在航天器测控中,姿态角通常有两种定义: 一种是航天器本体坐标系 $S-x_by_bz_b$ 相对于某一基准坐标系的一组欧拉角,这一定义常用于运载火箭发射段姿态角及载人飞船返回飞行时姿态角的描述; 另一种是航天器本体坐标系相对于航天器轨道坐标系 $S-x_oy_oz_o$ 的一组欧拉角,这一定义常用于航天器在轨运行段姿态角的描述.

1. 第一类姿态角(φ,ψ,γ)及姿态矩阵的表达

如图 10.1 所示,由某一基准坐标系 $S-x_ty_tz_t$(以下记作 S_t),至本体坐标系 $S-x_by_bz_b$(以下记作 S_b)的转换依次为下面三次旋转:

(1) 绕 Oz_t 轴逆时针转一俯仰角 φ;

(2) 绕 Oy' 轴逆时针转一偏航角 ψ;

(3) 绕 Ox_b 轴逆时针转一滚动角 γ.

若分别记这两种坐标系 S_t 和 S_b 中的坐标矢量为 $\boldsymbol{R}_t$ 和 $\boldsymbol{R}_b$,则两者之间

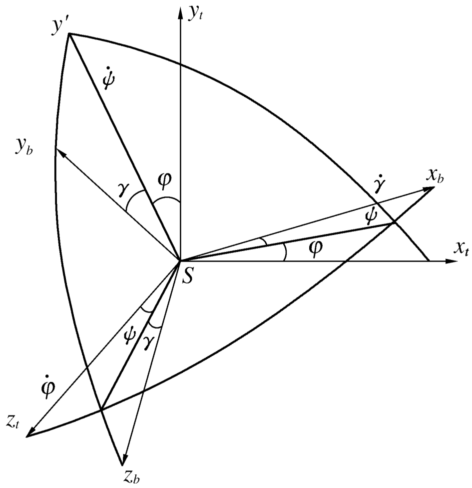

图 10.1　第一类姿态角的定义

的转换关系(即坐标旋转关系)为

$$R_b = (A_{bt})R_t, \tag{10.2}$$

$$R_t = (A_{bt})^{-1}R_b = (A_{bt})^{\mathrm{T}}R_b. \tag{10.3}$$

其中转换矩阵(A_{bt})即这种定义下的姿态矩阵,有

$$(A_{bt}) = R_x(\gamma)R_y(\psi)R_z(\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi \\ -\cos\gamma\sin\varphi+\sin\gamma\sin\psi\cos\varphi & \cos\gamma\cos\varphi+\sin\gamma\sin\psi\sin\varphi & \sin\gamma\cos\psi \\ \sin\gamma\sin\varphi+\cos\gamma\sin\psi\cos\varphi & -\sin\gamma\cos\varphi+\cos\gamma\sin\psi\sin\varphi & \cos\gamma\cos\psi \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

当φ,ψ,γ均为小角度时,保留到一阶量,姿态矩阵(A_{bt})的简化形式为

$$(A_{bt}) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi & -\psi \\ -\varphi & 1 & \gamma \\ \psi & -\gamma & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.5}$$

2. 第二类姿态角(φ,φ,θ)及姿态矩阵的表达

如图 10.2 所示,由航天器轨道坐标系 S_o 至本体坐标系 S_b 的转换依次为下面三次旋转:

(1) 绕 Sz_o 轴逆时针转一偏航角 ψ;

(2) 绕 Sx'_o 轴逆时针转一滚动角 φ;

(3) 绕 Sy_b 轴逆时针转一俯仰角 θ.

若分别记这两种坐标系 S_o 和 S_b 中的坐标矢量为 $\boldsymbol{R}_o$ 和 $\boldsymbol{R}_b$，则有

$$\boldsymbol{R}_b = (\boldsymbol{A}_{bo})\boldsymbol{R}_o, \tag{10.6}$$

$$\boldsymbol{R}_o = (\boldsymbol{A}_{bo})^{-1}\boldsymbol{R}_b = (\boldsymbol{A}_{bo})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_b. \tag{10.7}$$

这里的转换矩阵$(\boldsymbol{A}_{bo})$即第二类姿态角定义对应的姿态矩阵，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}_{bo}) &= \boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\varphi)\boldsymbol{R}_z(\psi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\theta\sin\psi + \sin\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\theta\cos\varphi \\ -\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi \\ \sin\theta\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{10.8}$$

当 ψ,φ,θ 均为小角度时，保留到一阶量，姿态矩阵$(\boldsymbol{A}_{bo})$有如下简化形式：

$$(\boldsymbol{A}_{bt}) = \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.9}$$

上述姿态角即对应坐标轴的转动角，就称为欧拉角. 姿态参数还有另一种表示方法，即欧拉四元素表示法，下面介绍.

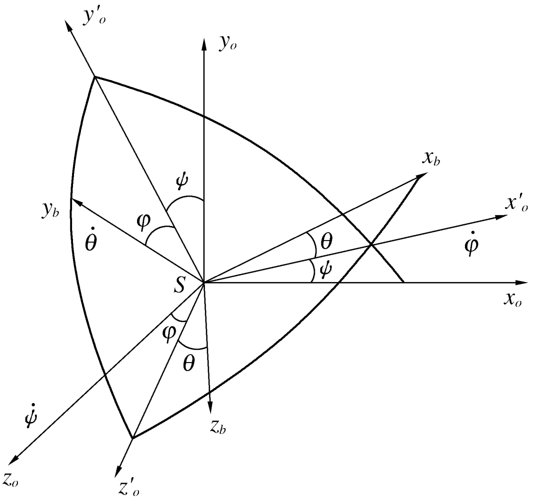

图 10.2 第二类姿态角的定义

3. 欧拉轴/角姿态参数——欧拉四元素

刚体绕固定点的任一位移（即由一坐标系到另一坐标系的旋转变换），可由绕通过此定点的某一轴（记为 e 轴）转动一个角度（记为 Φ）而得到，这

从前面的两种姿态角的定义过程中亦可看出. 转轴 e 称为欧拉轴,转角 Φ 称为欧拉角.

转轴 e 的单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 在参考坐标系中的三个方向余弦(即三个分量) e_x, e_y, e_z 和转角 Φ 即称为欧拉轴/角姿态参数. 引进 $\tilde{q}$:

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \sin \dfrac{\Phi}{2} \\ e_y \sin \dfrac{\Phi}{2} \\ e_z \sin \dfrac{\Phi}{2} \\ \cos \dfrac{\Phi}{2} \end{pmatrix}, \tag{10.10}$$

此即欧拉四元素. 这种姿态参数的表示在姿态动力学中也常会用到,有关细节不再介绍.

§ 10.4　姿态运动方程与姿态动力学

1. 姿态运动方程

在上一节姿态角的定义中,即通过刚体定点转动引入了欧拉角,绕一固定轴 e 的转动,亦可分解为先后绕一个参考坐标系的三个轴来实现. 转动角速度矢量记作 $\boldsymbol{\omega}$,有

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \tag{10.11}$$

相应的角速度记作 $\dot{\omega}$,有

$$\dot{\omega} = \mathrm{d}\,\Phi/\mathrm{d}t = \dot{\Phi}. \tag{10.12}$$

常把欧拉角的变率(即对时间 t 的导数 $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\gamma}$ 或 $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}$)与转动角速度 $\boldsymbol{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 的这种运动关系称为姿态运动方程. 下面分别就上一节前两种姿态角 (φ, ψ, γ) 和 (ψ, φ, θ) 的定义给出相应的姿态运动方程.

(1) 定点转动的第一种体现——对基准坐标系 S_t 旋转的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在本体坐标系 S_b 中的表达记作

$$(\boldsymbol{\omega})_b = \begin{pmatrix} \omega_{xb} \\ \omega_{yb} \\ \omega_{zb} \end{pmatrix}, \tag{10.13}$$

上述转动是分解成三次转动完成的，相应的转动角速度为$\dot{\varphi}$，$\dot{\psi}$，$\dot{\gamma}$，根据图 10.1 不难给出

$$\begin{pmatrix}\omega_{xb}\\ \omega_{yb}\\ \omega_{zb}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+(\boldsymbol{A}_{bt})\begin{pmatrix}-\dot{\psi}\sin\varphi\\ \dot{\psi}\cos\varphi\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix},\tag{10.14}$$

利用矩阵$(\boldsymbol{A}_{bt})$的表达式(10.4)，即可得

$$\begin{cases}\omega_{xb}=\dot{\gamma}-\dot{\varphi}\sin\psi,\\ \omega_{yb}=\dot{\psi}\cos\gamma+\dot{\varphi}\sin\gamma\cos\psi,\\ \omega_{zb}=-\dot{\psi}\sin\gamma+\dot{\varphi}\cos\gamma\cos\psi.\end{cases}\tag{10.15}$$

由此亦可解出$\dot{\varphi}$，$\dot{\psi}$，$\dot{\gamma}$，有

$$\begin{cases}\dot{\varphi}=(\omega_{yb}\sin\gamma+\omega_{zb}\cos\gamma)/\cos\psi,\\ \dot{\psi}=\omega_{yb}\cos\gamma-\omega_{zb}\sin\gamma,\\ \dot{\gamma}=\omega_{xb}+(\omega_{yb}\sin\gamma+\omega_{zb}\cos\gamma)\tan\psi.\end{cases}\tag{10.16}$$

(2) 定点转动的第二种体现——本体坐标系 S_b 绕轨道坐标系 S_o 旋转的角速度矢量记为$\boldsymbol{\omega}_{bo}$，因 S_o 不是惯性坐标系，因此$\boldsymbol{\omega}_{bo}$是相对角速度矢量，在 S_b 坐标系中由下列形式表达：

$$(\boldsymbol{\omega}_{bo})_b=\begin{pmatrix}\omega_{xr}\\ \omega_{yr}\\ \omega_{zr}\end{pmatrix}.\tag{10.17}$$

根据图 10.2 不难看出

$$\begin{pmatrix}\omega_{xr}\\ \omega_{yr}\\ \omega_{zr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}+(\boldsymbol{A}_{bo})\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\cos\psi\\ \dot{\varphi}\sin\psi\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}.\tag{10.18}$$

利用矩阵$(\boldsymbol{A}_{bo})$的表达式(10.8)即可得

$$\begin{cases}\omega_{xr}=\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi,\\ \omega_{yr}=\dot{\theta}+\dot{\psi}\sin\varphi,\\ \omega_{zr}=\dot{\varphi}\sin\theta+\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi,\end{cases}\tag{10.19}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\omega_{yr}+(\omega_{xr}\sin\theta-\omega_{zr}\cos\theta)\tan\varphi,\\ \dot{\psi}=(-\omega_{xr}\sin\theta+\omega_{zr}\cos\theta)/\cos\varphi,\\ \dot{\varphi}=\omega_{xr}\cos\theta+\omega_{zr}\sin\theta,\end{cases}\tag{10.20}$$

记 S_b 绕惯性坐标系 S_t 旋转的绝对角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}_{bt}$，则有

$$\boldsymbol{\omega}_{bt}=\boldsymbol{\omega}_{bo}+\boldsymbol{\omega}_{ot},\tag{10.21}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{ot}$ 为 S_o 绕 S_t 旋转的角速度矢量，若记

$$(\boldsymbol{\omega}_{bt})_b=\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix},\tag{10.22}$$

通常它就是装在航天器上的陀螺仪的输出量. S_t 即对应前面 §10.2 中定义的地心惯性坐标系，因此有

$$(\boldsymbol{\omega}_{ot})_o=\begin{pmatrix}0\\ -\omega_0\\ 0\end{pmatrix}.\tag{10.23}$$

这里的 ω_0 即航天器的轨道角速度，严格而言，应有

$$\omega_0=\dot{f}+\dot{\omega}+\cos i\,\dot{\Omega}.\tag{10.24}$$

其中 $\dot{f}$，$\dot{\omega}$和$\dot{\Omega}$即前面几章轨道力学给出的包括摄动效应的航天器质心运动的角变率.

$$(\boldsymbol{\omega}_{bt})_b=(\boldsymbol{\omega})_{bo}+(A_{bo})(\boldsymbol{\omega}_o t)_o.\tag{10.25}$$

由此可给出

$$\boldsymbol{\omega}_{bt}=\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\omega_0(\cos\theta\sin\psi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi)\\ \dot{\theta}+\dot{\psi}\sin\varphi-\omega_0\cos\varphi\cos\psi\\ \dot{\varphi}\sin\theta+\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi-\omega_0(\sin\theta\sin\psi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi)\end{pmatrix},\tag{10.26}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\omega_y+(\omega_x\sin\theta-\omega_z\cos\theta)\tan\varphi+\omega_0\cos\psi/\cos\varphi,\\ \dot{\psi}=(\omega_z\cos\theta-\omega_x\sin\theta-\omega_0\sin\varphi\cos\psi)/\cos\varphi,\\ \dot{\varphi}=\omega_x\cos\theta+\omega_z\sin\theta+\omega_0\sin\psi,\end{cases}\tag{10.27}$$

对小姿态角有

$$
\begin{cases}
\dot{\theta} = \omega_y + \omega_0 , \\
\dot{\psi} = \omega_z - \omega_0 \varphi, \\
\dot{\varphi} = \omega_x + \omega_0 \psi.
\end{cases}
\tag{10.28}
$$

2. 姿态动力学

姿态动力学即研究航天器(作为刚体或刚体与绕性体的混合系统等)姿态角在外力矩的作用下的变化规律. 对应轨道力学中的$\ddot{r}$ 即 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$. $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(\psi,\varphi,\theta;\dot{\psi},\dot{\varphi},\dot{\theta})$ 或 $\boldsymbol{\omega}(\varphi,\psi,\gamma;\dot{\varphi},\dot{\psi},\dot{\gamma})$. 这是航天器姿态动力学的主要内容,本书将不再深入阐明这类问题,作为基础内容可参阅该领域的相关书籍或教材[1~4].

参 考 文 献

[1] Wertz J R. Spacecraft Attitude Determination and Control. Holland: D. Reidel Publishing Company, 1978

[2] 刘延柱. 航天器姿态动力学. 北京: 国防工业出版社,1995

[3] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制. 北京: 北京航空航天大学出版社,1998

[4] 屠善澄(主编). 卫星姿态动力学与控制(1). 北京: 宇航出版社,1999

附录一　常用公式

球面三角公式

1. **正弦公式**：

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

2. **正弦公式**：

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$$

3. **五元素公式**：

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A$$

$$\sin A\cos b=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a$$

$$\sin A\cos B=\cos b\sin C-\sin B\cos c\cos A$$

公式中的 A,B,C **是球面三角形的三个角**，a,b,c **是相应的三个边**.

贝赛耳函数 $J_n(ne)$

$$J_1(e)=\frac{1}{2}e\left(1-\frac{1}{8}e^2+\frac{1}{192}e^4-\frac{1}{9216}e^6+\cdots\right)$$

$$J_2(2e)=\frac{1}{2}e^2\left(1-\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{24}e^4-\frac{1}{360}e^6+\cdots\right)$$

$$J_3(3e)=\frac{9}{16}e^3\left(1-\frac{9}{16}e^2+\frac{81}{640}e^4-\cdots\right)$$

$$J_4(4e)=\frac{2}{3}e^4\left(1-\frac{4}{5}e^2+\frac{4}{15}e^4-\cdots\right)$$

$$J_5(5e)=\frac{625}{768}e^5\left(1-\frac{25}{24}e^2+\cdots\right)$$

$$J_6(6e) = \frac{81}{80}e^6\left(1 - \frac{9}{7}e^2 + \cdots\right)$$

勒让德多项式 $P_l(\mu)$

$$P_0(\mu) = 1$$
$$P_1(\mu) = \mu$$
$$P_2(\mu) = \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}$$
$$P_3(\mu) = \frac{5}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu$$
$$P_4(\mu) = \frac{35}{8}\mu^4 - \frac{15}{4}\mu^2 + \frac{3}{8}$$
$$P_5(\mu) = \frac{63}{8}\mu^5 - \frac{35}{4}\mu^3 + \frac{15}{8}\mu$$
$$P_6(\mu) = \frac{231}{16}\mu^6 - \frac{315}{16}\mu^4 + \frac{105}{16}\mu^2 - \frac{5}{16}$$

缔合勒让德多项式 $P_{lm}(\mu)$

$$P_{1,1}(\mu) = (1-\mu^2)^{1/2}$$
$$P_{2,1}(\mu) = 3\mu(1-\mu^2)^{1/2}$$
$$P_{2,2}(\mu) = 3(1-\mu^2)$$
$$P_{3,1}(\mu) = \left(\frac{15}{2}\mu^2 - \frac{3}{2}\right)(1-\mu^2)^{1/2}$$
$$P_{3,2}(\mu) = 15\mu(1-\mu^2)$$
$$P_{3,3}(\mu) = 15(1-\mu^2)^{3/2}$$
$$P_{4,1}(\mu) = \left(\frac{35}{2}\mu^3 - \frac{15}{2}\mu\right)(1-\mu^2)^{1/2}$$
$$P_{4,2}(\mu) = \left(\frac{105}{2}\mu^2 - \frac{15}{2}\right)(1-\mu^2)$$
$$P_{4,3}(\mu) = 105\mu(1-\mu^2)^{3/2}$$
$$P_{4,4}(\mu) = 105(1-\mu^2)^2$$

一些函数的平均值

1. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)} = 1$

2. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}\sin qf} = 0 \quad (p, q = 0, 1, 2, \cdots)$

3. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}\cos qf} = 0 \quad (p \geqslant 2, q \geqslant p-1)$

4. $$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}\cos qf} = (1-e^2)^{-(p-3/2)} \sum_{n(2)=q}^{(p-2)-\delta} \binom{p-2}{n} \binom{n}{\frac{1}{2}(n-q)} \left(\frac{e}{2}\right)^{n}$$

$$\delta = \frac{1}{2}[1-(-1)^{p-q}], (p \geqslant 2, q < p-1)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{2}} = (1-e^2)^{-1/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 1)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{3}} = (1-e^2)^{-3/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{3}\cos f} = \frac{1}{2}e(1-e^2)^{-3/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{3}\cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 2)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{4}} = \left(1+\frac{1}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{4}\cos f} = e(1-e^2)^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{4}\cos 2f} = \frac{1}{4}e^2(1-e^2)^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{4}\cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 3)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{5}} = \left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{5}\cos f} = \frac{3}{2}e\left(1+\frac{1}{4}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{5}\cos 2f} = \frac{3}{4}e^2(1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{5}\cos 3f} = \frac{1}{8}e^3(1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{5}\cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 4)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{6}} = \left(1+3e^2+\frac{3}{8}e^4\right)(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos f} = 2e\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos 2f} = \frac{3}{2}e^2\left(1+\frac{1}{6}e^2\right)(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos 3f} = \frac{1}{2}e^3(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos 4f} = \frac{1}{16}e^4(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 5)$$

5. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)\cos qf} = \left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q (q=0,1,2,\cdots)$

6. $\overline{\cos qf} = \left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q (1+q\sqrt{1-e^2}) \quad (q=0,1,2,\cdots)$

$$\overline{\cos f} = -e$$

$$\overline{\cos 2f} = \frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2$$

$$\overline{\cos 3f} = -\frac{4}{e}\,\overline{\cos 2f} + 3e$$

$$\overline{\cos 4f} = \frac{2}{e^2}(6-e^2)\,\overline{\cos 2f} - 9$$

$$\overline{\cos 5f} = -\frac{4}{e^3}(8-3e^2)\,\overline{\cos 2f} + \frac{1}{e}(24-5e^2)$$

$$\overline{\cos 6f} = \frac{1}{e^4}(80-48e^2+3e^4)\,\overline{\cos 2f} - \frac{2}{e^2}(30-13e^2)$$

7. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\cos qf} = 0 \quad (p,q=0,1,2,\cdots)$

8. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2 (f-M)\sin qf} = -\frac{1}{q}\left(\frac{\overline{\cos 2f}}{\sqrt{1-e^2}}\right) \quad (q \geqslant 1)$

9. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\sin qf} = (1-e^2)^{-(p-3/2)} \sum_{n=0}^{p-2}\sum_{m=0}^{n} \binom{p-2}{n}\binom{n}{m}\left(\frac{e}{2}\right)^n$

$$\times \overline{\left\{-\frac{\cos(q+n-2m)f}{q+n-2m}\right\}}_{2m\neq q+n} \quad (p \geqslant 3, q \geqslant 1)$$

10. $\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^p \cos qf}$：

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)} = 1+\frac{1}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)\cos f} = -\frac{3}{2}e$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)\cos 2f} = \frac{3}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos f} = -2e\left(1 + \frac{1}{4}e^2\right)$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f} = \frac{5}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 3f} = -\frac{5}{2}e^3$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^3} = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^4} = 1 + 5e^2 + \frac{15}{8}e^4$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^5} = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^6} = 1 + \frac{21}{2}e^2 + \frac{105}{8}e^4 + \frac{35}{16}e^6$$

汉森系数 $X_p^{n,m}(e)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots,m=0,1,2,\cdots)$

$$X_0^{n,0} = 1 + \frac{1}{4}n(n+1)e^2 + \frac{1}{64}n(n-2)(n^2-1)e^4 + \cdots$$

$$X_1^{n,0} = -\frac{1}{2}ne - \frac{1}{16}n(n^2-n-3)e^3 + \cdots$$

$$X_2^{n,0} = \frac{1}{8}n(n-3)e^2 + \frac{1}{96}n(n^3-6n^2-n+22)e^4 + \cdots$$

$$X_3^{n,0} = -\frac{1}{48}n(n^2-9n+17)e^3 + \cdots$$

$$X_4^{n,0} = \frac{1}{384}n(n^3-18n^2+95n-142)e^4 + \cdots$$

$$X_{-3}^{n,1} = \frac{1}{384}(n^4-10n^3+17n^2+28n-27)e^4 + \cdots$$

$$X_{-2}^{n,1} = -\frac{1}{48}(n^3-3n^2-4n+4)e^3 + \cdots$$

$$X_{-1}^{n,1} = \frac{1}{8}(n^2+n-1) + \frac{1}{96}(n^4-2n^3-4n^2+7n+2)e^4 + \cdots$$

$$X_0^{n,1} = -\frac{1}{2}(n+2)e - \frac{1}{16}n(n-1)(n+2)e^3 + \cdots$$

$$X_1^{n,1} = 1 + \frac{1}{4}(n^2+n-4)e^2 + \frac{1}{64}(n^4-2n^3-9n^2+2n+7)e^4 + \cdots$$

$$X_2^{n,1} = -\frac{1}{2}(n-2)e - \frac{1}{16}(n^3-3n^2-12n+20)e^3 + \cdots$$

$$X_3^{n,1} = \frac{1}{8}(n^2-7n+9)e^2 + \frac{1}{96}(n^4-10n^3+2n^2+133n-162)e^4 + \cdots$$

$$X_4^{n,1} = -\frac{1}{48}(n^3-15n^2+62n-64)e^3 + \cdots$$

$$X_5^{n,1} = \frac{1}{384}(n^4-26n^3+221n^2-696n+625)e^4 + \cdots$$

$$X_{-2}^{n,2} = \frac{1}{384}(n^4-2n^3-13n^2+6n+16)e^4 + \cdots$$

$$X_{-1}^{n,2} = -\frac{1}{48}(n^3+3n^2-n-4)e^3 + \cdots$$

$$X_0^{n,2} = \frac{1}{8}(n+2)(n+3)e^2 + \frac{1}{96}(n-1)(n-2)(n+2)(n+3)e^4 + \cdots$$

$$X_1^{n,2} = -\frac{1}{2}(n+4)e - \frac{1}{16}(n^3+3n^2-9n-28)e^3 + \cdots$$

$$X_2^{n,2} = 1 + \frac{1}{4}(n^2+n-16)e^2 + \frac{1}{64}(n^4-2n^3-33n^2+2n+220)e^4 + \cdots$$

$$X_3^{n,2} = -\frac{1}{2}(n-4)e - \frac{1}{16}(n^3-5n^2-29n+108)e^3 + \cdots$$

$$X_4^{n,2} = \frac{1}{8}(n^2-11n+26)e^2 + \frac{1}{96}(n^4-14n^3+5n^2+436n-1036)e^4 + \cdots$$

$$X_5^{n,2} = -\frac{1}{48}(n^3-21n^2+131n-236)e^3 + \cdots$$

$$X_6^{n,2} = \frac{1}{384}(n^4-34n^3+395n^2-1826n+2760)e^4 + \cdots$$

附录二　天文常数

IAU(1976)天文常数系统

单位：米(m)、**千克**(kg)**和秒**(s)**分别为国际单位系统**(SI)**中的长度、质量和时间单位**.

定义常数(defining constants)

1. **高斯引力常数**(Gaussian Gravitational Constant)

$k=0.01720209895$

2. **光速**(speed of light)　　$c=299792458\mathrm{ms}^{-1}$

初始常数(primary constants)

3. **一天文单位的光行时间**(light-time for unit distance)

$\tau_A=499.004782\mathrm{s}$

4. **地球赤道半径**(equatorial radius for earth)　　$a_e=6378140\mathrm{m}$

5. **地球形状力学因子**(dynamical form-factor for earth)

$J_2=0.00108263$

6. **地心引力常数**(geocentric gravitational constant)

$\mathrm{GE}=3.986005\times10^{14}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}$

7. **引力常数**(constant of gravitation)　　$G=6.672\times10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$

8. **月球与地球质量比**(ratio of mass of moon to that of earth)

$\mu=0.01230002$

9. **黄经总岁差**(general precession in longitude, per Julian century, at standard epoch 2000)　　$\rho=5029''.0966$

10. **黄赤交角**(obliquity of the ecliptic, at standard epoch 2000)

$$\varepsilon = 23°26'21''.448$$

推导常数(derived constants)

11. **章动常数**(constant of nutation, at standard epoch 2000)

$$N = 9''.2025$$

12. **一天文单位的长度**(unit distance) $c\tau_A = 1.49597870 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$

13. **太阳视差**(solar parallax) $\arcsin(\alpha_c / A) = \pi_\odot = 8''.794148$

14. **光行差常数**(constant of aberration, for standard epoch 2000)

$$\kappa = 20''.49552$$

15. **地球扁率**(flattening factor for the earth)

$$f = 0.00335281 = 1/298.257$$

16. **日心引力常数**(heliocentric gravitational constant)

$$A^3 k^2 / D^2 = \mathrm{GS} = 1.32712438 \times 10^{20}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}}$$

17. **太阳与地球质量比**(ratio of mass of Sun to that of the earth)

$$(\mathrm{GS})/(\mathrm{GE}) = S/E = 332946.0$$

18. **太阳与地月系质量比**(ratio of mass of sun to that of the earth+moon)

$$(S/E)/(1+\mu) = 328900.5$$

19. **太阳质量**(mass of the sun) $(\mathrm{GS})/G = S = 1.9891 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$

20. **行星质量系统**(system of planetary masses) (**太阳质量**=1)

Mercury	6023600	Jupiter	1047.355
Venus	408523.5	Saturn	3498.5
Earth+Moon	328900.5	Uranus	22869
Mars	3098710	Neptune	19314
		Pluto	3000000

附录三　地球和月球引力场模型

通常一个地球引力场模型包括如下内容：

GE——**地心引力常数**，a_e——**地球参考椭球体赤道半径，**

$\bar{C}_{lm}$，$\bar{S}_{lm}$——**地球引力位球谐展开式的归一化谐系数，**

当引用某一地球引力场模型时，严格而言，地固坐标系中的测站坐标 R_e **应与该引力场模型所对应的地球参考椭球体相吻合，这在精密定轨中（特别是定轨精度要求较高的问题）应加以考虑，因为它涉及到地心坐标系的严格定义. 同样对于月球引力场亦如此，相应地有月心引力常数** GM，**月球参考椭球体赤道半径** a_e **和引力位球谐展开式的归一化系数** $\bar{C}_{lm}$，$\bar{S}_{lm}$.

为了实际应用的需要，这里介绍被广泛引用的 JGM－3 **和** WGS84 **两种地球引力场模型以及** LP75G **和当今认为精度较高的** LP165 **两种月球引力场模型，供读者参考. 原** JGM－3 **模型为** 70×70 **阶次，**WGS84 **模型为** 180×180 **阶次，**LP165 **模型为** 165×165 **阶次，**LP75G **模型为** 75×75 **阶次，这里分别只给到** 20×20 **阶次，如有需要，读者可以在相关网站上调用完整模型.**

JGM－3　GE＝398600.44150 km^3/s^2　a_e＝6378.13630 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	－.48416954845647D－03	.00000000000000D＋00
3	0	.95717059088800D－06	.00000000000000D＋00
4	0	.53977706835730D－06	.00000000000000D＋00
5	0	.68658987986543D－07	.00000000000000D＋00
6	0	－.14967156178604D－06	.00000000000000D＋00
7	0	.90722941643232D－07	.00000000000000D＋00
8	0	.49118003174734D－07	.00000000000000D＋00
9	0	.27385060950085D－07	.00000000000000D＋00
10	0	.54130445738812D－07	.00000000000000D＋00

11	0	−.50161314595688D−07	.00000000000000D+00
12	0	.36382340623690D−07	.00000000000000D+00
13	0	.39946428731683D−07	.00000000000000D+00
14	0	−.21803861547203D−07	.00000000000000D+00
15	0	.31659510926189D−08	.00000000000000D+00
16	0	−.54302320884432D−08	.00000000000000D+00
17	0	.18108375059805D−07	.00000000000000D+00
18	0	.72691846007246D−08	.00000000000000D+00
19	0	−.35185503098098D−08	.00000000000000D+00
20	0	.18789986549777D−07	.00000000000000D+00
2	1	−.18698764000000D−09	.11952801000000D−08
3	1	.20301372055530D−05	.24813079825561D−06
4	1	−.53624355429851D−06	−.47377237061597D−06
5	1	−.62727369697705D−07	−.94194632134383D−07
6	1	−.76103580407274D−07	.26899818932629D−07
7	1	.28028652203689D−06	.94777317813313D−07
8	1	.23333751687204D−07	.58499274939368D−07
9	1	.14223025892714D−06	.21909618349376D−07
10	1	.83758832332671D−07	−.13155406539843D−06
11	1	.16107077738720D−07	−.27892152840701D−07
12	1	−.54191701336309D−07	−.42011775767675D−07
13	1	−.52966868261361D−07	.39876816447422D−07
14	1	−.19023751941501D−07	.27471826062722D−07
15	1	.12019048467803D−07	.81732671079927D−08
16	1	.27533499349817D−07	.33708199043727D−07
17	1	−.26388862396409D−07	−.29852855753504D−07
18	1	.42100167037216D−08	−.39075893145582D−07
19	1	−.69675014448630D−08	.15804850737353D−09
20	1	.83477675011261D−08	.62445294169285D−08
2	2	.24392607486563D−05	−.14002663975880D−05
3	2	.90470634127291D−06	−.61892284647849D−06
4	2	.35067015645938D−06	.66257134594268D−06
5	2	.65245910276353D−06	−.32333435244435D−06
6	2	.48327472124892D−07	−.37381591944355D−06
7	2	.32976022742410D−06	.93193696831045D−07
8	2	.80070663931587D−07	.65518559097464D−07
9	2	.22620642355843D−07	−.32174984962166D−07
10	2	−.93557925682843D−07	−.51415890584901D−07
11	2	.18429795461053D−07	−.98452117204370D−07

12	2	.13985738460573D−07	.31047769644313D−07
13	2	.56039125275397D−07	−.62699341300935D−07
14	2	−.36978966062445D−07	−.29891074898391D−08
15	2	−.21746272853228D−07	−.31733039621956D−07
16	2	−.22395294006315D−07	.26206613354644D−07
17	2	−.17378596994668D−07	.91967492974033D−08
18	2	.12828248866347D−07	.13586359979031D−07
19	2	.31435051572210D−07	−.43295479774308D−08
20	2	.20030448029487D−07	.14884470088576D−07
3	3	.72114493982309D−06	.14142039847354D−05
4	3	.99086890577441D−06	−.20098735484731D−06
5	3	−.45183704808780D−06	−.21495419346421D−06
6	3	.57020965757974D−07	.88894738008251D−08
7	3	.25050152675038D−06	−.21732010845254D−06
8	3	−.19251764331400D−07	−.86285836534248D−07
9	3	−.16106427897243D−06	−.74545464061438D−07
10	3	−.71967367073644D−08	−.15417988118535D−06
11	3	−.30560698007455D−07	−.14880309051227D−06
12	3	.38978520777770D−07	.24576580959940D−07
13	3	−.21817131948590D−07	.98208999077455D−07
14	3	.36809435839364D−07	.20313404379978D−07
15	3	.52403064668802D−07	.15159862310361D−07
16	3	−.35100789004467D−07	−.23241519967982D−07
17	3	.74225615337830D−08	.81946523724251D−08
18	3	−.37596675909359D−08	−.31090562993624D−08
19	3	−.98999933204207D−08	−.98821208438535D−09
20	3	−.59349949066768D−08	.35571151171055D−07
4	4	−.18848136742527D−06	.30884803690355D−06
5	4	−.29512339302196D−06	.49741427230934D−07
6	4	−.86228032619800D−07	−.47140511232148D−06
7	4	−.27554096307403D−06	−.12414151248516D−06
8	4	−.24435806439297D−06	.69857074850431D−07
9	4	−.82017366877872D−08	.20068093286841D−07
10	4	−.84335352395338D−07	−.78485346171790D−07
11	4	−.40024107782339D−07	−.63596530213449D−07
12	4	−.68419698187080D−07	.29543256059344D−08
13	4	−.14709372441845D−08	−.12613848786464D−07
14	4	.17120660369001D−08	−.20688044000643D−07
15	4	−.42162691446070D−07	.78270996909884D−08

16	4	.41218976739860D−07	.46056696976601D−07
17	4	.75202561280798D−08	.23381994870984D−07
18	4	.53092291040775D−07	.14596998830727D−08
19	4	.15826786807335D−07	−.56619376893577D−08
20	4	.54571747234651D−08	−.22410101198270D−07
5	5	.17483157769990D−06	−.66939293724911D−06
6	5	−.26711227171966D−06	−.53641016466390D−06
7	5	.16440038146411D−08	.18075335233506D−07
8	5	−.25498410010257D−07	.89090297494640D−07
9	5	−.16325061515924D−07	−.54271473247992D−07
10	5	−.49519740818054D−07	−.50292693577921D−07
11	5	.37435874567708D−07	.49828631680041D−07
12	5	.31107075527266D−07	.76387883124312D−08
13	5	.58253125415417D−07	.65845648968111D−07
14	5	.29899462450133D−07	−.16857910838411D−07
15	5	.13450895846697D−07	.89823349629886D−08
16	5	−.13495263575727D−07	−.16788507060889D−08
17	5	−.17058052594159D−07	.53532065621805D−08
18	5	.73144220359351D−08	.24650351136750D−07
19	5	.12058223792869D−07	.27204444064611D−07
20	5	−.11452318388930D−07	−.69350775864877D−08
6	6	.95016518338557D−08	−.23726147889522D−06
7	6	−.35884263307918D−06	.15177808443426D−06
8	6	−.65859353864388D−07	.30892064157956D−06
9	6	.62833186922410D−07	.22267731094919D−06
10	6	−.37418833736693D−07	−.79464218274958D−07
11	6	−.14607814055515D−08	.34173161230373D−07
12	6	.33244194680361D−08	.39368833484484D−07
13	6	−.35311988740442D−07	−.60583315297552D−08
14	6	−.19400981730092D−07	.24129594129965D−08
15	6	.33463386220823D−07	−.37752532132562D−07
16	6	.14321054650520D−07	−.34445359251626D−07
17	6	−.13466610011002D−07	−.28274837436151D−07
18	6	.13377839989187D−07	−.15660996065894D−07
19	6	−.23850062007699D−08	.17951659591478D−07
20	6	.11565401097341D−07	−.42341732002092D−09
7	7	.13795170564076D−08	.24128594080773D−07
8	7	.67262701848734D−07	.74813196768710D−07
9	7	−.11815885217629D−06	−.96899385839989D−07

10	7	.82084062520783D−08	−.31491358401092D−08
11	7	.47061824740183D−08	−.89777235057051D−07
12	7	−.18603106541747D−07	.35570829249166D−07
13	7	.27063649200290D−08	−.77110578914500D−08
14	7	.36851132631493D−07	−.42223645889740D−08
15	7	.59912701354866D−07	.60561923271514D−08
16	7	−.78129662206869D−08	−.85101432520645D−08
17	7	.24011119637881D−07	−.58835543868363D−08
18	7	.65285877114871D−08	.62802630165493D−08
19	7	.73677859122170D−08	−.86648481719498D−08
20	7	−.20301510228149D−07	−.12995889226393D−09
8	8	−.12397061395498D−06	.12044100668766D−06
9	8	.18798426954722D−06	−.30154440657902D−08
10	8	.40467841871077D−07	−.91916682734371D−07
11	8	−.61406031069251D−08	.24572254505200D−07
12	8	−.25702477402668D−07	.16666794464624D−07
13	8	−.98871787586478D−08	−.97289371617499D−08
14	8	−.34866852918353D−07	−.14888414788683D−07
15	8	−.31989552416364D−07	.22270913883120D−07
16	8	−.21537842269728D−07	.52475750400288D−08
17	8	.37624561866834D−07	.37609560359427D−08
18	8	.31066116434825D−07	.24701340656902D−08
19	8	.31052189073581D−07	−.10462608847168D−07
20	8	.49222031305630D−08	.40671618436594D−08
9	9	−.47724821923178D−07	.96585577630797D−07
10	9	.12540250252277D−06	−.37736477753688D−07
11	9	−.31455516227675D−07	.42040713688155D−07
12	9	.41793077711655D−07	.25324579908954D−07
13	9	.24753630054781D−07	.45359257720667D−07
14	9	.32376638778215D−07	.28698212550741D−07
15	9	.13026722024257D−07	.37876413704166D−07
16	9	−.22776715289243D−07	−.38923887453334D−07
17	9	.32904899760425D−08	−.28585766401852D−07
18	9	−.19183123559344D−07	.36144387200323D−07
19	9	.30304661637596D−08	.64515566536913D−08
20	9	.18043912553397D−07	−.58648713867232D−08
10	10	.10038233131398D−06	−.23809404447193D−07
11	10	−.52129308588537D−07	−.18302278002235D−07
12	10	−.61693847120949D−08	.30986262918955D−07

13	10	.40892147458611D−07	−.37098943421354D−07
14	10	.38838489462067D−07	−.14646502936917D−08
15	10	.10311330752350D−07	.14956329195217D−07
16	10	−.12128710021123D−07	.12064635993103D−07
17	10	−.43040778296981D−08	.18038443987682D−07
18	10	.55661560255618D−08	−.45953868313856D−08
19	10	−.33377489589393D−07	−.70901793078301D−08
20	10	−.32549034672400D−07	−.57601831992074D−08
11	11	.46226945974065D−07	−.69592513786019D−07
12	11	.11320827288384D−07	−.63442255448454D−08
13	11	−.44739074565513D−07	−.48328920607274D−08
14	11	.15356539462914D−07	−.39038503109732D−07
15	11	−.95174491849600D−09	.18716336667474D−07
16	11	.19265835183290D−07	−.29747575202741D−08
17	11	−.15725519114554D−07	.11020868227887D−07
18	11	−.76424753587140D−08	.21171513660315D−08
19	11	.16080720197723D−07	.11000317328808D−07
20	11	.14562762720820D−07	−.18929751298295D−07
12	12	−.23492752269341D−08	−.10959426553406D−07
13	12	−.31410021346477D−07	.88106349374406D−07
14	12	.85046646166088D−08	−.30921727740280D−07
15	12	−.32728991604536D−07	.15719776528914D−07
16	12	.19697742559399D−07	.69145092797783D−08
17	12	.28689128789402D−07	.20744069700771D−07
18	12	−.29603019974536D−07	−.16192464661794D−07
19	12	−.29886557263191D−08	.93096798788415D−08
20	12	−.64092154083751D−08	.18154220942612D−07
13	13	−.61211341074230D−07	.68408785690868D−07
14	13	.32166747135071D−07	.45200081199389D−07
15	13	−.28288960926564D−07	−.42943958526004D−08
16	13	.13837330189163D−07	.99393104764339D−09
17	13	.16603066738893D−07	.20304808678395D−07
18	13	−.63799330347466D−08	−.34979730312351D−07
19	13	−.74465515090790D−08	−.28398303854051D−07
20	13	.27323490539213D−07	.70325129662091D−08
14	14	−.51783436366944D−07	−.50135706089731D−08
15	14	.53044811279796D−08	−.24442484622690D−07
16	14	−.19125929084628D−07	−.38860160731499D−07
17	14	−.14060794103232D−07	.11375705343040D−07

18	14	−.80028321553151D−08	−.13078375035713D−07
19	14	−.45294320737346D−08	−.13113452689000D−07
20	14	.11894377026580D−07	−.14472233857738D−07
15	15	−.19227532557760D−07	−.47043717740296D−08
16	15	−.14460511250623D−07	−.32699102984228D−07
17	15	.53318558273089D−08	.53871007251714D−08
18	15	−.40535566922307D−07	−.20249426822391D−07
19	15	−.17838458615368D−07	−.14105916172496D−07
20	15	−.25832737678316D−07	−.76580241490690D−09
16	16	−.37529424659874D−07	.35911038341162D−08
17	16	−.30061016811586D−07	.37240886096084D−08
18	16	.10670913840544D−07	.69654369110866D−08
19	16	−.21421212413032D−07	−.69574508679338D−08
20	16	−.12063704641516D−07	.33001883992357D−09
17	17	−.34064108542158D−07	−.19733214905988D−07
18	17	.36003191941618D−08	.45103760547938D−08
19	17	.29105753067619D−07	−.15152537147995D−07
20	17	.44347248372820D−08	−.13703405459961D−07
18	18	.26206060973410D−08	−.10810058406326D−07
19	18	.34714340290441D−07	−.94385774554964D−08
20	18	.14916632182652D−07	−.98369291535446D−09
19	19	−.23708581999978D−08	.47796091478955D−08
20	19	−.29626245297233D−08	.10959649647533D−07
20	20	.40445840955309D−08	−.12346618337924D−07

WGS84　GE＝398600.4418 km^3/s^2　a_e＝6378.1370 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	−0.48416685D−03	0.00000000D+00
3	0	0.95706390D−06	0.00000000D+00
4	0	0.53699587D−06	0.00000000D+00
5	0	0.71092048D−07	0.00000000D+00
6	0	−0.15064821D−06	0.00000000D+00
7	0	0.85819217D−07	0.00000000D+00
8	0	0.42979835D−07	0.00000000D+00
9	0	0.33173231D−07	0.00000000D+00
10	0	0.50931575D−07	0.00000000D+00
11	0	−0.58114696D−07	0.00000000D+00
12	0	0.34073235D−07	0.00000000D+00

13	0	0.48159534D−07	0.00000000D+00
14	0	−0.25559279D−07	0.00000000D+00
15	0	−0.55534001D−08	0.00000000D+00
16	0	0.96352958D−08	0.00000000D+00
17	0	0.27418160D−07	0.00000000D+00
18	0	0.10196218D−07	0.00000000D+00
19	0	−0.11009860D−07	0.00000000D+00
20	0	0.25008019D−07	0.00000000D+00
2	1	0.00000000D+00	0.00000000D+00
2	2	0.24395796D−05	−0.13979548D−05
3	1	0.20318729D−05	0.25085759D−06
3	2	0.90666113D−06	−0.62102428D−06
3	3	0.71770352D−06	0.14152388D−05
4	1	−0.53548044D−06	−0.47420394D−06
4	2	0.34797519D−06	0.65579158D−06
4	3	0.99172321D−06	−0.19912491D−06
4	4	−0.18686124D−06	0.30953114D−06
5	1	−0.64185265D−07	−0.92492959D−07
5	2	0.65184984D−06	−0.32007416D−06
5	3	−0.44903639D−06	−0.21328272D−06
5	4	−0.29719055D−06	0.53213480D−07
5	5	0.17523221D−06	−0.67059456D−06
6	1	−0.74180259D−07	0.32780040D−07
6	2	0.51824409D−07	−0.35866634D−06
6	3	0.53370577D−07	0.61334720D−08
6	4	−0.88694856D−07	−0.47260945D−06
6	5	−0.26818820D−06	−0.53491073D−06
6	6	0.10237832D−07	−0.23741002D−06
7	1	0.27905196D−06	0.94231346D−07
7	2	0.32873832D−06	0.88835092D−07
7	3	0.24940240D−06	−0.21223369D−06
7	4	−0.27123034D−06	−0.12696607D−06
7	5	0.10246290D−08	0.17321672D−07
7	6	−0.35843745D−06	0.15202633D−06
7	7	−0.20991457D−08	0.22805664D−07
8	1	0.18889342D−07	0.47856967D−07
8	2	0.73553952D−07	0.47867693D−07
8	3	−0.12132459D−07	−0.83461853D−07
8	4	−0.24208264D−06	0.71603924D−07

8	5	－0.24966587D－07	0.87751047D－07
8	6	－0.65093424D－07	0.30904202D－06
8	7	0.66323292D－07	0.74661766D－07
8	8	－0.12372281D－06	0.12210258D－06
9	1	0.14747969D－06	0.23894354D－07
9	2	0.22052093D－07	－0.26876665D－07
9	3	－0.16256047D－06	－0.85928431D－07
9	4	－0.17193827D－07	0.26077030D－07
9	5	－0.16902791D－07	－0.50337365D－07
9	6	0.65717910D－07	0.22275858D－06
9	7	－0.11648016D－06	－0.97298769D－07
9	8	0.18896045D－06	－0.31026222D－08
9	9	－0.48275744D－07	0.96381072D－07
10	1	0.88706517D－07	－0.12536457D－06
10	2	－0.82375203D－07	－0.38280049D－07
10	3	－0.13137371D－07	－0.15553732D－06
10	4	－0.87424319D－07	－0.79215732D－07
10	5	－0.53980821D－07	－0.46294947D－07
10	6	－0.42371448D－07	－0.79680607D－07
10	7	0.83736045D－08	－0.25636582D－08
10	8	0.41239589D－07	－0.92269095D－07
10	9	0.12539514D－06	－0.37687117D－07
10	10	0.10124370D－06	－0.24874984D－07
11	1	0.95375839D－08	－0.22094828D－07
11	2	0.21716225D－07	－0.10224810D－06
11	3	－0.30023695D－07	－0.13422019D－06
11	4	－0.30407161D－07	－0.69823333D－07
11	5	0.35104609D－07	0.49175170D－07
11	6	－0.37911105D－08	0.36848522D－07
11	7	0.25774039D－08	－0.88658395D－07
11	8	－0.71396627D－08	0.23243077D－07
11	9	－0.30246313D－07	0.41776400D－07
11	10	－0.53424279D－07	－0.18716766D－07
11	11	0.47514858D－07	－0.70415796D－07
12	1	－0.60609926D－07	－0.38189082D－07
12	2	0.74200188D－08	0.24640620D－07
12	3	0.42149817D－07	0.32189594D－07
12	4	－0.64346831D－07	－0.25364931D－08
12	5	0.33126200D－07	－0.40658586D－09

12	6	0.86981502D－08	0.36711094D－07
12	7	－0.16598048D－07	0.34475954D－07
12	8	－0.26843700D－07	0.17838309D－07
12	9	0.42293015D－07	0.27107811D－07
12	10	－0.44237357D－08	0.30823394D－07
12	11	0.96462514D－08	－0.60711291D－08
12	12	－0.30878714D－08	－0.10932316D－07
13	1	－0.47921675D－07	0.34957177D－07
13	2	0.48705121D－07	－0.63933232D－07
13	3	－0.17219549D－07	0.82465794D－07
13	4	－0.92616056D－08	－0.98249479D－09
13	5	0.58545255D－07	0.66075856D－07
13	6	－0.28548757D－07	－0.13018250D－07
13	7	0.10048687D－07	－0.12672050D－07
13	8	－0.12236037D－07	－0.11680475D－07
13	9	0.25798630D－07	0.46771958D－07
13	10	0.42112066D－07	－0.35203559D－07
13	11	－0.44423472D－07	－0.63137559D－08
13	12	－0.31610688D－07	0.86378230D－07
13	13	－0.61019573D－07	0.68712423D－07
14	1	－0.10581256D－07	0.22739082D－07
14	2	－0.32588467D－07	－0.45984585D－08
14	3	0.33411750D－07	0.72271094D－08
14	4	0.34163340D－08	－0.23062568D－07
14	5	0.21777499D－07	－0.44340974D－08
14	6	－0.23022045D－07	0.79137357D－08
14	7	0.39355808D－07	－0.52187212D－08
14	8	－0.31866053D－07	－0.16609601D－07
14	9	0.30182993D－07	0.23942248D－07
14	10	0.36008306D－07	－0.43924872D－09
14	11	0.16006347D－07	－0.40475033D－07
14	12	0.79810549D－08	－0.31068551D－07
14	13	0.33446421D－07	0.44622344D－07
14	14	－0.52174166D－07	－0.48789452D－08
15	1	0.77027909D－08	0.12667983D－07
15	2	－0.13310361D－07	－0.25570239D－07
15	3	0.53469109D－07	0.21540830D－07
15	4	－0.35485140D－07	－0.38325971D－08
15	5	0.80670670D－08	0.95367405D－08

15	6	0.28835774D−07	−0.29584853D−07
15	7	0.55297561D−07	0.12688881D−07
15	8	−0.26866012D−07	0.28508669D−07
15	9	0.15229368D−07	0.40242957D−07
15	10	0.78226264D−08	0.16482104D−07
15	11	−0.45323941D−08	0.16379211D−07
15	12	−0.34310516D−07	0.13248557D−07
15	13	−0.27865470D−07	−0.51124016D−08
15	14	0.58007239D−08	−0.24830947D−07
15	15	−0.18756974D−07	−0.53745848D−08
16	1	0.16657011D−07	0.32088971D−07
16	2	−0.22051986D−07	0.26286204D−07
16	3	−0.29514849D−07	−0.95827659D−08
16	4	0.37621131D−07	0.55477548D−07
16	5	−0.10479239D−07	−0.27382338D−08
16	6	0.97407454D−08	−0.43087957D−07
16	7	−0.12168169D−07	−0.56636996D−08
16	8	−0.25034024D−07	0.22895737D−08
16	9	−0.17908785D−07	−0.29938908D−07
16	10	−0.10129689D−07	0.12404473D−07
16	11	0.19053980D−07	−0.17354590D−08
16	12	0.18888013D−07	0.46949615D−08
16	13	0.15158142D−07	−0.17410596D−09
16	14	−0.19416172D−07	−0.38724225D−07
16	15	−0.14400649D−07	−0.33151819D−07
16	16	−0.40920912D−07	0.23449430D−08
17	1	−0.17492372D−07	−0.29004434D−07
17	2	−0.24972136D−07	0.52345300D−08
17	3	0.75958226D−08	0.13161951D−07
17	4	−0.35567936D−08	0.29108859D−07
17	5	−0.16440517D−07	0.15666155D−07
17	6	−0.29053420D−08	−0.41239945D−07
17	7	0.30327591D−07	−0.54652615D−08
17	8	0.26828952D−07	−0.69634040D−08
17	9	−0.74685923D−09	−0.31300568D−07
17	10	−0.10536220D−08	0.18628074D−07
17	11	−0.13049234D−07	0.13662390D−07
17	12	0.32820228D−07	0.17654374D−07
17	13	0.17049873D−07	0.19279770D−07

17	14	−0.14027974D−07	0.11214602D−07
17	15	0.56624501D−08	0.56527252D−08
17	16	−0.32153542D−07	0.33341657D−08
17	17	−0.37961677D−07	−0.17192537D−07
18	1	0.85717760D−08	−0.32887288D−07
18	2	0.11021506D−07	0.96877203D−08
18	3	−0.78128408D−08	−0.16263649D−07
18	4	0.50107239D−07	−0.35094534D−08
18	5	−0.35408518D−08	0.26790491D−07
18	6	0.12489735D−07	−0.12526195D−07
18	7	0.14813821D−07	−0.18829836D−08
18	8	0.35285229D−07	0.13368789D−08
18	9	−0.24544444D−07	0.25745394D−07
18	10	0.84106552D−09	−0.44929528D−08
18	11	−0.92784417D−08	0.11278314D−08
18	12	−0.29997564D−07	−0.13762992D−07
18	13	−0.61616779D−08	−0.34022737D−07
18	14	−0.77166667D−08	−0.13392253D−07
18	15	−0.38973604D−07	−0.20668220D−07
18	16	0.10273437D−07	0.69198054D−08
18	17	0.33491685D−08	0.54056479D−08
18	18	0.11121796D−08	−0.94806182D−08
19	1	−0.78038897D−08	−0.10955201D−07
19	2	0.32332353D−07	0.42071678D−08
19	3	−0.91228010D−08	−0.55932845D−08
19	4	0.19091610D−07	−0.12713298D−07
19	5	0.14937350D−07	0.13014332D−07
19	6	−0.80825838D−08	0.24601857D−07
19	7	0.93869167D−08	−0.65383900D−08
19	8	0.31905603D−07	−0.62494067D−08
19	9	0.54433641D−08	0.64645032D−08
19	10	−0.34557189D−07	−0.72672139D−08
19	11	0.92637732D−08	0.73094973D−08
19	12	−0.10667096D−07	0.12169099D−07
19	13	−0.81139968D−08	−0.30216212D−07
19	14	−0.54501014D−08	−0.13327961D−07
19	15	−0.18328337D−07	−0.13873813D−07
19	16	−0.23275873D−07	−0.66988140D−08
19	17	0.30387596D−07	−0.15039250D−07

19	18	0.34106265D−07	−0.76175619D−08
19	19	−0.17274425D−08	0.25989338D−08
20	1	0.59665339D−08	−0.79800572D−08
20	2	0.14911085D−07	0.16645861D−07
20	3	−0.16271296D−09	0.33562815D−07
20	4	0.94176628D−08	−0.23750287D−07
20	5	−0.11339236D−07	−0.14341921D−07
20	6	0.14119805D−07	−0.28530016D−08
20	7	−0.27298042D−07	−0.37844129D−08
20	8	0.38489401D−08	0.54767756D−08
20	9	0.20478593D−07	0.52391740D−10
20	10	−0.25203296D−07	−0.73475808D−09
20	11	0.18615023D−07	−0.20030349D−07
20	12	−0.47849719D−08	0.13733707D−07
20	13	0.26975872D−07	0.44620950D−08
20	14	0.10796764D−07	−0.12763697D−07
20	15	−0.26288771D−07	0.52729036D−09
20	16	−0.99274819D−08	−0.36128778D−09
20	17	0.43953910D−08	−0.11345533D−07
20	18	0.15890733D−07	−0.30863268D−08
20	19	−0.36173742D−08	0.10165417D−07
20	20	0.55214181D−08	−0.13903843D−07

LP165　GM＝4902.801056 km^3/s^2　a_e＝1738.0 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	−.9089018075060000E−04	.0000000000000000E+00
3	0	−.3203591400300000E−05	.0000000000000000E+00
4	0	.3197309571720000E−05	.0000000000000000E+00
5	0	−.2157038206820000E−06	.0000000000000000E+00
6	0	.3765780618660000E−05	.0000000000000000E+00
7	0	.5622211787280000E−05	.0000000000000000E+00
8	0	.2346499680120000E−05	.0000000000000000E+00
9	0	−.3555033829560000E−05	.0000000000000000E+00
10	0	−.9311407332660000E−06	.0000000000000000E+00
11	0	−.9753318167379999E−06	.0000000000000000E+00
12	0	−.1937398344200000E−05	.0000000000000000E+00
13	0	.2721141561420000E−06	.0000000000000000E+00
14	0	.3240726700950000E−06	.0000000000000000E+00

15	0	−.5300068616220000E−07	.0000000000000000E+00
16	0	.4091171538200000E−06	.0000000000000000E+00
17	0	−.1054609176910000E−05	.0000000000000000E+00
18	0	−.3845560724660000E−06	.0000000000000000E+00
19	0	−.1966435801860000E−07	.0000000000000000E+00
20	0	.5287156625770000E−06	.0000000000000000E+00
2	1	−.2722032361590000E−08	−.7575182920830000E−09
2	2	.3463549937220000E−04	.1672949053830000E−07
3	1	.2632744012180000E−04	.5464363089820000E−05
3	2	.1418817932940000E−04	.4892036500480000E−05
3	3	.1228605894470000E−04	−.1785448081640000E−05
4	1	−.5996601830150000E−05	.1661934519470000E−05
4	2	−.7081806926970000E−05	−.6783627172690000E−05
4	3	−.1362298338130000E−05	−.1344347228710000E−04
4	4	−.6025778735830000E−05	.3939637195380000E−05
5	1	−.1019195653760000E−05	−.4109254150730000E−05
5	2	.4376608114970000E−05	.1084099769880000E−05
5	3	.4497767875950000E−06	.8700841208620000E−05
5	4	.2783424136030000E−05	.5938802393300000E−07
5	5	.3119625893770000E−05	−.2760966271960000E−05
6	1	.1531984393890000E−05	−.2576600639760000E−05
6	2	−.4352218123230000E−05	−.2187448015220000E−05
6	3	−.3270051634600000E−05	−.3469143028430000E−05
6	4	.3697821857860000E−06	−.4068810656300000E−05
6	5	.1404474618350000E−05	−.1033170188970000E−04
6	6	−.4704301085460000E−05	.7236008813510000E−05
7	1	.7552259234450000E−05	−.1296522202330000E−06
7	2	−.6631948361600000E−06	.2384789067160000E−05
7	3	.5826787994770001E−06	.2355772260700000E−05
7	4	−.9266265301300000E−06	.7915736546610000E−06
7	5	−.2719477973700000E−06	.1126877878840000E−05
7	6	−.9928857241339999E−06	.1107954866840000E−05
7	7	−.1788466088650000E−05	−.1616507107160000E−05
8	1	−.6088981217920000E−07	.1112544861480000E−05
8	2	.2994777877990000E−05	.1925832475840000E−05
8	3	−.1880012181150000E−05	.9535825505100000E−06
8	4	.3373519721590000E−05	−.4560565395690000E−06
8	5	−.1125272717320000E−05	.2925714953190000E−05
8	6	−.1543301441280000E−05	−.2248184271110000E−05

8	7	—.1591465180010000E—05	.3222090972550000E—05
8	8	—.2530697259120000E—05	.2140620023560000E—05
9	1	.1980425673460000E—05	.7896372030830000E—07
9	2	.1991028324820000E—05	—.1449221144130000E—05
9	3	—.2018621239890000E—05	.2234057350360000E—05
9	4	—.1895934358830000E—05	—.1385064502050000E—05
9	5	—.1484569053750000E—05	—.3699324303180000E—05
9	6	—.2278199888880000E—05	—.3071527334340000E—05
9	7	—.4066701007940000E—05	.1112438015330000E—06
9	8	—.1241792211950000E—05	—.2128975363780000E—05
9	9	—.8972926651360000E—06	.2457973274100000E—05
10	1	.8160652991070000E—06	—.9872542654059999E—06
10	2	.2411616832230000E—06	—.2693731057550000E—06
10	3	.3965613950090000E—06	.7644820480930000E—06
10	4	—.3571289581480000E—05	.1545132947240000E—05
10	5	.7258951500910000E—06	—.3686516029930000E—06
10	6	—.1959496357290000E—06	—.1819040410420000E—05
10	7	—.3838466073530000E—05	—.8052902373150000E—06
10	8	—.3411017972900000E—05	.2582534198110000E—05
10	9	—.4785783138070000E—05	—.1225243946800000E—06
10	10	.9238929016380000E—06	—.1702128574050000E—05
11	1	—.1203799652080000E—06	.6173266667270000E—06
11	2	.7426226109460000E—06	—.1942686167330000E—05
11	3	.4257220709970000E—06	.7909629921760000E—06
11	4	—.9539676434430001E—06	.2130971124690000E—05
11	5	.1524913492910000E—06	.2561492060700000E—05
11	6	.4865214681670000E—06	—.1359116333550000E—05
11	7	—.7139970510720001E—07	—.3162700313200000E—05
11	8	—.2233134538440000E—05	—.4713142784160000E—06
11	9	—.2435260078030000E—05	.4904209545970000E—06
11	10	—.4706932854420000E—05	—.1473099267880000E—06
11	11	—.2889982063860000E—05	—.1740752542340000E—05
12	1	—.5840281328970000E—06	.1600803415350000E—05
12	2	—.1559756907250000E—06	.1507492473180000E—05
12	3	.8176232978290000E—06	—.4016586322740000E—05
12	4	.9200105654750000E—06	—.5116840362370000E—06
12	5	—.1613291576740000E—06	.8527110768970000E—06
12	6	.8663826957830000E—06	.6962375776900000E—06
12	7	.2177719876460000E—05	—.8594204978010000E—06

12	8	.4644822522870000E−06	−.1931266868990000E−05
12	9	−.1275699709060000E−05	.1099264569920000E−05
12	10	−.3051832609090000E−05	−.1407867333810000E−05
12	11	−.8820185953780000E−06	−.2938683597320000E−06
12	12	.3241211015000000E−06	.1220662771710000E−05
13	1	.1124374627630000E−05	−.1052120815490000E−06
13	2	−.3525023069470000E−05	.5102794043790000E−06
13	3	−.3150182721000000E−06	−.1479723660330000E−05
13	4	.8326676975230000E−06	−.6892403004050000E−06
13	5	−.1337547583460000E−05	.1314298665750000E−05
13	6	.1326377626870000E−06	.1552649198560000E−05
13	7	.1355060596540000E−06	−.9776914266179999E−06
13	8	−.3350336778860000E−06	−.1485146656430000E−05
13	9	−.2907586170900000E−06	.3899815898970000E−06
13	10	−.6121863430540000E−06	.5600355713980000E−06
13	11	−.1258454356380000E−05	.4401012500280000E−06
13	12	−.7419750516520000E−06	−.1598312733260000E−05
13	13	.2473266154300000E−05	−.2645625441230000E−05
14	1	.6605886153930000E−06	−.6102080115560000E−06
14	2	.5237129141790000E−06	.3893599535420000E−06
14	3	.6761555983020000E−06	.2699002370410000E−07
14	4	−.4055805840340000E−06	−.2587974145560000E−05
14	5	−.8820159199920000E−06	−.1152684066890000E−06
14	6	−.5168935258780000E−06	.1493864899430000E−05
14	7	−.6698062571250000E−06	.8749406071470000E−06
14	8	.2056416633160000E−07	.8920163207590000E−06
14	9	.1741653826860000E−06	−.1213280253010000E−05
14	10	−.6611552322000000E−06	.5558230274330000E−06
14	11	−.2180453219110000E−05	.1765626024610000E−05
14	12	−.1528712322610000E−05	−.4686885744510000E−06
14	13	−.1161871319260000E−06	−.9512518551550000E−06
14	14	−.5993342422150000E−06	.1085405659060000E−05
15	1	−.7720237886770000E−06	.3416825217100000E−06
15	2	−.1734087692300000E−06	.7107531875800000E−06
15	3	−.1328024730080000E−05	−.7072224883850000E−06
15	4	−.1122880254730000E−05	−.1287530690790000E−05
15	5	−.1578202291340000E−06	−.7717380981580000E−06
15	6	.5016702309120000E−07	−.3322975407980000E−06
15	7	.1155400728180000E−05	.1852235408190000E−05

15	8	.1495030529990000E−05	.2243594932260000E−05
15	9	.1020601945100000E−06	−.1551459288920000E−05
15	10	−.2733730968390000E−06	−.5146112634660000E−07
15	11	−.1470527070930000E−05	−.1347845965970000E−05
15	12	−.1315958044460000E−05	−.3397817428330000E−06
15	13	−.3415724782220000E−06	.3040255512600000E−06
15	14	.6412529709410000E−06	.5481518253720000E−06
15	15	.5484614417000000E−06	.7010126995500000E−06
16	1	−.9730736334240000E−07	.8760174976920000E−06
16	2	.1649803094150000E−05	.3447923814940000E−07
16	3	−.1028543757360000E−06	.4279054459510000E−06
16	4	.4759886265690000E−06	.4784594724110000E−06
16	5	.9327815906229999E−06	−.5278125821530000E−06
16	6	.1038815565900000E−05	−.1023391217820000E−05
16	7	−.3509818646270000E−06	−.7329585679150000E−06
16	8	−.1209647724210000E−06	.3061781356220000E−07
16	9	−.1024878692720000E−05	−.1175313551420000E−05
16	10	.2041068982310000E−06	.5738832768160000E−06
16	11	.4353588214120000E−07	.1142697506150000E−05
16	12	−.1370427536750000E−05	.7981123576490000E−06
16	13	−.7515455438780000E−06	−.1582987773040000E−06
16	14	−.6985530034730000E−06	−.3951607972970000E−07
16	15	−.2725916962020000E−06	−.1055944928880000E−05
16	16	−.9090919669600000E−06	−.7862566594060000E−06
17	1	.8001655103230000E−06	.8782566135379999E−07
17	2	−.1712007938030000E−06	−.1044625395330000E−05
17	3	−.2171003772770000E−06	−.5318728899250000E−06
17	4	.1160294301800000E−05	.2208046994200000E−05
17	5	.3987135221710000E−06	−.8546560303970000E−06
17	6	.6100249367180000E−06	−.1495046622310000E−05
17	7	−.1625341936850000E−05	−.1107516297980000E−05
17	8	−.2118351672660000E−06	−.1518974822660000E−06
17	9	.5294629225970000E−06	.1560931339170000E−05
17	10	.7207737799020000E−06	.8858944398520000E−06
17	11	.9778883897600000E−06	−.6317056739230000E−06
17	12	.4578423147650000E−06	.5004761917360000E−07
17	13	.1526580059470000E−06	−.3422108737150000E−06
17	14	.9390029879520000E−06	.1431458214660000E−06
17	15	−.7398523706930000E−07	.1442972353860000E−07

17	16	—.2779658584330000E—06	—.2124792147220000E—06
17	17	—.4026973925480000E—06	.1352327272470000E—05
18	1	.1926985450180000E—06	—.5716667989280000E—07
18	2	—.4151803997590000E—06	—.7264058323630000E—06
18	3	.8788234066590000E—06	.5810458034470000E—06
18	4	—.8002493519270000E—06	.1146864632710000E—05
18	5	—.3246103503840000E—06	—.2858696150670000E—07
18	6	—.1762576111470000E—05	.9779780361339999E—06
18	7	—.1428877959440000E—06	—.8132546628140000E—06
18	8	.6678620054120000E—06	—.2270994680460000E—06
18	9	.5781241734200000E—06	—.1086143171510000E—05
18	10	.1626016781020000E—06	—.6413377613150000E—06
18	11	.1190190743410000E—06	—.1444990699210000E—05
18	12	.1162238473580000E—05	.4620652564480000E—06
18	13	—.7025354729210000E—06	—.2565078450200000E—06
18	14	—.1817876603890000E—06	—.6252496023590000E—06
18	15	—.8722606631480000E—07	—.8552186526090001E—06
18	16	.8724747507420000E—06	—.9751565128220000E—06
18	17	.1081594958580000E—05	—.4332237965390000E—06
18	18	—.1373957205930000E—06	—.1686674948910000E—06
19	1	—.4962928104700000E—06	.1917539727470000E—06
19	2	.3651286187540000E—06	—.3673868976850000E—06
19	3	—.8249886032800000E—06	.9885468299320000E—06
19	4	—.8331456066520000E—06	—.1037532326060000E—05
19	5	—.3714267370040000E—07	.1324756958540000E—05
19	6	—.3679863543070000E—07	.3340065002820000E—06
19	7	.1112462470960000E—05	.3538153590430000E—06
19	8	.5104515087760000E—06	.5192526970870000E—06
19	9	—.1241929032180000E—06	.6804512884750001E—07
19	10	—.7518310037950000E—06	.2782982975350000E—06
19	11	.1576977903700000E—06	—.1512294300270000E—06
19	12	.1010532037040000E—06	—.2539218556640000E—06
19	13	.3236778837630000E—06	.2241057468460000E—05
19	14	—.5106295327520000E—06	.9103019298270000E—06
19	15	.2707786692730000E—06	—.8208149539350000E—06
19	16	—.9938800617160001E—08	.5428874480650000E—06
19	17	—.9249821463870000E—06	—.1061551211170000E—05
19	18	.1295087300260000E—05	—.1808490986950000E—06
19	19	.4720716663120000E—06	.3193301283800000E—06

20	1	.3894448791540000E−07	−.4924662151670000E−06
20	2	.5320781393890000E−06	−.9724343925050000E−07
20	3	.4795674989210000E−06	−.1013862739060000E−06
20	4	.7911426889650000E−06	−.5826422488420000E−06
20	5	.1032475949640000E−06	−.4802322718710000E−06
20	6	−.4967702461450000E−06	.6156993178970000E−06
20	7	−.5917336942650000E−06	−.5440186106280000E−06
20	8	.4394005454530000E−06	.7440623649730000E−07
20	9	−.8740155543430000E−07	.4561833749100000E−06
20	10	.2363632395670000E−06	−.3577749840430000E−06
20	11	.1078498413240000E−06	.6724504086650000E−06
20	12	.4238152938270000E−07	−.9979542738770000E−06
20	13	.7649646933020000E−06	.6510063091450000E−06
20	14	.2532428383590000E−06	−.1196064334020000E−06
20	15	−.1514037158300000E−06	−.3487143338680000E−06
20	16	.8958333299660000E−06	.5275250186460000E−06
20	17	.9625883397650000E−06	−.1247076248830000E−05
20	18	.5334360431180000E−06	−.6462366596580000E−06
20	19	−.2960788071070000E−06	.5625790924100000E−06
20	20	.2891714060370000E−07	−.3845058951180000E−06

LP75G　GM＝4902.800269 km^3/s^2　a_e＝1738.0 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	−9.097597054210000E−005	0.000000000000000E+000
3	0	−3.183542106800000E−006	0.000000000000000E+000
4	0	3.178911477220000E−006	0.000000000000000E+000
5	0	−2.598128665700000E−007	0.000000000000000E+000
6	0	3.862362237690000E−006	0.000000000000000E+000
7	0	5.673730303420000E−006	0.000000000000000E+000
8	0	2.350818244330000E−006	0.000000000000000E+000
9	0	−3.459677611820000E−006	0.000000000000000E+000
10	0	−1.162187595170000E−006	0.000000000000000E+000
11	0	−1.122060225360000E−006	0.000000000000000E+000
12	0	−1.993940508440000E−006	0.000000000000000E+000
13	0	5.335673682490000E−008	0.000000000000000E+000
14	0	6.529893913960000E−007	0.000000000000000E+000
15	0	1.379472017340000E−007	0.000000000000000E+000
16	0	6.140345051670000E−007	0.000000000000000E+000

17	0	−7.316768211000000E−007	0.000000000000000E+000
18	0	−7.963555191070000E−007	0.000000000000000E+000
19	0	−1.708184071290000E−007	0.000000000000000E+000
20	0	1.889746863020000E−007	0.000000000000000E+000
2	1	−2.787424863160000E−008	1.346500394100000E−008
2	2	3.469384675580000E−005	3.874557098790000E−009
3	1	2.640550219430000E−005	5.433798078170000E−006
3	2	1.425486482600000E−005	4.873210144190000E−006
3	3	1.231660825460000E−005	−1.762221618120000E−006
4	1	−5.957953926760000E−006	1.580416408210000E−006
4	2	−7.126854293940000E−006	−6.703750167050000E−006
4	3	−1.426159152840000E−006	−1.341306955010000E−005
4	4	−6.058053501810000E−006	3.932360886960000E−006
5	1	−9.706725251770001E−007	−4.092759279110000E−006
5	2	4.327085115670000E−006	1.180489184620000E−006
5	3	4.704928178100000E−007	8.581592621140000E−006
5	4	2.867118598810000E−006	5.436530651620000E−009
5	5	3.153796293720000E−006	−2.732379244810000E−006
6	1	1.606770785950000E−006	−2.609838782330000E−006
6	2	−4.428366933000000E−006	−2.224562307790000E−006
6	3	−3.181276672490000E−006	−3.597443010970000E−006
6	4	3.385214865400000E−007	−3.877510759460000E−006
6	5	1.320671642850000E−006	−1.026635800450000E−005
6	6	−4.724599832850000E−006	7.158528514860000E−006
7	1	7.402394498450000E−006	−7.391355640760000E−008
7	2	−7.886758626890000E−007	2.463355780280000E−006
7	3	6.313586687910000E−007	2.402631664010000E−006
7	4	−1.041115234040000E−006	9.433175866000000E−007
7	5	−1.904117763140000E−007	7.744473376149999E−007
7	6	−9.410796162420000E−007	9.627107226450000E−007
7	7	−1.798733612810000E−006	−1.499673891900000E−006
8	1	−1.263665574520000E−007	1.224588885430000E−006
8	2	3.080413650600000E−006	1.795771324480000E−006
8	3	−1.716144309890000E−006	8.710748131120000E−007
8	4	3.378218792540000E−006	−6.488694738840000E−007
8	5	−1.028981501020000E−006	2.693995119970000E−006
8	6	−1.715973337390000E−006	−1.666664637720000E−006
8	7	−1.567877284290000E−006	3.461847890700000E−006
8	8	−2.495616144060000E−006	1.959047270730000E−006

9	1	1.827344344790000E－006	－6.868306544890000E－009
9	2	2.047258759110000E－006	－1.574281578320000E－006
9	3	－2.045366543490000E－006	2.385501163000000E－006
9	4	－2.095433476750000E－006	－1.326347834400000E－006
9	5	－1.576167343320000E－006	－3.263541895340000E－006
9	6	－2.293056533220000E－006	－2.709252928600000E－006
9	7	－3.811433323860000E－006	－7.721245997770000E－007
9	8	－1.322550367020000E－006	－2.489325281490000E－006
9	9	－9.265323286480000E－007	2.680076538770000E－006
10	1	6.116292813110000E－007	－8.630213931860000E－007
10	2	4.703876511630000E－007	－1.997850659170000E－007
10	3	3.463288315010000E－007	8.825761251030000E－007
10	4	－3.554771394730000E－006	1.366165394590000E－006
10	5	9.927541901910001E－007	－4.208394352740000E－007
10	6	－1.831950698460000E－008	－2.581898846260000E－006
10	7	－3.943633160490000E－006	－1.370087446170000E－006
10	8	－3.702174394320000E－006	3.727484309750000E－006
10	9	－4.643303532260000E－006	3.117782321540000E－007
10	10	9.348219821670000E－007	－1.930224356780000E－006
11	1	8.946547434720000E－008	5.371169857310000E－007
11	2	1.025667863810000E－006	－2.131111244030000E－006
11	3	2.427240922300000E－007	7.111486883020000E－007
11	4	－8.752650228640000E－007	1.985331681500000E－006
11	5	9.732230132490000E－008	2.801003812590000E－006
11	6	1.176616474500000E－007	－1.293291028030000E－006
11	7	－3.011692192540000E－007	－2.092922413220000E－006
11	8	－1.949052474150000E－006	2.788973351950000E－007
11	9	－2.206214561910000E－006	－7.977445728960000E－007
11	10	－4.855748008210000E－006	－5.486507891650000E－007
11	11	－2.896682159260000E－006	－1.547569525170000E－006
12	1	－5.501398554130000E－007	1.535800205670000E－006
12	2	－1.715770107430000E－007	1.719478809850000E－006
12	3	5.246725904510000E－007	－3.821881117670000E－006
12	4	9.542920939870000E－007	－3.007893532040000E－007
12	5	－2.450273448510000E－007	1.123098819770000E－006
12	6	9.829088190369999E－007	2.941920930520000E－007
12	7	2.699319958030000E－006	－9.854500468790000E－007
12	8	6.782920624260000E－007	－3.205489384850000E－006
12	9	－1.696618819270000E－006	2.570470446200000E－007

12	10	−3.125085022600000E−006	−1.686092977550000E−007
12	11	−7.784133460800000E−007	−9.871814240119999E−009
12	12	3.106689225440000E−007	1.103716129670000E−006
13	1	1.477359737450000E−006	5.766168565050000E−008
13	2	−3.451114376760000E−006	5.365380488970000E−007
13	3	−4.619521847910000E−007	−1.738600624270000E−006
13	4	1.187601134430000E−006	−8.504962826020000E−007
13	5	−1.241052452730000E−006	8.318507177180000E−007
13	6	2.290357668000000E−007	1.085895206310000E−006
13	7	−4.682825496200000E−008	−3.480665940930000E−007
13	8	−9.926979393150000E−007	−1.306760208750000E−006
13	9	−4.114971456270000E−007	1.678111585610000E−006
13	10	−1.520296417610000E−007	1.390932173800000E−006
13	11	−1.394024383430000E−006	−5.447817921810000E−007
13	12	−7.196726900810000E−007	−1.701517968470000E−006
13	13	2.433631425560000E−006	−2.592383720590000E−006
14	1	1.063949855330000E−006	−6.742021381690000E−007
14	2	1.559510526380000E−007	2.207155062590000E−007
14	3	6.027377909510000E−007	6.413136072350000E−008
14	4	−2.487079324090000E−007	−2.358910619360000E−006
14	5	−1.325704609190000E−006	3.248680973010000E−009
14	6	−7.442441847439999E−007	2.267092652960000E−006
14	7	−7.292098010560000E−007	1.523152513680000E−006
14	8	2.041927938460000E−007	3.026388320070000E−008
14	9	9.029774379850000E−007	−1.381225572410000E−006
14	10	−6.981579446990000E−007	−5.496705374189999E−007
14	11	−2.455109480300000E−006	1.083393371820000E−006
14	12	−1.230737639500000E−006	1.434183631130000E−007
14	13	−3.270665412180000E−007	−1.032520774770000E−006
14	14	−4.763166024390000E−007	1.086977920810000E−006
15	1	−9.713279025940000E−007	4.644258822240000E−007
15	2	−4.674531429950000E−007	8.707120384330000E−007
15	3	−1.164582241810000E−006	−6.088006166490000E−007
15	4	−1.014253496160000E−006	−1.349478331290000E−006
15	5	−2.422389629580000E−007	−1.061034856260000E−006
15	6	6.345010679490000E−007	−4.989180134420000E−007
15	7	1.427662298150000E−006	8.557585022180000E−007
15	8	1.484821403180000E−006	1.544412821940000E−006
15	9	2.410633974770000E−008	−5.474118368990000E−007

15	10	−9.459274331500000E−007	−4.984830869090000E−008
15	11	−1.216697224930000E−006	−5.684071832849999E−007
15	12	−1.415292711500000E−006	1.170851358090000E−007
15	13	−6.750529508580000E−007	6.000369232800000E−008
15	14	1.039464251220000E−006	7.507875241750000E−007
15	15	3.217120901060000E−007	6.905878057970000E−007
16	1	−2.966737905840000E−008	1.017332644500000E−006
16	2	1.522319779360000E−006	−3.181030630430000E−007
16	3	1.653645873710000E−007	2.635500419510000E−007
16	4	5.744319590950000E−007	3.300713522970000E−007
16	5	8.245193183690000E−007	−6.033196517710000E−007
16	6	1.019209768250000E−006	−5.503186120820000E−007
16	7	−1.082386641560000E−006	−4.495745603280000E−007
16	8	−3.529278174590000E−007	1.068382023240000E−006
16	9	−9.268755534280000E−007	−6.175857389340000E−007
16	10	1.178507322640000E−007	−3.881971183090000E−007
16	11	5.546113088210000E−007	1.455075442250000E−006
16	12	−1.834005752320000E−006	3.274964935070000E−007
16	13	−1.988747933720000E−007	−3.296652824070000E−007
16	14	−4.965531737870000E−007	−3.712659845400000E−008
16	15	−7.883382608060000E−007	−1.326760250960000E−006
16	16	−5.938689575020000E−007	−7.858535195810000E−007
17	1	2.116559218210000E−007	−1.190591471390000E−007
17	2	−3.549486846610000E−007	−1.115635275870000E−006
17	3	5.197204163200000E−008	−1.210909303430000E−007
17	4	8.836361551490000E−007	2.240086563630000E−006
17	5	1.055900798740000E−007	−5.195236097080000E−007
17	6	7.363185473490000E−007	−1.251820263630000E−006
17	7	−1.520746883900000E−006	−1.813716175420000E−006
17	8	6.284613401890000E−007	−6.051678014250000E−007
17	9	6.356542902110000E−007	6.626604176420000E−007
17	10	6.195314272340000E−007	6.260186836820000E−007
17	11	1.253099734610000E−006	4.939021677260000E−008
17	12	9.979679578560000E−008	−6.041320066530000E−007
17	13	7.849882868210000E−007	−4.913399499440000E−008
17	14	4.774119119030000E−008	1.316907252090000E−011
17	15	−6.179483059800000E−009	6.673786720910000E−008
17	16	2.139917003930000E−007	6.985513243050000E−008
17	17	−7.340569301230000E−007	1.351921622940000E−006

18	1	−2.939232877460000E−007	−1.791992442250000E−008
18	2	3.681712787890000E−009	−5.929323923170000E−007
18	3	1.084604643740000E−006	4.663708035090000E−007
18	4	−1.006311344380000E−006	8.155933224190000E−007
18	5	1.717142658860000E−008	5.559148378050000E−008
18	6	−1.408664071770000E−006	4.946770506740000E−007
18	7	−2.757287337310000E−007	−1.114277332090000E−006
18	8	5.462196177760000E−007	6.098271645140000E−007
18	9	−2.034141170980000E−007	−5.046815098170000E−007
18	10	1.672836017330000E−007	−7.622638600300000E−008
18	11	4.350337243880000E−008	−1.526119695270000E−006
18	12	7.774209116990000E−007	2.408929716530000E−007
18	13	−4.026890051440000E−007	6.004928791050000E−007
18	14	−8.713336036350000E−007	−9.151280313240000E−007
18	15	8.739223611600000E−007	−4.021844559160000E−007
18	16	5.145610403190000E−007	−9.775415631200001E−007
18	17	7.122549200460000E−007	−7.375357702700000E−007
18	18	1.364298238910000E−007	−1.478974106020000E−007
19	1	−4.265413225510000E−007	−2.041403943800000E−008
19	2	7.010992519180000E−007	−5.580989492460000E−007
19	3	−8.761222234600000E−007	1.048198452360000E−006
19	4	−9.989769320870001E−007	−8.972057276190000E−007
19	5	−3.292151518360000E−008	1.636334136940000E−006
19	6	−4.011072109200000E−007	2.950857546570000E−007
19	7	7.738210212440000E−007	8.309818024120000E−007
19	8	7.184985595650000E−007	7.480782315700000E−007
19	9	−9.134694145010000E−008	−7.571692502990000E−007
19	10	−1.891924925940000E−007	−2.718354981470000E−007
19	11	8.044955022190001E−008	−3.113635924590000E−007
19	12	5.075880835970000E−007	7.163969571360000E−008
19	13	7.090964086380000E−007	1.973524917850000E−006
19	14	−8.946883113090000E−007	6.690756371569999E−008
19	15	8.930503522890000E−007	−4.410896054100000E−007
19	16	−7.607906575750000E−007	−1.596182288620000E−007
19	17	−3.563976685460000E−007	−1.121314888990000E−006
19	18	1.518471790690000E−006	1.315961885150000E−007
19	19	3.178441090500000E−007	2.401289733060000E−007
20	1	−1.596363355050000E−007	−6.205105103550000E−007
20	2	8.877093528550000E−007	4.117266397190000E−007

20	3	2.781341386780000E−007	5.538790777980000E−010
20	4	5.385796471500000E−007	−6.530311998320000E−007
20	5	2.962904638650000E−007	−5.250884408670000E−007
20	6	−3.660316802120000E−007	2.181956908420000E−007
20	7	−1.871961196030000E−007	−6.580656007390000E−007
20	8	6.823427686450000E−007	−2.353013521360000E−007
20	9	−4.058612997790000E−007	3.971438264710000E−007
20	10	3.884981434910000E−007	3.129934747400000E−007
20	11	−1.439095038700000E−007	1.078642232210000E−006
20	12	1.589228718740000E−007	−1.186388378930000E−006
20	13	2.484273599290000E−008	2.480106254130000E−007
20	14	−4.385086058210000E−008	4.421067147560000E−007
20	15	3.503010708860000E−007	2.635021152700000E−007
20	16	4.665475637160000E−007	9.217077117479999E−008
20	17	1.335401996820000E−006	−4.573369436020000E−007
20	18	−6.938845157080000E−008	−6.261993566860000E−007
20	19	−4.652085498200000E−007	2.595654913560000E−007
20	20	5.409545735560000E−008	−2.122709255110000E−007

第 1 章　航天器运动的轨道几何

要清楚地描述航天器的运动及其与观测者之间的联系，首先要确定参考系，在一定的参考系中去体现航天器的空间位置和运动速度及其与观测者之间的相对几何关系. 因此，作为本书的开场白，在这一章中将要阐述的基本内容是参考系（时间系统，空间坐标系及相关参数）、空间观测几何（航天器和观测者的几何位置及相关问题）、航天器的视运动以及星下点轨迹等问题.

§1.1　时间系统

考察运动，需要一种均匀的时间尺度. 过去，这种均匀的时间尺度是以地球自转为基准的. 由于地球自转的不均匀性和测量精度的不断提高，上述均匀时间尺度已不适应；但由于种种原因，又必须将时间与地球自转相协调，这就导致了时间系统的复杂化.

现行的时间系统基本上分为四种：恒星时、世界时、历书时和原子时. 前两种都是根据地球自转测定的，历书时则是根据地球、月亮和行星的运动来测定的，而原子时是以原子的电磁振荡作为标准的，下面将对这些时间系统作一简单介绍[1,2].

1. 恒星时（ST）

春分点连续两次过中天的时间间隔称为一“恒星日”. 那么，恒星时就是春分点的时角，它的数值 S 等于上中天恒星的赤经 α，即

$$S = \alpha. \tag{1.1}$$

这是经度为 λ 的地方恒星时. 与世界时密切相关的格林尼治恒星时 S_G 由下式给出：

$$S_G = S - \lambda. \tag{1.2}$$

经度 λ 规定向东计量. 格林尼治恒星时又有真恒星时（或称视恒星时）

GAST 与平恒星时 GMST 之分. 既然恒星时是由地球自转时角所确定的，那么地球自转的不均匀性就可通过它与均匀时间尺度的差别来测定.

格林尼治恒星时主要是在空间坐标系的转换中用到，其内容将在下面有关部分中介绍.

2. 世界时(UTC)

与恒星时相同，世界时也是根据地球自转测定的时间，它以平太阳日为单位，1/86400 平太阳日为秒长. 事实上，测定太阳的精度远低于测定恒星的精度，因此，世界时是通过对恒星观测测定的恒星时再根据两种时间的定义转换而给出的.

根据天文观测直接测定的世界时，记为 UT0，它对应于瞬时极的子午圈. 加上引起测站子午圈位置变化的地极移动(即地球自转轴在地球体内的移动)修正，就得到对应于平均极的子午圈的世界时，记为 UT1，即

$$\mathrm{UT1} = \mathrm{UT0} + \Delta\lambda. \tag{1.3}$$

$\Delta\lambda$ 是极移改正量.

由于地球自转的不均匀性，UT1 并不是均匀的时间尺度. 而地球自转不均匀性呈现三种特性：长期慢变化(每百年使日长增加 1.6 毫秒)，周期变化(主要是季节变化，一年里日长约有 $0^{\mathrm{s}}.001$ 的变化；除此之外，还有一些影响较小的周期变化)和不规则变化，这三种变化不易修正. 而 UT1 又直接与地球瞬时位置相联系，因此，对于精度要求不高的问题，就可用 UT1 作为统一的时间系统；而对于高精度的要求，必须寻求更均匀的时间尺度，即下面要介绍的原子时.

3. 历书时(ET)

由于世界时不能作为均匀的时间尺度，经数次天文会议讨论决定，从 1960 年起曾引入一种以太阳系内天体公转为基准的均匀时间系统，称为历书时(ET)，1960 年到 1967 年期间，它是世界公认的计时标准.

历书时的定义：1900 年 1 月 0 日历书时 12^{h} 瞬间的回归年长度的 31556925.9747 分之一为一历书秒；起算历元为 1900 年初太阳平黄经等于 $279°41'48''.04$ 的时刻，也就是纽康(Newcomb)原先选定的 1900 年 1 月 0 日格林尼治平午时刻，现在把它作为 1900 年 1 月 0 日历书时 12^{h}.

历书时是一种由力学定律确定的均匀时间，它是太阳、月亮和行星运动理论中的独立变量，同时也是这些基本历表的时间引数. 某一时刻的历书时可以通过对太阳、月亮或行星的观测来得到，而最有效的方法是观测月亮.

但对建立一个均匀时间尺度而言，其观测精度仍嫌不够，而且要得到这样的时间又很慢．因此，1967 年后，计时标准转向原子时，它有更高的精度，而且随时可以直接求得．不过在这期间，历书时仍然作为一个天文常数被保留下来，从 1984 年开始，历书时才完全被原子时所代替．

4．国际原子时（TAI）与地球动力学时（TDT）和质心动力学时（TDB）

这是一种标准频率．1967 年 10 月，第十三届国际计量大会决定引入新的秒长定义，即铯原子 Cs^{133} 基态的两能级间跃迁辐射的 9192631770 周所经历的时间作为一秒的长度，称为国际单位秒（SI）．由这种时间单位确定的时间系统称为国际原子时（TAI）．

因原子时（TAI）是以地心参考系中定义的具有国际单位制秒长的坐标时间基准，它就可以作为动力学中所要求的均匀时间尺度．由此引入一种地球动力学时（TDT），它与原子时（TAI）的关系为

$$\mathrm{TDT} = \mathrm{TAI} + 32^{\mathrm{s}}.184. \tag{1.4}$$

这一关系是根据 1977 年 1 月 1 日 $00^{\mathrm{h}}00^{\mathrm{m}}00^{\mathrm{s}}$（TAI）对应的 TDT 为 1977 年 1 月 $1^{\mathrm{d}}.0003725$ 而来，此起始历元的差别就是该时刻历书时与原子时的差别．这样定义起始历元就便于用 TDT 系统代替 ET 系统．TDT 是地心时空标架的坐标时，用作视地心历表的独立变量．在人造地球卫星动力学中，它就是一种均匀时间尺度，相应的运动方程即用它作为自变量，通常以 t 表示．从 1984 年起，历书时正式被地球力学时所取代．

除此之外，还定义一种质心动力学时 TDB，即太阳系质心时空标架的坐标时．它是一种抽象、均匀的时间尺度，月球、太阳和行星的历表都是以 TDB 为独立变量的，岁差、章动的计算公式也是以该时间尺度为依据．

上述两种动力学时的差别 TDB－TDT 是由相对论效应引起的，根据相对论原理，转换公式为

$$\mathrm{TDB} = \mathrm{TDT} + 0^{\mathrm{s}}.001658\sin g + 0^{\mathrm{s}}.000014\sin 2g. \tag{1.5}$$

该式略去了高阶项，g 为地球绕日轨道的平近点角．

5．协调世界时（UTC）

用原子钟控制时号发播可得到稳定的时号，但由于原子时秒长比世界时秒长略短，世界时时刻将日益落后于原子时；而有很多问题涉及到计算地球的瞬时位置，这又需要 UT1．因此，为了避免发播的原子时与世界时产生过大的偏离，实际的时号发播是寻求 TAI 与 UT1 之间的一种协调，称为协调世界时（UTC）．

UTC 是一种均匀时号，它依据原子时，却又参考世界时，从 1972 年起，UTC 用原子时秒长发播，但要求它与 UT1 之差不超过 $0^s.9$. 为达到此目的，必须调整 UTC 的整秒数，规定只在 1 月 1 日或 7 月 1 日将原子钟拨慢 1 秒，这就是所谓的闰秒，在引用 UTC 时必须注意这一点. 到目前(2004 年 12 月)为止，已调整过 32^s，即 $\mathrm{UTC}=\mathrm{TAI}-32^s$.

除上述时间系统外，在计算中常常会遇到历元的取法以及几种年的长度问题，这里顺便作一介绍. 一种是贝塞耳(Bessel)年，或称假年，其长度为平回归年的长度，即 365.2421988 平太阳日. 常用的贝塞耳历元，是指太阳平黄经等于 280°的时刻，例如 1950.0，并不是 1950 年 1 月 1 日 0 时，而是 1949 年 12 月 31 日 $22^h09^m42^s$（世界时），相应的儒略(Julian)日为 2433282.4234. 另一种是儒略年，其长度为 365.25 平太阳日，儒略历元就是指真正的年初，例如 1950.0，即 1950 年 1 月 1 日 0 时. 显然，引用儒略年较为方便，因此，从 1984 年起，贝塞耳年被儒略年所代替. 两种历元之间的对应关系列于表 1.1.

表 1.1　贝塞耳历元和儒略历元之间的关系

贝塞耳历元	儒略历元	儒略日
1900.0	1900.000858	2415020.3135
1950.0	1949.999790	2433282.4234
2000.0	1999.998722	2451544.5333
1899.999142	1900.0	2415020.0
1950.000210	1950.0	2433282.5
2000.001278	2000.0	2451545.0

为了方便，常用修改的儒略日(亦称简约儒略日，记作 MJD)，定义为

$$\mathrm{MJD} = \mathrm{JD} - 2400000.5. \tag{1.6}$$

例如 J1950.0 的 MJD=33282.0.

与上述两种年的长度对应的回归世纪(即 100 年)和儒略世纪的长度分别为 36524.22 平太阳日和 36525 平太阳日.

§1.2　空间坐标系

定义一个空间坐标系应包含三个要素：坐标原点，参考平面(xy 平面)和参考平面上的主方向(x 轴方向). 对于航天器的运动而言，以地球卫星为例，所涉及到的主要是地心天球坐标系和地固坐标系，它们的坐标原点都是

地心，这一点并无问题. 但参考平面及其主方向的选择，将会受到岁差章动和地极移动的影响. 空间坐标系的复杂性正是由岁差章动和地极移动等原因所引起的.

日、月和大行星对地球非球形部分的吸引，会产生两种效应：一是作为刚体平动的力效应，主要是月球对地球扁球部分的作用，将引起一种地球扁率间接摄动；另一种就是作为刚体定点转动的力矩效应，使地球像陀螺那样，出现进动与章动，即自转轴在空间的摆动，这就是岁差章动. 由于岁差章动，地球赤道面亦随时间在空间摆动；另外，由地球内部和表面物质运动引起的地球自转轴在其内部的移动（极移），都将影响坐标系中参考平面的选取.

基于上述原因，根据不同要求，就出现了各种空间坐标系统. 下面介绍与卫星运动有关的几种空间坐标系以及它们之间的转换关系.

1. 六种地心赤道坐标系[3,4]

这几种坐标系的定义见表 1.2. 人造地球卫星绕地球运动，其瞬时轨道面是通过地球质量中心（简称地心）的，因此在研究它的运动规律时，很自然地要引进地心坐标系. 但是，在人造卫星上天前，人们只能依靠传统的大地测量方法给出所谓的参考椭球体，其中心并不是地心，而人造卫星上天后，用卫星动力测地方法才给出了真正的地心参考系. 当然，尽管测量精度越来越高，但所测得的地心仍然是近似的，根据目前的结果，地心位置精度为厘米级.

表 1.2　六种地心赤道坐标系的定义

坐标系	原点	参考平面	x 轴方向	位置矢量
历元平赤道地心系	地心	历元平赤道	指向该历元的平春分点	$\boldsymbol{r}$
瞬时平赤道地心系	地心	瞬时平赤道	指向瞬时平春分点	$\boldsymbol{r}_m$
瞬时真赤道地心系	地心	瞬时真赤道	指向瞬时真春分点	$\boldsymbol{r}_t$
轨道坐标系	地心	瞬时真赤道	指向某历元的平春分点	$\boldsymbol{r}'$
准地固坐标系	地心	瞬时真赤道	参考平面与格林尼治子午线的交线方向	$\boldsymbol{R}_t$
地固坐标系	地心	与地心和 CIO 连线正交之平面	参考平面与格林尼治子午线的交线方向	$\boldsymbol{R}$

表 1.2 中给出的六种地心赤道坐标系分别适用不同的问题. 在当今的精密定轨问题中，通常采用 J2000.0 历元（称为标准历元），J2000 平赤道地

心系，亦简称为 J2000 地心天球坐标系. 而在空间目标监测中，由于某种原因，一些相关单位仍采用混合型的轨道坐标系.

关于轨道坐标系，这里有必要进一步作些说明. 在很多工作中，采用分析法计算卫星轨道的变化是方便的. 对于这种方法，若引用历元平赤道地心系（亦称历元地心天球坐标系），那么由于岁差章动导致地球赤道面在空间摆动，从而引起地球引力场位函数的变化，使卫星轨道增加一种附加摄动（亦称坐标系摄动），随着计算时刻与选取历元之间的间隔增长而增大，这将给定轨问题带来麻烦. 若引用瞬时真赤道地心系，虽然地球引力场位函数基本不变，但它是运动坐标系，需增加一项惯性力，这也是一种坐标系摄动，尽管它比上述附加摄动小（主要是由春分点移动对应的赤经岁差章动 $\mu+\Delta\mu$ 所引起的），但仍嫌不便. 鉴于上述两种坐标系的优缺点，在定轨及其有关工作中曾采用一种混合地心系，即参考平面为瞬时真赤道面，而 x 轴是指向某标准历元（如 1950.0 或 2000.0）的平春分点（该点实为瞬时赤道上的一个"假想"点，在真春分点以东 $\mu+\Delta\mu$ 处，赤经岁差和章动 $\mu+\Delta\mu$ 的计算公式后面将会给出），这就是表 1.2 所列出的轨道坐标系. 在此坐标系中，附加摄动很小，对于一般的精度要求，可完全忽略，故在后面第 4 章讨论地球非球形引力摄动时，不再考虑赤道面摆动问题，如果需要，请阅读参考文献[3，4]，以后不再说明. 不过，对于数值方法，只要通过坐标转换即可解决上述附加摄动问题，无需引进轨道坐标系；当然，引进也无妨，仍有可取之处.

上述坐标系的定义虽然是针对地球卫星而言的，但事实上也可以推广，中心天体可改为其他探测目标天体，如火星，月球等，相应的地心即目标天体质心，地固坐标系即星（指目标天体）固坐标系.

除上述各种地心坐标系外，有时涉及到日、月和大行星的历表和轨道，它们分别对应某历元的太阳系质心惯性系或日心黄道坐标系，坐标原点分别为太阳系质心或日心，参考平面是该历元的平赤道或黄道，x 轴指向该历元的平春分点.

2. 各坐标系之间的转换关系

为了引用矩阵来表达坐标系之间的转换关系，首先回忆一下坐标旋转及其对应的旋转变换的矩阵表示方法. 原坐标系中的任一矢量用 r 表示，在旋转后的新坐标系中以 r' 表示. 那么，若 yz 平面，zx 平面和 xy 平面分别绕 x 轴，y 轴和 z 轴转动一个角度 θ（逆时针为正），则有

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}_x(\theta)\boldsymbol{r}, \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{r}, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}_z(\theta)\boldsymbol{r},\tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{R}_x(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{R}_y(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\end{pmatrix},\tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\tag{1.12}$$

旋转矩阵 $\boldsymbol{R}(\theta)$ 有如下性质：

$$\boldsymbol{R}^{-1}(\theta)=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\theta)=\boldsymbol{R}(-\theta).\tag{1.13}$$

这里 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的逆和转置.

(1) 历元平赤道地心系与瞬时平赤道地心系之间的转换

这两个坐标系之间的差别是岁差. 历元平赤道地心系经三次旋转即与瞬时平赤道地心系相重合,有

$$\boldsymbol{r}_m=(\mathbf{PR})\boldsymbol{R}.\tag{1.14}$$

$(\boldsymbol{PR})$就是岁差矩阵,它由三个旋转矩阵构成,即

$$(\mathbf{PR})=\boldsymbol{R}_z(-z_A)\boldsymbol{R}_y(\theta_A)\boldsymbol{R}_z(-\xi_A).\tag{1.15}$$

其中 ξ_A,z_A,θ_A 是赤道岁差角,由下式计算：

$$\begin{cases}\xi_A=2306''.2181T+0''.30188T^2+0''.017998T^3,\\ z_A=2306''.2181T+1''.09468T^2+0''.018203T^3,\\ \theta_A=2004''.3109T-0''.42665T^2-0''.041833T^3,\end{cases}\tag{1.16}$$

$$T=\frac{\mathrm{JD}(t)-2451545.0}{36525.0}.\tag{1.17}$$

其中 t 是动力学时,可用 TDT. 相应的赤经岁差 m_A（或记作 μ）和赤纬岁差 n_A 为

$$\begin{cases}m_A=\xi_A+z_A=4612''.4362T+1''.39656T^2+0''.036201T^3,\\ n_A=\theta_A.\end{cases}\tag{1.18}$$

(2) 瞬时平赤道地心系与瞬时真赤道地心系之间的转换

这两个坐标系之间的差别是章动. 同样,经过三次旋转就可使前者与后者重合,相应地有

$$\boldsymbol{r}_t=(\mathbf{NR})\boldsymbol{r}_m.\tag{1.19}$$

这里的(NR)是章动矩阵,它亦由三个旋转矩阵构成,即

$$(\mathbf{NR}) = \boldsymbol{R}_x(-\Delta\varepsilon)\boldsymbol{R}_y(\Delta\theta)\boldsymbol{R}_z(-\Delta\mu). \tag{1.20}$$

或

$$(\mathbf{NR}) = \boldsymbol{R}_x[-(\bar{\varepsilon}+\Delta\varepsilon)]\boldsymbol{R}_z(-\Delta\psi)\boldsymbol{R}_x(\bar{\varepsilon}). \tag{1.21}$$

上两式中的 $\bar{\varepsilon}$ 是平黄赤交角,$\Delta\psi$ 是黄经章动,而 $\Delta\mu$,$\Delta\theta$ 和 $\Delta\varepsilon$ 则分别为赤经章动,赤纬章动和交角章动. 章动量取 IAU(1980)序列,对于米级精度取该序列的前 20 项即可,计算公式如下:

$$\begin{cases} \Delta\psi = \displaystyle\sum_{j=1}^{20}(A_{0j}+A_{1j}t)\sin\Big(\sum_{i=1}^{5}k_{ji}\alpha_i(t)\Big), \\ \Delta\varepsilon = \displaystyle\sum_{j=1}^{20}(B_{0j}+B_{1j}t)\cos\Big(\sum_{i=1}^{5}k_{ji}\alpha_i(t)\Big). \end{cases} \tag{1.22}$$

相应的赤经和赤纬章动 $\Delta\mu$ 和 $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\mu = \Delta\psi\cos\varepsilon, \tag{1.23}$$

$$\Delta\theta = \Delta\psi\sin\varepsilon. \tag{1.24}$$

其中黄赤交角的计算公式如下:

$$\varepsilon = 23°26'21''.448 - 46''.8150t. \tag{1.25}$$

章动序列中的 5 个幅角计算公式为

$$\begin{cases} \alpha_1 = 134°57'46''.733 + (1325^r + 198°52'02''.633)t + 31''.310t^2, \\ \alpha_2 = 357°31'39''.804 + (99^r + 359°03'01''.224)t - 0''.577t^2, \\ \alpha_3 = 93°16'18''.877 + (1342^r + 82°01'03''.137)t - 13''.257t^2, \\ \alpha_4 = 297°51'01''.307 + (1236^r + 307°06'41''.328)t - 6''.891t^2, \\ \alpha_5 = 125°02'40''.280 - (5^r + 134°08'10''.539)t + 7''.455t^2. \end{cases} \tag{1.26}$$

其中 $1^r = 360°$. 上述各式中的 t,意义同(1.17)式中的 T. 章动序列前 20 项的有关系数见表 1.3.

事实上,按前面所说的精度考虑,保留大于 $0''.005$ 的周期项,且至多涉及距标准历元 T_0(J2000.0)25 年的计算,故公式(1.22)右端的 A_{1j} 和 B_{1j} 也可略去.

关于章动序列,还在不断地改进,但就原理和结果而言已无实质性改变,而就一般问题的精度要求而言,在定量上亦无明显的影响,对于高精度问题,请注意其差别.

表 1.3　IAU1980 章动序列的前 20 项

j	周期（日）	k_{j1}	k_{j2}	k_{j3}	k_{j4}	k_{j5}	A_{0j} (0″.0001)	A_{1j} (0″.0001)	B_{0j} (0″.0001)	B_{1j} (0″.0001)
1	6798.4	0	0	0	0	1	−171996	−174.2	92025	8.9
2	182.6	0	0	2	−2	2	−13187	−1.6	5736	−3.1
3	13.7	0	0	2	0	2	−2274	−0.2	977	−0.5
4	3399.2	0	0	0	0	2	2062	0.2	−895	0.5
5	365.2	0	1	0	0	0	1426	−3.4	54	−0.1
6	27.6	1	0	0	0	0	712	0.1	−7	0.0
7	121.7	0	1	2	−2	2	−517	1.2	224	−0.6
8	13.6	0	0	2	0	1	−386	−0.4	200	0.0
9	9.1	1	0	2	0	2	−301	0.0	129	−0.1
10	365.3	0	−1	2	−2	2	217	−0.5	−95	0.3
11	31.8	1	0	0	−2	0	−158	0.0	−1	0.0
12	177.8	0	0	2	−2	1	129	0.1	70	0.0
13	27.1	−1	0	2	0	2	123	0.0	−53	0.0
14	27.7	1	0	0	0	1	63	0.1	−33	0.0
15	14.8	0	0	0	2	0	63	0.0	−2	0.0
16	9.6	−1	0	2	2	2	−59	0.0	26	0.0
17	27.4	−1	0	0	0	1	−58	−0.1	32	0.0
18	9.1	1	0	2	0	1	−51	0.0	27	0.0
19	205.9	2	0	0	−2	0	48	0.0	1	0.0
20	1305.5	−2	0	2	0	1	46	0.0	−24	0.0

根据上面的讨论立即可知，由历元平赤道地心系到瞬时真赤道地心系的转换关系为

$$\boldsymbol{r}_t = (\mathrm{GR})\boldsymbol{r}. \tag{1.27}$$

我们不妨称(GR)为岁差章动矩阵，有

$$(\mathrm{GR}) = (\mathrm{NR})(\mathrm{PR}). \tag{1.28}$$

(3) 瞬时真赤道地心系与准地固坐标系之间的转换

因准地固坐标系是随着地球自转而转动的一种旋转坐标系，显然它与瞬时真赤道地心系之间的差别是地球自转角——格林尼治恒星时 S_G，于是有

$$\boldsymbol{R}_t = (\mathrm{ER})\boldsymbol{r}_t, \tag{1.29}$$

$$(\mathrm{ER}) = \boldsymbol{R}_z(S_G). \tag{1.30}$$

(ER)即地球自转矩阵.

(4) 准地固坐标系与地固坐标系之间的转换

这两者之间的差别就是极移，有

$$\boldsymbol{R} = (\mathbf{EP})\boldsymbol{R}_t . \tag{1.31}$$

极移矩阵(EP)可由下式表达：

$$(\mathbf{EP}) = \boldsymbol{R}_y(-x_p)\boldsymbol{R}_x(-y_p) . \tag{1.32}$$

其中 x_p 和 y_p 就是极移两分量(它们的量级不超过 $0''.5$). 若略去极移的二阶量，则上式可简化为

$$(\mathbf{EP}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

为了便于读者看清上述五种地心系坐标系之间的转换关系，我们不妨用一"框图"(见图 1.1)来描绘它们，图 1.1 中的矩阵(HG)为

$$(\mathbf{HG}) = (\mathbf{EP})(\mathbf{ER})(\mathbf{GR}). \tag{1.34}$$

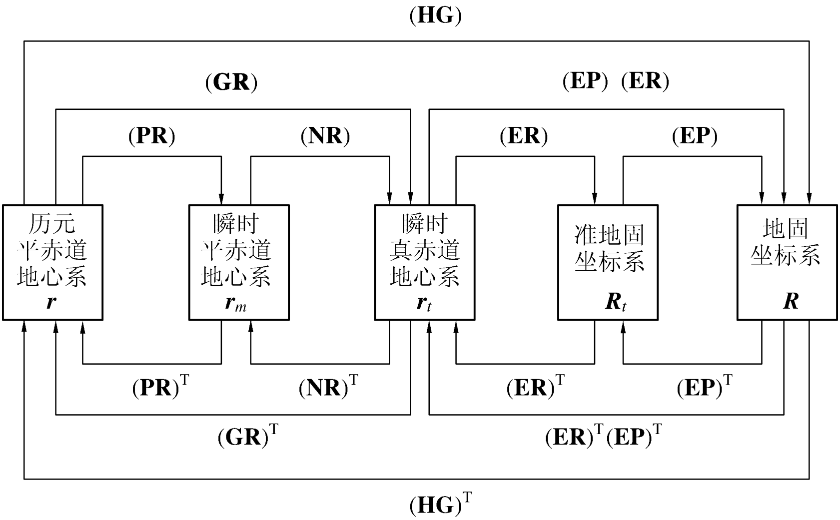

图 1.1 五种地心赤道坐标系之间的转换关系

(5) 轨道坐标系与其他地心坐标系之间的转换关系

由轨道坐标系的定义可知，经一次旋转，就可使瞬时真赤道地心系与它重合，相应地有

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)\boldsymbol{r}_t . \tag{1.35}$$

μ 和 $\Delta\mu$ 即赤经岁差和赤经章动，计算公式见(1.8)和(1.23).

利用(1.27)式，可立即得到轨道坐标系与历元平赤道地心系之间的转

换关系，即

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{r}\ , \tag{1.36}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{GR})\ . \tag{1.37}$$

变换矩阵 U 对应七次旋转，但是在一定精度要求下，可使 U 矩阵简化. 如考虑瞬时 t 与选取历元 T_0 的间隔在 25～50 年内，丢掉量级为 10^{-6} 和更小的项（包括章动的二阶项等），则七次旋转就可简化为二次旋转，有

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_y(\theta_A + \Delta\theta)\boldsymbol{R}_x\left(\frac{\mu}{2}\theta_A - \Delta\varepsilon\right)\ . \tag{1.38}$$

若 $(t - T_0) < 25$ 年，为了保证上述精度，$\boldsymbol{U}$ 矩阵还可再简化些，即

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(\theta_A + \Delta\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ (\theta_A + \Delta\theta) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\Delta\varepsilon \\ 0 & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

也可写成下列形式：

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_y(\theta_A + \Delta\theta)\boldsymbol{R}_x(-\Delta\varepsilon)\ . \tag{1.40}$$

这对应更简单的二次旋转.

下面再给出轨道坐标系与地固坐标系之间的转换关系. 根据(1.35)式和图 1.1 不难得到

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{ER})^{\mathrm{T}}(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\ . \tag{1.41}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{ER})^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)\boldsymbol{R}_z(-S_G) \\ &= \boldsymbol{R}_z(-(S_G - (\mu + \Delta\mu))). \end{aligned} \tag{1.42}$$

若记

$$\theta_G = S_G - (\mu + \Delta\mu)\ . \tag{1.43}$$

θ_G 就是轨道坐标系中的格林尼治恒星时角. 于是(1.41)式又可写成

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}. \tag{1.44}$$

当然，这一转换关系亦可直接导出.

S_G 和 θ_G 的计算公式为

$$S_G = \overline{S}_G + \Delta\mu\ , \tag{1.45}$$

$$\theta_G = \overline{S}_G - \mu\ . \tag{1.46}$$

这里 μ 和 $\Delta\mu$ 即前面已提到的赤经岁差和章动. J2000.0 系统中的格林尼治平恒星时 $\overline{S}_G$ 由下式计算：

$$\overline{S}_G = 18^{\mathrm{h}}.6973746 + 879000^{\mathrm{h}}.0513367t + 0^{\mathrm{s}}.093104t^2 - 6^{\mathrm{s}}.2\times10^{-6}t^3\ , \tag{1.47}$$

$$t=\frac{\mathrm{JD}(t)-\mathrm{JD}(\mathrm{J}2000.0)}{36525.0}. \tag{1.48}$$

§1.3 空间观测几何

1. 两种站心坐标系[2]

对航天器的观测量通常是相对观测站的(可以是地基站,也可以是天基站),其中方向观测量(即测角资料)又总是对应赤道系统或地平系统. 为此,在有关工作中引进了站心赤道坐标系和站心地平坐标系. 两种站心坐标系之间的几何关系见图 1.2. O 是辅助天球中心(即测站), OZ 是重力方向, Z 就是天顶,大圆 NS 是地平. OP 是天极方向, P 是北天极(实为平极,为了与地固坐标系一致,就用 CIO),大圆 QQ' 是天赤道(简称赤道). 大圆弧 $PZ=90^\circ-\varphi$, φ 是测站的天文纬度(φ 对应平极,它与大地纬度的差别即垂线偏差). 通过天极和天顶的大圆称为测站的子午圈,它与地平相交于 N 和 S 两点,分别称为北点和南点. 赤道与地平相交于 E 和 W 两点,分别称为东点和西点. S_* 是测站到天体方向与天球的交点(或就称为天体),大圆 ZS_* 称为地平经圈,而大圆 PS_* 称为时圈或赤经圈.

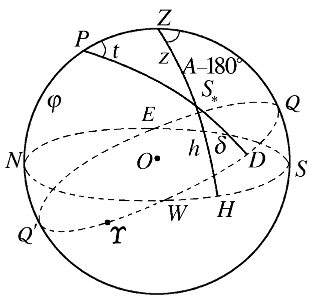

图 1.2 站心坐标系的辅助天球

天体的地平坐标记为 A,h. A 称为地平经度或方位角. 由北点沿地平向东量到地平经圈; h 称为地平纬度或高度角,由地平经圈与地平的交点 H 沿地平经圈向天顶方向量到天体 S_*,有时用天顶距 $z=90^\circ-h$ 代替高度角 h. 天体的赤道坐标记为 t,δ 或 α,δ. 这里的 t 称为天体的时角,由 A 点沿赤道向西量到时圈,时角常用 α 代替, α 称为赤经,由春分点 Υ 沿赤道向东量到时圈,它与 t 的关系为

$$\alpha=S-t.$$

S 是春分点的时角,即测站的地方恒星时; δ 称为赤纬,由时圈与赤道的交点 D 沿时圈向北天极方向量到天体.

上述两种站心坐标系可分别记作 $O-\Upsilon\Upsilon'P$ 和 $O-NWZ$,其中 Υ' 应在赤道 QQ' 上指向 Υ 以东 90° 的方向(见图 1.2). 若记航天器在这两种站心坐标系中的位置矢量各为 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\rho}'$,有

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

$$\boldsymbol{\rho}' = \rho \begin{pmatrix} \cos h\cos A \\ -\cos h\sin A \\ \sin h \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

ρ 是航天器到测站的距离.

如果测角资料 (α,δ) 是照相或用 CCD 技术等获得的,因采用了背景星定位的方法,给出的 (α,δ) 是对应历元(如 J2000.0)站心平赤道坐标系的,为了与上述站心赤道坐标系加以区别,暂记作 $(\alpha_{\mathrm{J}},\delta_{\mathrm{J}})$,相应地有

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{J}} = \rho \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}_{\mathrm{J2000.0}}. \tag{1.51}$$

根据上述两种站心坐标系的定义,由图 1.2 不难看出,经两次坐标轴旋转,站心地平坐标系即与站心赤道坐标系重合,故它们之间的转换关系为

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{ZR})\boldsymbol{\rho}', \tag{1.52}$$

$$(\mathbf{ZR}) = \boldsymbol{R}_z(180^\circ - S)\boldsymbol{R}_y(90^\circ - \varphi). \tag{1.53}$$

其中 S 是地方(对应测站)恒星时. 由(1.51)式和(1.52)式可给出航天器的两种测角资料 $(\alpha,\ \delta)$ 和 $(A,\ h)$ 之间的具体函数关系,即

$$\begin{cases} \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{-\cos\delta\sin(S-\alpha)}{\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos(S-\alpha)}, \\ \sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(S-\alpha), \end{cases} \tag{1.54}$$

或

$$\begin{cases} \tan(S-\alpha) = \dfrac{\sin(S-\alpha)}{\cos(S-\alpha)} = \dfrac{-\cos h\ \sin A}{\cos\varphi\sin h - \sin\varphi\cos h\cos A}, \\ \sin\delta = \sin\varphi\sin h + \cos\varphi\cos h\cos A. \end{cases} \tag{1.55}$$

2. 站心坐标系与空间坐标系之间的转换关系

在处理航天器运行的轨道问题中,需将观测量与空间坐标相联系. 对于人造地球卫星而言,即需要给出站心坐标系与历元平赤道地心系和轨道坐标系之间的转换关系. 这里各坐标系中位置矢量的表示仍采用前面表 1.2 中引用的符号.

由于站心赤道坐标系的主方向(x 轴)指向瞬时真春分点,故它与地固坐标系之间的转换关系为旋转加平移,即

$$\boldsymbol{R} = (\mathrm{ER})\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}_A. \tag{1.56}$$

其中(ER)即地球自转矩阵，见(1.30)式，$\boldsymbol{R}_A$ 是测站在地固坐标系中的位置矢量. 下面给出两种站心坐标系以及站心坐标系与地心坐标系之间的转换关系.

通过地固坐标系即可知，站心赤道坐标系和站心地平坐标系与历元平赤道地心坐标系之间的转换关系分别为

$$\boldsymbol{r} = (\mathrm{HG})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = (\mathrm{HG})^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{ER})\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}_A] \tag{1.57}$$

和

$$\boldsymbol{r} = (\mathrm{HG})^{\mathrm{T}}[(\mathrm{ER})(\mathrm{ZR})\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{R}_A], \tag{1.58}$$

矩阵(HG)的表达式见(1.34)式. 根据 $S = S_G + \lambda$，λ 是测站经度，记矩阵(ER)(ZR)为(EZ)，则可表示为

$$\begin{aligned}(\mathrm{EZ}) &= (\mathrm{ER})(\mathrm{ZR}) \\ &= \boldsymbol{R}_z(180^\circ - S + S_G)\boldsymbol{R}_y(90^\circ - \varphi) \\ &= \boldsymbol{R}_z(180^\circ - \lambda)\boldsymbol{R}_y(90^\circ - \varphi).\end{aligned} \tag{1.59}$$

前面提到的历元站心平赤道坐标系与历元平赤道地心系之间的转换关系较简单，就是经过一个平移，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}_J + \boldsymbol{r}_A, \\ \boldsymbol{r}_A = (\mathrm{HG})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_A.\end{cases} \tag{1.60}$$

由地固坐标系与轨道坐标系之间的转换关系(1.44)式可知，站心赤道坐标系和站心地平坐标系与轨道坐标系之间的转换关系分别为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathrm{EP})^{\mathrm{T}}[(\mathrm{ER})\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}_A], \tag{1.61}$$

或

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathrm{EP})^{\mathrm{T}}[(\mathrm{EZ})\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{R}_A]. \tag{1.62}$$

历元站心平赤道坐标系与轨道坐标系的转换关系为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathrm{GR})[\boldsymbol{\rho}_J + \boldsymbol{r}_A] \approx \boldsymbol{U}[\boldsymbol{\rho}_J + \boldsymbol{r}_A]. \tag{1.63}$$

其中矩阵 U 见(1.40)式.

3. 观测站的站址坐标

观测站的站址(指测站的标准点，简称测站)坐标用 H,λ,φ 三个分量表示，它们的定义如下.

H：大地高. 它是从站址点沿法线方向到参考椭球面(参考椭球体是地固坐标系建立的依据，极是 CIO，其中心即当作地心)的距离. 而到大地水准面的高度称为正高，亦称海拔高度，它与大地高之差称为高程异常.

λ：大地经度(亦称测地经度)，简称站址经度. 它是通过站址的大地子

午面(与辅助天球相交截出的大圆)与过格林尼治的大地子午面(称为本初子午面)之间的夹角,从本初子午面向东计量,由 0°到 360°.

φ: 大地纬度(亦称测地纬度),简称站址纬度. 它是通过站址的参考椭球面的法线与赤道面的夹角,从赤道面向北计量为正,由 0°到 90°,向南计量为负,由 0°到 −90°,大地纬度不同于天文纬度(它是站址点的铅垂线与赤道面的夹角),即同一点的铅垂线与相应的参考椭球面的法线通常并不重合,此即垂线偏差.

上述站址坐标 H,λ,φ 亦称为大地坐标. 对于一般精度要求,无需区分大地高与正高、大地纬度与天文纬度.

根据站址坐标的定义,在地固坐标系中,测站位置矢量 $\boldsymbol{R}_A$ 的三个分量 (X_A,Y_A,Z_A) 为

$$\begin{cases} X_A = (N+H)\cos\varphi\cos\lambda, \\ Y_A = (N+H)\cos\varphi\sin\lambda, \\ Z_A = [N(1-\epsilon)^2 + H]\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.64}$$

其中

$$N = a_e[\cos^2\varphi + (1-\epsilon)^2\sin^2\varphi]^{-1/2}, \tag{1.65}$$

a_e 是参考椭球体的赤道半径, ϵ 参考椭球体的扁率. 如果知道测站的地心距 R 和地心纬度 φ',则有

$$\begin{cases} X_A = R\cos\varphi'\cos\lambda, \\ Y_A = R\cos\varphi'\sin\lambda, \\ Z_A = R\sin\varphi'. \end{cases} \tag{1.66}$$

若在轨道坐标系中讨论问题,相应的测站位置矢量记为 $\boldsymbol{r}_A'$,坐标分量为 X,Y,Z. 根据转换关系(1.44),有

$$\boldsymbol{r}_A' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\boldsymbol{EP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_A. \tag{1.67}$$

对于一般精度要求,不必考虑极移,那么轨道坐标系中的测站坐标可简化为

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \cos\varphi'\cos(\theta_G+\lambda) \\ \cos\varphi'\sin(\theta_G+\lambda) \\ \sin\varphi' \end{pmatrix}. \tag{1.68}$$

目前对航天器观测所得的资料基本上有四种类型,即

(1) 光学测角资料(Ⅰ)——地平坐标 (A,h) 型;

(2) 光学测角资料(Ⅱ)——赤道坐标 (α,δ) 型;

(3) 多普勒测速 $\dot{\rho}$ 型;

(4) 激光或雷达测距 ρ 型.

在取得原始观测资料后，需要经过一系列改正才能提供可用资料. 这些改正包括天文系统差（如大气折射、光行差等），各种物理因素的影响（如大气对流层、电离层的影响等）以及仪器误差等. 关于这些改正，请读者参看有关书籍和文献，本书不再介绍. 但有一点需要说明，即所有观测资料对应的空间坐标系必须清楚，显然，测速和测距资料并不存在这个问题，而需要注意的是光学测角资料，对此，前面已作了详尽的阐述.

除上述四种基本类型，还有星上测量（雷达测高等）和星间测量（如星载 GPS 测距等），但相应的空间观测几何与前面阐述的内容无实质性差别，不再介绍.

§1.4 航天器的可见条件

对人造地球卫星的观测，最早是光学观测，随着科技的进步，观测手段也多样了，如无线电观测、激光观测等等，但光学观测仍然是最主要的观测手段，特别是对于空间目标监视以及空间碎片的观测只能依赖光学手段. 光学观测的可见条件也具有代表性，可适用于其他观测手段. 因此，这里就以光学观测为例，说明航天器的可见条件.

航天器的观测通常是从地面测站进行的，首先就是测站和航天器的几何位置关系，最直观反应这个关系的量就是卫星对测站的方位角 A、地平高度 h 以及斜距 ρ. 如图 1.3 所示. 方位角 A 是自北点向东起量；地平高度 h 从地平起量，范围在 $\pm 90°$之间；斜距 ρ 为测站到航天器的距离. 由坐标转换关系(1.58)式和(1.59)式可知，航天器在地固系中的坐标为

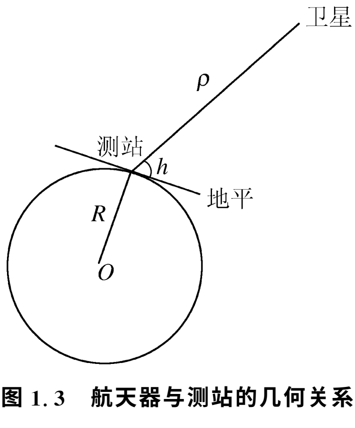

图 1.3 航天器与测站的几何关系

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}_z(180° - \lambda)\boldsymbol{R}_y(90° - \varphi)\begin{pmatrix} \rho\cos h\cos A \\ -\rho\cos h\ \sin A \\ \rho\sin h \end{pmatrix}. \qquad (1.69)$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为测站在地固系中的坐标.

航天器和测站间的一个重要关系是卫星能否被测站观测到，一个必要条件是卫星必出现在地平以上，即 $h > 0$. 但为了保证观测精度通常需要 $h > h_0$，h_0 在不同情况下取不同的值，通常在 $5°\sim 15°$. 如图 1.4，r 为卫星的

地心距，R 为测站的地心距，θ 为卫星和测站的地心张角，ρ 为斜距. 容易导出如下关系：

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{r}\cosh\right) - h, \quad (1.70)$$

$$\tan h = \frac{r\cos\theta - R}{r\sin\theta}, \quad (1.71)$$

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta. \quad (1.72)$$

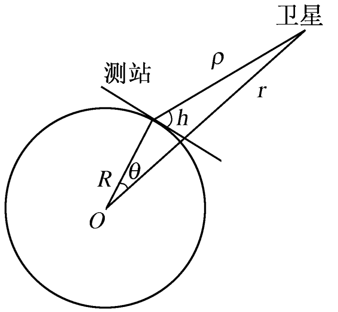

图 1.4　航天器的可观测区域

由此可见，要使卫星的地平高度不小于 h_0，那么卫星同测站的地心张角 θ 必须满足下列条件：

$$\theta < \theta_0 = \arccos\left(\frac{R}{r}\cosh_0\right) - h_0. \quad (1.73)$$

由 θ_0 确定的范围被称为可见范围，航天器在这个范围内才有可能被观测到. 由于大多数卫星都是近圆轨道，可用轨道半长径来代替上式中的 r，用于估计所需要的 θ_0. 无论利用哪种设备观测，上述可见范围都是一个必要条件.

航天器进入可见范围并不一定能被光学设备观测到，还需要考虑测站的天空背景是不是被太阳照亮，明亮的天空背景使得航天器不能被观测到. 这一条件可由太阳与测站的相对几何关系来决定，太阳与测站的相对几何关系通常用太阳的地平高度 β 来反映，对于观测来说需要太阳的地平高度满足条件 $\beta < \beta_0$. β_0 的值将根据不同的观测目标和观测要求来确定. 注意，这里的 β 意味着在地平以下的值，即 $\beta < 0$.

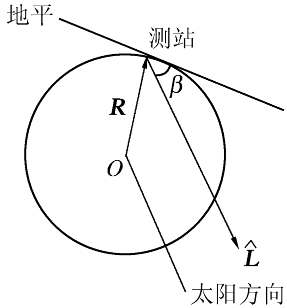

图 1.5　太阳和测站的关系

由于太阳很远，可认为太阳在无穷远处（即忽略视差），地球上的太阳光线为平行光. 从图 1.5 上可看出，测站位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 与太阳方向 $\hat{\boldsymbol{L}}$（单位矢量）的夹角大于 $90° + |\beta_0|$，即在第二象限，此条件如下：

$$\arccos\frac{\hat{\boldsymbol{L}} \cdot \boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} > 90° + |\beta_0|. \quad (1.74)$$

在地面由 $90° + |\beta_0|$ 确定的边界称为日界线，日界线把地球表面分为两个区域，即“白天”和“黑夜”. 当测站为黑夜时才能进行光学观测.

光学观测还需要航天器表面被太阳照亮,此时设备才能观测到反射的光线. 这一条件是由航天器与太阳的相对位置关系决定的,也就是航天器必须在地影外. 对于这一条件,只需考虑简单的柱形地影即可,见图 1.6.

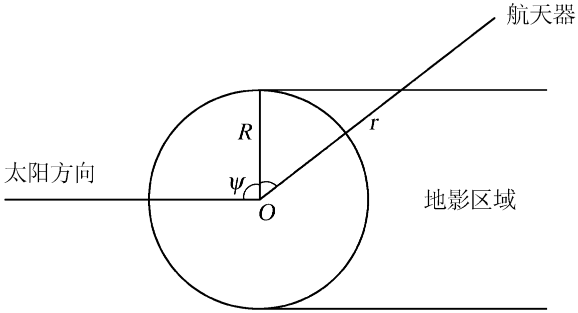

图 1.6 航天器进出地影的平面图

由图 1.6 可知,地影边界上满足下述条件:

$$\begin{cases} \sin\psi = \dfrac{R}{r}, \\ \cos\psi = -\sqrt{1-\dfrac{R^2}{r^2}}. \end{cases} \tag{1.75}$$

(1.75)式中 $\cos\psi$ 的右端取负号,是由于 $\psi > 90°$. 当航天器和太阳方向的夹角小于 ψ 时,航天器不在地影内,可以被太阳照亮. 太阳与地心的连线与椭球面的交点被称为日下点,地面上以日下点为中心半径为 ψ 的区域就是航天器可以被照亮的区域,该区域边界就称为地影线. 同样可用轨道半长径代替 r 来估计无地影区域的大小,即

$$\cos\psi = -\sqrt{1-\frac{R^2}{a^2}}. \tag{1.76}$$

对于航天器的光学观测而言,前面提到的三个条件都必须满足. 对于一个航天器,可观测范围相对测站是不变的,而日界线和地影线随太阳位置的变化而由东向西移动. 对于其他观测,如激光观测、无线电观测等,上述后两个条件理论上不是必需的.

§1.5 航天器的视运动——星下点轨迹与覆盖区域

航天器在高于地面几百公里以上的空间飞行,为了更好地表示它的运动状态,特别是反映它的运动与地球的相对关系,常用星下点的轨迹描绘.

航天器到地心的连线与地球参考椭球面的交点称为星下点，其位置用球坐标 (λ,φ) 来表示. 这里的 (λ,φ) 是大地经纬度，亦可用地心经纬度 (λ,φ') 来表示. 这一星下点的定义亦可用于绕飞其他中心天体（如月球，火星等）的航天器，只要相应的地球量改为另一中心天体即可.

关于星下点位置的计算，首先要将航天器的空间位置量转换到地固坐标系中. 例如定轨预报给出的是 J2000 地心天球坐标系中航天器的位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$，则首先要根据 §1.2 中介绍的坐标转换关系将 $\boldsymbol{r}$ 转换为地固坐标系中的位置矢量 $\boldsymbol{R}(t)$，由图 1.1 给出的转换关系可知：

$$\boldsymbol{R}(t) = (\mathrm{HG})\boldsymbol{r}(t). \tag{1.77}$$

如果描述星下点位置需要的是地心纬度 φ'，则很简单，有如下关系：

$$\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi'\cos\lambda \\ R\cos\varphi'\sin\lambda \\ R\sin\varphi' \end{pmatrix}. \tag{1.78}$$

其中 R 是航天器的地心距，而 (λ,φ') 即可作为星下点在地球参考椭球面上的位置. 由(1.78)式不难给出 (λ,φ') 的计算公式如下：

$$\lambda = \arctan(Y/X), \tag{1.79}$$

$$\varphi' = \arcsin\left(\frac{Z}{R}\right) = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right). \tag{1.80}$$

如果需要的是大地纬度 φ，则可根据 §1.2 中给出的测站位置矢量 $\boldsymbol{R}_A$ 的计算公式(1.64)，令大地高 $H=0$ 即得：

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{1}{(1-e)^2}\tan\varphi' \\ &= \frac{1}{(1-e)^2}\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right). \end{aligned} \tag{1.81}$$

随着航天器的运行，星下点 $(\lambda(t),\varphi(t))$ 的连线即描绘出在自转的地球表面上的一条轨迹. 星下点轨迹清楚地反映了航天器运动和地面的关系，结合上一节可观测条件所对应的可观测范围、日界线和地影线就很容易体现航天器的动态观测几何.

航天器对地面的覆盖问题，可以从两个角度来看，一是卫星看地面的范围；另一个是地面可以看见卫星的范围. 航天器上的照相机对地面进行拍摄就属于卫星对地观测情况；前面提到卫星的可观测范围，是从测站角度考虑，当卫星进入该区域则可被该测站观测到. 随着卫星运动，可以找出地面可观测该卫星的区域，测站如果在该区域中则可观测该卫星. 覆盖几何图像见图 1.7.

对于第一种情况,已知 $\theta' = \theta_0'$,那么

$$\sin(90^\circ + h) = \frac{r\sin\theta_0'}{R}, \quad (1.82)$$

$$\begin{aligned}\theta &= 180^\circ - \theta_0' - (90^\circ + h) \\ &= 90^\circ - \theta_0' - h. \quad (1.83)\end{aligned}$$

对于第二种情况,已知 $h = h_0$,那么地面看卫星的范围如下:

$$\sin(\theta') = \frac{R\sin(90^\circ + h_0)}{r}, \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned}\theta &= 180^\circ - \theta' - (90^\circ + h_0) \\ &= 90^\circ - \theta' - h_0. \quad (1.85)\end{aligned}$$

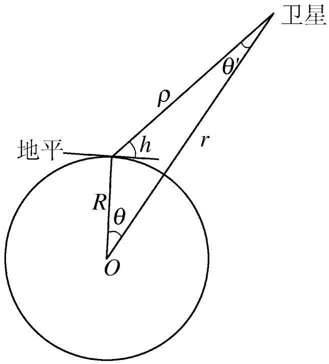

图 1.7 航天器对地面的覆盖

相应的覆盖范围在地图上即以星下点为中心,半径为 θ 的圆. 随着卫星运动这些区域形成的带就是卫星相应的覆盖范围. 对于近圆轨道,同样可以用 a 代替上式中的 r ,估计基本的覆盖范围.

参 考 文 献

[1] 中国科学院紫金山天文台. 中国天文年历. 北京:科学出版社,每年一本

[2] 夏一飞,黄天衣. 球面天文学. 南京:南京大学出版社,1995

[3] 刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京:高等教育出版社,1992

[4] 刘林. 航天器轨道理论. 北京:国防工业出版社,2000

第 2 章　航天器在轨运行的无摄运动

若将地球或任何一个探测目标天体(如大行星、小行星等)看成一个质量密度分布均匀的球体,则它对绕其运行的航天器的引力作用可等效于一个质点,相当于质量全部集中在该天体质心上,于是就构成一个简单的二体系统,一个中心天体和一个运动天体. 以地球和人造卫星为例,将坐标系的原点放在地心上,讨论人造卫星相对地心的运动,这是很自然的. 卫星运动方程可写成

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{2.1}$$

其中 r 是卫星的地心向径,$\mu=GM$ 是地心引力常数,这里 M 是地球质量.

严格地说,人造卫星对地球亦有引力作用,地心坐标系并非惯性参考系. 因此,方程(2.1)的原形式应为

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}&=-\frac{GM}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)-\frac{Gm}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\&=-\frac{G(M+m)}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

方程右端第二项即惯性加速度. m 是人造卫星的质量,相对地球质量而言它是一个小量,例如一个 1 吨重的卫星,其质量与地球质量之比只有 $1:10^{22}$. 这个量对定轨精度的影响显然无需考虑,至少在当前的测量精度意义下是如此. 因此,卫星运动方程就可写成(2.1)的形式.

方程(2.1)或(2.2)是可积的,下面我们首先给出相应的六个独立积分,在此基础上再进行各种讨论.

§2.1　二体问题的六个积分与轨道根数

1. 动量矩积分(或称面积积分)

根据有心力的性质,可直接写出方程(2.1)的动量矩积分. 由方程(2.1)

很容易推出该积分，若记 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ 为面积速度矢量，则由方程(2.1)可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=0.$$

这表明 $\boldsymbol{h}$ 为常矢量，人造卫星绕地球的运动为一平面运动，相应的动量矩积分可写成

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=h\hat{\boldsymbol{R}}. \tag{2.3}$$

其中 $h=|\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}|$ 为面积速度常数，$\hat{\boldsymbol{R}}$ 即表示面积速度方向，它是卫星运动平面的法向单位矢量. 如果我们采用地心赤道坐标系，可用图 2.1 来描绘. 图中大圆 AA' 和 BB' 分别表示地球赤道和卫星轨道在辅助天球上的投影，X 方向即春分点方向，R 方向即轨道面法向，i 就是卫星轨道面与赤道面的夹角，Ω 即轨道升交点方向 N(或称节点)的赤经，在此坐标系中，利用球面三角形的余弦公式(或采用坐标旋转的方法)，不难导出法向单位矢量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 的表达式为

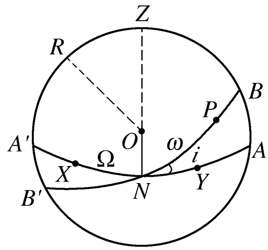

图 2.1 地心辅助天球

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\-\sin i\cos\Omega\\\cos i\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

积分(2.3)包含了 h, i, Ω 三个积分常数，h 是面积速度的两倍，i, Ω 则确定了卫星轨道平面的空间方向.

2. 运动平面内的轨道积分和活力公式

既然是平面运动，而相应的平面已由(i,Ω)确定，那么，我们即可在这一确定的平面内讨论降阶后的方程. 引入平面极坐标(r,θ)，运动方程(2.1)可按径向和横向两个分量写成

$$\begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\dfrac{\mu}{r^2},\\ r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})=0.\end{cases} \tag{2.5}$$

第二个方程给出一个积分：　　$r^2\dot{\theta}=h,$ (2.6)

由空间极坐标(三个轴方向的单位矢量分别记作 $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{k}}, \hat{k}$ 即前面的 $\hat{\boldsymbol{R}}$)中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tag{2.7}$$

立即可得

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{k}} = r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{R}}.$$

这表明积分(2.6)就是动量矩积分(2.3)式的标量形式. 方程(2.5)和(2.6)构成了平面运动系统对应的三阶常微分方程,需要寻找三个独立积分.

上述方程组的特点是不显含自变量 t,由常微分方程的基本知识可知,对于这类方程,通过分离 t 的方法可使它降一阶,即能够首先讨论 r 对 θ 的变化规律. 为此,记 $r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta, r'' = \mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}\theta^2$,由(2.6)式得

$$\begin{cases} \dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \dfrac{h}{r^2}r', \\ \ddot{r} = \mathrm{d}\dot{r}/\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \dfrac{h^2}{r^2}\left(-\dfrac{2}{r^3}r'^2 + \dfrac{1}{r^2}r''\right). \end{cases} \tag{2.8}$$

将这一关系代入方程(2.5)的第一个方程即可给出 r 对 θ 的二阶方程. 但相应的方程比较复杂,仍不便于求解. 如果在降阶的同时,再作变量变换

$$r = 1/u. \tag{2.9}$$

有

$$\begin{cases} \dot{r} = -hu', \\ \ddot{r} = -h^2u^2u''. \end{cases} \tag{2.10}$$

利用这一关系即可得到 u 对 θ 的一个二阶常系数线性方程:

$$u'' + u = \frac{\mu}{h^2}. \tag{2.11}$$

这是可积的. 顺便提一下,如果将原方程右端作用力 μ/r^2 改为(或增加)μ/r^n 的形式,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,尽管经上述变换所得方程不同于(2.11)式,但仍然是可积的,这留给读者作为一道习题.

方程(2.11)给出一轨道积分:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos(\theta - \omega)}. \tag{2.12}$$

e 和 ω 即两个新积分常数. 这是一圆锥曲线,在一定条件下它表示椭圆,地心就在椭圆的焦点上. 对于人造地球卫星而言,当然属于这种情况,至于深空探测器所遇到的抛物线轨道和双曲线轨道,将在后面 §2.4 中介绍. 既然是椭圆,可令

$$p = a(1 - e^2) = h^2/\mu, \tag{2.13}$$

那么积分(2.6)和(2.12)又可写成

$$r^2\dot{\theta}=\sqrt{\mu p}=\sqrt{\mu a(1-e^2)},\tag{2.14}$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)}.\tag{2.15}$$

积分常数 h 由 a 代替，p 是椭圆的半通经，a 是半长径，e 是偏心率，ω 则称为人造卫星过近地点的经度（或称幅角），因 $\theta=\omega$ 时，r 达到最小值. ω 的几何意义见图 2.1，图中 P 是近地点方向，幅角 ω 从节点 N 沿卫星运动方向计量.

将 $r=r(\theta)$ 的关系代入方程(2.14)，原则上可以给出最后一个与时间 t 有关的积分，我们暂时放一下，先导出椭圆运动的几个常用关系. 由(2.14)和(2.15)两式，经简单的运算可得

$$v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).\tag{2.16}$$

此即活力公式. 另外，既然是椭圆运动，那么卫星向径在一个周期 T 内扫过的面积就是椭圆的面积 $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$，由此可知面积速度 $\frac{h}{2}$ 为

$$\frac{h}{2}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}/2=\frac{\pi a^2\sqrt{(1-e^2)}}{T}.$$

整理后写成下列的形式：

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{\mu}{4\pi^2}.\tag{2.17}$$

若引进平均角速度（通常称其为平运动速度）$n=2\pi/T$，则上式又可写成

$$n^2a^3=\mu.\tag{2.18}$$

这两个表达式就是万有引力定律导出的开普勒(Kepler)第三定律.

3. 第六个积分——开普勒方程

为了运算方便，在寻找第六个积分时，不直接引用方程(2.14)按 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 求解，而是利用(2.16)式按 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 积分，有

$$\dot{r}^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)-\mu\frac{p}{r^2}.$$

通过(2.18)式消去 μ 整理后得

$$n\mathrm{d}t=\frac{r\mathrm{d}r}{a\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}.\tag{2.19}$$

对于椭圆轨道，r 的极大和极小值分别为

$$r_{\max}=a(1+e),\quad r_{\min}=a(1-e).$$

因此有 $|a-r|\leqslant ae$，故可引入辅助量 E：

$$a - r = ae\cos E$$

或

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{2.20}$$

代入(2.19)式可得

$$n\mathrm{d}t = (1 - e\cos E)\mathrm{d}E.$$

于是给出第六个积分：

$$E - e\sin E = n(t - \tau). \tag{2.21}$$

这又称为开普勒方程，τ 是积分常数. 当 $t=\tau$ 时，$E=0$，相应的 $r=a(1-e)=r_{\min}$，故 τ 就是卫星过近地点的时刻.

最后引进两个角度 f 和 M，定义如下：

$$f = \theta - \omega, \quad M = n(t - \tau). \tag{2.22}$$

f，M 和 E 是三个角度，分别称为真近点角，平近点角和偏近点角，都是从近地点开始计量，E 的几何意义见图 2.2，图中 O 是椭圆焦点，O' 是辅助圆的圆心. 显然，在二体问题中，面积积分可简化为

$$r^2\dot{f} = h. \tag{2.23}$$

上述六个独立积分常数又称为轨道根数，只要初始条件给定，它们就完全被确定.

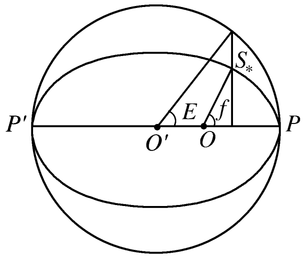

图 2.2　椭圆轨道和辅助圆

a，e 是确定轨道大小和形状的根数；i，Ω 和 ω 是轨道平面和拱线(长半轴)的空间定向根数；第六个根数 τ 常被三种近点角代替，特别是平近点角 M，常被引用，它们本身同时包含时间 t，而不是常数，即随 t 而变化，故也被称作时间根数.

§ 2.2　椭圆运动的基本关系式

原则上说，上述六个积分就完全确定了二体问题意义下人造卫星绕地球的运动，但这六个积分的表达形式有时使用不便，有必要在它们的基础上导出一些常用关系式. 这里将根据理论研究和实际工作的需要进行整理，所涉及到的量，不外乎六个根数，时间 t、各种近点角、向径、速度等.

1. 椭圆运动中各量之间的几何关系

首先从图 2.2 和开普勒方程不难看出，三种近点角的象限关系很清楚，它们同时处在$[0, \pi]$或$[\pi, 2\pi]$区间上，这是一个很重要的关系，它们之间

的联系即

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}=a(1-e\cos E),\tag{2.24}$$

$$E-e\sin E=M.\tag{2.25}$$

另外,根据椭圆的性质可知,图 2.2 中的$\overline{OO'}=ae$,于是有

$$r\cos f=a(\cos E-e).\tag{2.26}$$

由此可立即导出

$$r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin E,\tag{2.27}$$

$$\tan\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}.\tag{2.28}$$

2. 椭圆运动中一些量对轨道根数的偏导数

在研究人造卫星的运动规律或计算其位置时,除遇到六个根数 a,e,i,Ω,ω,M 外,还会出现由它们构成的一些函数,这些函数关系中的基本量就是 E,f,r(或写成$\frac{a}{r}$较为方便),只要导出这些量对根数的偏导数就够了. 首先,我们来分析函数关系,由方程(2.24)~(2.26)可知

$$\begin{cases}E=E(e,M),\\ \dfrac{a}{r}=\dfrac{a}{r}(e,\ E(e,\ M))=\dfrac{a}{r}(e,M),\\ f=f(e,\ E(e,\ M),\ \dfrac{a}{r}(e,M))=f(e,M).\end{cases}\tag{2.29}$$

那么,利用前面的几何关系即可推出相应的偏导数,它们是

$$\frac{\partial E}{\partial e}=\frac{a}{r}\sin E,\quad \frac{\partial E}{\partial M}=\frac{a}{r},\tag{2.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{a}{r}\right)=\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos f,\quad \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{a}{r}\right)=-\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{r}\right)^2\sin f,\tag{2.31}$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}=\frac{1}{1-e^2}\left(1+\frac{p}{r}\right)\sin f,\quad \frac{\partial f}{\partial M}=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2.\tag{2.32}$$

有时为了需要,基本变量不用上述六个根数,而改用 $a,i,\Omega,\xi=e\cos\omega,\eta=e\sin\omega,\lambda=M+\omega$ 六个变量,f,E 将由 $u=f+\omega,\tilde{u}=E+\omega$ 代替. 若要推出相应的偏导数,其关键仍在于首先分析清楚函数关系. 由

$$e^2=\xi^2+\eta^2,\omega=\arctan(\eta/\xi),M=\lambda-\arctan(\eta/\xi),\tag{2.33}$$

可知

$$\begin{cases}f=f(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda)),\\ E=E(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda)),\\ \dfrac{a}{r}=\dfrac{a}{r}(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda)).\end{cases}\tag{2.34}$$

利用这一关系再去推导相应的偏导数显然是容易的，例如

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial e}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial e}{\partial\xi}+\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial M}{\partial\xi},\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial e}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial e}{\partial\eta}+\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial M}{\partial\eta},\\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}.\end{cases}\tag{2.35}$$

其中$\dfrac{\partial}{\partial e}\left(\dfrac{a}{r}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)$前面已给出，剩下的问题只是根据(2.33)式去推导$\dfrac{\partial e}{\partial\xi}$，$\dfrac{\partial M}{\partial\xi}$，…，这对读者来说并不是难题.

3. 近点角 M，E，f 与时间 t 之间的微分关系

根据三种近点角的定义，利用面积积分(2.23)和开普勒方程(2.25)以及上述关系，可给出

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n,\quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=n\left(\frac{a}{r}\right),\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=n\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2.\tag{2.36}$$

在后面要讨论的问题中，积分时常遇到上述几种变量之间的转换，为了方便，我们不妨根据(2.36)式将这些关系整理如下：

$$\mathrm{d}M=n\mathrm{d}t=\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}f,\tag{2.37}$$

$$\mathrm{d}E=n\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}M=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}f,\tag{2.38}$$

$$\mathrm{d}f=n\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\mathrm{d}t=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\mathrm{d}M=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}E,\tag{2.39}$$

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\mathrm{d}M=\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E=\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}f.\tag{2.40}$$

注意，这组微分关系是建立在六个轨道根数为常数基础上的，严格地说，它们仅适用于二体问题，这与前面两组关系式不一样.

4. 向径 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式

作为二阶方程(2.1)的完整解，应该有

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t;C_1,\cdots,C_6),\\ \boldsymbol{r}=\dot{\boldsymbol{r}}(t;C_1,\cdots,C_6).\end{cases}\tag{2.41}$$

既然六个积分已得到,那么可以写出(2.41)式的具体形式.这里的积分常数 $C_1,\cdots,C_6$ 即前面的六个轨道根数,其中 C_6 是 τ,如果改用 M,(2.41)式中的 t 将包含在 M 中.

显然有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r\hat{\boldsymbol{r}} \\
&= r\cos f\,\hat{\boldsymbol{P}} + r\sin f\,\hat{\boldsymbol{Q}} \\
&= a(\cos E - e)\hat{\boldsymbol{P}} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\,\hat{\boldsymbol{Q}}.
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

其中 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 分别表示近地点和半通径方向的单位矢量.通过坐标旋转,很容易给出它们在地心赤道坐标系中的表达式.若记

$$
\hat{\boldsymbol{P}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.43}
$$

则
$$
\hat{\boldsymbol{P}} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\hat{\boldsymbol{P}}_0 . \tag{2.44}
$$
关于旋转矩阵 $R_z(-\Omega)$,$R_x(-i)$,$R_z(-\omega)$的表达式请见第一章(1.10)~(1.12)式.至于 $\hat{Q}$ 的表达式,只要将 $R_z(-\omega)$改为 $R_z(-(\omega+90°))$即得.

为适合某些应用的需要,这里将 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 的具体表达式写出,即

$$
\hat{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\omega\sin i \end{pmatrix}, \tag{2.45}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{Q}} = \begin{pmatrix} -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\ -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\ \cos\omega\sin i \end{pmatrix}. \tag{2.46}
$$

关于 $\dot{\boldsymbol{r}}$,根据二体问题的性质,由 $\boldsymbol{r}$ 的表达式(2.42)可得

$$
\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{2.47}
$$

利用前面的偏导数和微分关系即可具体写出上述表达式,即

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin f\hat{\boldsymbol{P}} + \sqrt{\frac{\mu}{p}}(\cos f + e)\hat{\boldsymbol{Q}} \\
&= \frac{\sqrt{\mu a}}{r}\left[-\sin E\hat{\boldsymbol{P}} + \sqrt{1-e^2}\cos E\hat{\boldsymbol{Q}}\right].
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

5. 椭圆运动的展开式

在很多问题中,需要将有关量通过平近点角 M 表示成时间 t 的显函

数，但由开普勒方程可知，这必将涉及到超越函数关系，无法直接达到上述要求．因此，必须将 E，f，$\left(\dfrac{a}{r}\right)$等量展成 M 的三角级数，而在这些展开式中又要用到两个特殊函数：第一类贝塞耳函数和超几何函数（或称超几何级数），故首先简单地介绍一下这两个函数的有关知识，详细内容请查阅有关特殊函数的书籍．

第一类贝塞耳函数 $\mathrm{J}_n(x)$是二阶线性常微分方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-n^2)y=0$$

的一个解，它由下列级数表达：

$$\mathrm{J}_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(n+k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \tag{2.49}$$

其中 n 为整数($n=0,1,2,\cdots$)，x 为任意实数．它又是 $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 展开式的系数，即

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)z^n. \tag{2.50}$$

其中 e 是自然对数的底，而 z 可以是复变量．由此可给出 $\mathrm{J}_n(x)$的积分表达式，即

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(x\sin\theta-n\theta)}\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{2.51}$$

根据 $\mathrm{J}_n(x)$的定义，不难得出下列一些性质：

$$\begin{cases}\mathrm{J}_{-n}(x)=(-1)^n\mathrm{J}_n(x),\\ \mathrm{J}_n(-x)=(-1)^n\mathrm{J}_n(x),\\ \mathrm{J}_{-n}(-x)=\mathrm{J}_n(x),\\ \mathrm{J}_n(x)=\dfrac{x}{2n}[\mathrm{J}_{n-1}(x)+\mathrm{J}_{n+1}(x)],\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_n(x)=\dfrac{1}{2}[\mathrm{J}_{n-1}(x)-\mathrm{J}_{n+1}(x)].\end{cases} \tag{2.52}$$

超几何函数 $F(a,b,c;x)$是二阶线性常微分方程

$$(x^2-x)y''+[(a+b+1)x-c]y'+aby=0$$

的一个解，即

$$F(a,b,c;x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdot(b+n-1)}{n!\cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n$$

$$= 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \cdots. \quad (2.53)$$

其中 a,b,c **是常数.**

(1) sinkE, coskE 和 E 的展开式

这里将直接列出展开结果,它们在文[1～3]**中有详细的推导.**

对 $k=1$**,有**

$$\sin E = \frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{J}_n(ne)\sin nM, \quad (2.54)$$

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\mathrm{J}_{n-1}(ne) - \mathrm{J}_{n+1}(ne)]\cos nM$$

$$= -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[\mathrm{J}_n(ne)]\cos nM. \quad (2.55)$$

对 $k \geqslant 2$**,有**

$$\sin kE = k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\mathrm{J}_{n-k}(ne) + \mathrm{J}_{n+k}(ne)]\sin nM, \quad (2.56)$$

$$\cos kE = k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\mathrm{J}_{n-k}(ne) - \mathrm{J}_{n+k}(ne)]\cos nM. \quad (2.57)$$

由 $E=M+e\sin E$ **立即可得**

$$E = M + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{J}_n(ne)\sin nM. \quad (2.58)$$

(2) $\frac{r}{a}$ 和 $\frac{a}{r}$ 的展开式

由 $\frac{r}{a}=1-e\cos E$, $\frac{a}{r}=\frac{\partial E}{\partial M}$ **可得**

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[\mathrm{J}_n(ne)]\cos nM, \quad (2.59)$$

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_n(ne)\cos nM. \quad (2.60)$$

(3) sin$f$, cos$f$ 和 f 的展开式

利用偏导数关系式(2.31)**可得**

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{a}{r}\right)^{-1} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin f.$$

于是有

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$= 2\sqrt{1-e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[\mathrm{J}_n(ne)]\sin nM. \tag{2.61}$$

由轨道方程(2.15)**得出**

$$\begin{aligned}\cos f &= \frac{1}{e}\left[-1+(1-e^2)\frac{a}{r}\right]\\ &= -e+\frac{2}{e}(1-e^2)\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_n(ne)\cos nM,\end{aligned} \tag{2.62}$$

利用 $\sin f$ **和** $\cos f$ **的展开式，可给出** f **的展开式，取到** e^4 **项有**

$$\begin{aligned}f = {}& M+\left(2e-\frac{1}{4}e^3+\cdots\right)\sin M+\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4+\cdots\right)\sin 2M+\\ &\left(\frac{13}{12}e^3-\cdots\right)\sin 3M+\left(\frac{103}{96}e^4-\cdots\right)\sin 4M+\cdots.\end{aligned} \tag{2.63}$$

(4) $\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos mf$ **和** $\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin mf$ **的展开式**

这里 n **和** m **均是任意整数(包括** 0)**. 若仅用上述基本展开式，要给出这两个函数对** M **的三角级数(特别是一般表达式)，那是相当困难的，下面就对这两个函数直接进行傅立叶**(Fourier)**展开. 函数** $F(f)$ **展成傅立叶级数的基本形式为**

$$\begin{cases}F(f) = \dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}(a_p\cos pM+b_p\sin pM),\\ a_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F(f)\cos pM\,\mathrm{d}M,\\ b_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F(f)\sin pM\,\mathrm{d}M,(p=0,1,2,\cdots).\end{cases} \tag{2.64}$$

$\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos mf$ **是偶函数**，$b_p=0$，**且**

$$a_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n[\cos(mf-pM)+\cos(mf+pM)]\mathrm{d}M. \tag{2.65}$$

对于被积函数的第二部分，可令 p **取** $-p$，**此时** $p=-1,-2,\cdots,-\infty$，**于是有**

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos mf &= \sum_{p=-\infty}^{\infty}X_p^{n,m}(e)\cos pM\\ &= X_0^{n,m}(e)+\sum_{p=1}^{\infty}(X_p^{n,m}(e)+X_{-p}^{n,m}(e))\cos pM.\end{aligned} \tag{2.66}$$

其中

$$X_p^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos(mf-pM)\mathrm{d}M. \tag{2.67}$$

$\left(\dfrac{r}{a}\right)^n \sin mf$ 是奇函数，$a_p=0$，b_p 的计算公式为

$$b_p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n[\cos(mf-pM)-\cos(mf+pM)]\mathrm{d}M. \tag{2.68}$$

对于被积函数的第二部分的处理同上，结果得

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin mf&=\sum_{p=-\infty}^{\infty}X_p^{n,m}(e)\sin pM\\&=\sum_{p=1}^{\infty}(X_p^{n,m}(e)-X_{-p}^{n,m}(e))\sin pM.\end{aligned} \tag{2.69}$$

由于上述两个函数的展开式系数相同，可用指数形式将这两个函数用统一形式来表达，即

$$\begin{cases}\left(\dfrac{r}{a}\right)^n\exp(jmf)=\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty}X_p^{n,m}(e)\exp(jpM),\\ X_p^{n,m}(e)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{r}{a}\right)^n\exp[j(mf-pM)]\mathrm{d}M.\end{cases} \tag{2.70}$$

其中 $j=\sqrt{-1}$. 因

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin(mf-pM)\mathrm{d}M=0.$$

(2.70)式中的 $X_p^{n,m}(e)$ 就是由(2.67)式表达的 $X_p^{n,m}(e)$，称为汉森(Hansen)系数，它是偏心率 e 的函数. 但它无法用初等函数来表达，只能引用贝塞耳函数和超几何级数，详细推导见文献[1]和[4]，这里列出展开结果.

$$X_p^{n,m}=(1+\beta^2)^{-(n+1)}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_q(pe)X_{p,q}^{n,m}, \tag{2.71}$$

$$\beta=\frac{1}{e}(1-\sqrt{1-e^2})=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}. \tag{2.72}$$

$$X_{p,q}^{n,m}=\begin{cases}(-\beta)^{(p-m)-q}\dbinom{n-m+1}{p-m-q}F(p-q-n-1,-m-n-1,p-m-q+1,\beta^2),\\ \qquad\qquad (q\leqslant p-m),\\ (-\beta)^{q-(p-m)}\dbinom{n+m+1}{q-p+m}F(q-p-n-1,\ m-n-1,q-p+m+1,\beta^2),\\ \qquad\qquad (q\geqslant p-m).\end{cases} \tag{2.73}$$

其中
$$\begin{cases}\dbinom{n}{m}=\dfrac{n\,!}{m\,!(n-m)\,!},\quad \dbinom{-n}{m}=(-1)^m\dbinom{n+m-1}{m},\\ \dbinom{n}{-m}=\dbinom{-n}{-m}=0,\quad \dbinom{n}{0}=\dbinom{-n}{0}=1.\end{cases} \tag{2.74}$$

由(2.67)式即可给出

$$X_{-p}^{n,-m}(e)=X_{p}^{n,m}(e). \tag{2.75}$$

根据 $\mathrm{J}_q(pe)=O(e^q)$，可知

$$X_{p}^{n,m}(e)=O(e^{|m-p|}). \tag{2.76}$$

这两个性质在具体计算 $\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos mf$ 和 $\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin mf$ 的展开式时会用到.

以上各展开式的系数都是关于偏心率 e 的无穷级数，只有当 $e<e_c=0.6627\cdots$ 时才收敛，e_c 称为拉普拉斯(Laplace)极限.

给定 n,m 值和对 e 的取项要求后，根据性质(2.76)就可决定展开式(2.66)和(2.69)求和中 p 取值的范围. 对于人造地球卫星(甚至太阳系中大部分自然天体)的运动状况，绝大部分的轨道偏心率都是比较小的，取到 e^4 项有一定的实用价值. 为此，由性质(2.76)可知，展开式(2.66)和(2.69)的求和中，p 的取值如下：

$$\begin{cases} p=m-5+j,\ j=1,2,\cdots,9 \\ |m-p|\leqslant 4. \end{cases}$$

根据上面的分析，取到 e^4 项，只涉及 9 个 Hansen 系数，它们的简明表达式(e 的多项式)如下：

$$\begin{aligned} X_{m-4}^{n,m}(e)=\ &\frac{e^4}{384}[n^4-(18-8m)n^3+(95-102m+24m^2)n^2- \\ &(142-330m+192m^2-32m^3)n-(206m-283m^2+ \\ &120m^3-16m^4)], \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned} X_{m-3}^{n,m}(e)=&-\frac{e^3}{48}[n^3-(9-6m)n^2+(17-33m+12m^2)n+ \\ &m(26-30m+8m^2)], \end{aligned} \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned} X_{m-2}^{n,m}(e)=\ &\frac{e^2}{8}[n^2-(3-4m)n+m(4m-5)]+\frac{e^4}{96}[n^4- \\ &(6-4m)n^3-(1+3m)n^2+(22-47m+48m^2- \\ &16m^3)n+m(22-64m+60m^2-16m^3)], \end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned} X_{m-1}^{n,m}(e)=&-\frac{e}{2}(n+2m)-\frac{e^3}{16}[n^3-(1-2m)n^2-(3-5m+ \\ &4m^2)n-m(2-10m+8m^2)], \end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned} X_{m}^{n,m}(e)=\ &1+\frac{e^2}{4}(n^2+n-4m^2)+\frac{e^4}{64}[n^4-2n^3-(1+8m^2)n^2+ \\ &2n-m^2(9-16m^2)], \end{aligned} \tag{2.81}$$

$$X_{m+1}^{n,m}(e)=-\frac{e}{2}(n-2m)-\frac{e^3}{16}[n^3-(1+2m)n^2-(3+5m+$$

$$4m^2)n + m(2 + 10m + 8m^2)]. \tag{2.82}$$

$$X_{m+2}^{n,m}(e) = \frac{e^2}{8}[n^2 - (3+4m)n + m(4m-5)] + \frac{e^4}{96}[n^4 - (6+4m)n^3 - (1-3m)n^2 + (22+47m+48m^2+16m^3)n - m(22+64m+60m^2+16m^3)], \tag{2.83}$$

$$X_{m+3}^{n,m}(e) = -\frac{e^3}{48}[n^3 - (9+6m)n^2 + (17+33m+12m^2)n - m(26+30m+8m^2)]. \tag{2.84}$$

$$X_{m+4}^{n,m}(e) = \frac{e^4}{384}[n^4 - (18+8m)n^3 + (95+102m+24m^2)n^2 - (142+330m+192m^2+32m^3)n + (206m+283m^2+120m^3+16m^4)]. \tag{2.85}$$

事实上,上述 Hansen 系数 $X_{m-k}^{n,m}(e)$与 $X_{m+k}^{n,m}(e)$还存在如下关系:

$$X_{m-k}^{n,m}(e) = X_{(-m)+k}^{n,(-m)}(e), k = 0,1,2\cdots. \tag{2.86}$$

因此,展开式取到 e^4 项时,实际上只要给出 5 个 Hansen 系数 $X_{m+k}^{n,m}(e)$, $k=0,1,2,3,4$.

利用(2.77)~(2.85)式,很容易给出地球非球形引力主要摄动项和第三体引力摄动中涉及到的如下六个函数的展开式:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \left(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{15}{8}e^4\right) + \left(3+\frac{27}{8}e^2\right)e\cos M + \left(\frac{9}{2}+\frac{7}{2}e^2\right)e^2\cos 2M + \frac{53}{8}e^3\cos 3M + \frac{77}{8}e^4\cos 4M, \tag{2.87}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}e^2\right)e\cos M + \left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{41}{48}e^4\right)\cos 2M + \left(\frac{7}{2}-\frac{123}{16}e^2\right)e\cos 3M + \left(\frac{17}{2}-\frac{115}{6}e^2\right)e^2\cos 4M + \frac{845}{48}e^3\cos 5M + \frac{533}{16}e^4\cos 6M, \tag{2.88}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2f = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}e^2\right)e\sin M + \left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{37}{48}e^4\right)\sin 2M + \left(\frac{7}{2}-\frac{123}{16}e^2\right)e\sin 3M + \left(\frac{17}{2}-\frac{115}{6}e^2\right)e^2\sin 4M + \frac{845}{48}e^3\sin 5M + \frac{533}{16}e^4\sin 6M, \tag{2.89}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \left(1+\frac{3}{2}e^2\right) + \left(-2e+\frac{1}{4}e^3\right)\cos M +$$

$$\left(-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{6}e^4\right)\cos 2M-\frac{1}{4}e^3\cos 3M-\frac{1}{6}e^4\cos 4M, \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f=&\frac{5}{2}e^2+\left(-3e+\frac{4}{3}e^3\right)\cos M+\\&\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{11}{8}e^4\right)\cos 2M+\left(e-\frac{19}{8}e^3\right)\cos 3M+\\&\left(e^2-\frac{5}{2}e^4\right)\cos 4M+\frac{25}{24}e^3\cos 5M+\frac{9}{8}e^4\cos 6M,\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f=&\left(-3e+\frac{23}{12}e^3\right)\sin M+\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{3}{2}e^4\right)\sin 2M+\\&\left(e-\frac{19}{8}e^3\right)\sin 3M+\left(e^2-\frac{5}{2}e^4\right)\sin 4M+\frac{25}{24}e^3\sin 5M\\&+\frac{9}{8}e^4\sin 6M.\end{aligned} \tag{2.92}$$

这里要说明一点，展开式(2.66)**和**(2.69)**式的收敛性能并不好，首先当** $e>e_c=0.6627\cdots$ **时，展开式发散. 因此对展开式截断误差的估计就不像一般二项式** $(1+e)^n$ **展开那么简单，特别当** $e>0.2$ **时，而在** $e<0.2$ **时，勉强可用估计式** $O(\varepsilon^{k+1})$ **来表达展开式取到** e^k **项的截断误差，**$\varepsilon=\dfrac{e}{e_c}$.

除上述展开式外，有些工作还需要其他类型的展开式，下面详细说明.

(5) $\left(\dfrac{a}{r}\right)^p$**，**$E$**，**$f-M$ **对** f **的展开式**

$$\left(\frac{a}{r}\right)^p=(1-e^2)^{-p/2}\left[T_0(p,0)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(p,0)\binom{p}{n}\beta^n\cos nf\right], \tag{2.93}$$

其中 p **为正负整数，**β **的意义同前，见**(2.72)**式，**$T_n(p,q)$ **由超几何级数定义**[2]**，即**

$$T_n(p,q)\equiv F\left(-p-q,p-q+1,n+1,-\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right). \tag{2.94}$$

当 $p=-1,-2$ **时有**

$$T_n(-1,0)=T_0(-1,0)=1,$$

$$T_n(-2,0)=\frac{1}{n+1}\left(n+\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right),T_0(-2,0)=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.$$

于是可得
$$\left(\frac{r}{a}\right)=\sqrt{1-e^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\beta^n\cos nf\right], \tag{2.95}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \sqrt{1-e^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+n\sqrt{1-e^2})\beta^n\cos nf\right]. \tag{2.96}$$

这两个展开式下面将要用到. 由

$$\frac{\partial E}{\partial f} = (1-e^2)^{-1/2}\left(\frac{r}{a}\right), \quad \frac{\partial M}{\partial f} = (1-e^2)^{-1/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2,$$

利用展开式(2.95)和(2.96),积分后即得

$$E = f + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\beta^n\sin nf, \tag{2.97}$$

$$f - M = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^2}\right)\beta^n\sin nf. \tag{2.98}$$

6. 一些函数的平均值

采用有摄二体问题作为人造卫星绕地球运动的数学模型时,需要求出卫星椭圆轨道的摄动变化,而这些变化又将包含周期项与非周期项这两类性质截然不同的部分. 为了计算和理论分析的需要,有必要把它们分开. 如何分解呢?有些量无法直接看出其性质,如$\left(\frac{a}{r}\right)$,$\cos f$ 等,它们是 f 的周期函数,但对时间 t 积分时,在一个卫星运动周期内的累积效果不为零(除非偏心率 $e=0$);也就是说,这种类型的摄动力所引起的卫星轨道变化并不完全是周期性的. 为此,我们可用求平均值的方法来加以区分.

任一函数 $F(t)$,在一个卫星运动周期 T 内的平均值$\overline{F}$定义为

$$\overline{F} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.99}$$

若记 F_S 和 F_c 分别为周期项和非周期项,则显然有

$$F_c = \overline{F}, \quad F_S = F - \overline{F}. \tag{2.100}$$

于是,我们可用对一个卫星运动周期求平均值的方法把周期项分离出来,相应的函数 F 即被分解成两个部分:

$$F(t) = F_c + F_S(t). \tag{2.101}$$

从上述各表达式可清楚地看出,在求积分(2.99)式时,到底采用什么方法,并不影响由(2.100)和(2.101)式表达的函数分解结果的严格性. 因此,尽管这一分解是针对后面求卫星轨道摄动变化的需要,可这里计算积分(2.99)时,却能采用椭圆运动关系. 当然,考虑摄动时,运动周期 T 及所有椭圆轨道根数均要发生缓慢的变化,但它不会改变周期项 F_S 的基本特征. 上述分解不仅严格,而且仍然保持原分解的意义.

讨论卫星轨道变化时所涉及到的摄动力,对应各种各样的函数,但需要通过求平均值来分离周期项的,基本上有下面四类:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf,\qquad \left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf,$$
$$\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\sin qf,\qquad \left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\cos qf,\qquad (p,q=0,1,2,\cdots)$$

另一些特殊形式,在有关章节中再讨论.

首先通过几个特例来介绍求平均值的基本方法以及平均值的特征,并借此熟悉一下前面所介绍的各种椭圆关系式的具体应用.

(1) $p=0,q=1$ **时的** $\sin f$ **和** $\cos f$:

$$\begin{aligned}\overline{\sin f} &= \frac{1}{T}\int_0^T \sin f\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin f\mathrm{d}M\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin f\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2}\sin E\mathrm{d}E\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\cos f} &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos f\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos f\mathrm{d}M\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos f\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos E-e)\mathrm{d}E\\ &= -e.\end{aligned}$$

(2) $p=3,q=0$ **时的** $\left(\frac{a}{r}\right)^3$:

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} &= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{a}{r}\right)^3\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(1-e^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}f\\ &= \frac{1}{2\pi}(1-e^2)^{-3/2}\int_0^{2\pi}(1+e\cos f)\mathrm{d}f\\ &= (1-e^2)^{-3/2}.\end{aligned}$$

(3) $p=-1,q=0$ **时的** $\left(\frac{r}{a}\right)$:

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{r}{a}\right)} &= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}E\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-e\cos E)^2\mathrm{d}E\\ &= 1+\frac{1}{2}e^2.\end{aligned}$$

这三个例子,一方面可使我们看出求平均值的方法,基本上是采用时间 t **与近点角** E,f **之间的变换和相应的几何关系. 另外,还可以看出,对不同的量**

所求的平均值是不同的,例如 $\cos f$ 对 f 的平均值显然为 0,而对 t 的平均值却是 $-e$,这正说明椭圆运动的不均匀性.

下面不加推导地把上述四类函数平均值的一般表达式直接写出来,以供读者查用,具体证明留给读者作为习题.

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf} = 0,(p,q = 0,1,2,\cdots). \tag{2.102}$$

$$\overline{\cos qf} = (1+q\sqrt{1-e^2})\left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q,(p,q = 0,1,2,\cdots). \tag{2.103}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)\cos qf} = \left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q,(p,q = 0,1,2,\cdots). \tag{2.104}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf} = \begin{cases} 0,\ (p \geqslant 2, q \geqslant p-1), \\ (1-e^2)^{-\left(p-\frac{3}{2}\right)} \displaystyle\sum_{n(2)=q}^{(p-2)-\delta} \binom{p-2}{n} \left[\begin{matrix} n \\ \frac{1}{2}(n-q) \end{matrix}\right] \left(\frac{e}{2}\right)^n, \\ \qquad (p \geqslant 2, q < p-1). \end{cases} \tag{2.105}$$

$$\delta = \frac{1-(-1)^{p-q}}{2}. \tag{2.106}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\cos qf} = 0,(p \geqslant 0, q \geqslant 0). \tag{2.107}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2 (f-M)\sin qf} = -\frac{1}{q}\frac{\overline{\cos qf}}{\sqrt{1-e^2}},(q \geqslant 1). \tag{2.108}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\sin qf} = (1-e^2)^{-\left(p-\frac{3}{2}\right)} \sum_{n=0}^{p-2}\sum_{m=0}^{n} \binom{p-2}{n}\binom{n}{m}\left(\frac{e}{2}\right)^n \times \left(-\frac{\overline{\cos(q+n-2m)f}}{q+n-2m}\right)_{2m\neq q+n},(p \geqslant 3, q \geqslant 1). \tag{2.109}$$

对于 $p=0,1$ 的情况,很少遇到,这里不再讨论. (2.105)式求和中 $n(2)=q$ 表示取值“步长”为 2,即 $n=q,q+2,\cdots$,以后出现类似符号不再说明. 上述推导中要用到有关三角函数的两个表达式:

$$\begin{aligned} \sin^n f &= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{\frac{1}{2}(2m+n-\delta_1)}\binom{n}{m}[(1-\delta_1)\cos(n-2m)f + \\ &\quad \delta_1 \sin(n-2m)f] \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(n-\delta_1)} 2^{\delta_2}(-1)^{\frac{1}{2}(2m+n-\delta_1)}\binom{n}{m}[(1-\delta_1)\cos(n-2m)f + \end{aligned}$$

$$\delta_1 \sin(n-2m)f], \tag{2.110}$$

$$\cos^n f = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cos(n-2m)f$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(n-\delta_1)} 2^{\delta_2}\binom{n}{m}\cos(n-2m)f. \tag{2.111}$$

其中

$$\delta_1 = \frac{1-(-1)^n}{2},\quad \delta_2 = \begin{cases}1, n-2m\neq 0,\\ 0, n-2m=0.\end{cases} \tag{2.112}$$

为了读者方便,在书末附录中列出一些常用函数的平均值.

§2.3　位置矢量和速度矢量与轨道根数之间的转换关系

1. 星历计算

对于椭圆运动,一旦相应的六个积分常数(即轨道根数)被确定,轨道就被确定,由此即可计算任何时刻卫星的空间位置,这就是星历计算.

已知时刻 t 的六个椭圆根数 $a, e, i, \Omega, \omega, M$,要计算相应的卫星空间位置,可分三步:

首先也是最重要的一步,由 M 和 e 计算偏近点角 E,即解开普勒方程

$$E = M + e\sin E.$$

这虽然是一超越方程,但 $e<1$(有时很小),解此方程的方法很多(如简单迭代法,微分改正法等),读者是清楚的,这里不必多述.

得到 E 后,就可利用(2.42)式计算卫星的空间位置向量 $\boldsymbol{r}$,即

$$\boldsymbol{r} = a(\cos E - e)\hat{\boldsymbol{P}} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\hat{\boldsymbol{Q}}.$$

至于$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$的计算,可利用旋转矩阵(2.44)式,亦可直接用(2.45)式,依需要而定.

最后一步即将 $\boldsymbol{r}$ 转换为站心坐标 $\boldsymbol{\rho}(\rho,\alpha,\delta)$ 或 $\boldsymbol{\rho}'(\rho, A, h)$,前者即站心赤道坐标,由

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} \tag{2.113}$$

得

$$\begin{pmatrix}\rho\cos\delta\cos\alpha\\ \rho\cos\delta\sin\alpha\\ \rho\sin\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-X\\ y-Y\\ z-Z\end{pmatrix}. \tag{2.114}$$

即
$$\rho^2=(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2, \tag{2.115}$$
$$\alpha=\arctan\left(\frac{y-Y}{x-X}\right),\quad \delta=\arcsin\left(\frac{z-Z}{\rho}\right). \tag{2.116}$$
其中 $\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$是测站坐标. 若要给出站心地平坐标(ρ,A,h),只需简单的坐标转换,详见第一章 § 1.2.

2. 由位置矢量和速度矢量计算轨道根数

给定 t_0 时刻的卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0,z_0)$和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}_0(\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$,计算相应的六个椭圆轨道根数,这正是上一节星历计算的逆问题. 因此,仍旧是那些椭圆运动关系式的简单应用.

(1) 根数 a,e,M_0 的计算

这三个根数可以确定卫星在轨道平面内相对于近地点的位置,利用下述椭圆运动关系式就可算出它们,即
$$\frac{1}{a}=\frac{2}{r_0}-\frac{v_0^2}{\mu}, \tag{2.117}$$
$$e\cos E_0=1-\frac{r_0}{a}, \tag{2.118}$$
$$e\text{sine}_0=r_0\dot{r}_0/\sqrt{\mu a}, \tag{2.119}$$
$$M_0=E_0-e\sin E_0. \tag{2.120}$$
其中(2.119)式是由(2.42)和(2.48)两式表达的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 进行数量乘积得到的. r_0,v_0 和 $r_0\dot{r}_0$ 由下式计算
$$\begin{cases} r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2, \\ v_0^2=\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2, \\ r_0\dot{r}_0=\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=x_0\dot{x}_0+y_0\dot{y}_0+z_0\dot{z}_0. \end{cases} \tag{2.121}$$
(2) 三个定向根数 i,Ω,ω 的计算

这三个根数确定了$\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$三个单位矢量,因此,要计算它们就必须利用椭圆运动关系中有关 $\boldsymbol{r}$ 和$\dot{\boldsymbol{r}}$,$\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$之间的关系. 由(2.42)和(2.48)式容易解出
$$\hat{\boldsymbol{P}}=\frac{\cos E}{r}\boldsymbol{r}-\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sin E\dot{\boldsymbol{r}}, \tag{2.122}$$
$$\sqrt{1-e^2}\,\hat{\boldsymbol{Q}}=\frac{\sin E}{r}\boldsymbol{r}+\sqrt{\frac{a}{\mu}}(\cos E-e)\dot{\boldsymbol{r}}. \tag{2.123}$$
另外,动量矩积分给出

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}). \tag{2.124}$$

由 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 和已算出的 a,e,E_0，即可通过上面三个表达式计算 $\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$，但不必计算全部分量，只需要 $\boldsymbol{P}_z$，$\boldsymbol{Q}_z$ 和 $\boldsymbol{R}_x,\boldsymbol{R}_y$，$\boldsymbol{R}_z$. 根据 §2.2 给出的 $\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$ 表达式可知，这五个分量与 i,Ω,ω 的关系为

$$\begin{cases} P_z = \sin i\sin\omega, & Q_z = \sin i\ \cos\omega, \\ R_x = \sin i\sin\Omega, & R_y = -\sin i\ \cos\Omega\ , \quad R_z = \cos i. \end{cases} \tag{2.125}$$

那么

$$\begin{cases} \omega = \arctan\ (P_z/Q_z)\ , \\ \Omega = \arctan\ (R_x/(-R_y)), \\ i = \arccos R_z. \end{cases} \tag{2.126}$$

计算 ω,Ω 与 E_0 一样，均有确定象限问题，故必须用两个三角函数值，而对 i 只需用一个 $\cos i$ 值就够了，关于这一点，读者是容易理解的.

§2.4　抛物线轨道和双曲线轨道

尽管从天体力学这一角度来看，显然应该着重讨论椭圆轨道及其变化，但有些问题，如深空探测器的运动，也会涉及抛物线轨道和双曲线轨道，特别是双曲线轨道. 因此，作为二体问题，对这两种轨道作一简单介绍也是有必要的.

1. 抛物线轨道

动量矩积分(2.3)以及法向单位矢量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 与轨道平面的定向根数 (i,Ω) 之间的关系(2.4)仍不变，但此时，$e=1$，$a\to\infty$，故面积积分(2.6)式和轨道积分(2.12)式变为

$$r^2\dot{\theta} = \sqrt{\mu p}, \quad p = 2q, \tag{2.127}$$

$$r = \frac{p}{1+\cos(\theta-\omega)}. \tag{2.128}$$

该抛物线的焦点仍在中心天体上，p 是半通径，q 是近星距. 定义 f 为真近点角，有

$$f = \theta - \omega. \tag{2.129}$$

那么(2.127)和(2.128)式即可分别写成下列形式

$$r^2\dot{f} = \sqrt{2\mu q}, \tag{2.130}$$

$$r = \frac{p}{1+\cos f} = q\sec^2\frac{f}{2}, \tag{2.131}$$

将后一式代入前一式,积分得

$$2\tan\frac{f}{2} + \frac{2}{3}\tan^3\frac{f}{2} = \sqrt{2\mu}q^{-\frac{3}{2}}(t-\tau). \tag{2.132}$$

其中 τ 是最后一个积分常数,与椭圆运动类似,它也是运动天体 m 过近星点的时刻. 因此,抛物线轨道根数由于 $e=1$ 只剩下 5 个,即 i,Ω,q,ω,τ.

2. 双曲线轨道

与抛物线轨道类似,动量矩积分(2.3)以及法向单位矢量 $\hat{R}$ 的表达式(2.4)仍不变,但此时,$e>1$,相应的面积积分(2.6)式和轨道方程(2.12)式变为

$$r^2\dot{\theta} = \sqrt{\mu p}, \tag{2.133}$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos f}. \tag{2.134}$$

其中

$$p = a(e^2-1), \tag{2.135}$$

$$f = \theta - \omega. \tag{2.136}$$

这里 p 亦为半通径,p 和 a 的几何关系见图 2.3,f 是真近点角,ω 是近星点角距,而相应的近星距为

$$r_p = a(e-1). \tag{2.137}$$

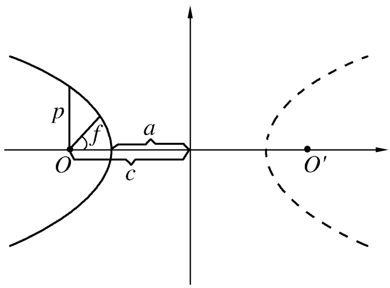

图 2.3 探测器相对目标天体(焦点 O)的双曲线轨道

活力公式(2.16)在这里变为下列形式:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right). \tag{2.138}$$

类似椭圆运动的积分方法,由(2.138)式利用(2.133)式消除 $\dot{\theta}$ 得

$$n a \mathrm{d}t = \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{(r+a)^2 - a^2 e^2}}. \tag{2.139}$$

其中

$$n = \sqrt{\mu a}^{\,-3/2}. \tag{2.140}$$

引进辅助量 E

$$r = a(e\mathrm{ch}E - 1). \tag{2.141}$$

代入(2.139)式,积分得

$$e\mathrm{sh}E - E = n(t-\tau) = M. \tag{2.142}$$

其中 τ 为第六个积分常数,亦是过近星点的时刻. 虽然这里引进的 E 与椭圆运动中的偏近点角 E 意义不同,但上述 f,E 和 M 之间的关系与椭圆运动中的相应关系类似,即

$$\begin{cases} r\cos f = a(e - \mathrm{ch}E), \\ r\sin f = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}E, \end{cases} \tag{2.143}$$

$$\tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{th}\,\frac{E}{2}. \tag{2.144}$$

由轨道方程(2.134)不难看出,$1+e\cos f=0$,$r\to\infty$,于是可知

$$-\pi + \arccos\left(\frac{1}{e}\right) \leqslant f \leqslant \pi - \arccos\left(\frac{1}{e}\right). \tag{2.145}$$

方程(2.142)类似于椭圆运动中的 Kepler 方程,但由于 $e>1$,不能用一般的迭代法求解,若用微分改正法(即简单的牛顿法),亦容易由给定的 e,M 求出 E. 若取初值 $E=E^{(0)}$,则改正公式为

$$\begin{cases} \Delta E = \dfrac{M - (e\mathrm{sh}E^{(0)} - E^{(0)})}{e\mathrm{ch}E^{(0)} - 1}, \\ E^{(1)} = E^{(0)} + \Delta E. \end{cases} \tag{2.146}$$

例:由 $e=1.5$,$M=\pi/4=0.785398163$,求 E 值.

经计算,取 $E^{(0)}=M$,相应的改正过程如下:

$$E^{(1)} = 1.056738913,$$
$$E^{(2)} = 1.018032116,$$
$$E^{(3)} = 1.016994172,$$
$$E^{(4)} = 1.016993449.$$

$E^{(4)}$ 对应的值 $e\mathrm{sh}E-E=0.785398163$,与 M 的值在 9 位有效数字上完全相同. 当然还可充分利用当代计算机的条件,采用更快速的"迭代"算法,这里只是举一个简单的算例供读者参考.

3. 位置矢量和速度矢量的计算公式

对于上述两种轨道，运动天体的位置矢量 r 的表达式与椭圆轨道相同，即

$$\boldsymbol{r} = r\cos f\,\hat{\boldsymbol{P}} + r\sin f\,\hat{\boldsymbol{Q}}. \tag{2.147}$$

其中$\hat{P}$和$\hat{Q}$即近星点方向和半通径方向的单位矢量，它们的表达式与椭圆运动中的形式相同，见(2.45)和(2.46)两式.

速度矢量$\dot{r}$的表达式，两种轨道稍有不同，对于抛物线轨道和双曲线轨道分别为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}\left[(-\sin f)\,\hat{\boldsymbol{P}} + (\cos f + 1)\,\hat{\boldsymbol{Q}}\right], \\ p = 2q, \end{cases} \tag{2.148}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}\left[(-\sin f)\,\hat{\boldsymbol{P}} + (\cos f + e)\,\hat{\boldsymbol{Q}}\right], \\ p = a(e^2 - 1). \end{cases} \tag{2.149}$$

对于双曲线轨道，还可以用辅助量 E 来表达 $\boldsymbol{r}$ 和$\dot{\boldsymbol{r}}$ 的计算公式，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = a(e - \operatorname{ch}E)\,\hat{\boldsymbol{P}} + a\sqrt{e^2 - 1}\,\operatorname{sh}E\,\hat{\boldsymbol{Q}}, \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\sqrt{\mu a}}{r}\left[(-\operatorname{sh}E)\,\hat{\boldsymbol{P}} + (\sqrt{e^2 - 1}\,\operatorname{ch}E)\,\hat{\boldsymbol{Q}}\right]. \end{cases} \tag{2.150}$$

4. 双曲线轨道中由位置矢量和速度矢量计算轨道根数

由下列各式分别计算 a, e, E, M：

$$\frac{1}{a} = \frac{v^2}{\mu} - \frac{2}{r}, \tag{2.151}$$

$$\begin{cases} e\operatorname{sh}E = (r\dot{r})/\sqrt{\mu a}, \\ e\operatorname{ch}E = \left(\dfrac{r}{a}\right) + 1, \end{cases} \tag{2.152}$$

$$\begin{cases} e^2 = (e\operatorname{ch}E)^2 - (e\operatorname{sh}E)^2, \\ E = \operatorname{Arth} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \quad x = \dfrac{e\operatorname{sh}E}{e\operatorname{ch}E}, \end{cases} \tag{2.153}$$

$$M = e\operatorname{sh}E - E. \tag{2.154}$$

关于 i, Ω, ω 的计算，与椭圆轨道中的计算基本相同，有

$$\cos i = (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})_z/\sqrt{\mu p}, \tag{2.155}$$

$$\begin{cases}\sin i\ \sin\Omega=(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})_x/\sqrt{\mu p}\,,\\ \sin i\ \cos\Omega=-(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})_y/\sqrt{\mu p}\,,\end{cases}\tag{2.156}$$

$$\begin{cases}\sin i\ \sin\omega=P_z\,,\\ \sin i\ \cos\omega=Q_z\,,\end{cases}\tag{2.157}$$

其中

$$P_z=(\hat{\boldsymbol{P}})_z\,,\quad Q_z=(\hat{\boldsymbol{Q}})_z\,,\tag{2.158}$$

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{P}}=\left(\dfrac{\mathrm{ch}E}{r}\right)\boldsymbol{r}-\left(\sqrt{\dfrac{a}{\mu}}\mathrm{sh}E\right)\dot{\boldsymbol{r}}\,,\\ \hat{\boldsymbol{Q}}=\dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}\left[\left(\dfrac{\mathrm{sh}E}{r}\right)\boldsymbol{r}+\sqrt{\dfrac{a}{\mu}}(e-\mathrm{ch}E)\ \dot{\boldsymbol{r}}\right].\end{cases}\tag{2.159}$$

§2.5　初轨计算

初轨计算无论在航天任务中，还是在太阳系各种小天体(小行星、自然卫星等)的发现过程中，都是不可缺少的. 在自然天体和人造天体的定轨问题中，通常所说的初轨计算是指二体问题意义下的短弧定轨，相对受摄二体问题意义下的精密定轨而言，它定出的是初轨(initial orbit)，除直接被引用外，它主要为精密定轨提供初值(或称初始估计)，经大量观测资料改进后的初轨就是在一定意义下的精轨，这一过程过去称为轨道改进，现在常与和定轨有关的一些几何和物理参数同时确定，被称为精密定轨，这就完全拓宽了轨道改进的概念.

初轨计算和精密定轨计算都是通过一个迭代过程完成的，但它们却有重大区别. 初轨计算对应一个特定的迭代过程，它不同于精密定轨中的多变元迭代过程，不过对于测距和测速等类型的测量资料，只能采用多变元迭代过程. 但是，我们一般所说的初轨计算，主要是针对测角资料(赤道型资料 α,δ 和地平型资料 A,h 等)的，或是将测距或测速资料转化成相应的形式. 而对于这些类型的测量资料，初轨计算可以由简单的迭代计算完成，不会出现多变元迭代所遇到的各种问题. 在天体力学发展的几百年历史中，就出现过测角型资料的多种定轨方法，就其实质而言可以归纳为 Laplace 型和 Guass 型两类方法[5～9]，特别在当今计算技术高度发展的背景下，Laplace 型方法显得更加简洁有效. 这里将重点介绍这一方法及其推广形式.

通常所说的 Laplace 型初轨计算方法，就是指在二体问题意义下的轨道计算方法. 事实上我们完全可以把这种类型的初轨计算方法推广到一般

受摄二体问题,既可以计算椭圆轨道,亦可以计算双曲线轨道.

随着地球卫星测量精度的提高(例如测角精度可达角秒级)和深空探测的发展,将会遇到各种目标天体轨道器的初轨计算问题,主星扁率摄动、第三体引力摄动等均可达到较大的程度,而且探测器飞往目标天体附近,在未变轨前处于双曲线轨道运行状态.因此针对精度要求的提高和力模型的复杂化,有必要建立一个适用范围广的初轨计算方法.为此,在经典 Laplace 方法基础上进行了推广,对于该方法不妨称其为广义 Laplace 方法.尽管这种方法可适用于受摄二体问题,但其基本原理和计算过程与二体问题意义下的 Laplace 方法并无重大区别,故该方法还是简单实用的.

1. 方法原理

选取空间坐标系 $O-xyz$,坐标原点是中心天体的质心,其坐标面 xy 可有多种选择.对于人造地球卫星,通常取地球赤道面,月球轨道器,即取月球赤道面,对小行星而言即取为日心黄道面等,总之,根据研究的对象而定.类似于精密定轨中的提法,初轨计算同样涉及到两类方程,即对应测量方程和状态微分方程的测量几何关系和天体运动方程.

(1) 几何条件——测量几何关系

在所选取的坐标系中(见图 2.4),测量几何满足如下关系:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{R}. \tag{2.160}$$

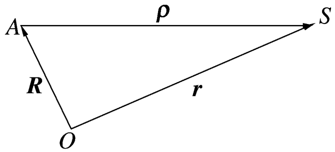

图 2.4 中心天体 O、测站 A 和运动天体 S 的相对几何构形

其中 $\boldsymbol{r}$ 是运动天体的位置矢量,$\boldsymbol{\rho}$ 是观测矢量,对于测角资料而言,即 $\boldsymbol{\rho}(\rho,\alpha,\delta)$ 或 $\boldsymbol{\rho}(\rho,A,h)$,其中测角量$(\alpha,\delta)$或$(A,h)$即赤经赤纬或方位角高度角.在坐标系 $O-xyz$ 中,$\boldsymbol{\rho}$ 可写成下列形式:

$$\boldsymbol{\rho}=\rho\hat{\boldsymbol{L}},\quad \hat{\boldsymbol{L}}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}. \tag{2.161}$$

直角坐标分量(λ,μ,ν)可由测角量(α,δ)或(A,h)经简单的坐标转换给出.如果在历元地心平赤道坐标系对人造卫星定轨,而测角量(α,δ)又是通过定标星给出的,即与定轨坐标系一致,则有

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}. \tag{2.162}$$

由于(A,h)资料对应的是瞬时真地平坐标系,于是有

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=(\mathbf{GR})^{\mathrm{T}}(\mathbf{ZR})\begin{pmatrix}\cos h\cos A\\ -\cos h\sin A\\ \sin h\end{pmatrix}. \tag{2.163}$$

其中$(\mathbf{GR})=(\mathbf{NR})(\mathbf{PR})$是岁差章动矩阵，在第一章 §1.2 中已给出具体表达式，而$(\mathbf{ZR})$是瞬时真赤道坐标系与地平坐标系之间的转换矩阵，在第一章 §1.2 中也有其具体表达式. 测站坐标矢量 $\boldsymbol{R}$ 是给定的，有

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}. \tag{2.164}$$

(2) 动力学条件——天体运动方程

在坐标系 $O-xyz$ 中，运动天体相对中心天体(质量记为 M)的运动方程即

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{r}}=-\dfrac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon),\\ t_0:\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0),\quad \dot{\boldsymbol{r}}_0=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0).\end{cases} \tag{2.165}$$

其中 $\mu=GM$ 是中心天体的质心引力常数. 摄动加速度 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 对应各种力学因素，可以是保守力效应，亦可以是耗散效应，只要能写出相应力学因素的数学模型即可. 这里给出的初轨计算方法并不限于无摄运动，它可适用于不同类型的受摄运动，包括变化的椭圆轨道和双曲线轨道，计算给出的将是历元 t_0 时刻的瞬时椭圆轨道或是瞬时双曲线轨道.

(3) 初轨计算的基本方程

与精密定轨中对测量方程线性化后给出的条件方程(即精密定轨的基本方程)[9]类似，将运动天体所遵循的动力学条件引入测量几何关系(2.160)，构成初轨计算的基本方程，不同的是动力学条件所对应的既不是运动方程(对应精密定轨中的状态微分方程)[9]的数值解，亦不是小参数幂级数解(后面第四章中将要给出)，而是方程的另一种幂级数解，即时间间隔 $\Delta t=t-t_0$ 的幂级数解. 就中心天体的扁率摄动和第三体摄动而言，该级数解可写成如下形式：

$$\boldsymbol{r}(t)=F^*(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\boldsymbol{r}_0+G^*(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\dot{\boldsymbol{r}}_0. \tag{2.166}$$

其中 F^* 和 G^* 由 Δt 的幂级数表达，其具体形式下一段中给出. 以此解代入测量几何关系(2.160)可得

$$\hat{\boldsymbol{L}}\times(F^*\boldsymbol{r}_0+G^*\dot{\boldsymbol{r}}_0)=\hat{\boldsymbol{L}}\times\boldsymbol{R}. \tag{2.167}$$

对于一次测角采样资料，(2.167)式对应的三个方程只有两个是独立的，至

少需要三次采样才能定轨. 这是关于历元 t_0 时 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0(\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$ 形式上的线性代数方程. 如果能确定,那么再经简单的转换(见 §2.3 和 §2.4 中的有关内容)即可给出 t_0 时刻的瞬时轨道——椭圆轨道或双曲线轨道.

2. F,G 和 F_z,G_z 的表达式

只要运动方程(2.165)的右函数满足一定条件,其满足初始条件的解即存在,且可展成时间间隔 $\Delta t=t-t_0$ 的幂级数:

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_0^{(1)}\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}_0^{(2)}\Delta t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{r}_0^{(k)}\Delta t^k+\cdots. \tag{2.168}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0^{(k)}$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 对 t 的 k 阶导数在 t_0 点的取值,即

$$\boldsymbol{r}_0^{(k)}=\left(\frac{\mathrm{d}^k\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^k}\right)_{t=t_0}. \tag{2.169}$$

要给出级数阶(2.168)满足初始条件的具体形式,就需要计算各阶导数 $\boldsymbol{r}^{(k)}$ 在处 t_0 的值 $\boldsymbol{r}_0^{(k)}$. 事实上有 $\boldsymbol{r}_0^{(1)}=\dot{\boldsymbol{r}}_0$,而二阶以上各导数值 $\boldsymbol{r}^{(k)}(k\geqslant 2)$ 均可根据运动方程(2.165),由 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 构成,即

$$\boldsymbol{r}^{(k)}=\boldsymbol{r}^{(k)}(t_0,\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0),\quad k\geqslant 2. \tag{2.170}$$

对于无摄运动,级数解(2.166)中的 F^* 和 G^* 即 F 和 G,表达式简化为

$$\boldsymbol{r}(t)=F(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\boldsymbol{r}_0+G(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\dot{\boldsymbol{r}}_0. \tag{2.171}$$

对于 $\boldsymbol{r}(t)$ 的三个分量 $x(t),y(t),z(t)$,F 和 G 各具有同一形式,为一数量函数. 对应受摄运动,通常相应的 F^* 和 G^* 对于三个分量 x,y,z 各具有不同的形式. 下面就中心天体扁率摄动和第三体引力摄动给出其具体表达式,相应的两种摄动加速度为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon=\left(\frac{3J_2}{2}\right)\left[\left(5\frac{z^2}{r^7}-\frac{1}{r^5}\right)\boldsymbol{r}-\left(\frac{2z}{r^5}\right)\right]-\mu'\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3}-\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right). \tag{2.172}$$

为了便于量级分析和公式表达,这里已采用适当计算单位使各物理量无量纲化(详见后面第四章中的计算单位选取),相应的中心天体的质心引力常数 $\mu=GM=1$,$\mu'=GM'/GM$,M' 是第三体的质量. (2.172)式中的 J_2 为中心天体的动力学扁率. 其他有关量定义如下:

$$\hat{\boldsymbol{k}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'. \tag{2.173}$$

$\boldsymbol{r}'$ 为第三体的坐标矢量.

略去推导过程，并记 $\tau=\Delta t$，直接写出形如(2.166)式的 τ 的幂级数解如下[10]：

$$\begin{cases} x = F(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)x_0 + G(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\dot{x}_0, \\ y = F(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)y_0 + G(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\dot{y}_0, \\ z = F_z(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)z_0 + G_z(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\dot{z}_0. \end{cases} \tag{2.174}$$

相应的基本方程(2.167)式按分量形式书写如下：

$$\begin{cases} (F\nu)x_0-(F_z\lambda)z_0+(G\nu)\dot{x}_0-(G_z\lambda)\dot{z}_0=(\nu X-\lambda Z), \\ (F\nu)y_0-(F_z\mu)z_0+(G\nu)\dot{y}_0-(G_z\mu)\dot{z}_0=(\nu Y-\mu Z), \\ (F\mu)x_0-(F\lambda)y_0+(G\mu)\dot{x}_0-(G\lambda)\dot{y}_0=(\mu X-\lambda Y). \end{cases} \tag{2.175}$$

其中

$$\begin{aligned} F= & 1+\frac{\tau^2}{2}\left[-u_3+\left(\frac{3J_2}{2}\right)(5u_7z_0^2-u_5)-\mu'u_3'\right]+ \\ & \frac{\tau^3}{6}\left[(3u_5\sigma)+\left(\frac{3J_2}{2}\right)(5(u_7-7u_9z_0^2)\sigma+10u_7z_0\dot{z}_0)\right]+ \\ & \frac{\tau^4}{24}\left[u_5(3v_0^2-2u_1-15u_2\sigma^2)+\left(\frac{3J_2}{2}\right)(6u_8(4u_2z_0^2-1)-\right. \\ & 5u_7(7u_2z_0^2-1)v_0^2+10u_7\dot{z}_0^2+35u_9(9u_2z_0^2-1)\sigma^2- \\ & \left.140u_9\sigma z_0\dot{z}_0)+u_3(\mu'u_3')\right]+\frac{\tau^5}{120}u_7[15\sigma(-3v_0^2+2u_1+ \\ & 7u_2\sigma^2)]+\frac{\tau^6}{720}u_7[u_2\sigma^2(630v_0^2-420u_1-945u_2\sigma^2)-(22u_2 \\ & -66u_1v_0^2+45v_0^4)]+O(\tau^7), \end{aligned} \tag{2.176}$$

$$\begin{aligned} G= & \tau+\frac{\tau^3}{6}\left[-u_3+\left(\frac{3J_2}{2}\right)(5u_7z_0^2-u_5)-\mu'u_3'\right]+ \\ & \frac{\tau^4}{24}\left[6u_5\sigma+\left(\frac{3J_2}{2}\right)(20u_7z_0\dot{z}_0-10u_7(7u_2z_0^2-1)\sigma)\right]+ \\ & \frac{\tau^5}{120}u_5[9v_0^2-8u_1-45u_2\sigma^2]+ \\ & \frac{\tau^6}{720}u_7[30\sigma(-6v_0^2+5u_1+14u_2\sigma^2)]+O(\tau^7), \end{aligned} \tag{2.177}$$

$$\begin{aligned} F_z = F + \left(\frac{3J_2}{2}\right)\Big[& \frac{\tau^2}{2}(-2u_5)+\frac{\tau^3}{6}(10u_7\sigma)+ \\ & \frac{\tau^4}{24}u_7(10v_0^2-6u_1-70u_2\sigma^2)\Big], \end{aligned} \tag{2.178}$$

$$G_z = G + \left(\frac{3J_2}{2}\right)\left[\frac{\tau^3}{2}(-2u_5) + \frac{\tau^4}{24}(20u_7\sigma)\right], \tag{2.179}$$

$$\begin{cases} u_n = 1/r_0^n, \quad \sigma = \boldsymbol{r}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_0, \quad v_0^2 = \dot{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_0, \\ u_3{}' = 1/r'^3_0, \quad r'_0 = |\boldsymbol{r}'_0|. \end{cases} \tag{2.180}$$

这里 $\boldsymbol{r}'_0$ 是第三体位置矢量 $\boldsymbol{r}'$在历元 t_0 时的值，即 $\boldsymbol{r}_0{}'=\boldsymbol{r}'(t_0)$.

在上述无量纲的表达式中，$|\tau|<1$，级数解收敛是显然的，而且收敛范围还可扩大. 对于人造地球卫星而言，$|\tau|<1$ 对应的有量纲物理量——时间间隔 $\Delta t=|t-t_0|<13^m.4468$，这与初轨计算对应的短弧是相适应的. 注意，上述表达式中的 $\sigma=O(e)$是小量，e 是轨道偏心率.

在上述 F^*,G^*(即 F,G 和 F_z,G_z)的表达式中，由于 τ 通常较小，只有在 τ 的低次幂中考虑了摄动，而在 τ^5 以上幂次中未列入相应的结果，这是很自然的，要写出 τ 高次幂中的摄动项并无任何困难. 不仅如此，对于其他类型的摄动，只要给出相应的数学模型，总是可以导出相应的 F^*,G^* 的表达式，因为运动方程(2.165)的右端仅出现 $\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}$，高阶导数 $\boldsymbol{r}_0^{(k)}(k\geqslant2)$总是可以用 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 来表达的.

3. 广义 Laplace 初轨计算方法的定轨过程

由一列测角采样资料：$t_j,(\alpha_j,\delta_j)$或(A_j,h_j)，$j=1,2,\cdots N,N\geqslant3$ 即可由基本方程(2.168)进行定轨，即给出定轨历元 t_0 时的 $\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,t\in[t_1,t_N]$. 方程组(2.168)是关于 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 形式上的线性代数方程，只要知道 F,G,F_z,G_z，即可解出 $\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0$，而 F,G,F_z,G_z 均是 $\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的函数. 因此，这一定轨计算显然涉及一个迭代过程，但与精密定轨中的多变元迭代不同，它是一个特殊而简单的迭代过程. 由于

$$\begin{cases} F = 1 + O(\tau^2), \quad G = \tau + O(\tau^3), \\ F_z = 1 + O(\tau^2), \quad G_z = \tau + O(\tau^3), \end{cases} \tag{2.181}$$

而 $|\tau|<1$. 因此，即使对于运动天体的轨道一无所知，亦可以采用

$$F^{(0)} = 1, \quad G^{(0)} = \tau, \quad F_z^{(0)} = F^{(0)}, \quad G_z^{(0)} = G^{(0)} \tag{2.182}$$

作迭代初值，按方程(2.168)和(2.176)～(2.180)式进行迭代，直到

$$\begin{cases} \Delta F = |F^{(m)} - F^{(m-1)}|, \quad \Delta G = |G^{(m)} - G^{(m-1)}|, \\ \Delta F_z = |F_z{}^{(m)} - F_z{}^{(m-1)}|, \quad \Delta G_z = |G_z^{(m)} - G_z^{(m-1)}|, \end{cases} (m = 1,2,\cdots) \tag{2.183}$$

满足一定精度终止计算，给出结果 $t_0,\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0$，这和二体问题意义下的 Laplace 定轨方法就迭代过程而言没有任何差别.

获得 $t_0, \boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0$ 后,即可由简单的转换给出历元 t_0 时的椭圆轨道或双曲线轨道的瞬时根数 $a, e, i, \Omega, \omega, M$,具体转换关系已在前两节 §2.3 和 §2.4 中给出.

广义 Laplace 方法的定轨原理是严格的,如果用测角资料定轨,与二体问题一样,结果是唯一的,即所定出的轨道显然要通过三次观测对应的空间点. 正是由于这一原因,加上弧段又短,就使得资料误差会歪曲真实轨道,即定轨精度受到影响,特别是轨道半长径 a(这是一个很重要的根数)和偏心率 e. 例如,对于卫星椭圆轨道,应有 $a>1$,但有时因弧段短、资料精度又差,用拉普拉斯方法定出的轨道会出现 $a<1$ 的情况. 从前面的迭代计算中也可看出这一点,由于 F_j, G_j 的特点,通过方程(2.168)求解时,资料误差(反映在 λ_j, μ_j, ν_j 上)对 $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ 的影响较大,从而导致 a 和 e 有较大的误差.

上述问题并不是 Laplace 方法特有的,而是所有根据动力学原理通过三次观测(相应的弧段较短)严格定轨的一类方法的共同问题. 就人造地球卫星而言,考虑到下述观测的特点:

(1) 在一个较短的弧段内,可以得到较多的观测资料;

(2) 一天内可以得到多圈资料.

可以采用某些方法在一定程度上减轻资料误差的影响. 如采用多资料进行定轨,基本原理和方法以及计算过程不变,只是基本方程(2.175)式的个数增多,$j=1,2,\cdots,N, N\gg 3$,求解时采用简单的最小二乘法,给出 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的最佳解,这可充分利用统计信息减小资料误差的影响.

4. 其他类型资料的定轨问题

关于另一类 Guass 型方法,即首先确定两个以上的点位 $\boldsymbol{r}_j$($j=1,\cdots,k$, $k\geqslant 2$),然后再去定轨. 其定轨计算过程过于复杂,而基本原理与 Laplace 方法并无实质性差别,本书不再介绍. 这里将要给出另一种类似于 Laplace 方法的点位资料的定轨方法. 至于点位资料 $\boldsymbol{r}_j$,($j\geqslant 2$)的获得,并不是由 Guass 方法中所指的由测角资料根据复杂的转换过程获得,而是直接由测量得到. 一种方法是现代测量手段可以实现的,即在取得测角量(α, δ 或 A, h)的同时获得卫星到"测站"(实为测量设备)的距离量 ρ,由此即给出卫星的空间点位 $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r} = \rho \hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{R}.$$

相应的定轨基本方程(2.175)将由下列方程替代,即

$$\begin{cases} Fx_0 + G\dot{x}_0 = (\rho\lambda + X), \\ Fy_0 + G\dot{y}_0 = (\rho\mu + Y), \\ F_z z_0 + G_z\dot{z}_0 = (\rho\nu + Z). \end{cases} \tag{2.184}$$

只要有两次以上这样的采样资料即可定轨,定轨过程同前面第 3 段的介绍.另一种取得卫星点位的方法就是通过卫星导航定位(如星载 GPS 定位方法)获得,即直接获得卫星的空间位置矢量 $\boldsymbol{r}$,由此,定轨基本方程更简单,即

$$\begin{cases} Fx_0 + G\dot{x}_0 = x, \\ Fy_0 + G\dot{y}_0 = y, \\ F_z z_0 + G_z\dot{z}_0 = z. \end{cases} \tag{2.185}$$

§2.6 二体问题意义下的轨道机动

在航天器的运行过程中常常需要进行轨道调整(即轨道机动),这就涉及到变轨问题,而变轨又往往采用脉冲式,那么这一机动过程是短暂的,可以看成是瞬时变轨变轨前的轨道根数记作 $\sigma_1(a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1, M_1)$,而变轨后目标轨道的轨道根数记作 $\sigma_2(a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \omega_2, M_2)$,变轨前后的轨道差为 $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$,变轨后目标轨道的轨道根数就相当于一个边值条件.由于变轨时间短暂,可以看成是在二体问题意义下完成这一变轨过程,那么就需要在此前提下给出 $\Delta\sigma$ 与由脉冲能量获得的速度变化 $\Delta\boldsymbol{v}$ 之间的关系.由它们之间的函数关系 $\Delta\sigma = \Phi(\Delta\boldsymbol{v})$,根据目标轨道的不同要求选择变轨方式(对应一定的 $\Delta\boldsymbol{v}$).

瞬时椭圆轨道根数 σ 与位置矢量和速度矢量 $\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}$ 由严格的函数关系 $\sigma = f(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})$,§2.2 中已给出.这里将用到如下关系式:

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}\right)^{-1}, \tag{2.186}$$

$$\begin{cases} e\cos E = 1 - \dfrac{r}{a}, \\ e\sin E = \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} / \sqrt{\mu a}, \end{cases} \tag{2.187}$$

$$M = E - e\sin E, \tag{2.188}$$

$$\cos i = (x\dot{y} - y\dot{x}) / \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \tag{2.189}$$

$$\tan\Omega = (y\dot{z} - z\dot{y}) / (x\dot{z} - z\dot{x}), \tag{2.190}$$

$$\tan\omega = \frac{\sqrt{1-e^2}\left[e\cos E\left(\frac{z}{r}\right)-\sqrt{\frac{a}{\mu}}e\sin E\,\dot{z}\right]}{e\sin E\left(\frac{z}{r}\right)-\sqrt{\frac{a}{\mu}}(e\cos E-e^2)\,\dot{z}}. \tag{2.191}$$

其中

$$\begin{cases} r=|\,\boldsymbol{r}\,|, \quad \boldsymbol{r}=(x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}}, \\ v=|\,\dot{\boldsymbol{r}}\,|, \quad v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2, \dot{\boldsymbol{r}}=(\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z})^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{2.192}$$

上标"T"表示转置，即 r 和 $\dot{r}$ 为列向量.

利用上述关系式不难导出

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{2a^2}{\mu}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}, \tag{2.193}$$

$$\left(\frac{\partial e^2}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{2a}{\mu}\left[\frac{1}{a^2}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}+\left((1-e^2)-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}\right], \tag{2.194}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\cos i}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\mu p}}(\boldsymbol{\Omega})^{\mathrm{T}}+\cos i\left[-\sqrt{\dfrac{a}{\mu}}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}+\dfrac{1}{2(1-e^2)}\left(\dfrac{\partial e^2}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)\right], \\ \boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.195}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\dfrac{1}{1+\tan^2\Omega}\left(-\dfrac{1}{x\dot{z}-z\dot{x}}\right)[(\boldsymbol{\Omega}_1)^{\mathrm{T}}-\tan\Omega(\boldsymbol{\Omega}_2)^{\mathrm{T}}], \\ \boldsymbol{\Omega}_1=\begin{pmatrix}0\\ z\\ -y\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}_2=\begin{pmatrix}z\\ 0\\ -x\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.196}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\omega}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=&\sin\omega\left[\frac{1}{e\sin i}\left(\frac{\dot{z}}{an}\right)-\frac{\cos\omega}{2(1-e^2)}\right]\left(\frac{\partial e^2}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)+\\ &\frac{1}{e\sin i}\left\{\sqrt{1-e^2}\cos\omega\left[\frac{z}{r}\left(\frac{\partial(e\cos E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)-\sqrt{\frac{a}{\mu}}\dot{z}\left(\frac{\partial(e\sin E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)-\right.\right.\\ &\left.\sqrt{\frac{a}{\mu}}(e\sin E)(\hat{\boldsymbol{k}})^{\mathrm{T}}-\frac{\dot{z}}{\mu n}(e\sin E)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}\right]-\\ &\sin\omega\left[\frac{z}{r}\left(\frac{\partial(e\sin E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)+\sqrt{\frac{a}{\mu}}\dot{z}\left(\frac{\partial(e\cos E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)+\right.\\ &\left.\left.\sqrt{\frac{a}{\mu}}(e\cos E-e^2)(\hat{\boldsymbol{k}})^{\mathrm{T}}+\frac{\dot{z}}{\mu n}(e\cos E-e^2)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.197}$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{1}{e^2}\left\{-\frac{a}{\mu}(e\sin E)\left[(1-e^2)+\frac{r}{a}\right](\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{\mu a}}\left[(1-e^2)-\frac{r}{a}\right](\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}\right\}. \tag{2.198}$$

(2.197)式右端出现的单位矢量 $\hat{k}$ 和四个偏导数$\dfrac{\partial(e\cos E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}$,$\dfrac{\partial(e\sin E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}$如下:

$$\hat{\boldsymbol{k}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \tag{2.199}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial(e\cos E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\dfrac{2r}{\mu}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}},\\[2ex]\left(\dfrac{\partial(e\sin E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=-\dfrac{(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{\sqrt{\mu a}}\left(\dfrac{a}{\mu}\right)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}+\dfrac{1}{\sqrt{\mu a}}(\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{2.200}$$

根据上述各式即可给出如下函数关系:

$$\Delta\sigma=\Phi_v(\Delta\dot{r}). \tag{2.201}$$

例如,若要改变轨道半长径 a,则由(2.193)式不难给出

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}(\Delta\dot{\boldsymbol{r}}). \tag{2.202}$$

这里 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}=(\Delta\dot{x}\quad\Delta\dot{y}\quad\Delta\dot{z})^{\mathrm{T}}=(\Delta v_r\quad\Delta v_\theta\quad\Delta v_w)^{\mathrm{T}}$,其中 v_r,v_θ,v_w 即速度矢量$\dot{r}$的径向、横向和轨道面法向分量,且有 $v_w=0$.那么(2.202)式可以分别写成下列形式:

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(\dot{x}\Delta\dot{x}+\dot{y}\Delta\dot{y}+\dot{z}\Delta\dot{z}) \tag{2.203}$$

和

$$\begin{cases}\Delta a=\dfrac{2a^2}{\mu}(v_r\Delta v_r+v_\theta\Delta v_\theta)\\[2ex] v_r=\dot{r},\quad v_\theta=r\dot{\theta}\end{cases}, \tag{2.204}$$

或用$\dot{r}$的模 v 来表达,有

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(v\Delta v). \tag{2.205}$$

由此表达式可以看出,若在变轨中仅要增大轨道半长径 a,则在近星点处(v 最大)最有利;而若需要抬高近星点高度,那么就需要在远星点加速($\Delta v>0$).注意,这里的 Δv 是切向(即速度方向)分量,而不是 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的模$|\Delta\boldsymbol{v}|$.

一个速度增量 Δv 同样会改变轨道偏心率 e,根据(2.194)式可给出与

(2.205)式对应的关系式：

$$\begin{aligned}\Delta e &= \left[\frac{2}{ve}\left(\frac{rv^2}{\mu}\right)\left(\frac{rv^2}{\mu}-1\right)\cos^2\theta\right]\Delta v \\ &= \frac{2}{ve}\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{rv^2}{\mu}-1\right)\Delta v.\end{aligned} \tag{2.206}$$

其中 θ 是速度方向(即切向)与横向的夹角.

这一节主要给出二体问题意义下轨道过渡(变轨)的一些基本关系式，至于轨道过渡的具体问题和细节将在后面有关章节中阐述.

参考文献

[1] Plummer H. C. An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy. Cambridge at the University Press,1918

[2] Smart W. M. Celestial Mechanics, University of Glasgow, 1953

[3] Brouwer D. Clemence, G. M. Methods of Celestial Methanics, New York and London: Academic Press,1961

刘林,丁华译. 天体力学方法. 北京:科学出版社,1986

[4] Giacaglia G. E. O. Celest. Mech. 1976, 14(4): 515～523

[5] Taff L. G. On Initial Orbit Determination. Astron. J. 1984, 89(12): 1426～1478

[6] Morton B. G. and Taff L. G. A New Method of Initial Orbit Determination. Celest. Mech. 1986, 39(2): 181～190

[7] 刘林. 人造地球卫星轨道力学(第三章). 北京:高等教育出版社. 1992

[8] 刘林. 天体力学方法(第二章). 南京:南京大学出版社. 1998

[9] 刘林. 航天器轨道理论(第二章,第十五章). 北京:国防工业出版社. 2000

[10] 刘林, 王歆. 考虑地球扁率摄动影响的初轨计算方法. 天文学报. 2003, 44(2): 175～179

Liu Lin, Wang Xin. A Method of Orbit Computation Taking Into Account the Earth's Oblateness. Chin. Astron. Astrophys. 2003,27(3):335～339

第 3 章　航天器在轨运行的受摄运动

第 2 章所讨论的二体问题(无摄运动)只是航天器绕中心天体运动的一种近似,从这一章开始将要仔细研究航天器在各种力学因素作用下的运动规律.为了便于讨论,暂取中心天体的质心天球坐标系作为讨论问题的参考系.在此参考系中,航天器绕中心天体运动的微分方程可写成如下形式:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\ \dot{\boldsymbol{r}},\ t). \tag{3.1}$$

这里,右函数 $\boldsymbol{F}$(尽管少一个质量因子,我们还是经常习惯地称它为作用力)极其复杂,若要获得运动方程(3.1)式的解,就必须对 $\boldsymbol{F}$ 作一些必要的分析和简化,给出合理的力学模型.每一种力学因素的数学模型将要在后面各章中逐一给出,这一章先用中心天体质点引力外加保守力和耗散力影响的原则性力模型,介绍对受摄运动的处理方法,从而让读者了解求解这类方程的基本知识.

在上述前提下,航天器运动的基本方程(3.1)可以写成下列形式:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon, \tag{3.2}$$

而 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 的形式为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{r},\ \dot{\boldsymbol{r}},\ t;\ \varepsilon^k). \tag{3.3}$$

$\boldsymbol{F}_0$ 是中心天体的质点引力加速度,即

$$\boldsymbol{F}_0 = -\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right), \tag{3.4}$$

而 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 则包含了各种影响航天器运动的力因素,但它们满足下列条件:

$$|\boldsymbol{F}_\varepsilon| / |\boldsymbol{F}_0| = O(\varepsilon^k). \tag{3.5}$$

这里 $\varepsilon \ll 1$ 是小参数.对于低轨人造地球卫星而言,$\varepsilon = O(J_2) = 10^{-3}$,$J_2$ 是地球非球形的扁率项因子.对于不同的航天器,根据所处的不同力学环境,可取不同的参考量作为小参数标准.

满足方程(3.2)的运动不再是无摄运动,相应的二体问题意义下的圆锥曲线运动(椭圆或双曲线)就要发生轨道变化,此即受摄运动,(3.2)式即受

摄运动方程.

§3.1　轨道变化与常数变易法

如何求解受摄运动方程(3.2),从而给出航天器运动轨道的变化规律,这是航天器轨道力学的一个重点内容,本章将用分析方法来处理这一问题.

首先考虑无摄运动问题(即二体问题),这时 $\boldsymbol{F}_\varepsilon=0$,相应的方程(3.2)变为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 = -\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{3.6}$$

第二章已给出该问题的解:

$$\begin{cases}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(C_1, C_2, \cdots, C_6,\ t), \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g}(C_1, C_2, \cdots, C_6,\ t).\end{cases} \tag{3.7}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{r}}=\partial \boldsymbol{r}/\partial t$. 此解用来描述一圆锥曲线运动,六个积分常数 $C_1, C_2, \cdots, C_6$ 即轨道根数,依次排列为 $a, e, i, \Omega, \omega, \tau$. 回到原方程(3.2),$\boldsymbol{F}_\varepsilon\neq 0$,解(3.7)式当然不能满足它. 所谓常数变易法,即要使无摄运动的解(3.7)满足受摄方程(3.2),显然,$C_1, C_2, \cdots, C_6$ 不再是常数,应变为时间 t 的函数. 那么接下来就要导出这些积分常数(或轨道根数)的变化所满足的微分方程——摄动运动方程.

(3.7)第一式对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial C_j}\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}. \tag{3.8}$$

由于要求(3.7)第二式亦满足受摄运动方程,所以应有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} = \boldsymbol{g}(C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_6,\ t). \tag{3.9}$$

此式再对 t 求一次导数,并让其满足受摄运动方程(3.2),即

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial C_j}\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon, \tag{3.10}$$

而在该式中有

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{F}_0, \tag{3.11}$$

由此可知,常数变易的两个条件应为

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial C_j}\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t} = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial C_j}\frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_\varepsilon.\end{cases} \tag{3.12}$$

其中$\dfrac{\partial f}{\partial C_j}$和$\dfrac{\partial g}{\partial C_j}$都是$C_j$和$t$的已知函数,因此共有六个“未知量”$\dfrac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}$,与方程个数相同. 对于具体应用,需要由该方程组给出$\dfrac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}$的显形式. 至于如何给出,暂放一下,先来看看上述常数变易法的实际意义. 显然,经上述处理,就是把受摄运动看成一个变化的圆锥曲线运动,无摄运动解的表达式(3.7)仍然成立,只是相应的六个不变根数C_j变为$C_j(t)$,即瞬时根数,亦称吻切根数.

关于由线性方程组(3.12)给出$\dfrac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}$的显形式问题,不再重复许多天体力学书中常用的推导方法,下面将介绍另一种比较简单的以轨道根数作为基本变量的直接推导方法,它无需假定摄动力是保守力,可普遍适用[1].

§3.2 摄动运动方程的直接推导

原理未变,但不是直接引用关系式(3.7),而是引用它们的原始形式,即二体问题的六个积分. 对于椭圆运动情况有

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\-\sin i\cos\Omega\\\cos i\end{pmatrix},\tag{3.13}$$

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),\tag{3.14}$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}=a(1-e\cos E),\tag{3.15}$$

$$M=E-e\sin E.\tag{3.16}$$

对于双曲线运动情况六个积分稍有差别,即

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\sqrt{\mu a(e^2-1)}\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\-\sin i\cos\Omega\\\cos i\end{pmatrix},\tag{3.17}$$

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right),\tag{3.18}$$

$$r=\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos f}=a(e\,\mathrm{ch}\,E-1),\tag{3.19}$$

$$M=e\,\mathrm{sh}\,E-E.\tag{3.20}$$

这里同时引用轨道积分和活力公式,仍算作两个独立积分. 因此两种轨道分别有六个关系式,可用来导出六个积分常数(可变根数)变化的微分方程. 同

样，让它满足受摄运动方程(3.2)，而原不变根数变为时间 t 的函数.

为了下面推导的需要，现将 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 在空间极坐标系(r,θ,w)和中心天体质心直角坐标系 $O-xyz$ 中的形式分别列出，即

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{3.21}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \dot{x}\hat{\boldsymbol{i}} + \dot{y}\hat{\boldsymbol{j}} + \dot{z}\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} &= r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{w}} \\ &= (y\dot{z} - z\dot{y})\hat{\boldsymbol{i}} + (z\dot{x} - x\dot{z})\hat{\boldsymbol{j}} + (x\dot{y} - y\dot{x})\hat{\boldsymbol{k}}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中 $\hat{r}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{w}$ 为径向，横向和轨道面法向单位矢量，$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ 为直角坐标三个方向的单位矢量. 摄动力(加速度)$\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 在上述两坐标系中的三个分量分别记为 S，T，W 和 F_x，F_y，F_z.

将常数变易的原理分别用于上述六个积分(3.13)～(3.16)和(3.17)～(3.20). 设

$$\varphi(C_1, C_2, \cdots, C_6, t) = \psi(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) \tag{3.24}$$

为无摄运动(3.6)的任一积分，对于无摄运动有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\ddot{\boldsymbol{r}}, \tag{3.25}$$

即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\boldsymbol{F}_0. \tag{3.26}$$

而对受摄运动却变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial C_j}\dot{C}_j = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\ddot{\boldsymbol{r}} \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}(\boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.27}$$

按常数变易的要求，其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 仍满足椭圆或双曲线运动关系，那么根据(3.26)式立即可得

$$\sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial C_j}\dot{C}_j = \frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\boldsymbol{F}_\varepsilon. \tag{3.28}$$

实际上，这就是条件(3.12)式的一般情况，当 $\psi=x$，y，z 和 $\psi=\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ 时，条件(3.28)式即退化为(3.12)式.

为了避免混乱，我们引用 a，e，i，Ω，ω，M 六个根数作为独立变量. 事实上，无论是理论研究还是具体应用问题，都没有必要引用过近星点时刻 τ 或常用的 $M_0=-n\tau$，真正有用的是时间根数 $M=n(t-\tau)$，或另两个近点角

f 和 E,而采用平近点角 M 比较方便. 引用 M 代替 τ 作为独立变量后,在求某些函数对 a 的偏导数时,不再有显含 a 和隐含 a 的问题. 上述六个积分中的前四个,即(3.13)～(3.14)式和(3.17)～(3.18)式,可以写成形如(3.24)式的简单形式:

$$\varphi(a, e, i, \Omega) = \psi(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}). \tag{3.29}$$

相应的条件(3.28)式为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\varphi}{\partial e}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\varphi}{\partial i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\ =&\frac{\partial\psi}{\partial\dot{r}}S+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\theta}}T\\ =&\frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}}F_x+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{y}}F_y+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{z}}F_z.\end{aligned} \tag{3.30}$$

这可用来推导 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$. 关于另两个方程,虽然 M 或 f,E 可以代替 τ 作为独立变量,但它们都不能看成积分常数,因此对后两个积分(3.15)～(3.16)式和(3.19)～(3.20)式不便引用(3.28)式,但可用来直接推导 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$. 推导中将要用到 $\dot{f}$,这可由面积积分将它与 $\dot{\omega}$,$\dot{\Omega}$ 联系起来. 对于无摄运动有

$$\begin{cases}\dot{\theta} = \dot{f},\\ r^2\dot{\theta} = r^2\dot{f} = h,\end{cases} \tag{3.31}$$

$$h = \sqrt{\mu p} = \begin{cases}\sqrt{\mu a(1-e^2)}\\ \sqrt{\mu a(e^2-1)}.\end{cases} \tag{3.32}$$

而对于受摄运动却有

$$\dot{\theta} = \dot{f} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i,$$

$$r^2\dot{\theta} = r^2(\dot{f} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i) = h(t),$$

即

$$r^2\dot{f} = h(t) - r^2(\dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i). \tag{3.33}$$

下面根据上述原理具体推导摄动运动方程,但仅对椭圆情况作全面阐述,而对双曲线运动情况,推导过程完全类似,不再重复. 首先将积分(3.14)式写成(3.29)式的形式:

$$\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r} - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

根据(3.14)式得

$$-\frac{\mu}{a^2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=-2\dot{r}S-2r\dot{\theta}T.$$

其中

$$\begin{cases}\dot{r}=\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=\sqrt{\mu/p}e\sin f,\\ r\dot{\theta}=\dfrac{1}{r}\sqrt{\mu p}.\end{cases}\tag{3.34}$$

代入上式整理后得

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[Se\ \sin f+T(1+e\cos f)].\tag{3.35}$$

接着利用积分(3.13)式在轨道面法向和 x,y 方向上的分量来推导 $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$. 相应的形式为

$$h=r^2\dot{\theta},\tag{3.36}$$

$$h\ \sin i\sin\Omega=y\dot{z}-z\dot{y},\tag{3.37}$$

$$-h\ \sin i\cos\Omega=z\dot{x}-x\dot{z},\tag{3.38}$$

由(3.30)式得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=rT,\tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}rT\sin i\sin\Omega+h\ \cos i\sin\Omega\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+h\ \sin i\cos\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=yF_z-zF_y\\&=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_x,\end{aligned}\tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}-rT\sin i\cos\Omega-h\ \cos i\cos\Omega\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+h\ \sin i\sin\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=zF_x-xF_z\\&=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_y.\end{aligned}\tag{3.41}$$

由 $h=\sqrt{\mu p}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}$，(3.39)式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu}{2\sqrt{\mu p}}\left[(1-e^2)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-2ae\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right]=rT.\tag{3.42}$$

将方程(3.35)代入上式并消去 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$，即得

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}[S\ \sin f+T(\cos f+\cos E)].\tag{3.43}$$

为了由(3.40)式和(3.41)推出 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$，需要计算$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_x$ 和$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_y$. 在空间极坐标系中记$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)$为$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)^*$，有

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)^*=\begin{pmatrix}0\\-rW\\rT\end{pmatrix}.\tag{3.44}$$

经三次旋转可得 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 在地心赤道直角坐标系中的表达式，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon &= R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-u)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)^* \\ &= \begin{pmatrix} rT\sin i\sin\Omega + rW(\cos\Omega\sin u + \sin\Omega\cos u\cos i) \\ -rT\sin i\cos\Omega + rW(\sin\Omega\sin u - \cos\Omega\cos u\cos i) \\ rT\cos i - rW\cos u\sin i \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

其中 $u=f+\omega$. 将 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_x$ 和 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_y$ 两个分量代入(3.40)式，作简单运算即得

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W, \tag{3.46}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W. \tag{3.47}$$

利用轨道积分(3.15)式分别得出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{1-e^2}{1+e\cos f}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \left[\frac{p\cos f}{(1+e\cos f)^2} + \frac{2ae}{1+e\cos f}\right]\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \\ &\quad \frac{pe\sin f}{(1+e\cos f)^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = (1-e\cos E)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - a\cos E\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + ae\sin E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \tag{3.49}$$

而根据常数变易原理，按椭圆运动关系有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin f. \tag{3.50}$$

通过(3.33)式和开普勒积分给出的导数关系

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = (1-e\cos E)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \sin E\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}. \tag{3.51}$$

即可将(3.48)式和(3.49)式中的 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 与 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ 联系起来，从而导出最后两个方程

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right] - \cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}, \tag{3.52}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \frac{1-e^2}{nae}\left[-S\left(\cos f - 2e\frac{r}{p}\right) + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right]. \tag{3.53}$$

从上述六个方程的形式来看，中心天体质心引力常数 μ 仅出现在平运动速度 n 中，即

$$n = \sqrt{\mu a^{-3/2}}. \tag{3.54}$$

§ 3.3　椭圆运动的摄动运动方程

1. 以六个椭圆轨道根数为基本变量的摄动运动方程

基本变量记作 σ，它们是 a，e，i，Ω，ω，M 六个随时间变化的瞬时根数. 根据不同问题的需要，摄动力（加速度）将以三种形式表达. 其一是径向分量 S，横向分量 T，轨道面法向分量 W 表示. 另一种形式是将 S，T 改为切向分量 U，法向分量 N. 这里切向是指天体运动方向，N 是轨道面内的法向分量，也称主法线分量，而 W 又称次法线分量. U，N，W 与 S，T，W 一样，组成右手螺旋系统. 有些摄动力是保守力，存在势 R，相应的第三种形式即

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \mathrm{grad}R. \tag{3.55}$$

其中 R 又称摄动函数.

为了由 S，T，W 型的摄动运动方程推出另两种形式，就必须找出 U，N，W 三个分量以及摄动函数的偏导数 $\partial R/\partial\sigma$ 与 S，T，W 的关系. 首先考虑 U，N，设径向与切向之间的夹角为 α，由坐标旋转，立即可得

$$\begin{cases} S = U\cos\alpha - N\sin\alpha, \\ T = U\sin\alpha + N\cos\alpha. \end{cases} \tag{3.56}$$

根据微分几何知识可知，对于曲线（即轨道）$r=r(\theta)$ 或 $r=r(f)$，有

$$\tan\alpha = \frac{r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}f}} = \frac{1+e\cos f}{e\sin f}. \tag{3.57}$$

由此可得

$$\cos\alpha = \frac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}. \tag{3.58}$$

将此结果代入(3.56)式得

$$\begin{cases} S = \dfrac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}U - \dfrac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}N, \\ T = \dfrac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}U + \dfrac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}N. \end{cases} \tag{3.59}$$

对于保守力情况有

$$S = \frac{\partial R}{\partial r}, \quad T = \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial u}, \quad W = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r\sin u}\frac{\partial R}{\partial i}. \tag{3.60}$$

有了这一关系，就可以写出用摄动函数描述瞬时根数变化的摄动运动方程. 但方程右端还包含 r,u,f,E 等量，若要使给出的方程 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$，其右端仅出现 a,e,i 三个量和 $\partial R/\partial\sigma$，就必须求出 $\partial R/\partial\sigma$ 与 S,T,W 之间的关系.

因 $R=R(r)$，故有

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}=\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma}=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma},\tag{3.61}$$

而其中

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon=R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-u)\begin{pmatrix}S\\T\\W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S\\T\\W\end{pmatrix}.\tag{3.62}$$

这里 $l_j,m_j,n_j(j=1,2,3)$是径向、横向和轨道面法向单位矢量的三个分量，即

$$\hat{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}l_1\\m_1\\n_1\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}=\begin{pmatrix}l_2\\m_2\\n_2\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{\omega}}=\begin{pmatrix}l_3\\m_3\\n_3\end{pmatrix}.\tag{3.63}$$

具体形式在第二章中已给出(那里的 $\hat{R}$ 即 $\hat{\omega}$)，它们是：

$$\begin{cases}l_1=\cos\Omega\cos u-\sin\Omega\sin u\cos i,\\ m_1=\sin\Omega\cos u+\cos\Omega\sin u\cos i,\\ n_1=\sin u\sin i,\end{cases}\tag{3.64}$$

$$\begin{cases}l_2=-\cos\Omega\sin u-\sin\Omega\cos u\cos i,\\ m_2=-\sin\Omega\sin u+\cos\Omega\cos u\cos i,\\ n_2=\cos u\sin i,\end{cases}\tag{3.65}$$

$$\begin{cases}l_3=\sin\Omega\sin i,\\ m_3=-\cos\Omega\sin i,\\ n_3=\cos i.\end{cases}\tag{3.66}$$

$\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 满足下列关系：

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{r}}^2=\hat{\boldsymbol{\theta}}^2=\hat{\boldsymbol{\omega}}^2=1,\\ \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}}=\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=0.\end{cases}\tag{3.67}$$

剩下的问题是求$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma}$. 由

$$\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}$$

可知

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma}=\frac{\partial r}{\partial \sigma}\hat{\boldsymbol{r}}+r\,\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \sigma}. \tag{3.68}$$

其中

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \sigma}=\begin{pmatrix} l_3\sin u\,\dfrac{\partial i}{\partial \sigma}-m_1\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial \sigma}+l_2\,\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} \\ m_3\sin u\,\dfrac{\partial i}{\partial \sigma}+l_1\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial \sigma}+m_2\,\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} \\ n_3\sin u\,\dfrac{\partial i}{\partial \sigma}+n_2\,\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

将(3.62)式和(3.68)式连同(3.63)～(3.66)式以及(3.69)式一并代入(3.61)式,经整理后得

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}=\frac{\partial r}{\partial \sigma}S+rT\left(\cos i\,\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}+\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)+rW\left(\sin u\,\frac{\partial i}{\partial \sigma}-\sin i\cos u\,\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}\right). \tag{3.70}$$

利用 §2.2 中的结果

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial a}=\dfrac{r}{a}, \quad \dfrac{\partial r}{\partial e}=-a\,\cos f, \quad \dfrac{\partial r}{\partial M}=\dfrac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \omega}=1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial e}=\dfrac{1}{1-e^2}\left(1+\dfrac{p}{r}\right)\sin f, \quad \dfrac{\partial u}{\partial M}=\left(\dfrac{a}{r}\right)^2\sqrt{1-e^2} \end{cases} \tag{3.71}$$

就可给出(3.70)式的具体形式,即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a}=\dfrac{r}{a}S, \\ \dfrac{\partial R}{\partial e}=-a\,\cos fS+r\left(\dfrac{1}{1-e^2}+\dfrac{a}{r}\right)\sin fT, \\ \dfrac{\partial R}{\partial i}=r\,\sin uW, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \Omega}=r\,\cos iT-r\,\cos u\,\sin iW, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \omega}=rT, \\ \dfrac{\partial R}{\partial M}=\dfrac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin fS+\dfrac{a^2\,\sqrt{1-e^2}}{r}T. \end{cases} \tag{3.72}$$

根据前面的推导,我们将三种形式的摄动运动方程整理于下:

(1) ***S*，*T*，*W* 型**

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[S\,e\,\sin f + T(1+e\cos f)],\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}[S\sin f + T(\cos f+\cos E)],\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W,\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W,\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right] - \cos i\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= n - \frac{1-e^2}{nae}\left[-S\left(\cos f - 2e\,\frac{r}{p}\right) + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right].
\end{aligned}
\right. \tag{3.73}
$$

(2) ***U*，*N*，*W* 型**

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}U,\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[2(\cos f+e)U - \sqrt{1-e^2}\sin E N\right],\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2\sin f\,U + (\cos E+e)N] -\\
&\quad \cos i\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= n - \frac{1-e^2}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[\left(2\sin f + \frac{2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)U + \right.\\
&\quad \left.(\cos E - e)N\right].
\end{aligned}
\right. \tag{3.74}
$$

$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$**和**$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$**与上述两种类型相同. 上述两种类型称为高斯**(Guass)**型.**

(3) $\partial R/\partial\sigma$ 型

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M},\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial M}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial\omega},\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\cos i\frac{\partial R}{\partial\omega}-\frac{\partial R}{\partial\Omega}\right),\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}-\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= n-\frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}.
\end{aligned}\right. \tag{3.75}$$

这种类型称为拉格朗日(Lagrange)型.

2. 适合任意偏心率($0\leqslant e<1$)问题的摄动运动方程

前面推出的方程,右端含有$\frac{1}{e}$因子,不能用于 $e=0$ 的情况. 为此引进新变量,它们是

$$a,\ i,\ \Omega,\ \xi=e\cos\omega,\ \eta=e\sin\omega,\ \lambda=M+\omega \tag{3.76}$$

这组变量当 $e=0$ 时是完全确定的. 根据变量的定义和前面已推出的方程,经简单运算即可给出以新变量表达的摄动运动方程,其形式如下:

(1) S, T, W 型

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\sin u-\eta\cos u)+T\left(\frac{p}{r}\right)\right],\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{S\sin u+\frac{T}{\sqrt{1-e^2}}\left[(1+\sqrt{1-e^2})\cos u-\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\frac{\xi}{1+\sqrt{1-e^2}}(\xi\cos\tilde{u}+\eta\sin\tilde{u})\right]\right\}+\eta\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{-S\cos u+\frac{T}{\sqrt{1-e^2}}\left[(1+\sqrt{1-e^2})\cos u-\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\frac{\eta}{1+\sqrt{1-e^2}}(\xi\cos\tilde{u}+\eta\sin\tilde{u})\right]\right\}-\xi\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= n-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{2S\sqrt{1-e^2}\left(\frac{r}{p}\right)+\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\cos u+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\eta\sin u)-T\left(1+\frac{r}{p}\right)(\xi\sin u-\eta\cos u)\right]\right\}-\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}\right. \tag{3.77}$$

其中 $\tilde{u}=E+\omega$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$ 与前面(3.73)式中的形式相同，不再重复.

（2）$\partial R/\partial\sigma$ 型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda},\\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left[\cos i\left(-\eta\dfrac{\partial R}{\partial\xi}+\xi\dfrac{\partial R}{\partial\eta}+\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}\right)-\dfrac{\partial R}{\partial\Omega}\right],\\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial R}{\partial i},\\ \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\dfrac{\partial R}{\partial\eta}-\xi\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}+\eta\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\ \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\dfrac{\partial R}{\partial\xi}-\eta\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}-\xi\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}+\dfrac{1-e^2}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\left(\xi\dfrac{\partial R}{\partial\xi}+\eta\dfrac{\partial R}{\partial\eta}\right)-\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}.\end{cases} \tag{3.78}$$

这两组方程的右端不再出现 $1/e$ 因子.

3. 适合任意偏心率($0\leqslant e<1$)和倾角($0\leqslant i<180°$)问题的摄动运动方程

上述方程右端还有 $1/\sin i$ 因子，不适用于 $i=0$ 或 $i=180°$的情况. 但对卫星型的航天器而言，一般不会出现 $i=180°$的情况，只需要考虑 $i=0$ 的问题. 为此，引进另一组新变量，它们是：

$$\begin{cases}a,\ h=\sin\dfrac{i}{2}\cos\Omega,\ k=\sin\dfrac{i}{2}\sin\Omega,\\ \xi=e\cos(\omega+\Omega),\ \eta=e\sin(\omega+\Omega),\ \lambda=M+\omega+\Omega.\end{cases} \tag{3.79}$$

在 h 和 k 的定义中采用的是 $\sin\dfrac{i}{2}$而不是 $\sin i$，其原因是采用 $\sin i$ 时，在相关问题中会出现 $1/\cos i$ 的因子，不适用于 $i=90°$的情况，而采用 $\sin\dfrac{i}{2}$不会出现这一问题. 下面分别列出 S，T，W 型的方程和 $\partial R/\partial\sigma$ 型的方程.

(1) $\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{W}$ 型

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\sin u-\eta\cos u)+T\left(\frac{p}{r}\right)\right],\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\Bigg\{S\sin u+T\Bigg[\cos\tilde{u}+\cos u-\\
&\qquad \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}\,(1+\sqrt{1-e^2})}(\xi\sin\tilde{u}-\eta\cos\tilde{u})\Bigg]+\\
&\qquad W\left(\frac{r}{p}\right)\left[-\eta\,\frac{(h\sin u-k\cos u)}{\cos\dfrac{i}{2}}\right]\Bigg\},\\
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\Bigg\{-S\cos u+T\Bigg[\sin\tilde{u}+\sin u+\\
&\qquad \frac{\xi}{\sqrt{1-e^2}\,(1+\sqrt{1-e^2})}(\xi\sin\tilde{u}\eta\cos\tilde{u})\Bigg]+\\
&\qquad W\left(\frac{r}{p}\right)\left[\xi\,\frac{(h\sin u-k\cos u)}{\cos\dfrac{i}{2}}\right]\Bigg\},\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{W}{2na\sqrt{1-e^2}\cos\dfrac{i}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)[\cos u-h(k\sin u+h\cos u)],\\
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} &= \frac{W}{2na\sqrt{1-e^2}\cos\dfrac{i}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)[\sin u-k(k\sin u+h\cos u)],\\
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= n-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\Bigg\{2S\sqrt{1-e^2}\left(\frac{r}{p}\right)+\\
&\qquad \frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\Bigg[S(\xi\cos u+\eta\sin u)-\\
&\qquad T\left(1+\frac{r}{p}\right)(\xi\sin u-\eta\cos u)\Bigg]-\\
&\qquad W\left(\frac{r}{p}\right)\left[\frac{h\sin u-k\cos u}{\cos\dfrac{i}{2}}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.80}
$$

(2)$\partial R/\partial\sigma$ 型

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\lambda},\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{1}{2k+2h-1-\cos i}\left[-2h\frac{\partial R}{\partial h}-(2h-\right.\right.\\
&\quad\left.\left.1-\cos i)\frac{\partial R}{\partial k}\right]+\frac{h}{1+\cos i}\left(\eta\frac{\partial R}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\partial R}{\partial\lambda}\right)\right\},\\
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{1}{2k+2h-1-\cos i}\left[2k\frac{\partial R}{\partial k}+(2k-\right.\right.\\
&\quad\left.\left.1-\cos i)\frac{\partial R}{\partial h}\right]+\frac{k}{1+\cos i}\left(\eta\frac{\partial R}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\partial R}{\partial\lambda}\right)\right\},\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2\eta\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\eta}-\\
&\quad\frac{\xi\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial\lambda},\\
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &= \frac{2\xi\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\xi}-\\
&\quad\frac{\eta\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial\lambda},\\
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{2\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\cos i)}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)+\\
&\quad\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\left(\xi\frac{\partial R}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial R}{\partial\eta}\right).
\end{aligned}
\right.
\tag{3.81}
$$

上述两种形式的方程不再有 $1/e$ 和 $1/\sin i$ 因子.

§3.4 双曲线运动的摄动运动方程

直接写出下列两种形式的摄动运动方程[2],即

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2}{n\sqrt{e^2-1}}[Se\sin f + T(1+e\cos f)], \\
\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{e^2-1}}{na}[S\sin f + T(\cos f + \mathrm{ch}E)], \\
\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{e^2-1}}W, \\
\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i}W, \\
\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{e^2-1}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right] - \cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}, \\
\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n + \dfrac{e^2-1}{nae}\left[S\left(-\cos f + 2e\dfrac{r}{p}\right) + T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right],
\end{cases}
\tag{3.82}
$$

和

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial M}, \\
\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \dfrac{e^2-1}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial M} + \dfrac{\sqrt{e^2-1}}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial \omega}, \\
\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i}\left(\cos i\dfrac{\partial R}{\partial \omega} - \dfrac{\partial R}{\partial \Omega}\right), \\
\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i}\dfrac{\partial R}{\partial i}, \\
\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial e} - \cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}, \\
\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \dfrac{e^2-1}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial e} + \dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial a}.
\end{cases}
\tag{3.83}
$$

其中 R 同样是保守力型摄动对应的摄动函数，$\mathbf{F}_\varepsilon = \mathrm{grad}R$.

从上述摄动运动方程不难看出，由于双曲线轨道对应的 $e>1$，相应的 a 和 e 以及相关的平近点角 M 的变化规律有别于椭圆轨道.

§3.5　各类摄动对轨道影响的定性分析

受摄运动方程(3.2)式右端的摄动加速度 F_ε 通常包含保守力(引力等)和耗散力作用，不同的力因素对卫星轨道将会产生不同性质的影响. 在具体阐述相应摄动解之前，这里先对各类摄动因素及其影响特征作一简单介绍和分析. 就人造地球卫星而言，几类主要摄动源如下：

1. 地球非球形引力摄动

太阳系中各大行星、小行星以及月球，它们的质量分布都是不均匀的，形状也并非球形. 对于这样的天体，其引力位函数与球形引力位（即质点引力位）有差别，在质心赤道坐标系中，相应的非球形引力位可由下列球谐展开式表达：

$$V = V_0 + \Delta V, \tag{3.84}$$

$$V_0 = \frac{\mu}{r} = \frac{GM}{r}, \tag{3.85}$$

$$\Delta V = -GM \sum_{l \geqslant 2} \frac{J_l}{r^{l+1}} P_l(\sin\varphi) - \sum_{l \geqslant 2} \sum_{m=1}^{l} \frac{J_{l,m}}{r^{l+1}} P_l^m(\sin\varphi) \cos m\bar{\lambda}, \tag{3.86}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda - \lambda_{l,m}, \quad \lambda_{l,m} = \text{const.} \tag{3.87}$$

其中 r 为地心距，λ，φ 为地心经、纬度，$P_l(\sin\varphi)$ 和 $P_l^m(\sin\varphi)$ 分别为勒让德（Legendre）和缔合勒让德多项式. V_0 是地球引力位的主要部分，相当于密度均匀球体的引力位，或质量全部集中在质心的质点引力位. ΔV 是真实引力位对均匀球体的修正部分，包括带谐（Zonal Harmonic）和田谐（Tesseral Harmonic）两大项，它们反映了地球的不均匀性（包括形状不规则和密度分布的不均匀）. 相应的 J_l 和 $J_{l,m}$ 即带谐项系数和田谐项系数，它们的大小则反映出上述不均匀性的程度. 其中 $J_2 = O(10^{-3})$，相应的项又称为扁率项，其他 J_l 和 $J_{l,m}$ 的量级几乎都不大于 10^{-6}. 因此，人造卫星在地球引力场中的运动方程又可写成下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon. \tag{3.88}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_0 = \text{grad} V_0 = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{3.89}$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \text{grad}(\Delta V), \tag{3.90}$$

且有

$$|\boldsymbol{F}_\varepsilon| / |\boldsymbol{F}_0| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon = O(J_2). \tag{3.91}$$

$\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 相对 $\boldsymbol{F}_0$ 是一小扰动，称为摄动部分. 这种由地球（或任一中心天体）不均匀性引起的摄动，常被称为非球形引力摄动或简称形状摄动.

2. 第三体引力摄动

对于人造卫星绕地球的运动，日、月（作为质点）引力是一种典型的第三体引力摄动，相应的摄动加速度为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \sum_{j=1}^{2}(-m_j)\left(\frac{\boldsymbol{R}_j}{|\boldsymbol{R}_j|^3} + \frac{\boldsymbol{\Delta}_j}{|\boldsymbol{\Delta}_j|^3}\right), \tag{3.92}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_j = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_j, (j = 1, 2). \tag{3.93}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}_j$ 各为人造卫星和日、月的地心向径，$\boldsymbol{R}_j$ 是时间 t 的已知函数，由日、地、月三体系统确定，与人造卫星运动无关.

3. 大气阻力摄动

人造卫星（特别是低轨卫星）在地球高层大气中飞行，将受大气阻力的影响，阻力加速度可写成下列形式：

$$\boldsymbol{D} = -\frac{1}{2}\left(\frac{C_D S}{m}\right)\rho v^2\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right). \tag{3.94}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是卫星相对大气的飞行速度，v 是其大小，ρ 是大气密度，S/m 是卫星对阻力而言的有效面积质量比（以后简称面质比），C_D 是阻力系数. 对于绝大多数卫星而言，它们的有效截面积 S 不是太大，而飞行高度又不太低（通常距地面 200 km 以上），$\boldsymbol{D}$ 相对前面的主项 $\boldsymbol{F}_0$ 是很小的，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}_\varepsilon$，是一种阻力摄动.

4. 太阳辐射压摄动

直接作用在人造卫星表面的太阳辐射压（或简称光压），虽然并不大，但同样要影响卫星的运动，也是一种摄动源，相应的摄动加速度为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \nu\left(\frac{\kappa S}{m}\right)\rho_\odot \frac{a_u^2}{\Delta^2}\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta}\right). \tag{3.95}$$

其中 $\rho_\odot$ 是作用在离太阳一个天文单位 a_u 处的太阳辐射压强，$\kappa=1+\eta$，η 是卫星表面的反射系数，S/m 是卫星对辐射压而言的有效面质比，$\boldsymbol{\Delta}$ 是太阳到卫星的矢径，ν 是地影因子，由下式定义：

$$\nu = 1 - \Delta S/S_\odot. \tag{3.96}$$

这里 $S_\odot$ 是太阳视面积，ΔS 是被“蚀”部分，这涉及到地影问题，当 $\Delta S=S_\odot$ 时，$\nu=0$，此时对应卫星进入真正的地影.

上述四类力因素不仅是人造地球卫星运动中所承受的主要摄动源，对于其他类型的航天器（包括月球探测器、行星探测器），在不同的运行过程中所承受的主要摄动源基本上也是这几类中的某几种. 这些摄动源不外乎保守力和耗散力，或引力和非引力.

对于保守力而言，航天器的能量不会有耗散，表现在椭圆轨道半长径 a 不会出现长期变化. 耗散力摄动则不同，航天器能量有耗损，轨道半长径和

偏心率都不断减小,即轨道变小变圆.引力摄动与卫星的大小形状无关,而非引力摄动(如大气阻力和光压),它们是一面力,与承受这种力因素的截面有关,即与卫星的大小形状有关,这就涉及到卫星的姿态等问题.这些还仅仅是各类摄动因素对航天器运行轨道影响的一个粗略的轮廓,具体细节(变化规律)还有待下两章建立各类摄动解时才有可能看得清楚,而这一点又是航天工程中必须充分了解的轨道信息,否则任何一个航天任务要圆满完成都是不可能的.

参考文献

[1] 刘林. 人造地球卫星轨道力学(第四章). 北京:高等教育出版社. 1992

[2] Liu Lin, Wang Xin. Hyperbolic Orbit and Its Variation of Deep-space Probe. Science in China (Series G). 2003, 46(2):191~197

第 4 章　摄动运动方程的解与中心天体的非球形引力摄动

根据前面两章的讨论，我们已经了解到卫星在轨运行（无论是人造地球卫星还是环绕其他探测目标天体运行的轨道器）对应的是一个受摄二体问题，并经常数变易法的处理，已将原受摄运动方程

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon ,$$

的求解问题转化为相应的摄动运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = f_\varepsilon(\sigma, t, \varepsilon) , \tag{4.1}$$

的求解问题. 这里 σ 表示一 6 维向量，6 个分量即瞬时轨道根数，即无摄运动的 6 个积分常数. 右函数 f_ε 则是 6 维向量函数，有

$$|(f_\varepsilon)_i| = O(\varepsilon) \ll 1, \quad i = 1,2,\cdots,6. \tag{4.2}$$

原受摄运动问题的解由两部分组成，即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma, t), \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}(\sigma, t) \tag{4.3}$$

和

$$\sigma = \sigma(t) = \sigma(\sigma_0, t_0; t, \varepsilon), \quad \sigma(t_0) = \sigma_0. \tag{4.4}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式是已知的，即第二章中的(2.42)式和(2.48)式，它们对应于一个瞬时椭圆，σ_0 即 t_0 时的椭圆根数. 这一阐述对变化的双曲线轨道同样适用，但已不是卫星运动问题，只在本章有关内容中加以阐明. 现在剩下的问题是如何求解小参数方程(4.1)，给出 $\sigma(t)$.

尽管方程(4.1)是复杂的非线性方程组，但其右端含小参数 ε，给出相应的小参数幂级数解并不困难，已有成熟的方法，即摄动法. 为了让读者深入了解摄动法，以便更好地学习后面要介绍的针对航天器在轨运行时所承受的各种摄动及相应摄动运动方程的具体解法，本章将首先对摄动法如何构造相应的小参数幂级数解以及摄动法的改进作必要的阐述.

§4.1 摄动运动方程的小参数幂级数解

1. 小参数幂级数解的构造——摄动法

如果第 6 个根数为 τ 或 $M_0=-n\tau$，则方程(4.1)的右函数 f_ε 的 6 个元素的量级均为 $O(\varepsilon)$，即满足(4.2)式. 然而，通常第六个根数是采用平近点角 M，那么上述右函数 f_ε 的第六个元素含有一项 $n=\sqrt{\mu}\,a^{-3/2}=O(\varepsilon^0)$，此时方程(4.1)应改写成下列形式

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f_0(a)+f_1(\sigma,t,\varepsilon), \tag{4.5}$$

$$f_0(a)=\delta n=O(\varepsilon^0), \tag{4.6}$$

$$|f_{1i}(\sigma,t,\varepsilon)|=O(\varepsilon),\quad i=1,2,\cdots,6, \tag{4.7}$$

其中

$$\delta=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}. \tag{4.8}$$

这里轨道根数 σ 的各元素排列次序为 a,e,i,Ω,w,M，δ 向量只有第 6 个元素为 1，对应 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$，δ 这一符号后面经常用到，不再说明.

方程(4.5)的小参数幂级数解形式为

$$\begin{cases}\sigma(t)=\sigma^{(0)}(t)+\Delta\sigma^{(1)}(t,\varepsilon)+\Delta\sigma^{(2)}(t,\varepsilon^2)+\cdots+\Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)+\cdots,\\ \Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)=\varepsilon^l\beta_l(t).\end{cases} \tag{4.9}$$

其中 $\sigma^{(0)}(t)$ 是对应 $\varepsilon=0$ 的无摄运动解，即

$$\sigma^{(0)}(t)=\sigma_0+\delta n_0(t-t_0), \tag{4.10}$$

或具体写成

$$\begin{cases}a^{(0)}(t)=a_0,\quad e^{(0)}(t)=e_0,\quad i^{(0)}(t)=i_0,\\ \Omega^{(0)}(t)=\Omega_0,\quad \omega^{(0)}(t)=\omega_0,\\ M^{(0)}(t)=M_0+n_0(t-t_0).\end{cases} \tag{4.11}$$

其中 $\sigma_0(a_0,e_0,i_0,\Omega_0,w_0,M_0)$ 是初始时刻 t_0 时的根数. 不难看出，对 ε 展开的小参数幂级数解(4.9)，实际上就是解 $\sigma(t)$ 在参考轨道——无摄运动解 $\sigma^{(0)}(t)$ 处的展开. $\Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)$ 即 l 阶摄动变化项，简称 l 阶摄动项. 将形式解

(4.9)代入(4.5),得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sigma^{(0)}+\Delta\sigma^{(1)}+\Delta\sigma^{(2)}+\cdots+\Delta\sigma^{(l)}+\cdots] \\
&= f_0(a)+\frac{\partial f_0}{\partial a}[\Delta a^{(1)}+\Delta a^{(2)}+\cdots]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}[\Delta a^{(1)}+\cdots]^2+\cdots+ \\
&\quad f_1(\sigma,t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j}[\Delta\sigma_j^{(1)}+\Delta\sigma_j^{(2)}+\cdots]+ \\
&\quad \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}[\Delta\sigma_j^{(1)}+\cdots][\Delta\sigma_k^{(1)}+\cdots]+\cdots.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

该式右端各项中出现的根数 σ 均应取参考轨道 $\sigma^{(0)}(t)$. 若级数(4.9)收敛,则可比较展开式(4.12)两端同次幂(ε^l)的系数,于是有

$$
\begin{cases}
\sigma^{(0)}(t)=\sigma_0+\delta n_0(t-t_0), \\
\Delta\sigma^{(1)}(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\delta\frac{\partial n}{\partial_a}\Delta a^{(1)}+f_1(\sigma,t,\varepsilon)\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t, \\
\Delta\sigma^{(2)}(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\delta\left(\frac{\partial n}{\partial a}\Delta a^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(\Delta a^{(1)})^2\right)+\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}\Delta\sigma_j^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t, \\
\cdots
\end{cases}
\tag{4.13}
$$

显然,这是一个有效的递推过程:由低阶摄动求高阶摄动,将 $f_1(\sigma,t,\varepsilon)$ 的具体形式代入后,即可给出解(4.9)中各阶摄动项的表达式,从而构造出摄动运动方程(4.5)的小参数幂级数解. 这一构造级数解的方法,即摄动法. 关于该小参数幂级数解的收敛性,实际上是常微分方程解析理论中的一个基本问题,早已获得证明,其收敛条件不再详述,对运动而言,收敛范围为

$$
s\sim\frac{1}{\varepsilon}, \tag{4.14}
$$

这里 $s=n(t-t_0)$ 是运动弧段. 在 s 弧段外解仍可作解析延拓.

下面举一个简单的例子,以体现上述构造级数解的具体过程.

例:用摄动法求解二阶小参数方程

$$
\ddot{x}+\omega^2 x=-\varepsilon x^3,\quad \varepsilon\ll 1. \tag{4.15}
$$

其中 $\omega>0$ 是实常数.

解:当 $\varepsilon=0$ 时,无摄运动方程

$$
\ddot{x}+\omega^2 x=0
$$

的解为

$$
\begin{cases}
x=a\cos(\omega t+M_0), \\
\dot{x}=-\omega a\sin(\omega t+M_0).
\end{cases}
\tag{4.16}
$$

这里初始时刻 $t_0=0$，积分常数 a 和 M_0 相当于两个无摄根数.

当 $\varepsilon\neq 0$ 时，用常数变易法建立相应的摄动运动方程，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial a}\dot{a}+\dfrac{\partial x}{\partial M_0}\dot{M}_0=0,\\[2ex] \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial a}\dot{a}+\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial M_0}\dot{M}_0=-\varepsilon x^3.\end{cases}\tag{4.17}$$

由此导出摄动运动方程如下：

$$\begin{cases}\dot{a}=\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^3\left(\dfrac{1}{4}\sin 2M+\dfrac{1}{8}\sin 4M\right)=(f_1)_a,\\[2ex] \dot{M}=\omega+\dot{M}_0=\omega+\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2M+\dfrac{1}{8}\cos 4M\right)=\omega+(f_1)_M.\end{cases}\tag{4.18}$$

其中积分常数 M_0 用 $M=M_0+\omega t$ 代替，方程(4.18)的小参数幂级数解即

$$\sigma(t)=\sigma^{(0)}(t)+\Delta\sigma^{(1)}(t)+\cdots.\tag{4.19}$$

其中

$$\sigma^{(0)}(t)=\begin{pmatrix}a_0\\ M_0+\omega t\end{pmatrix}.\tag{4.20}$$

因 $\omega=\mathrm{const}$，于是有

$$\Delta\sigma^{(1)}(t)=\int_0^t\left[f_1(\sigma,t,\varepsilon)\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t.$$

积分得

$$\Delta a^{(1)}(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2}a^3\left(-\frac{1}{8}\cos 2M-\frac{1}{32}\cos 4M\right)\Bigg|_0^t,\tag{4.21}$$

$$\Delta M^{(1)}(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2}a^2\left(\frac{3}{8}\omega t+\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{32}\sin 4M\right)\Bigg|_0^t.\tag{4.22}$$

二阶摄动项的计算公式为

$$\begin{cases}\Delta a^{(2)}(t)=\displaystyle\int_0^t\left[\frac{\partial(f_1)_a}{\partial a}\Delta a^{(1)}+\frac{\partial(f_1)_a}{\partial M}\Delta M^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t,\\[2ex] \Delta M^{(2)}(t)=\displaystyle\int_0^t\left[\frac{\partial(f_1)_M}{\partial a}\Delta a^{(1)}+\frac{\partial(f_1)_M}{\partial M}\Delta M^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t.\end{cases}\tag{4.23}$$

将 $\Delta\sigma^{(1)}$ 代入后积分即得二阶摄动项 $\Delta a^{(2)}$ 和 $\Delta M^{(2)}$. 不难看出，由于 $\Delta M^{(1)}$ 中含有 ωt 这种项，那么求 $\Delta\sigma^{(2)}(t)$ 时，将会出现下列形式的积分：

$$\int_0^t\begin{pmatrix}\sin kM\\ \cos kM\end{pmatrix}\omega t\,\mathrm{d}t,\quad k=0,1,\cdots.\tag{4.24}$$

此即混合项，亦称泊松(Poisson)项，正是摄动法在动力天文中用来求解摄动运动方程时应重视的问题.

如果摄动力是保守力，在有限时间间隔内，通常 a,e,i 仅有周期变化，Ω,ω 有随时间变化的长期变化，但比近点角 M（或 E,f）的变化缓慢得多，因为近点角 M 是直接反映运动天体绕中心天体运动的位置变化，而 Ω 和 ω 的变化仅仅是由摄动引起的，变化缓慢，故通常称 a,e,i 为“不变量”，Ω 和 ω 为慢变量，而 M（或 E,f）为快变量. 在上述情况下，各阶摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)}$，$\Delta\sigma^{(2)}$，…中一般包含三种性质不同的项：长期项、长周期项和短周期项，长期项是 $(t-t_0)$ 的线性函数或多项式，其系数仅是 a,e,i 的函数，长周期项是 Ω 和 ω 的三角函数，而短周期项则是 M 的周期函数（亦是三角函数）. 对于短周期项，也会因某种通约而导致其转化为长周期项（后面有关内容中将会讨论它）. 另外，还有形如 $(t-t_0)\sin(At+B)$ 和 $(t-t_0)\cos(At+B)$ 等形式的泊松项，即上一段最后提到的(4.24)型积分就可能导致这种混合项的出现.

从摄动法构造级数解的过程和例子中不难看出，即使摄动力为保守力，也会导致 $\varepsilon(t-t_0)$，$\varepsilon^2(t-t_0)^2$，…这种多项式型的长期项的出现，而且与 Ω 或 ω 有关的长周期项将会变为长期项或泊松项. 因为参考轨道取无摄运动解 $\sigma^{(0)}(t)$，那么将会有

$$\int_{t_0}^{t} \cos\omega_0 \,\mathrm{d}t = \cos\omega_0 (t - t_0)$$

等形式的出现，再按摄动解的构造过程(4.13)构造高阶摄动项，就可导致 $(t-t_0)$，$(t-t_0)^2$，…这种类型的长期项或泊松项的出现. 而若积分时，ω 取为 $\bar{\omega}=\omega_0+\dot{\omega}(t-t_0)$，让其代替 $\omega^{(0)}(t)=\omega_0$，则上述积分变为

$$\int_{t_0}^{t} \cos\bar{\omega}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin\bar{\omega}}{\dot{\omega}}\Big|_{t_0}^{t} = \frac{1}{\dot{\omega}}[\sin\bar{\omega}(t) - \sin\bar{\omega}(t_0)],$$

此为长周期项，从而不会出现上面提到的那些摄动项，这一点是相当重要的. 从定性角度看，当摄动力为保守力时，通常 a,e,i 是没有长期变化的，但按上述经典摄动法来构造摄动解，即会导致 a,e,i 出现长期变化，这就歪曲了轨道变化的性质. 即使从定量角度来看，虽然对于短弧而言无关紧要，但对于长弧情况，长周期项与长期项的差别就明显了，这将影响解的精度. 因此，选择参考轨道为无摄运动解的经典摄动法有明显的缺点，对它进行改进是完全有必要的.

本书重点介绍的是改进的摄动法，相应的参考轨道不再是最简单的无摄运动解 $\omega^{(0)}(t)$，而是一种长期进动椭圆，相应的轨道根数是带有长期变化的所谓平均根数 $\bar{\sigma}(t)$，因此，它又不同于通常意义下的中间轨道，不会引起中间轨道理论中遇到的那些复杂性问题. 这种改进的实质，即将摄动变化项按其不同的性质区分开，以解除经典摄动法中所遇到的问题.

2. 改进的摄动法——平均根数法

在上一段中指出,求解摄动运动方程的经典摄动法有明显的缺点,对于较长的弧段,其定量计算精度不理想;如果取项太多则难以实现,即使在一定精度前提下,它也不能真实地反映轨道变化的规律. 导致这一状况的原因是参考轨道(即初始时刻的瞬时椭圆)太简单,因此有必要改进参考轨道的选择. 非线性力学中的一种渐进法,即平均法,其参考解就很有特点,本段要介绍的平均根数法就是将这种类型的参考解引入摄动法.

(1) 参考解的选择——平均根数法的引入

仍记

$$\sigma = (a, e, i, \Omega, \omega, M)^{\mathrm{T}} \ ,$$

相应的摄动运动对应的初值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = f_0(a) + f_\varepsilon(\sigma, t, \varepsilon), \\ \sigma_0 = \sigma(t_0). \end{cases} \tag{4.25}$$

其中

$$\begin{cases} f_0(a) = \delta n, \quad n = \sqrt{\mu}\, a^{-3/2}, \\ \delta = (0,0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}} \end{cases} . \tag{4.26}$$

$f_\varepsilon(\sigma, t, \varepsilon)$即对应摄动部分.

现将根数的摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)}, \Delta\sigma^{(2)}, \cdots$按其性质分解成长期变化、长周期变化和短周期变化三部分(其定义见上一段),分别记作 $\sigma_1(t-t_0), \cdots$, $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}, \cdots, \Delta\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}, \cdots$,而相应的方程(4.25)的小参数幂级数解的形式将改为

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(t) + \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)} + \cdots + \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)} + \cdots . \tag{4.27}$$

其中

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}^{(0)}(t) + \sigma_1(t-t_0) + \cdots , \tag{4.28}$$

$$\bar{\sigma}^{(0)}(t) = \bar{\sigma}_0 + \delta \bar{n}(t-t_0) , \tag{4.29}$$

$$\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}(t_0) = \sigma_0 - [\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0) + \cdots + \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0) + \cdots]. \tag{4.30}$$

上述形式解表明,原摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)}(t), \Delta\sigma^{(2)}(t), \cdots$不仅按其变化性质分成不同部分,而且改为以摄动项表达的形式,即原

$$\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0), \quad \Delta\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) = \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)$$

在表达式(4.27)中只出现 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t), \cdots, \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)$,而 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0), \cdots, \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0), \cdots$已按(4.30)式从 σ_0 中消去. 这样的分解就使得 $\bar{\sigma}(t)$只包含长期变化,故称其为平均轨道根数,简称平均根数,或平根数.

平均根数法就是采用 $\bar{\sigma}(t)$ 作为其参考解. 显然,$\bar{\sigma}(t)$ 对应的仍是一个

椭圆轨道，但它不再是一个对应历元 t_0 固定不变的椭圆，而是一个包含长期摄动的变化椭圆. 在保守力摄动下，它将是一个长期进动椭圆，即该椭圆轨道平面和拱线方向在空间转动. 因此，这种参考解又不同于通常意义下的中间轨道，原椭圆运动的各种几何关系式对它仍适用. 这就表明，平均根数法仍是建立在受摄二体问题基础上的一种摄动法，可以称其为改进的摄动法.

(2) 平均根数法——摄动解的构造

通常，方程(4.25)右函数的摄动部分 $f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon)$ 亦可展为小参数的幂级数，即

$$f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon)=f_1(\sigma,t,\varepsilon)+f_2(\sigma,t,\varepsilon^2)+\cdots+f_N(\sigma,t,\varepsilon^N)+\cdots, \tag{4.31}$$

其中

$$f_N=O(\varepsilon^N). \tag{4.32}$$

为了适应平均根数法中将摄动变化分解为长期项和周期项的需要，可利用第 2 章 § 2.2 中的方法，将 $f_N(\sigma,t,\varepsilon^N)$，$N=1,2,\cdots$ 分解成相应的三部分，即

$$f_N=f_{NC}+f_{NL}+f_{NS},N=1,2,\cdots. \tag{4.33}$$

这里第二个下标"C"、"L"和"S"各表示长期、长周期和短周期部分，即 f_{NC} 只与 a,e,i 有关，f_{NL} 的周期取决于慢变量 Ω 和 ω 的变化，或是通约项(后面有关内容中会遇到)，f_{NS} 的周期则取决于快变量 M. 要使平均根数法有效，则要求

$$f_{1L}=0, \tag{4.34}$$

这在卫星(特别是低轨卫星)运动中是满足的.

将形式解(4.27)代入方程(4.25)，右函数在 $\bar{\sigma}(t)$ 展开，得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\bar{\sigma}^{(0)}(t)+\sigma_1(t-t_0)+\sigma_2(t-t_0)+\cdots+\sigma_L^{(1)}(t)+\cdots+\sigma_S^{(1)}(t)+\cdots\right]\\
&=f_0(\bar{a})+\frac{\partial f_0}{\partial a}\left[a_L^{(1)}+a_L^{(2)}+\cdots+a_S^{(1)}+a_S^{(2)}+\cdots\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}\left[a_L^{(1)}+\cdots+\right.\\
&\quad\left.a_S^{(1)}+\cdots\right]^2+\cdots+f_1(\bar{\sigma},t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}\left[\sigma_L^{(1)}+\cdots+\sigma_S^{(1)}+\cdots\right]_j+\\
&\quad\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}\left[\sigma_L^{(1)}+\cdots+\sigma_S^{(1)}+\cdots\right]_j\left[\sigma_L^{(1)}+\cdots+\sigma_S^{(1)}+\cdots\right]_k+\\
&\quad\cdots+f_2(\bar{\sigma},t,\varepsilon^2)+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\left[\sigma_L^{(1)}+\cdots+\sigma_S^{(1)}+\cdots\right]_j+\cdots+\cdots+\\
&\quad f_N(\bar{\sigma},t,\varepsilon^N)+\cdots.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

该式右端出现的根数 σ 均为参考解 $\bar{\sigma}(t)$. 若级数(4.27)收敛(该级数是前面(4.9)的重新组合,收敛性已有说明),则比较展开式(4.35)两端同次幂(ε^N)的系数,并积分,得

$$\bar{\sigma}^{(0)}(t)=\int_{t_0}^{t} f_0(\bar{a})\mathrm{d}t=\sigma^{(0)}+\delta\bar{n}(t-t_0)\ , \tag{4.36}$$

$$\begin{cases}\sigma_1(t-t_0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}[f_{1\mathrm{C}}]_{\sigma}\mathrm{d}t,\\ \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)=\displaystyle\int^{t}\left[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{S}}^{(1)}+f_{1\mathrm{S}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t\end{cases}, \tag{4.37}$$

$$\begin{cases}\sigma_2(t-t_0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{C}}^2+\left(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{l}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})j\right)_{\mathrm{C}}+f_{2\mathrm{c}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\displaystyle\int^{t}\left[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{L}}^{(2)}+\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{L}}^2+\left(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}+f_{2\mathrm{l}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=\displaystyle\int^{t}\left[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{S}}^{(2)}+\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{S}}^2+\left(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{S}}+f_{2\mathrm{S}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \cdots\end{cases}. \tag{4.38}$$

上列各式右端被积函数中出现的 $(A)_{\mathrm{C}}$,$(A)_{\mathrm{L}}$,$(A)_{\mathrm{S}}$ 分别表示括号中函数 A 的长期、长周期和短周期部分. 例如

$$A=\cos f+\cos(f+\omega)=\cos f+\cos f\ \cos\omega-\sin f\ \sin\omega, \tag{4.39}$$

利用第二章 §2.2 中的方法,即可分解为

$$\begin{cases}A=(A)_{\mathrm{C}}+(A)_{\mathrm{L}}+(A)_{\mathrm{s}},\\ (A)_{\mathrm{C}}=-e,\\ (A)_{\mathrm{l}}=-e\ \cos\omega,\\ (A)_{\mathrm{S}}=(\cos f+e)+(\cos f+e)\cos\omega-\sin f\ \cos\omega.\end{cases} \tag{4.40}$$

容易证明,当 $f_{1\mathrm{L}}=0$ 时,有 $a_{\mathrm{L}}{}^{(1)}=0$,详见下一段. 因此,只要满足条件(4.34),那么平均根数法对应的上述递推过程是有效的,即由低阶摄动求高阶摄动. 但有几点要说明,即

1) 对于保守力摄动,a,e,i 的变化无长期项,那么在 Ω,ω,M 的变化中,长期项将是$(t-t_0)$的线性函数,因为它们的长期项 σ_1,σ_2,…对应的被积函数都是 a,e,i 的函数,且积分时取 $\bar{a}=\bar{a}_0$,$\bar{e}=\bar{e}_0$,$\bar{i}=\bar{i}_0$. 如果是耗散力,则解的结构要复杂些,例如长期项不再是$(t-t_0)$的线性函数. 但在一般情况下(即耗散力相对较小,是与 ε^2 同阶的二阶小量,甚至更小),它并不影响级数解的构造. 下面在类似的问题中不再重复说明这一点.

2) 与经典摄动法不同,参考解 $\bar{\sigma}(t)$ 实际上是在递推过程中形成的,但

它并不影响上述级数解的构造. 例如,对于保守力摄动,有

$$\int \cos\bar{\omega}\mathrm{d}t = \frac{\sin\bar{\omega}}{(\omega_1+\omega_2+\cdots)}.$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots$ 是 ω 变化的各阶长期项系数,它们都是 $\bar{a},\bar{e},\bar{i}$ 的函数,积分时不必知道它的具体形式,只是在导出结果后引用该公式计算时才可能用到.

3) 对于长周期项,其变化取决于慢变量 Ω 和 ω,例如 ω,因有

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \omega_1(t-t_0) + \cdots,$$

其中 $\omega_1 = O(\varepsilon)$ 是一阶小量,不像 M 的变化速度那么快,即

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + \bar{n}_0(t-t_0) + M_1(t-t_0) + \cdots,$$

其中 $\bar{n}_0 = O(\varepsilon^0)$. 因此,若 $f_{2l} = \varepsilon^2\cos\omega$,将有

$$\int^t f_{2\mathrm{L}}\mathrm{d}t = \int^t \varepsilon^2\cos\bar{\omega}\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon^2\sin\bar{\omega}}{\omega_1+\cdots} = A\sin\bar{\omega}.$$

这里 $A=O(\varepsilon)$. 积分结果给出的是一阶长周期项,而不是二阶长周期项,这就是长周期项积分的降阶现象,所以(4.38)式的长周期部分左端记为 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 而不是 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$. 实际上,在不太长的间隔内,$\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 对应的 $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)} = \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)$ 与二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$ 相当(后面有关章节中将会用到这一点),在经典摄动法中就是给出 $\sigma_2(t-t_0)$ 这样的结果,而在平均根数法中却以 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 的形式出现,它保持了周期项的本质,比较合理. 由 $f_{3\mathrm{L}}$ 积分给出 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$,依此类推. 但这又引起另一问题,即由(4.38)式计算 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 时,右端被积函数中不仅用到 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$,还用到 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$. 关于这一点,如果仔细分析一下,即可知道,它并不影响解的构造,后面 §4.2 中将要具体说明.

(3) $a_{\mathrm{L}}^{(1)}=0$ 的证明

考虑保守了摄动,它对应一 Hamilton 系统. 受摄二体问题对应的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2}v^2 - V, \tag{4.41}$$

其中 V 包含中心天体的质点引力位和摄动位,由于摄动力是保守力,则有

$$V = \frac{\mu}{r} + R(r,\varepsilon), \tag{4.42}$$

$\mu=GM$,R 即相应的摄动位或摄动函数. 这里可按定常情况考虑,对于非定常情况,可以用正则扩充的方法转化为定常情况. 对于受摄二体问题,将活力公式,即

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right), \tag{4.43}$$

代入(4.41)式得

$$H = -\frac{\mu}{2a} - R. \tag{4.44}$$

存在一积分(能量积分)

$$\frac{\mu}{2a} + R = C, \tag{4.45}$$

该积分在参考解$\bar{\sigma}(t)$展开,并将不同性质的项分开,有"常数项":

$$\frac{\mu}{2a} + (R_{1C} + R_{2C} + \cdots) = C. \tag{4.46}$$

一阶长周期项:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_L^{(1)}(t)] + R_{1L} = 0. \tag{4.47}$$

一阶短周期项:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_S^{(1)}(t)] + R_{1S} = 0. \tag{4.48}$$

由于 $f_{1L}=0$,而摄动运动方程的这一 f_{1L} 又是由 $\partial R_{1L}/\partial \sigma$ 形成的,那么必有 $R_{1L}=0$,因此

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_L^{(1)}] = 0. \tag{4.49}$$

显然,$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right) \neq 0$,故证得

$$a_L^{(1)}(t) = 0. \tag{4.50}$$

(4) 举例

这里仍用求解上一段中提出的二阶小参数微分方程(4.15)作为一例,一是为了让读者初步了解如何用平均根数法构造摄动解,同时也可与经典摄动法作一简单比较. 方程为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\varepsilon x^3,$$

其中 $\varepsilon \ll 1$, $\omega > 0$ 是实常数. 上一段已给出无摄运动解,即

$$\begin{cases} x = a\cos M, \\ \dot{x} = -\omega a \sin M, \\ M = M_0 + \omega t. \end{cases} \tag{4.51}$$

相应的摄动运动方程为

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\varepsilon}{\omega} a^3 \left(\frac{1}{4}\sin 2M + \frac{1}{8}\sin 4M\right), \\ \dot{M} = \omega + \frac{\varepsilon}{\omega} a^2 \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2M + \frac{1}{8}\cos 4M\right). \end{cases} \tag{4.52}$$

现用平均根数法解该方程,其形式改写成

$$\begin{cases}\dot{a}=(f_{1S})_a\,,\\ \dot{M}=(f_0)_M+(f_{1C})_M+(f_{1S})_M\,,\end{cases}\tag{4.53}$$

其中

$$(f_{1S})_a=\frac{\varepsilon}{\omega}a^3\left(\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{8}\sin 4M\right),\tag{4.54}$$

$$\begin{cases}(f_0)_M=\omega=\text{const},\\ (f_{1C})_M=\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\dfrac{3}{8}\right),\\ (f_{1S})_M=\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\dfrac{1}{2}\cos 2M+\dfrac{1}{8}\cos 4M\right).\end{cases}\tag{4.55}$$

按平均根数法构造级数解的过程(4.36)～(4.38)式，首先有

$$\begin{cases}\bar{a}^{(0)}(t)=\bar{a}_0\,,\\ \overline{M}^{(0)}(t)=\overline{M}_0+\omega(t-t_0).\end{cases}\tag{4.56}$$

由此积分(4.37)式给出

$$\begin{cases}a_1(t-t_0)=0,\\ M_1(t-t_0)=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}\bar{a}_0^2\left(\dfrac{3}{8}\right)\omega(t-t_0),\end{cases}\tag{4.57}$$

$$\begin{cases}a_S^{(1)}(t)=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)}\bar{a}_0^3\left(-\dfrac{1}{8}\cos 2\overline{M}-\dfrac{1}{32}\cos 4\overline{M}\right),\\ M_S^{(1)}(t)=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)}\bar{a}_0^3\left(\dfrac{1}{4}\sin 2M+\dfrac{1}{32}\sin 4M\right).\end{cases}\tag{4.58}$$

由于 $M_1/\omega=O(\varepsilon)$，那么 $a_S^{(1)}(t)$ 和 $M_S^{(1)}(t)$ 右端的分母 $\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)$，在精确到一阶周期项时，可直接写成 ω^2.

给出 $a_S^{(1)}$ 和 $M_S^{(1)}$ 后，即可由(4.38)式的长期项计算公式给出 a 和 M 的二阶长期项，有

$$\begin{cases}a_2(t-t_0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial(f_{1S})_a}{\partial a}a_S^{(1)}+\frac{\partial(f_{1S})_a}{\partial M}M_S^{(1)}\right]_C\mathrm{d}t=0\\ M_2(t-t_0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial(f_{1S})_M}{\partial a}a_S^{(1)}+\frac{\partial(f_{1S})_M}{\partial M}M_S^{(1)}\right]_C\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad=\left(\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}\bar{a}_0^2\right)^2\left(-\dfrac{51}{256}\right)\omega(t-t_0),\end{cases}\tag{4.59}$$

二阶短周期项不再给出，而该问题只有一个角变量 M，无慢变量 Ω,ω，故不出现长周期项.

从上列各阶摄动项的表达式可以看出，解的结构比上一章摄动法给出的简单，而且不会出现形如(4.24)式的积分，即不会导致泊松项(或称混合

项)的出项,该小参数方程(4.15)解的形式变得较简单,即

$$\begin{cases} a(t) = \bar{a}_0 + a_S^{(1)}(t) + \cdots, \\ M(t) = \overline{M}_0 + \omega + (M_1 + M_2 + \cdots)(t - t_0) + M_S^{(1)}(t) + \cdots. \end{cases} \tag{4.60}$$

平均根数法首先由 Kozai[1] 成功地用于构造人造地球卫星在地球非球形引力(主要带谐项 J_2,J_3 和 J_4)摄动影响下的分析解. 因此,针对各类航天器(特别是卫星型航天器)的运动状况和太阳系各大行星及月球等天体的形状和质量分布的特征,本章将重点介绍平均根数法如何构造卫星在中心天体非球形引力场中运动的轨道分析解,从而即可让读者进一步了解平均根数法的具体细节,又能给出卫星椭圆轨道变化的主要特征,为轨道设计提供必要的依据. 最后还对一类探测器在接近目标天体或近距离飞越目标天体时的双曲线轨道变化进行讨论,构造相应的轨道摄动解.

§4.2 中心天体的非球形引力位

对于质点引力场,空间任何一点的引力位由下式表达:

$$V_0 = \frac{GM}{r}. \tag{4.61}$$

其中 G 是引力常数,M 是质点的质量,r 是空间测量点到该质点的距离. 显然,$V_0 = V_0(r)$是空间点的函数,亦称位函数. 相应的引力加速度为

$$\boldsymbol{F}_0 = \mathrm{grad}V_0 = -\frac{GM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{4.62}$$

如果各大行星是质量分布均匀的球形天体,则其引力场等价于质点引力场,相当于质量全部集中在质心上. 但是,无论是地球,还是其他大行星或是月球,质量分布并非均匀,而且形状也不是球形,最好的近似也只能看成一个扁球体(旋转椭球体),相应的动力学扁率状况如下:

地球:$J_2 = O(10^{-3})$,　　月球:$J_2 = O(10^{-4})$,

火星:$J_2 = O(10^{-3})$,　　木星:$J_2 = O(10^{-2})$,…

不仅如此,由于卫星(特别是低轨卫星)离中心天体较近,相应的非球形引力特征更加显著,因此必须给出一般天体的非球形引力位.

1. 引力位函数的一般式

由于大行星和月球等均有自转,又并非旋转对称体,故空间任一固定点的引力位都要随时间变化,为此必须在星固坐标系 O—XYZ 中讨论这一问

题. 该坐标系在 § 1.1 中曾提出过,即坐标原点在中心天体质心上,XY 坐标面是该天体的赤道面,X 轴是赤道面上的任一固定方向(对于地球即取为格林尼治子午线方向). 采用球坐标(r,λ_G,φ),r 是向径,即空间点到中心天体质心(坐标原点)的距离,λ_G,φ 是经纬度,则引力位函数(对中心天体外任一点)的一般表达式如下:

$$V = \frac{GM}{r}\left[1+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\mu)(C_{lm}\cos m\lambda_G + S_{lm}\sin m\lambda_G)\right]. \tag{4.63}$$

此即球谐展开式,$P_{lm}(\mu)$是球谐函数. 其中 a_e 是中心天体的赤道半径(确切地说是相应的参考椭球体的赤道半径),$\mu=\sin\varphi$,谐系数 C_{lm} 和 S_{lm} 是与中心天体的形状和密度分布有关的常数. 其值的大小即反映了中心天体与等密度球体之间的差异,亦即反映了中心天体形状不规则(即与球形的差别)和密度不均匀的程度.

(4.63)式表明,一般天体的引力位函数与质点引力位函数之间的差别即该式右端括号内的第二项,此即非球形引力位部分,对卫星运动而言,亦称摄动函数,有

$$\begin{aligned} R &= \Delta V = V - V_0 \\ &= \frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\mu)[C_{lm}\cos m\lambda_G + S_{lm}\sin m\lambda_G]. \end{aligned} \tag{4.64}$$

2. 非球形引力位的常用形式及有关参数

(1) 带谐项和田谐项

由(4.64)式可以看出,非球形引力位部分 ΔV 包含性质完全不同的两种球谐项:一种对应 $m=0$,此时 $\sin m\lambda_G=0$,$\cos m\lambda_G=1$,这种项显然与经度 λ_G 无关,称为带谐项,记作 ΔV_1;而另一种项则对应 $m=1,2,\cdots,l$,与经度 λ_G 有关,称为田谐项,记作 ΔV_2. 其中 $m=l$ 对应的 C_{ll} 和 S_{ll} 又称扇谐系数,相应的项则称为扇谐项,本书将不再从 ΔV_2 中区分出,统称田谐项. ΔV_1 和 ΔV_2 分别由下式表达:

$$\Delta V_1 = \frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}C_{n,0}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_l(\sin\varphi), \tag{4.65}$$

$$\Delta V_2 = \frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\sin\varphi)[C_{lm}\cos m\lambda_G + S_{lm}\sin m\lambda_G]. \tag{4.66}$$

对于带谐项,又常采用下列形式:

$$J_l = -C_{l,0} \ ,\tag{4.67}$$

$$\Delta V_1 = -\frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty} J_l\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_l(\sin\varphi) \ .\tag{4.68}$$

与带谐项类似,田谐项的另一种表达式为

$$\Delta V_2 = \frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l} J_{lm}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\sin\varphi)\cos m\bar{\lambda} \ ,\tag{4.69}$$

其中

$$\begin{cases} J_{lm} = (C_{lm}^2 + S_{lm}^2)^{1/2} \ , \\ m\lambda_{lm} = \arctan(S_{lm}/C_{lm}) \ , \\ \bar{\lambda} = \lambda_G - \lambda_{lm} \ . \end{cases}\tag{4.70}$$

对于卫星运动问题,相应空间坐标系采用的是中心天体质心赤道坐标系($O-xyz$),除天体赤道面摆动等因素外,它与星固坐标系之间的差别是 x 轴方向不同,空间坐标系的 x 轴是指向空间一固定方向,如春分点方向. 那么,对于空间球坐标系($O-r\lambda\varphi$)而言,两者之间有如下关系:

$$\lambda = \lambda_G + S_G \ .\tag{4.71}$$

对地球而言,S_G 即格林尼治恒星时,对其他大行星或月球,也有类似的含义,S_G 即反映中心天体的自转. 由此从(4.65)或(4.66)式不难看出,带谐项实际上反映了中心天体非球形引力位的旋转对称部分,中心天体的自转不改变空间固定点的引力大小,就卫星运动而言,相应的摄动位不显含 t,对应一个定常问题. 而田谐项与带谐项有本质的差别,它反映的是中心天体非球形引力位的非旋转对称部分,由 $S_G = S_G(t)$ 导致中心天体的自转将改变空间固定点的引力大小. 就卫星运动而言,该项的影响对应一个非定常问题.

(2) 关于中心天体的引力场常数

(4.65)和(4.66)式中出现的球谐函数 $P_{lm}(\mu)$ 称为缔合勒让德多项式,而 $P_l(\mu) = P_{l0}(\mu)$ 则称为勒让德多项式,其定义如下:

$$P_{lm}(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_L(\mu)}{\mathrm{d}\mu^m} \ ,\tag{4.72}$$

$$P_L(\mu) = \frac{1}{2^l l\,!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}l^l}[(\mu^2-1)^l] \ .\tag{4.73}$$

$P_{lm}(\mu)$ 还有递推算法,这在各种有关特殊函数的书籍中都有阐述,本书将不再重复. 除此之外,$P_{lm}(\mu)$ 的模 N_{lm} 是一个很重要的值,有

$$[N_{lm}]^2 = \int_{-1}^{1}[P_{lm}(\mu)]^2\mathrm{d}\mu = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)\,!}{(l-m)\,!} .\tag{4.74}$$

如果直接采用(4.64)式表达非球形引力位,那么 $P_{lm}(\mu)$ 对不同的阶次

l 和 m，其值相差较大，而相应的谐系数值也因此起伏较大. 为了避免这种情况，通常采用归一化的表达式，即根据 $P_{lm}(\mu)$ 模 N_{lm} 的大小引进 $\overline{P}_{lm}(\mu)$，定义如下：

$$\overline{P}_{lm}(\mu) = P_{lm}(\mu)/N_{lm}\ , \tag{4.75}$$

这里的符号 N_{lm} 与(4.74)式给出的模稍有差别，表达式为

$$N_{lm} = \left[\frac{2}{2l+1}\ \frac{(l+m)!}{(1+\delta)(l-m)!}\right]^{1/2}. \tag{4.76}$$

其中 δ 的定义如下：

$$\delta = \begin{cases} 0, & m=0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases} \tag{4.77}$$

由此定义，非球形引力位 ΔV 的归一化形式变为

$$\Delta V = \frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l \overline{P}_{lm}(\sin\varphi)[\overline{C}_{lm}\cos m\lambda_G + \overline{S}_{lm}\sin m\lambda_G]\ , \tag{4.78}$$

其中归一化的谐系数为

$$\overline{C}_{lm} = C_{lm}N_{lm}\ ,\quad \overline{S}_{lm} = S_{lm}N_{lm}\ . \tag{4.79}$$

上述非球形引力位就反映了一个天体的真实引力场，其中 GM，a_e 和 $\overline{C}_{lm}$，$\overline{S}_{lm}$ 就是一个天体一套自洽的引力场参数，它们分别称为该天体的质心引力常数(如地心引力常数、月心引力常数等)，参考椭球体赤道半径和引力场谐系数. 在本书附录中我们将给出地球引力场较普遍采用的两套引力场参数 JGM－3 和 WGS84 以及一套较新的月球引力场参数 LP75G 和 LP175，以供读者参考，同时也为后面阐述有关内容提供依据.

下面将以人造卫星在地球非球形引力场中的运动为代表，具体阐述平均根数法的应用，给出相应的轨道分析解，并在有关内容中同时介绍构造其他类型航天器轨道分析解时应注意的问题.

在构造人造地球卫星轨道分析解时，为了公式表达的方便和对一些关键量进行量级分析的需要，习惯采用一种标准化的计算单位，即采用给定的地球引力场参数的有关量作为质量、长度和时间单位：$[M]$，$[L]$，$[T]$，有

$$\begin{cases} [M] = \text{地球质量}\ M, \\ [L] = \text{地球参考椭球赤道半径}\ a_e, \\ [T] = [a_e^3/GM] \approx 806^s.81038\cdots. \end{cases} \tag{4.80}$$

在此单位系统中，非球形引力位表达式中的引力常数 $\mu=GM=1$，$a_e=1$. 在本章下面的有关内容和其他章节中，如果对量纲没有具体说明，均为上述标准单位，这种对计算单位的处理，亦可称为“无量纲化”. 在讨论其他类型航

天器的运动时,对计算单位亦有类似的处理.

§4.3 中心天体非球形引力摄动(Ⅰ)——主要带谐项摄动

针对地球非球形引力场的特征,主要带谐项是指 J_2,J_3 和 J_4 三项,对于其他大行星、月球或某些值得探测的小行星和自然卫星等,未必是这三项,但对于所有有自转的天体,J_2 对应的扁率项确实是主要的,它反映了旋转扁球体这一主要特征,至少符合太阳系的状况. 当然,对于快自转天体和慢自转天体,动力学扁率因子 J_2 与其他球谐项的相对大小是有明显差别的. 例如若将 J_2 作为一阶小量,那么,对于地球,其他球谐项的归一化系数将为二阶小量,甚至更小;而对于月球,由于自转慢,相应的 J_2 较小,其他球谐项归一化系数与其相差不太大(见附录月球引力场参数). 关于这一点,将在后面有关内容的阐述中加以区别.

J_2,J_3,J_4 三项是地球引力场球谐展开式中的低阶带谐项(或长波项),对于精度要求不高的问题,非球形引力位的修正取此三项就足够了. 更重要的是,通过对这三项的讨论,可以较完整地体现平均根数的定义和平均根数法构造摄动解的细节. 在上述标准单位中,仅考虑 J_2,J_3 和 J_4 三项,(4.68)式变为下列形式:

$$\Delta V_1 = -\sum_{l=2}^{4} \frac{J_l}{r^{l+1}} P_l(\sin\varphi) . \tag{4.81}$$

讨论人造地球卫星在相应的地球引力场中的运动时,ΔV_1 即摄动函数 R.

1. 摄动函数的分解

根据 $P_l(\sin\varphi)$的定义(4.73)式,摄动函数表达式(4.81)的具体形式为

$$R = -\frac{J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) - \frac{J_3}{r^4}\left(\frac{5}{2}\sin^3\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi\right) - \frac{J_4}{r^5}\left(\frac{35}{8}\sin^4\varphi - \frac{15}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{8}\right) . \tag{4.82}$$

为了与已有习惯一致,引入

$$A_2 = \frac{3}{2}J_2,\quad A_3 = -J_3,\quad A_4 = -\frac{35}{8}J_4 , \tag{4.83}$$

并以

$$\sin\varphi = \sin i\ \sin(f+\omega) \tag{4.84}$$

代入(4.82)式得

$$R = \frac{A_2}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)+\frac{1}{2}\sin^2 i\ \cos 2(f+\omega)\right]+$$
$$\frac{A_3}{a^4}\left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin i\left[\left(\frac{15}{8}\sin^2 i-\frac{3}{2}\right)\sin(f+\omega)-\frac{5}{8}\sin^2 i\ \sin 3(f+\omega)\right]+\frac{A_4}{a^5}\left(\frac{a}{r}\right)^5\left[\left(\frac{3}{35}-\frac{3}{7}\sin^2 i+\frac{3}{8}\sin^4 i\right)+\right.$$
$$\left.\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)\sin^2 i\ \cos 2(f+\omega)+\frac{1}{8}\sin^4 i\ \cos 4(f+\omega)\right]. \tag{4.85}$$

从(4.85)式可知,摄动函数 R 不显含 t 也不含 Ω,这也是所有带谐项的特征.

仅考虑上述三项,相应的摄动运动方程(4.25)即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = f_0(a)+f_1(\sigma,J_2)+f_2(\sigma,J_3,J_4)\ , \tag{4.86}$$

这里取 $\varepsilon=J_2,J_3,J_4=O(\varepsilon^2)$. 将摄动函数 R 代入摄动运动方程(3.75)式即可给出(4.86)式的具体形式. 但为了用平均根数法构造级数解,还需要将 f_1,f_2 分解成 f_{kc},f_{kl}和 $f_{ks}(k=1,2)$,既然如此,先对 R 进行分解似乎更简单些. 首先对卫星运动(即时间 t 或平近点角 M)求平均值,可将短周期项分离出,剩下的项中关于 ω 的周期函数部分即长周期项,这样便将 R 分解成五部分

$$R = R_{\mathrm{C}}+R_{\mathrm{L}}+R_{\mathrm{S}} = R_{1\mathrm{C}}+R_{2\mathrm{C}}+R_{2\mathrm{L}}+R_{1\mathrm{S}}+R_{2\mathrm{S}}\ . \tag{4.87}$$

其中一、二阶长期部分 $R_{\mathrm{C}}=R_{1\mathrm{C}}(J_2)+R_{2\mathrm{C}}(J_4)$是 a,e,i 的函数,$R_{1\mathrm{L}}=0$,$R_{2\mathrm{L}}(J_3,J_4)$是长周期部分,而 $R_{\mathrm{S}}=R_{1\mathrm{S}}(J_2)+R_{2\mathrm{S}}(J_3,J_4)$是一、二阶短周期部分. 从 R 的表达式(4.85)可以看出,分解过程中仅涉及形如

$$\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf,\quad \left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf\ ,$$

这类函数的求平均值问题. 利用第二章 §2.2 给出的方法或直接引用附录中的结果:

$$\begin{cases}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} = (1-e)^{-3/2}, & \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f} = 0, \\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f} = e(1-e^2)^{-5/2}, & \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos 3f} = 0, \\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5} = \left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}, & \end{cases}$$
$$\begin{cases}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5\cos 2f} = \frac{3}{4}e^2(1-e^2)^{-7/2}, \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5\cos 4f} = 0, \\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p\cos qf} = 0\ . \end{cases} \tag{4.88}$$

便可得到(4.87)**式中** 5 **个部分的具体形式如下：**

$$R_{1\mathrm{C}}=\frac{A_2}{a^3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)(1-e^2)^{-3/2}\ ,\tag{4.89}$$

$$R_{2\mathrm{C}}=\frac{A_4}{a^5}\left(\frac{3}{35}-\frac{3}{7}\sin^2 i+\frac{3}{8}\sin^4 i\right)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}\ ,\tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}R_{2\mathrm{L}}=&-\frac{3}{4}\frac{A_3}{a^4}\sin i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)(1-e^2)^{-5/2}e\ \sin\omega+\\&\frac{3}{4}\frac{A_4}{a^5}\sin^2 i\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)(1-e^2)^{-7/2}e^2\ \cos 2\omega\ ,\end{aligned}\tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}R_{1\mathrm{S}}=&\frac{A_2}{a^3}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.\\&\left.\frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\ \cos 2(f+\omega)\right\}\ ,\end{aligned}\tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}R_{2\mathrm{S}}=&-\frac{A_3}{a^4}\left\{\frac{3}{4}\sin i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\ \sin(f+\omega)-\right.\right.\\&\left.\left.(1-e^2)^{-5/2}e\ \sin\omega\right]+\frac{5}{8}\sin^3\ i\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin 3(f+\omega)\right\}+\\&\frac{A_4}{a^5}\left\{\left(\frac{3}{35}-\frac{3}{7}\sin^2 i+\frac{3}{8}\sin^4 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^5-\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}\right]+\right.\\&\sin^2 i\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^5\cos 2(f+\omega)-\frac{3}{4}(1-e^2)^{-7/2}e^2\cos 2\omega\right]+\\&\left.\frac{1}{8}\sin^4 i\left(\frac{a}{r}\right)^5\cos 4(f+\omega)\right\}\ .\end{aligned}\tag{4.93}$$

对于一阶解，二阶短周期部分 $R_{2\mathrm{S}}$**是不需要的.**

将 R **的各个部分代入摄动运动方程**(3.75)**，就可分别给出方程**(4.86)**右函数的具体形式，即**

$$f_0=(0,0,0,0,0,n)^{\mathrm{T}}\ ,\tag{4.94}$$

$$f_{1\mathrm{C}}=(0,0,0,(f_{1\mathrm{C}})_\Omega,(f_{1\mathrm{C}})_\omega,(f_{1\mathrm{C}})_M)^{\mathrm{T}}\ ,\tag{4.95}$$

$$f_{1\mathrm{S}}=((f_{1\mathrm{S}})_a,(f_{1\mathrm{S}})_e,(f_{1\mathrm{S}})_i,(f_{1\mathrm{S}})_\Omega,(f_{1\mathrm{S}})_\omega,(f_{1\mathrm{S}})_M)^{\mathrm{T}}\ ,\tag{4.96}$$

$$f_{2\mathrm{C}}=(0,0,0,(f_{2\mathrm{C}})_\Omega,(f_{2\mathrm{C}})_\omega,(f_{2\mathrm{C}})_M)^{\mathrm{T}}\ ,\tag{4.97}$$

$$f_{2\mathrm{L}}=(0,(f_{2\mathrm{L}})_e,(f_{2\mathrm{L}})_i,(f_{2\mathrm{L}})_\Omega,(f_{2\mathrm{L}})_\omega,(f_{2\mathrm{L}})_M)^{\mathrm{T}}\ .\tag{4.98}$$

其中

$$(f_{1\mathrm{C}})_\Omega=-\frac{A_2}{p^2}n\ \cos i\ ,\tag{4.99}$$

$$(f_{1\mathrm{C}})_\omega=\frac{A_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\ ,\tag{4.100}$$

$$(f_{1C})_M = \frac{A_2}{p^2}n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\,, \tag{4.101}$$

$$(f_{1S})_a = \frac{2nA_2}{a}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\left\{-\frac{e\sin f}{1-e^2}\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right]-\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)\right\}\,, \tag{4.102}$$

$$(f_{1S})_e = \frac{nA_2}{a^2 e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\left\{-e\sin f\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right]-(1-e^2)\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)+\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)\right\}\,, \tag{4.103}$$

$$(f_{1S})_i = -\frac{nA_2}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\sin 2i\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2(f+\omega)\,, \tag{4.104}$$

$$(f_{1S})_\Omega = -\frac{nA_2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\cos i\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]-\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\}\,, \tag{4.105}$$

$$(f_{1S})_\omega = \frac{nA_2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\cos^2 i\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]-\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\}+\frac{nA_2}{a^2 e}\sqrt{1-e^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f-e(1-e^2)^{-5/2}\right]+\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\cos 2(f+\omega)-\frac{\sin^2 i}{1-e^2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin f\sin 2(f+\omega)+(1-e^2)\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin f\sin 2(f+\omega)\right]\right\}\,, \tag{4.106}$$

$$(f_{1S})_M = \left(-\frac{3n}{2a}\right)a_S^{(1)}+\frac{2nA_2}{a^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\}-$$
$$\frac{nA_2}{a^2 e}\sqrt{1-e^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f-e(1-e^2)^{-5/2}\right]+\right.$$

$$\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\ \cos 2(f+\omega)-$$

$$\frac{\sin^2 i}{1-e^2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin f\ \sin 2(f+\omega)+\right.$$

$$\left.\left.(1-e^2)\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin f\sin 2(f+\omega)\right]\right\}, \tag{4.107}$$

$$(f_{2C})_\Omega=-\frac{A_4}{p^4}n\cos i\left[\left(\frac{6}{7}+\frac{9}{7}e^2\right)-\sin^2 i\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}e^2\right)\right], \tag{4.108}$$

$$(f_{2C})_\omega=\frac{A_4}{p^4}n\left[\left(\frac{12}{7}+\frac{27}{14}e^2\right)-\sin^2 i\left(\frac{93}{14}+\frac{27}{4}e^2\right)+\sin^4 i\left(\frac{21}{4}+\frac{81}{16}e^2\right)\right], \tag{4.109}$$

$$(f_{2C})_M=\frac{A_4}{p^4}n\ \sqrt{1-e^2}\left[e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{45}{14}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right], \tag{4.110}$$

$$(f_{2L})_e=-\frac{1-e^2}{e}\tan i(f_{2L})_i, \tag{4.111}$$

$$(f_{2L})_i=-\frac{A_3}{p^3}n\left[\frac{3}{4}\cos i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\right]e\cos\omega-$$

$$\frac{A_4}{p^4}n\left[\sin 2i\left(\frac{9}{28}-\frac{3}{8}\sin^2 i\right)\right]e^2\sin 2\omega, \tag{4.112}$$

$$(f_{2L})_\Omega=-\frac{A_3}{p^3}n\left[\frac{3}{8}\cot i(4-15\sin^2 i)\right]e\sin\omega+$$

$$\frac{A_4}{p^4}n\left[\cos i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right]e^2\cos 2\omega, \tag{4.113}$$

$$(f_{2L})_\omega=-\frac{A_3}{p^3}n\ \frac{1}{e\sin i}\left[\frac{3}{8}\sin^2 i(4-5\ \sin^2 i)-\frac{3}{8}e^2(4-35\sin^2 i+\right.$$

$$\left.35\sin^4 i)\right]\sin\omega+\frac{A_4}{p^4}n\left[\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)-\right.$$

$$\left.e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{15}{4}\sin^2 i+\frac{27}{8}\sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega, \tag{4.114}$$

$$(f_{2L})_M=\frac{A_3}{p^3}n\ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sin i}\left[\frac{3}{8}\sin^2 i(4-5\sin^2 i)(1-4e^2)\right]\sin\omega-$$

$$\frac{A_4}{p^4}n\ \sqrt{1-e^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\right]\cos 2\omega. \tag{4.115}$$

以上各式中的 n 和 p 分别为 $a^{-\frac{3}{2}}$ 和 $a(1-e^2)$，不要与某些公式中的整数取值相混淆. 推导中涉及的 $\partial f/\partial\sigma$ 和 $\partial\left(\frac{a}{r}\right)/\partial\sigma$，在第二章 § 2.2 中给出.

2. J_2, J_3, J_4 三项摄动的一阶解

将上述右函数 f_{1C}, f_{1S}, f_{2C} 和 f_{2L} 分别代入(4.37)～(4.38)式，即可给出一阶解所需要的个摄动项，下面分别列出.

(1) 一阶长期项 $\boldsymbol{\sigma}_1(t-t_0)$

$$a_1(t-t_0)=0,\quad e_1(t-t_0)=0,\quad i_1(t-t_0)=0,\tag{4.116}$$

$$\Omega_1(t-t_0)=-\frac{A_2}{\bar{p}^2}\bar{n}\cos\bar{i}(t-t_0),\tag{4.117}$$

$$\omega_1(t-t_0)=\frac{A_2}{\bar{p}^2}\bar{n}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}\right)(t-t_0),\tag{4.118}$$

$$M_1(t-t_0)=\frac{A_2}{\bar{p}^2}\bar{n}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}\right)\sqrt{1-\bar{e}^2}(t-t_0).\tag{4.119}$$

其中

$$\bar{n}=\bar{a}^{-3/2},\quad \bar{p}=\bar{a}(1-\bar{e}^2).\tag{4.120}$$

(2) 一阶短期项 $\boldsymbol{\sigma}_S^{(1)}$

根据 f_{1S} 的表达式可以看出，由于积分时 σ 应以 $\bar{\sigma}(t)$ 代入，被积函数中会同时出现 f 和 t 两种变量，对 t 无法严格积分. 但由于 f_{1S} 的变化具有短周期特征，又是求一阶项，故可按无摄运动引用变换关系，而且积分时 $\bar{\omega}(t)$ 可当作常数.

$$\begin{aligned}a_S^{(1)}(t)&=\int^t\frac{2}{an}\frac{\partial R_{1S}}{\partial M}\mathrm{d}t=\int^M\frac{2}{an}\frac{\partial R_{1S}}{\partial M}\frac{\mathrm{d}M}{n}=\frac{2}{n^2a}R_{1S}\\&=\frac{A_2}{a}\left\{\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.\\&\qquad\left.\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos2(f+\omega)\right\},\end{aligned}\tag{4.121}$$

$$\begin{aligned}i_S^{(1)}(t)&=\int^t(f_{1S})_i\mathrm{d}t\\&=-\frac{A_2}{2a^2(1-e^2)}\sin2i\int^t\left(\frac{a}{r}\right)\sin2(f+\omega)\mathrm{d}f\\&=\frac{A_2}{4p^2}\sin2i\left[\cos2(f+\omega)+e\cos(f+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right].\end{aligned}\tag{4.122}$$

关于 $e_S^{(1)}(t)$，不必求积分 $\int^t(f_{1S})_e\mathrm{d}t$，根据 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 的积分方法，可由摄动运动方程(3.75)直接给出

$$e_S^{(1)}(t)=\frac{1-e^2}{e}\left[\frac{1}{2a}a_S^{(1)}(t)-\tan i\cdot i_S^{(1)}(t)\right]$$

$$= \frac{A_2}{a^2}\left(\frac{1-e^2}{e}\right)\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.$$
$$\frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)-\frac{\sin^2 i}{2(1-e^2)^2}\left[\cos 2(f+\omega)+\right.$$
$$\left.\left.e\cos(f+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right]\right\}, \tag{4.123}$$

$$\Omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)=\int^t (f_{1\mathrm{S}})_{\Omega}\,\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{nA_2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\cos i\left\{\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\int^t\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}f-\right.$$
$$\left.\frac{1}{n}(1-e^2)^{-3/2}\int^M \mathrm{d}M-\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\int^t\left(\frac{a}{r}\right)\cos 2(f+\omega)\,\mathrm{d}f\right\}$$
$$=-\frac{A_2}{p^2}\cos i\left\{(f-M+e\sin f)\right\}-$$
$$\left.\frac{1}{2}\left[\sin 2(f+\omega)+e\sin(f+2\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right]\right\}, \tag{4.124}$$

$$\omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)=\int^t (f_{1\mathrm{S}})_{\omega}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{A_2}{p^2}\left\{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)(f-M+e\sin f)+\right.$$
$$\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]-$$
$$\left[\frac{1}{4e}\sin^2 i+\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 i\right)e\right]\sin(f+2\omega)-$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin 2(f+\omega)+\left[\frac{7}{12e}\sin^2 i-\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{6}-\frac{19}{48}\sin^2 i\right)e\right]\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin^2 i\sin(4f+2\omega)+$$
$$\left.\frac{e}{16}\sin^2 i[\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega)]\right\}, \tag{4.125}$$

$$M_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)=\int^t\left[\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)+(f_{1\mathrm{S}})_M\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\left\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\right.\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)-\right.$$

$$\left(\frac{7}{12e}-\frac{e}{48}\right)\sin(3f+2\omega)-\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)-$$

$$\left.\left.\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)-\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\right]\right\}. \tag{4.126}$$

上述 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 表达式右端出现的根数均为 $\bar{\sigma}(t)$. 当然,在一阶解意义下,$\bar{a},\bar{e},\bar{i}$ 就是 $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$,也可用 a_0,e_0,i_0 代替,但 $\bar{\omega}(t)=\bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0)$,$\overline{M}(t)=\overline{M_0}+(\bar{n}+M_1)(t-t_0)$.

将 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 对卫星运动求平均值,得

$$\begin{cases}\overline{a_S^{(1)}(t)}=0,\\ \overline{e_S^{(1)}(t)}=\dfrac{A_2}{p^2}\sin^2 i\left(\dfrac{1-e^2}{6e}\right)\overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\\ \overline{i_S^{(1)}(t)}=-\dfrac{1}{12}\dfrac{A_2}{p^2}\sin 2i\ \overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\\ \overline{\Omega_S^{(1)}(t)}=-\dfrac{1}{6}\dfrac{A_2}{p^2}\cos i\ \overline{\cos 2f}\sin 2\omega,\\ \overline{\omega_S^{(1)}(t)}=\dfrac{A_2}{p^2}\left[\sin^2 i\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1-e^2}{6e}\overline{\cos 2f}\right)+\dfrac{1}{6}\cos^2 i\ \overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega,\\ \overline{M_S^{(1)}(t)}=-\dfrac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1-e^2/2}{6e}\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega.\end{cases} \tag{4.127}$$

在求平均值过程中已经将 $\overline{\cos qf}$ 表示成 $\overline{\cos 2f}$ 的形式,而 $\overline{\cos 2f}$ 由下式计算

$$\overline{\cos 2f}=\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2. \tag{4.128}$$

上述结果表明,$\sigma_S^{(1)}(t)-\overline{\sigma_S^{(1)}(t)}$ 才是真正的短周期项. 事实上,求 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 时是按无摄运动变换关系积分的,而 $\overline{\sigma_S^{(1)}(t)}$ 只是 a,e,i,ω 的函数,因此,该项实为这种积分方法所导致的一个"积分常数". 如果积分 $\int^t f_{1S}\mathrm{d}t$ 时,将 f_{1S} 展成平近点角 M 的三角级数,从而表示成时间 t 的显函数后直接对 t 积分,则必有 $\sigma_S^{(1)}(t)=0$.

(3) 二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$

推导 $\sigma_2(t-t_0)$ 和 $\sigma_1^{(1)}(t)$ 时,均涉及到

$$\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_S^{(1)}(t))_j$$

这类表达式求平均值时分解成 C,L,S 三种项的问题. 为了书写方便,这里引用符号 C,L,S 分别表示前面提出的仅与 a,e,i 有关的部分,性质取决于

ω 变化的长周期部分和变化由 M 决定的短周期部分. 在分离上述各项时要注意以下两点：

1）C,L,S 三种项相乘的结果，一般为

$$\begin{cases} \mathrm{C}\cdot\mathrm{C}\to\mathrm{C},\ \mathrm{C}\cdot\mathrm{L}\to\mathrm{L}, & \mathrm{C}\cdot\mathrm{S}\to\mathrm{S}, \\ \qquad\qquad \mathrm{L}\cdot\mathrm{L}\to\mathrm{C},\mathrm{L}, & \mathrm{L}\cdot\mathrm{S}\to\mathrm{S}, \\ & \mathrm{S}\cdot\mathrm{S}\to\mathrm{C},\mathrm{L},\mathrm{S}, \end{cases} \tag{4.129}$$

例如

$$\sin f\cdot\sin f=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\overline{\cos 2f}\right)-\left(\frac{1}{2}\cos 2f-\frac{1}{2}\overline{\cos 2f}\right),$$

即 $\mathrm{S}\cdot\mathrm{S}=\mathrm{C}+\mathrm{S}$.

2）在求平均值时，显然有 $\overline{A\pm B}=\overline{A}\pm\overline{B}$. 而对一般情况，存在下列不等式：

$$\overline{A\cdot B}\neq\overline{A}\cdot\overline{B},\quad \overline{\left(\frac{A}{B}\right)}\neq\overline{A}/\overline{B}. \tag{4.130}$$

略去推导过程，对于 a,e,i，很容易得到下述结果：

$$a_2=0,e_2=0,i_2=0. \tag{4.131}$$

对于 Ω,ω，相应的 $(f_{2\mathrm{C}})_\Omega$ 和 $(f_{2\mathrm{C}})_\omega$ 已由(4.108)和(4.109)式给出，另一大项的结果为

$$\left(\sum_j\frac{\partial(f_1)_\Omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}-\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}})_j\right)_{\mathrm{C}}=-\frac{A_2^2}{p^4}n\cos i\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}\right)-\sin^2 i\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\right], \tag{4.132}$$

$$\left(\sum_j\frac{\partial(f_1)_\omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}-\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}})_j\right)_{\mathrm{C}}=\frac{A_2^2}{p^4}n\left[\left(4+\frac{7}{12}e^2+2\sqrt{1-e^2}\right)-\sin^2 i\left(\frac{103}{12}+\frac{3}{8}e^2+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}\right)+\sin^4 i\left(\frac{215}{48}-\frac{15}{32}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}\right)\right]. \tag{4.133}$$

因 $\bar{a}=\bar{a}_0,\bar{e}=\bar{e}_0,\bar{i}=\bar{i}_0$，故由(4.38)式可知，$\Omega$ 和 ω 的二阶长期项系数 Ω_2 和 ω_2 就分别由上述(4.108)，(4.132)式和(4.109)，(4.133)式两部分之和给出.

对于 M，与上类似，$(f_{2\mathrm{C}})_M$ 已由(4.110)式给出，另一大项是

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2+\sum_j\frac{\partial(f_1)_M}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{c}}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{A_2^2}{p^4}n\sqrt{1-e^2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)^2\sqrt{1-e^2}+\left(\frac{5}{2}+\frac{10}{3}e^2\right)-\right.\\
&\quad\sin^2 i\left(\frac{19}{3}+\frac{26}{3}e^2\right)+\sin^4 i\left(\frac{233}{48}+\frac{103}{12}e^2\right)+\\
&\quad\left.\frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{12}-\frac{35}{4}\sin^2 i+\frac{315}{32}\sin^4 i\right)\right], \qquad (4.134)
\end{aligned}
$$

同样 M_2 就是上述(4.110)和(4.134)式给出的两项之和.

关于二阶长期项,需要说明两点:

1) 推导中 $\sigma_S^{(1)}$ 这一项与 $\sigma_S^{(1)}-\overline{\sigma_S^{(1)}}$ 的效果相同,即$\overline{\sigma_S^{(1)}}$对二阶长期项的推导不起作用,这可从 $f_1=f_{1C}+f_{1S}$和运算规律(4.129)式得到答案.

2) Ω_2 和 ω_2 与古在由秀给出的结果[1]不一致,与后来库克(Cook)给出的结果[2]也不一致,下面将回答这一问题. 分别记我们的结果、古在由秀的结果和库克的结果为$(\Omega_2)_1$,$(\omega_2)_1$;$(\Omega_2)_2$,$(\omega_2)_2$;$(\Omega_2)_3$,$(\omega_2)_3$,有

$$
\begin{cases}
(\Omega_2)_1=\dfrac{A_2^2}{p^4}n\cos i\left[-\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],\\
(\omega_2)_1=\dfrac{A_2^2}{p^4}n\left[\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],
\end{cases}
\qquad (4.135)
$$

$$
\begin{cases}
(\Omega_2)_2=\dfrac{A_2^2}{p^4}n\cos i\left[2\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],\\
(\omega_2)_2=\dfrac{A_2^2}{p^4}n\left[-2\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],
\end{cases}
\qquad (4.136)
$$

$$
\begin{cases}
(\Omega_2)_3=\dfrac{A_2^2}{p^4}n\cos i\left[\dfrac{5}{2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],\\
(\omega_2)_3=\dfrac{A_2^2}{p^4}n\left[-\dfrac{5}{2}\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],
\end{cases}
\qquad (4.137)
$$

各式右端的根数都是平均根数.(4.135)式的形式已重新整理过,与前面(4.132)和(4.133)式不一样,这是为了比较不同的部分,请读者注意.

上述三种结果显然是不同的,产生的原因是平均根数 $\bar{a}$ 和 $\bar{n}$ 的取法不同. 我们的结果是按平均根数的严格定义给出的,即

$$
\bar{a}=\overline{a_0},\quad \bar{n}=\overline{n_0},\quad \bar{a}^3\bar{n}^2=1\,. \qquad (4.138)
$$

而古在由秀用的却是

$$\begin{cases}\bar{a}=\bar{a}_0\left[1-\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right],\\ \bar{n}=\overline{n_0}\left[1+\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right],\\ \bar{a}^3\bar{n}^2\neq 1,\end{cases}\tag{4.139}$$

库克用的则是

$$\begin{cases}\bar{a}=\bar{a}_0\left[1-\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right],\\ \bar{n}=\overline{n_0}\left[1+\dfrac{3}{2}\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right].\end{cases}\tag{4.140}$$

$\bar{a}$ 与古在由秀的相同，但 $\bar{n}$ 则是根据 $\bar{a}^3\bar{n}^2=1$ 给出的. 由于这个原因，Ω_1 和 ω_1 也产生差别，相应地有

$$\begin{aligned}(\Omega_1)_2&=-\frac{A_2}{\bar{a}^2(1-\bar{e}_0^2)^2}\bar{n}\cos\bar{i}_0\\&=(\Omega_1)_1-\frac{A_2^2}{\bar{p}_0^4}\bar{n}_0\left[3\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3)\ ,\\(\omega_1)_2&=\frac{A_2}{\bar{a}^2(1-\bar{e}_0^2)^2}\bar{n}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\\&=(\omega_1)_1+\frac{A_2^2}{\bar{p}_0^4}\bar{n}_0\left[3\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3),\\(\Omega_1)_3&=(\Omega_1)_1-\frac{A_2^2}{\bar{p}_0^4}\bar{n}_0\left[\frac{7}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3)\ ,\\(\omega_1)_3&=(\omega_1)_1+\frac{A_2^2}{\bar{p}_0^4}\bar{n}_0\left[\frac{7}{2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+\\&\quad O(A_2^3)\ .\end{aligned}$$

而由(4.134)，(4.136)和(4.137)三式给出的 Ω_2 和 ω_2 的差别为

$$(\Omega_2)_2=(\Omega_2)_1+\frac{A_2^2}{\bar{p}_0^4}\overline{n}_0\left[3\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3)\ ,$$

$$(\omega_2)_2=(\omega_2)_1-\frac{A_2^2}{\bar{p}_0^4}\overline{n}_0\left[3\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3)\ ,$$

$$(\Omega_2)_3=(\Omega_2)_1+\frac{A_2^2}{\bar{p}_0^4}\overline{n}_0\left[\frac{7}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]\ ,$$

$$(\omega_2)_3=(\omega_2)_1-\frac{A_2^2}{\bar{p}_0^4}\overline{n}_0\left[\frac{7}{2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3)\ ,$$

这正与上面的差别相差一个符号. 因此，对于整个解来说是没有差别的，只是表达形式不一致. 在使用上述公式时，要注意各自的系统，不能混淆. 而我们给出的解是完全按照平均根数的定义来构造的，没有人为地引进任何不

一致的辅助量，因此，在实际应用中不会出现混乱.

(4) 一阶长周期项 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$

由(4.8)式和(4.95)，(4.96)式可知，对于 a，e，i，因相应的

$$f_{1\mathrm{C}}=0, f_{1\mathrm{L}}=0, f_1=f_{1\mathrm{S}},$$

故被积函数只有两部分，即

$$\left(\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}, f_{2\mathrm{L}}.$$

后者已由(4.98)式和相应的(4.111)，(4.112)式给出，至于前者，经计算有

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_1)_a}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=0.$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_1)_i}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=\frac{A_2^2}{p^4}n\sin 2i\left[\frac{1}{6}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\overline{\cos 2f}\sin 2\omega+\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i\right)e^2\sin 2\omega\right].$$

将这一结果与 $f_{2\mathrm{L}}$ 代入(4.38)式的长周期项部分，积分后得

$$a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=0, \tag{4.141}$$

$$i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\frac{1}{12}\frac{A_2}{p^2}\sin 2i\,\overline{\cos 2f}\cos 2\omega-\frac{A_2}{p^2}\frac{\sin 2i}{(4-5\sin^2 i)}\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i\right)e^2\cos 2\omega-\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cos i e\sin\omega+\frac{1}{p^2}\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{\sin 2i}{(4-5\sin^2 i)}\left(\frac{9}{28}-\frac{3}{8}\sin^2 i\right)e^2\cos 2\omega. \tag{4.142}$$

利用$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$与$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$的关系并注意到带谐项摄动函数不含 Ω，不难给出

$$e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right)i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t). \tag{4.143}$$

对于 Ω 和 ω，(4.38)式长周期部分的被积函数有三大项，即

$$\left(\sum_j \frac{\partial f_{1\mathrm{C}}}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}, \left(\sum_j \frac{\partial f_{1\mathrm{S}}}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}, \quad f_{2\mathrm{L}},$$

第三大项见(4.112)～(4.113)式. 第一大项看上去似乎无法计算，推导 $\sigma_{\mathrm{l}}^{(1)}(t)$时要用其本身，但实际上无妨. 因对 Ω，ω 和 M 都有

$$f_{1\mathrm{C}}=f_{1\mathrm{C}}(a,e,i),$$

$$\frac{\partial f_{1\mathrm{C}}}{\partial(\Omega,\omega,M)}=0,$$

故第一大项中不涉及 $\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}$，$\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}$ 和 $M_{\mathrm{L}}^{(1)}$，而 $a_{\mathrm{L}}^{(1)}$，$e_{\mathrm{L}}^{(1)}$，$i_{\mathrm{L}}^{(1)}$ 均已推出. 经计算有

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_{1\mathrm{C}})_\Omega}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{l}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=\left(5\frac{A_2}{p^2}n\sin i\right)i_{\mathrm{L}}^{(1)},$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial(f_{1C})_\omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_L^{(1)})_j\right)_L = -\frac{A_2}{p^2}n\tan i(13-15\sin^2 i)i_L^{(1)}\ .$$

第二大项算出的结果为

$$\left(\sum_j \frac{\partial(f_{1C})_\Omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j\right)_L = \frac{A_2}{p^2}n\ \cos i\left\{\left[-\frac{1}{6}(4-5\ \sin^2 i)\ \overline{\cos 2f}+\frac{5}{6}\sin^2 i\ \overline{\cos 2f}\right]\cos 2\omega - e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\cos 2\omega\right\}\ ,$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial(f_{1C})_\omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j\right)_L = \frac{A_2^2}{p^4}n\left\{\left[\sin^2 i(4-5\ \sin^2 i)\left(\frac{1}{8}+\frac{1-e^2}{6e}\ \overline{\cos 2f}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\sin^2 i+\frac{10}{3}\sin^4 i\right)\overline{\cos 2f}\right]\cos 2\omega + \left[-\sin^2 i\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{79}{24}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega\right\}\ .$$

将上述三大项代入(4.38)**式的长期项部分,积分得**

$$\Omega_L^{(1)}(t) = -\frac{1}{6}\ \frac{A_2}{p^2}\cos i\ \overline{\cos 2f}\sin 2\omega - \frac{A_2}{p^2}\ \frac{\cos i}{(4-5\sin^2 i)^2}\left(\frac{7}{3}-5\sin^2 i+\frac{25}{8}\sin^4 i\right)e^2\sin 2\omega + \frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cot i e\cos\omega + \frac{1}{p^2}\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{\cos i}{(4-5\sin^2 i)^2}\left(\frac{18}{7}-6\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right)e^2\sin 2\omega\ , \tag{4.144}$$

$$\omega_L^{(1)}(t) = \frac{A_2}{p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1-e^2}{6e}\ \overline{\cos 2f}\right)+\frac{1}{6}\cos^2 i\ \overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega - \frac{A_2}{p^2}\ \frac{1}{(4-5\ \sin^2 i)^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{25}{3}-\frac{245}{12}\sin^2 i+\frac{25}{2}\sin^4 i\right) - e^2\left(\frac{7}{3}-\frac{17}{2}\sin^2 i+\frac{65}{6}\sin^4 i-\frac{75}{16}\sin^6 i\right)\right]\sin 2\omega + \frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\frac{1}{e\ \sin i}[(1-e^2)\sin^2 i-e^2]\cos\omega + \frac{1}{p^2}\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{1}{(4-5\ \sin^2 i)^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{18}{7}-\frac{87}{14}\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right) - e^2\left(\frac{18}{7}-\frac{69}{7}\sin^2 i+\frac{90}{7}\sin^4 i-\frac{45}{8}\sin^6 i\right)\right]\sin 2\omega\ . \tag{4.145}$$

对于 M,稍微复杂些,涉及五大项,即

$$\frac{\partial n}{\partial a}a_L^{(2)},\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_S^{(1)})_L^2,$$

$$\left(\sum_j\frac{\partial(f_{1C})_M}{\partial\sigma_j}(\sigma_L^{(1)})_j\right)_L,\ \left(\sum_j\frac{\partial(f_{1S})_M}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j\right)_L,\quad (f_{2L})_M.$$

首先遇到的问题是：由于 M 的摄动运动方程右端有一零阶项 n，因此推导 $M_L^{(1)}(t)$ 时需要知道 $a_L^{(2)}(t)$，这将引起平均根数法本身遇到的麻烦，但可借助于其他手段绕过这一障碍. 关于这个问题将留到后面第四段中讨论，此处先引用 $a_L^{(2)}(t)$ 的结果. 最后一大项 $(f_{2L})_M$ 见(4.115)**式，其余四大项分别算得**

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial a}a_L^{(2)} = &\frac{A_2^2}{p^4}n\sqrt{1-e^2}\left\{\left[\frac{1}{4}\sin^2 i(4-5\sin^2 i)\,\overline{\cos 2f}+\right.\right.\\&e^2\sin^2 i\left(-\frac{17}{8}+\frac{57}{16}\sin^2 i\right)\left.\right]\cos 2\omega-\\&\left.\frac{e^4}{1-e^2}\left[\frac{7}{2}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega+\frac{3}{64}\sin^4 i\ \cos 4\omega\right]\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_S^{(1)})_L^2+\left(\sum_j\frac{\partial(f_{1S})_M}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j\right)_L\\=&\frac{A_2^2}{p^4}n\sqrt{1-e^2}\left\{\left[-\sin^2 i(4-5\ \sin^2 i)\left(\frac{1}{4}+\frac{1+2e^2}{6e^2}\right)\overline{\cos 2f}+\right.\right.\\&\sin^2 i\left(\frac{19}{12}-\frac{15}{8}\sin^2 i\right)+e^2\sin^2 i\left(\frac{2}{3}-2\sin^2 i\right)\left.\right]\cos 2\omega+\\&\left.\frac{e^4}{1-e^2}\left[\frac{7}{2}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega+\frac{3}{63}\sin^4 i\ \cos\ 4\omega\right]\right\},\end{aligned}$$

$$\left(\sum_j\frac{\partial(f_{1C})_M}{\partial\ \sigma_j}(\sigma_L^{(1)})_j\right)_L=-\frac{3}{2}\frac{A_2}{p^2}n\sqrt{1-e^2}\tan i(4-5\ \sin^2 i)i_L^{(1)}.$$

将以上各部分全部代入(4.38)**式的相应部分，积分得**

$$\begin{aligned}M_L^{(1)}(t) = &-\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1+e^2/2}{6e^2}\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega+\\&\frac{A_2}{p^2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{(4-5\ \sin^2 i)}\sin^2 i\left[\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)-\right.\\&\left.e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)\right]\sin 2\omega.\end{aligned}\qquad(4.146)$$

从 $\sigma_L^{(1)}(t)$ 的结果(4.142)～(4.146)**式清楚地看出，它们的右端第一大项就是$\overline{\sigma_S^{(1)}(t)}$. 因此，在引用 J_2 项摄动时，不必从 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 中减掉$\overline{\sigma_S^{(1)}(t)}$，而相应的 $\sigma_L^{(1)}(t)$ 中却删去$\overline{\sigma_S^{(1)}(t)}$这一项，对解 $\sigma(t)$ 而言，这样处理既正确又简单. 下面将按这种形式整理一套完整的计算公式，请读者注意.**

3. 公式整理

经前面的推导，已经给出 J_2，J_3，J_4 三项摄动一阶解的完整结果. 摄动项中同时包含了二阶长期项，是由于该项随着轨道外推弧段的增长而增大，当弧段 $s=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时，二阶长期项的大小增大到一阶小量的量级 $O(\varepsilon)$. 因此在一阶解中通常都包含二阶长期项，但在实际应用中可视具体要求而有所取舍. 具体结果下面逐一列出.

$$\begin{cases}\sigma(t)=\bar{\sigma}_0+(\delta\bar{n}+\sigma_1+\sigma_2)(t-t_0)+\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ \bar{\sigma}_0=\sigma_0-[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)].\end{cases}\tag{4.147}$$

六个根数的形式分别为

$$\begin{cases}a(t)=\bar{a}_0+a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ e(t)=\bar{e}_0+e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+e_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ i(t)=\bar{i}_0+i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+i_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ \Omega(t)=\bar{\Omega}_0+\Omega_1(t-t_0)+\Omega_2(t-t_0)+\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\Omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ \omega(t)=\bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0)+\omega_2(t-t_0)+\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t),\\ M(t)=\bar{M}_0+(\bar{n}+M_1)(t-t_0)+M_2(t-t_0)+M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+M_{\mathrm{S}}^{(1)}(t).\end{cases}\tag{4.148}$$

根据 M 的特点，计算 $\bar{n}_0$ 所用的 $\bar{a}_0$ 要消去二阶周期项，即

$$\bar{a}_0=a_0-[a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)+a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t_0)+a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t_0)],\tag{4.149}$$

但在实际工作中，往往是通过精密定轨直接给出 $\bar{a}_0$.

下面列出各项摄动公式具体形式.

(1) $\boldsymbol{\sigma_1}$ 和 $\boldsymbol{\sigma_2}$

$$a_1=0,e_1=0,i_1=0,\tag{4.150}$$

$$\Omega_1=-\frac{A_2}{p^2}n\cos i,\tag{4.151}$$

$$\omega_1=\frac{A_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right),\tag{4.152}$$

$$M_1=\frac{A_2}{p^2}n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2},\tag{4.153}$$

$$a_2=0,e_2=0,i_2=0,\tag{4.154}$$

$$\Omega_2=-\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 n\cos i\left\{\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^2 i\right]+$$

$$\left(\frac{A_4}{A_2^2}\right)\left[\left(\frac{6}{7}+\frac{9}{7}e^2\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}e^2\right)\sin^2 i\right]\Bigg\}, \tag{4.155}$$

$$\begin{aligned}\omega_2 = &\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 n\Bigg\{\left[\left(4+\frac{7}{12}e^2+2\sqrt{1-e^2}\right)-\left(\frac{103}{12}+\frac{3}{8}e^2+\right.\right.\\ &\left.\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^2 i+\left(\frac{215}{48}-\frac{15}{32}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^4 i\Big]+\\ &\left(\frac{A_4}{A_2^2}\right)\left[\left(\frac{12}{7}+\frac{27}{14}e^2\right)-\left(\frac{93}{14}+\frac{27}{4}e^2\right)\sin^2 i+\left(\frac{21}{4}+\frac{81}{16}e^2\right)\sin^4 i\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.156}$$

$$\begin{aligned}M_2 = &\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 n\sqrt{1-e^2}\Bigg\{\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)^2\sqrt{1-e^2}+\left(\frac{5}{2}+\frac{10}{3}e^2\right)-\right.\\ &\left(\frac{19}{3}+\frac{26}{3}e^2\right)\sin^2 i+\left(\frac{233}{48}+\frac{103}{12}e^2\right)\sin^4 i+\\ &\left.\frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{12}-\frac{35}{4}\sin^2 i+\frac{315}{32}\sin^4 i\right)\right]+\\ &\left(\frac{A_4}{A_2^2}\right)e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{35}{14}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.157}$$

上述各式中的 a,e,i **均为** $\bar{a},\bar{e},\bar{i}$**,且有**

$$\begin{cases}\bar{a}=\bar{a}_0,\ \bar{e}=\bar{e}_0,\ \bar{i}=\bar{i}_0\\ \bar{n}=\bar{a}^{-\frac{3}{2}}=\bar{a}_0^{\ -3/2},\bar{p}=\bar{a}(1-\bar{e}^2)=\bar{a}_0(1-\bar{e}_0^2).\end{cases} \tag{4.158}$$

(2) $\boldsymbol{\sigma}_S^{(1)}(t)$

$$\begin{aligned}a_S^{(1)}(t) = &\frac{A_2}{a}\Bigg\{\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\\ &\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos2(f+\omega)\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.159}$$

$$e_S^{(1)}(t) = \frac{1-e^2}{e}\left[\frac{1}{2a}a_S^{(1)}(t)-(\tan i)i_S^{(1)}(t)\right], \tag{4.160}$$

$$i_S^{(1)}(t) = \frac{A_2}{4p^2}\sin2i\left[e\cos(f+2\omega)+\cos2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right], \tag{4.161}$$

$$\begin{aligned}\Omega_S^{(1)}(t) = &-\frac{A_2}{p^2}\cos i\Bigg\{(f-M+e\sin f)-\\ &\frac{1}{2}\left[e\sin(f+2\omega)+\sin2(f+\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.162}$$

$$\omega_S^{(1)}(t) = -\cos i\,\Omega_S^{(1)}(t)+\frac{A_2}{p^2}\Bigg\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\Big[(f-M)+e\sin f+$$

$$\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\Big]+$$

$$\sin^2 i\Big[-\left(\frac{1}{4e}-\frac{7}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+\frac{3}{4}\sin 2(f+\omega)+$$

$$\left(\frac{7}{12e}+\frac{11}{48}e\right)\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+$$

$$\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)+\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\Big]\Big\}\ , \tag{4.163}$$

$$M_S^{(1)}(t)=\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\Big\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\Big[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+$$

$$\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\Big]-\sin^2 i\Big[-\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+$$

$$\left(\frac{7}{12e}-\frac{1}{48}e\right)\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+$$

$$\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)+\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\Big]\Big\}\ . \tag{4.164}$$

上述各式涉及 a,e,i,ω 和 M 五个根数,均为准到一阶长期项的平均根数,即

$$\bar{a}(t)=\bar{a}_0,\bar{e}(t)=\bar{e}_0,\bar{i}(t)=\bar{i}_0,$$

$$\bar{\omega}(t)=\overline{\omega_0}+\omega_1(t-t_0),$$

$$\overline{M}(t)=\overline{M_0}+(\bar{n}+M_1)(t-t_0)\ ,$$

而 $\left(\frac{a}{r}\right)$ 和 f 则是 e,M 的函数,它们的值由 $\bar{e}(t)$ 和 $\overline{M}(t)$ 给出.

(3) $\boldsymbol{\sigma}_L^{(1)}(t)$

$$a_L^{(1)}(t)=0\ , \tag{4.165}$$

$$e_L^{(1)}(t)=-\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right)i_L^{(1)}(t)\ , \tag{4.166}$$

$$i_L^{(1)}(t)=-\frac{1}{2p^2}\frac{\sin 2i}{(4-5\sin^2 i)}\Big[A_2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)-$$

$$\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)\Big]e^2\cos 2\omega-\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cos i\, e\sin\omega\ . \tag{4.167}$$

$$\Omega_L^{(1)}(t)=-\frac{1}{p^2}\frac{\cos i}{(4-5\sin^2 i)^2}\Big[A_2\left(\frac{7}{3}-5\sin^2 i+\frac{25}{8}\sin^4 i\right)-$$

$$\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\left(\frac{18}{7}-6\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right)\Big]e^2\sin 2\omega+$$

$$\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cot ie\ \sin\omega. \tag{4.168}$$

$$\begin{aligned}\omega_L^{(1)}(t)=&-\frac{1}{p^2}\frac{1}{(4-5\sin^2 i)^2}\Big\{A_2\Big[\sin^2 i\left(\frac{25}{3}-\frac{245}{12}\sin^2 i+\frac{25}{2}\sin^4 i\right)-\\&e^2\left(\frac{7}{3}-\frac{17}{2}\sin^2 i+\frac{65}{6}\sin^4 i-\frac{75}{16}\sin^6 i\right)\Big]-\\&\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\Big[\sin^2 i\left(\frac{18}{7}-\frac{87}{14}\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right)-\\&e^2\left(\frac{18}{7}-\frac{69}{7}\sin^2 i+\frac{90}{7}\sin^4 i-\frac{45}{8}\sin^6 i\right)\Big]\Big\}\sin 2\omega+\\&\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\frac{1}{e\sin i}[(1+e^2)\sin^2 i-e^2]\cos\omega,\end{aligned} \tag{4.169}$$

$$\begin{aligned}M_L^{(1)}(t)=&\frac{1}{p^2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{(4-5\sin^2 i)}\sin^2 i\Big\{A_2\Big[\left(\frac{15}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)-\\&e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)\Big]-\left(\frac{A_4}{A_2}\right)(1-e^2)\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)\Big\}\sin 2\omega-\\&\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\frac{1}{e}(1-e^2)^{3/2}\sin i\ \cos\omega.\end{aligned} \tag{4.170}$$

上述各式中的根数与 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 中的根数作同样的处理.

上述(4.147)～(4.170)式是一套完整的摄动计算公式. 如果给出的初始条件是

$$t_0, \sigma_0(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega, M_0),$$

那么利用这组公式计算 t 时刻的瞬时根数 $\sigma(t)$ 的步骤如下：

(1) 由 σ_0 代替 $\bar{\sigma}_0$(对于一阶解，这样做精度已够)，用(4.159)～(4.170)式计算 $\sigma_L^{(1)}(t_0)$ 和 $\sigma_S^{(1)}(t_0)$，从而给出 $\bar{\sigma}_0$，即

$$\bar{\sigma}_0=\sigma_0-[\sigma_L^{(1)}(t_0)+\sigma_S^{(1)}(t_0)]$$

在计算短周期项 $\sigma_S^{(1)}(t_0)$ 时出现的两个量，$\left(\frac{a}{r}\right)$ 和 f，按下列公式计算：

$$\begin{cases}E=M+e\sin E,\\ \left(\dfrac{a}{r}\right)=(1-e\cos E)^{-1},\\ \tan f=\dfrac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{\cos E-e}.\end{cases} \tag{4.171}$$

由于平近点角 M 变化的特殊性，所需要的 $\bar{\sigma}_0$ 必须从 a_0 中消除精确到二阶量的 $a_S^{(1)}(t_0)$ 和二阶周期项 $a_S^{(2)}(t_0)$ 和 $a_L^{(2)}(t_0)$，那么 $a_S^{(1)}(t_0)$ 还必须重新由上面算出的 $\bar{\sigma}_0$ 计算，给出精确到二阶量的 $a_S^{(1)}(t_0)$.

(2) 由$\bar{\sigma}_0$ 用(4.150)~(4.157)式计算 σ_1 和 σ_2,从而给出瞬时平均根数 $\bar{\sigma}(t)$,即

$$\bar{\sigma}(t)=\bar{\sigma}_0+(\delta\bar{n}_0+\sigma_1+\sigma_2)(t-t_0).$$

(3) 由$\bar{\sigma}(t)$再用(4.159)~(4.170)式计算 $\sigma_L^{(1)}(t)$和 $\sigma_S^{(1)}(t)$,从而给出瞬时根数 $\sigma(t)$,即

$$\sigma(t)=\bar{\sigma}(t)+\sigma_L^{(1)}(t)+\sigma_S^{(1)}(t).$$

原来这一步要用$\bar{\sigma}(t)=\sigma_0+(\delta\bar{n}_0+\sigma_1)(t-t_0)$计算 $\sigma_S^{(1)}(t)$和 $\sigma_L^{(1)}(t)$就符合精度要求了,但为了计算程序上的方便,按上述方法计算也可以,对一阶解而言,精度一致.

在实际工作中,往往给出的初始条件是

$$t_0,\quad \bar{\sigma}_0=\bar{\sigma}(t_0),$$

于是,可直接从上述第(2)步开始计算.正因为如此,也就不必考虑平近点角 M 对 $\bar{n}_0$(或 $\bar{a}_0$)的特殊要求,即为了使 $M(t)$的计算精度与其他五个根数一致,必须从 a_0 中消除一阶和二阶周期项.

对于低轨卫星,在 $n(t-t_0)=10^3$ 弧段内,一阶摄动解的定轨精度可达 10^{-5}.这在很多航天任务中得到了广泛的应用.

除定量计算外,还可以通过上述分析解了解卫星轨道变化的基本特征.如摄动解中 Ω 和 ω 具有长期变化,这说明地球形状带谐项摄动,导致人造卫星轨道平面及拱线在空间不断旋转,而旋转方向取决于倾角 i 的大小.由

$$\Omega_1=-\frac{A_2}{p^2}n\cos i,$$

$$\omega_1=\frac{A_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right),$$

可知当 $0<i<90°$时,轨道面西退,$90°<i<180°$时,轨道面东进.而当$i=90°$(极地轨道)时,轨道面不动,这是容易理解的,因此时人造卫星受一个具有旋转对称特性的地球引力场作用,对轨道面而言,受力是平衡的.

当 $i=i_C=63°23'$或 $116°34'$时$\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i=0\right)$,拱线"不动",$i_C$ 称为临界倾角.

以上特征可以帮助我们了解人造卫星轨道变化的规律,在轨道设计等工作中将会用到.如设计一个太阳同步卫星(轨道面每天东进约 1°,与太阳"运动"同步),就要使 $\Omega_1>0$,即 $i>90°$(逆行卫星).

在摄动表达式 $\sigma_S^{(1)}(t)$和 $\sigma_L^{(1)}(t)$中,有$\frac{1}{e}$,$\frac{1}{\sin i}$,$\frac{1}{4-5\sin^2 i}$这类因子,对

于 $e=0, i=0$ 或 $180°, i=i_C$，上述摄动解无效，此即摄动解的"奇点"，但并不是运动的实质性奇点，是可以消除的，具体方法是采用无奇点根数和相应的拟平均根数法(即改变参考解)，详见参考文献[3]~[5].

最后必须指出：平均根数法的原理确实很简单，只是改变了经典摄动法的参考解. 但无论是摄动法还是平均根数法，构造小参数幂级数解的过程相对而言都较烦，若要构造二阶解，那将更难让人接受. 如果采用哈密顿力学来构造相应的级数解，则要简单很多. 参考文献[6]就在此框架下，通过 Von-Zeipel 变换较简单地构造了上述主要带谐项摄动解，但必须引用正则共轭变量，而轨道根数 $\sigma(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ 不符合这一条件. 为此，参考文献[7]又将这种变换思想推广到一般变量，直接用轨道根数，同样可以采用该变换方法来构造相应的级数解. 所有这些，从构造小参数幂级数解的角度来看有其特点，但在实际工作中是否一定要采用，要视具体情况而定，这里所介绍的方法仅供参考.

4. 能量积分的利用——半长径 a 的二阶周期项的推导

讨论所有带谐项摄动，并将 J_2 和 $J_l(l\geqslant 3)$ 分开. 记

$$F=\frac{1}{2a}+R(\sigma, J_2, J_n)\ , \tag{4.172}$$

这里带谐项摄动函数 R 不显含 t，有

$$\frac{\partial F}{\partial t}=0\ .$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\sum_j \frac{\partial F}{\partial \sigma_j}\dot{\sigma}_j=-\frac{1}{2a}+\sum_j \frac{\partial R}{\partial \sigma_j}\dot{\sigma}_j\ .$$

其中 $\dot{\sigma}_j$ 由摄动运动方程给出，代入上式整理后得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=0\ . \tag{4.173}$$

因此，存在一积分

$$F=\frac{1}{2a}+R=C\ , \tag{4.174}$$

此即能量积分.

能量积分(4.174)式有一个非常显著的特点：F 有两部分，$\frac{1}{2a}$ 和 R，且

$$\frac{1}{2a}=O(\varepsilon^0),\quad R=O(\varepsilon)\ ,$$

ε 即 J_2，零阶部分仅含半长径 a 一个根数. 这一特点非常重要，它至少有两个用途，即

1）由 a,e,i,Ω,ω,M 的一阶摄动，可简单地求出 a 的二阶摄动.

2）在积分常数满足一定精度的条件下，由精度较低的六个根数可重新算出精度较高（高一阶）的半长径 a. 前者就是本节用来推导 a 的二阶周期项的基础，而后者将在数值求解卫星运动方程时，用以控制沿迹误差的扩大.

将能量积分对平均根数 $\bar{\sigma}(t)$ 展开，得

$$\frac{1}{2a}+\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_S^{(1)}+a_L^{(1)}+a_S^{(2)}+a_L^{(2)}+\cdots)\right]_{\bar{\sigma}}+\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_S^{(1)}+a_L^{(1)}+\cdots)^2\right]_{\bar{\sigma}}+(R_{1C}+R_{2C}+R_{1S}+R_{2S}+R_{2L})_{\bar{\sigma}}+\left[\sum_j\frac{\partial(R_{1C}+R_{1S})}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)}+\sigma_L^{(1)})\right]_{\bar{\sigma}}+\cdots=C. \tag{4.175}$$

下面为了书写方便，平均根数 $\bar{\sigma}$ 就写成 σ，请注意这一点. 还有，长周期项 $\sigma_L^{(1)},\sigma_L^{(2)},\cdots$ 分成两部分，一部分为 J_2 项产生的，仍记作 $\sigma_L^{(1)},\sigma_L^{(2)},\cdots$，另一部分为 $J_l(l\geqslant 3)$ 项产生，记作 $\sigma_{lL}^{(1)},\sigma_{lL}^{(2)},\cdots$. 根据积分(4.174)式的性质，展开式左端仅与 a,e,i 有关的“常数项”之和应等于右端的常数 C，与时间 t 有关的全部周期项之和应为 0，而且不同性质的周期项应分别为 0，相同性质的周期项按 J_2 不同阶的各部分亦应分别为 0. 于是有

$$\text{常数项：}\ \frac{1}{2a}+(R_{1C}+R_{2C})+\cdots=C. \tag{4.176}$$

$$\text{一阶周期项：}\ \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_L^{(1)}+a_{lL}^{(1)})=0, \tag{4.177}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_S^{(1)}+R_{1S}=0. \tag{4.178}$$

二阶周期项：

$$\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_L^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_S^{(1)})^2+\sum_j\frac{\partial R_{1C}}{\partial\sigma_j}(\sigma_L^{(1)})_j+\sum_j\frac{\partial R_{1S}}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j\right]_L=0, \tag{4.179}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial_a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_{lL}^{(2)}+\sum_j\frac{\partial R_{1C}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{lL}^{(1)})_j+R_{2L}\right]_L=0, \tag{4.180}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_S^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_S^{(1)})^2+\sum_j\frac{\partial R_{1C}}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j+\sum_j\frac{\partial R_{1S}}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)}+\sigma_L^{(1)}+\sigma_{lL}^{(1)})_j+R_{2S}\right]_S=0. \tag{4.181}$$

只写到二阶就够了，其中$[\quad]_{\mathrm{L}}$和$[\quad]_{\mathrm{S}}$分别表示括号内的长周期和短周期部分.

由(4.177)和(4.178)式直接得出

$$a_l^{(1)}+a_{l\mathrm{L}}^{(1)}=0\ ,\tag{4.182}$$

$$a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)=2a^2R_{1\mathrm{S}}=\frac{2}{n^2a}R_{1\mathrm{S}}\ .\tag{4.183}$$

此即前面平均根数法导出的结果，而通过能量积分却很容易得出这一结论.

对于二阶周期项，首先证明一个有趣的结论，即

$$a_{l\mathrm{L}}^{(2)}=0\ ,\tag{4.184}$$

这表明所有带谐项$J_{\mathrm{L}}(l\geqslant 3)$对$a$的二阶长周期项均无贡献. 由(4.180)式，根据$R_{1\mathrm{C}}$仅是a,e,i的函数可得

$$a_{l\mathrm{L}}^{(2)}=2a^2\left\{-\frac{1}{a}\left(\frac{A_2}{p^2}\right)\sqrt{1-e}\tan i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)i_{l\mathrm{L}}^{(1)}+R_{2\mathrm{L}}\right\}\ ,$$

其中$i_{l\mathrm{L}}^{(1)}$正是用$R_{2\mathrm{L}}$代入摄动运动方程求得的，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_{l\mathrm{L}}^{(1)})=\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R_{2\mathrm{L}}}{\partial\omega}\ ,$$

而这里的ω应为

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0)\ ,$$

因此有

$$\mathrm{d}\bar{\omega}=\omega_1\mathrm{d}t=\frac{A_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\mathrm{d}t\ ,$$

代入上式得

$$\mathrm{d}(i_{l\mathrm{L}}^{(1)})=\frac{\cot i}{\frac{A_2}{p^2}n^2a^2\sqrt{1-e^2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)}\frac{\partial R_{2\mathrm{L}}}{\partial\omega}\mathrm{d}\omega\ ,$$

即

$$i_{l\mathrm{L}}^{(1)}=\frac{\cot i}{\frac{A_2}{p^2}n^2a^2\sqrt{1-e^2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)}R_{2\mathrm{L}}\ ,$$

以此代入上面$a_{l\mathrm{L}}^{(2)}$的表达式即得

$$a_{l\mathrm{L}}^{(2)}=2a^2\{-R_{2\mathrm{L}}+R_{2\mathrm{L}}\}=0\ ,$$

这就是要证明的结果. 因此，a的二阶长周期项仅与J_2有关，$a_{\mathrm{L}}^{(2)}$也就是a的完整的二阶长周期项，下面就来具体计算$a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$和$a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$.

(1) $a_L^{(2)}(t)$

引进算符 D:

$$D = \sum_j (\sigma_S^{(1)})_j \frac{\partial}{\partial \sigma_j}\ , \tag{4.185}$$

(4.179)式可写成

$$\left[-\frac{1}{2a^2}a_L^{(2)} + \frac{1}{2a^3}(a_S^{(1)})^2 + DR_{1S} + \left(\frac{\partial R_{1C}}{\partial e}e_L^{(1)} + \frac{\partial R_{1C}}{\partial i}i_L^{(1)}\right)\right]_L = 0\ .$$

将 D 作用于(4.178)式,取其长周期部分:

$$\left\{-\frac{1}{2a}D\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right) + \frac{1}{2a^3}(a_S^{(1)})^2 + DR_{1S}\right\}_L = 0\ .$$

以上两式相减给出 $a_L^{(2)}$,即

$$a_L^{(2)} = \left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right) + 2a^2\left(\frac{\partial R_{1C}}{\partial e}e_L^{(1)} + \frac{\partial R_{1C}}{\partial i}i_L^{(1)}\right)\right]_L\ . \tag{4.186}$$

经计算给出

$$\begin{aligned}\left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_L = \left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 a\ \sqrt{1-e^2}\Bigg\{\Bigg[&-\frac{1}{3}\sin^2 i(4-\sin^2 i)\ \overline{\cos 2f} + \\ &e^2\sin^2 i\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{4}\sin^2 i\right)\Bigg]\cos 2\omega + \\ &\frac{e^4}{1-e^2}\Bigg[\frac{7}{3}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega + \\ &\frac{1}{32}\sin^4 i\ \cos 4\omega\Bigg]\Bigg\}\ ,\end{aligned} \tag{4.187}$$

$$2a^2\left(\frac{\partial R_{1C}}{\partial e}e_L^{(1)} + \frac{\partial R_{1C}}{\partial i}i_L^{(1)}\right) = -2a\left(\frac{A_2}{p^2}\right)\sqrt{1-e^2}\tan i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)i_L^{(1)}\ . \tag{4.188}$$

将(4.142)式 $i_L^{(1)}$ 的 A_2 部分与上两式一并代入(4.186)式,即得 $a_L^{(2)}(t)$ 的表达式:

$$\begin{aligned}a_L^{(2)}(t) = \left(\frac{A_2^2}{p^4}a\right)\sqrt{1-e^2}\Bigg\{\Bigg[&-\frac{1}{6}\sin^2 i(4-5\ \sin^2 i)\ \overline{\cos 2f} + \\ &e^2\sin^2 i\left(\frac{17}{12}-\frac{19}{8}\sin^2 i\right)\Bigg]\cos 2\omega + \\ &\frac{e^4}{1-e^2}\left[\frac{7}{3}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega + \frac{1}{32}\sin^4 i\ \cos 4\omega\right]\Bigg\}\ .\end{aligned} \tag{4.189}$$

(2) $a_S^{(2)}(t)$

类似 $a_L^{(2)}(t)$ 的推导,将算符 D 引进(4.181)式,并将 D 作用于(4.178)

式，取其短周期部分，这两式相减就给出 $a_S^{(2)}(t)$，即

$$a_S^{(2)}(t)=\left\{aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)+2a^2\left[\sum_j\frac{\partial R_{1C}}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j+\sum_j\frac{\partial R_{1S}}{\partial\sigma_j}(\sigma_L^{(1)}+\sigma_{lL}^{(1)})_j+R_{2S}\right]\right\}. \tag{4.190}$$

经简单计算就可给出具体表达式如下：

$$\begin{aligned}a_S^{(2)}(t)=&\left\{-\frac{2}{a}a_S^{(1)}(t)-\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right\}a_S^{(1)}+\\&\left\{-a\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\tan i(4-5\sin^2 i)\right\}(i_S^{(1)}-\overline{i_S^{(1)}})+\\&\frac{A_2}{a}\left\{2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f-e(1-e^2)^{-5/2}\right]+\right.\\&3\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\cos 2(f+\omega)-\frac{4}{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^5\left(\sin f+\right.\\&\left.\left.\frac{e}{4}\sin 2f\right)\sin 2(f+\omega)\right\}(e_S^{(1)}+e_L^{(1)}+e_{lL}^{(1)})+\\&\frac{A_2}{a}\left\{\sin 2i\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^3+(1-e^2)^{-3/2}+\right.\right.\\&\left.\left.\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right]\right\}(i_S^{(1)}+i_L^{(1)}+i_{lL}^{(1)})+\\&\frac{A_2}{a}\left\{-2\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2(f+\omega)\right\}(\omega_S^{(1)}+\omega_L^{(1)}+\omega_{lL}^{(1)})+\\&\frac{A_2}{a}\left\{-\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin f\left[2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\right.\right.\\&\left.3\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right]-2\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^5\sin 2(f+\\&\left.\omega)\right\}(M_S^{(1)}+M_L^{(1)}+M_{lL}^{(1)})+2a^2R_{2S}-\\&\left\{\left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_C+\left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_L\right\},\end{aligned} \tag{4.191}$$

其中

$$\begin{aligned}\left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_C=&\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2a\sqrt{1-e^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)^2\left[\left(\frac{16}{9}+\frac{19}{9}e^2\right)+\right.\right.\\&\left.\frac{2}{9}\sqrt{1-e^2}+\frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{18}\right)\right]+\sin^2 i\left(1+\frac{2}{3}e^2\right)+\\&\left.\sin^4 i\left[\left(-\frac{5}{6}+\frac{25}{24}e^2\right)+\frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{16}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{4.192}$$

关于$\left[aD\left(\frac{a_{\mathrm{S}}^{(1)}}{a}\right)\right]_{\mathrm{L}}$,见(4.187)式.注意,(4.191)式中$\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}$与$\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}$同时出现的地方,若$\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}$不减去$\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}}$,则$\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}$中要舍去这一项.

从上面的推导过程可以看出,对根数的处理与平均根数法完全相同,但具体导出a的二阶周期项却简单得多,这就弥补了平均根数法的不足之处(即推导过程的复杂性).

第 1 章　航天器运动的轨道几何

要清楚地描述航天器的运动及其与观测者之间的联系，首先要确定参考系，在一定的参考系中去体现航天器的空间位置和运动速度及其与观测者之间的相对几何关系. 因此，作为本书的开场白，在这一章中将要阐述的基本内容是参考系（时间系统，空间坐标系及相关参数）、空间观测几何（航天器和观测者的几何位置及相关问题）、航天器的视运动以及星下点轨迹等问题.

§1.1　时间系统

考察运动，需要一种均匀的时间尺度. 过去，这种均匀的时间尺度是以地球自转为基准的. 由于地球自转的不均匀性和测量精度的不断提高，上述均匀时间尺度已不适应；但由于种种原因，又必须将时间与地球自转相协调，这就导致了时间系统的复杂化.

现行的时间系统基本上分为四种：恒星时、世界时、历书时和原子时. 前两种都是根据地球自转测定的，历书时则是根据地球、月亮和行星的运动来测定的，而原子时是以原子的电磁振荡作为标准的，下面将对这些时间系统作一简单介绍[1,2].

1. 恒星时（ST）

春分点连续两次过中天的时间间隔称为一"恒星日". 那么，恒星时就是春分点的时角，它的数值 S 等于上中天恒星的赤经 α，即

$$S = \alpha. \tag{1.1}$$

这是经度为 λ 的地方恒星时. 与世界时密切相关的格林尼治恒星时 S_G 由下式给出：

$$S_G = S - \lambda. \tag{1.2}$$

经度 λ 规定向东计量. 格林尼治恒星时又有真恒星时（或称视恒星时）

GAST 与平恒星时 GMST 之分. 既然恒星时是由地球自转时角所确定的，那么地球自转的不均匀性就可通过它与均匀时间尺度的差别来测定.

格林尼治恒星时主要是在空间坐标系的转换中用到，其内容将在下面有关部分中介绍.

2. 世界时(UT)

与恒星时相同，世界时也是根据地球自转测定的时间，它以平太阳日为单位，1/86400 平太阳日为秒长. 事实上，测定太阳的精度远低于测定恒星的精度，因此，世界时是通过对恒星观测测定的恒星时再根据两种时间的定义转换而给出的.

根据天文观测直接测定的世界时，记为 UT0，它对应于瞬时极的子午圈. 加上引起测站子午圈位置变化的地极移动(即地球自转轴在地球体内的移动)修正，就得到对应于平均极的子午圈的世界时，记为 UT1，即

$$\mathrm{UT1} = \mathrm{UT0} + \Delta\lambda. \tag{1.3}$$

$\Delta\lambda$ 是极移改正量.

由于地球自转的不均匀性，UT1 并不是均匀的时间尺度. 而地球自转不均匀性呈现三种特性：长期慢变化(每百年使日长增加 1.6 毫秒)，周期变化(主要是季节变化，一年里日长约有 $0^{\mathrm{s}}.001$ 的变化；除此之外，还有一些影响较小的周期变化)和不规则变化，这三种变化不易修正. 而 UT1 又直接与地球瞬时位置相联系，因此，对于精度要求不高的问题，就可用 UT1 作为统一的时间系统；而对于高精度的要求，必须寻求更均匀的时间尺度，即下面要介绍的原子时.

3. 历书时(ET)

由于世界时不能作为均匀的时间尺度，经数次天文会议讨论，决定从 1960 年起引入一种以太阳系内天体公转为基准的均匀时间系统，称为历书时(ET)，1960 年到 1967 年期间，它是世界公认的计时标准.

历书时的定义：1900 年 1 月 0 日历书时 12^{h} 瞬间的回归年长度的 31556925.9747 分之一为一历书秒；起算历元为 1900 年初太阳平黄经等于 $279°41'48''.04$ 的时刻，也就是纽康(Newcomb)原先选定的 1900 年 1 月 0 日格林尼治平午时刻，现在把它作为 1900 年 1 月 0 日历书时 12^{h}.

历书时是一种由力学定律确定的均匀时间，它是太阳、月亮和行星运动理论中的独立变量，同时也是这些基本历表的时间引数. 某一时刻的历书时可以通过对太阳、月亮或行星的观测来得到，而最有效的方法是观测月亮.

但对建立一个均匀时间尺度而言，其观测精度仍嫌不够，而且要得到这样的时间又很慢. 因此，1967 年后，计时标准转向原子时，它有更高的精度，而且随时可以直接求得. 不过在这期间，历书时仍然作为一个天文常数被保留下来，从 1984 年开始，历书时才完全被原子时所代替.

4. 国际原子时(TAI)与地球动力学时(TDT)和质心动力学时(TDB)

这是一种标准频率. 1967 年 10 月，第十三届国际计量大会决定引入新的秒长定义，即铯原子 Cs^{133} 基态的两能级间跃迁辐射的 9192631770 周所经历的时间作为一秒的长度，称为国际单位秒(SI). 由这种时间单位确定的时间系统称为国际原子时(TAI).

因原子时(TAI)是在地心参考系中定义的具有国际单位制秒长的坐标时间基准，它就可以作为动力学中所要求的均匀时间尺度. 由此引入一种地球动力学时(TDT)，它与原子时(TAI)的关系为

$$\mathrm{TDT} = \mathrm{TAI} + 32^{\mathrm{s}}.184. \tag{1.4}$$

这一关系是根据 1977 年 1 月 1 日 $00^{\mathrm{h}}00^{\mathrm{m}}00^{\mathrm{s}}$(TAI)对应的 TDT 为 1977 年 1 月 $1^{\mathrm{d}}.0003725$ 而来，此起始历元的差别就是该时刻历书时与原子时的差别. 这样定义起始历元就便于用 TDT 系统代替 ET 系统. TDT 是地心时空标架的坐标时，用作视地心历表的独立变量. 在人造地球卫星动力学中，它就是一种均匀时间尺度，相应的运动方程即用它作为自变量，通常以 t 表示. 从 1984 年起，历书时正式被地球力学时所取代.

除此之外，还定义一种质心动力学时 TDB，即太阳系质心时空标架的坐标时. 它是一种抽象、均匀的时间尺度，月球、太阳和行星的历表都是以 TDB 为独立变量的，岁差、章动的计算公式也是以该时间尺度为依据.

上述两种动力学时的差别 TDB－TDT 是由相对论效应引起的，根据相对论原理，转换公式为

$$\mathrm{TDB} = \mathrm{TDT} + 0^{\mathrm{s}}.001658\sin g + 0^{\mathrm{s}}.000014\sin 2g. \tag{1.5}$$

该式略去了高阶项，g 为地球绕日轨道的平近点角.

5. 协调世界时(UTC)

用原子钟控制时号发播可得到稳定的时号，但由于原子时秒长比世界时秒长略短，世界时时刻将日益落后于原子时；而有很多问题涉及到计算地球的瞬时位置，这又需要 UT1. 因此，为了避免发播的原子时与世界时产生过大的偏离，实际的时号发播是寻求 TAI 与 UT1 之间的一种协调，称为协调世界时(UTC).

UTC 是一种均匀时号，它依据原子时，却又参考世界时，从 1972 年起，UTC 用原子时秒长发播，但要求它与 UT1 之差不超过 $0^{s}.9$. 为达到此目的，必须调整 UTC 的整秒数，规定只在 1 月 1 日或 7 月 1 日将原子钟拨慢 1 秒，这就是所谓的闰秒，在引用 UTC 时必须注意这一点. 到目前(2004 年 12 月)为止，已调整过 32^{s}，即 UTC＝TAI－32^{s}.

除上述时间系统外，在计算中常常会遇到历元的取法以及几种年的长度问题，这里顺便作一介绍. 一种是贝塞耳(Bessel)年，或称假年，其长度为平回归年的长度，即 365.2421988 平太阳日. 常用的贝塞耳历元，是指太阳平黄经等于 280°的时刻，例如 1950.0，并不是 1950 年 1 月 1 日 0 时，而是 1949 年 12 月 31 日 $22^{h}09^{m}42^{s}$(世界时)，相应的儒略(Julian)日为 2433282.4234. 另一种是儒略年，其长度为 365.25 平太阳日，儒略历元就是指真正的年初，例如 1950.0，即 1950 年 1 月 1 日 0 时. 显然，引用儒略年较为方便，因此，从 1984 年起，贝塞耳年被儒略年所代替. 两种历元之间的对应关系列于表 1.1.

表 1.1　贝塞耳历元和儒略历元之间的关系

贝塞耳历元	儒略历元	儒略日
1900.0	1900.000858	2415020.3135
1950.0	1949.999790	2433282.4234
2000.0	1999.998722	2451544.5333
1899.999142	1900.0	2415020.0
1950.000210	1950.0	2433282.5
2000.001278	2000.0	2451545.0

为了方便，常用修改的儒略日(亦称简约儒略日，记作 MJD)，定义为

$$\mathrm{MJD} = \mathrm{JD} - 2400000.5. \tag{1.6}$$

例如 J1950.0 的 MJD＝33282.0.

与上述两种年的长度对应的回归世纪(即 100 年)和儒略世纪的长度分别为 36524.22 平太阳日和 36525 平太阳日.

§1.2　空间坐标系

定义一个空间坐标系应包含三个要素：坐标原点，参考平面(xy 平面)和参考平面上的主方向(x 轴方向). 对于航天器的运动而言，以地球卫星为例，所涉及到的主要是地心天球坐标系和地固坐标系，它们的坐标原点都是

地心,这一点并无问题. 但参考平面及其主方向的选择,将会受到岁差章动和地极移动的影响. 空间坐标系的复杂性正是由岁差章动和地极移动等原因所引起的.

日、月和大行星对地球非球形部分的吸引,会产生两种效应:一是作为刚体平动的力效应,主要是月球对地球扁球部分的作用,将引起一种地球扁率间接摄动;另一种就是作为刚体定点转动的力矩效应,使地球像陀螺那样,出现进动与章动,即自转轴在空间的摆动,这就是岁差章动. 由于岁差章动,地球赤道面亦随时间在空间摆动;另外,由地球内部和表面物质运动引起的地球自转轴在其内部的移动(极移),都将影响坐标系中参考平面的选取.

基于上述原因,根据不同要求,就出现了各种空间坐标系统. 下面介绍与卫星运动有关的几种空间坐标系以及它们之间的转换关系.

1. 六种地心赤道坐标系[3,4]

这几种坐标系的定义见表 1.2. 人造地球卫星绕地球运动,其瞬时轨道面是通过地球质量中心(简称地心)的,因此在研究它的运动规律时,很自然地要引进地心坐标系. 但是,在人造卫星上天前,人们只能依靠传统的大地测量方法给出所谓的参考椭球体,其中心并不是地心,而人造卫星上天后,用卫星动力测地方法才给出了真正的地心参考系. 当然,尽管测量精度越来越高,但所测得的地心仍然是近似的,根据目前的结果,地心位置精度为厘米级.

表 1.2　六种地心赤道坐标系的定义

坐标系	原点	参考平面	x 轴方向	位置矢量
历元平赤道地心系	地心	历元平赤道	指向该历元的平春分点	$\boldsymbol{r}$
瞬时平赤道地心系	地心	瞬时平赤道	指向瞬时平春分点	$\boldsymbol{r}_m$
瞬时真赤道地心系	地心	瞬时真赤道	指向瞬时真春分点	$\boldsymbol{r}_t$
轨道坐标系	地心	瞬时真赤道	指向某历元的平春分点	$\boldsymbol{r}'$
准地固坐标系	地心	瞬时真赤道	参考平面与格林尼治子午线的交线方向	$\boldsymbol{R}_t$
地固坐标系	地心	与地心和 CIO 连线正交之平面	参考平面与格林尼治子午线的交线方向	$\boldsymbol{R}$

表 1.2 中给出的六种地心赤道坐标系分别适用不同的问题. 在当今的精密定轨问题中,通常采用 J2000.0 历元(称为标准历元),J2000 平赤道地

心系，亦简称为 J2000 地心天球坐标系. 而在空间目标监测中，由于某种原因，一些相关单位仍采用混合型的轨道坐标系.

关于轨道坐标系，这里有必要进一步作些说明. 在很多工作中，采用分析法计算卫星轨道的变化是方便的. 对于这种方法，若引用历元平赤道地心系（亦称历元地心天球坐标系），那么由于岁差章动导致地球赤道面在空间摆动，从而引起地球引力场位函数的变化，使卫星轨道增加一种附加摄动（亦称坐标系摄动），随着计算时刻与选取历元之间的间隔增长而增大，这将给定轨问题带来麻烦. 若引用瞬时真赤道地心系，虽然地球引力场位函数基本不变，但它是运动坐标系，需增加一项惯性力，这也是一种坐标系摄动，尽管它比上述附加摄动小（主要是由春分点移动对应的赤经岁差章动 $\mu+\Delta\mu$ 所引起的），但仍嫌不便. 鉴于上述两种坐标系的优缺点，在定轨及其有关工作中曾采用一种混合地心系，即参考平面为瞬时真赤道面，而 x 轴是指向某标准历元（如 1950.0 或 2000.0）的平春分点（该点实为瞬时赤道上的一个“假想”点，在真春分点以东 $\mu+\Delta\mu$ 处，赤经岁差和章动 $\mu+\Delta\mu$ 的计算公式后面将会给出），这就是表 1.2 所列出的轨道坐标系. 在此坐标系中，附加摄动很小，对于一般的精度要求，可完全忽略，故在后面第 4 章讨论地球非球形引力摄动时，不再考虑赤道面摆动问题，如果需要，请阅读参考文献[3，4]，以后不再说明. 不过，对于数值方法，只要通过坐标转换即可解决上述附加摄动问题，无需引进轨道坐标系；当然，引进也无妨，仍有可取之处.

上述坐标系的定义虽然是针对地球卫星而言的，但事实上也可以推广，中心天体可改为其他探测目标天体，如火星，月球等，相应的地心即目标天体质心，地固坐标系即星（指目标天体）固坐标系.

除上述各种地心坐标系外，有时涉及到日、月和大行星的历表和轨道，它们分别对应某历元的太阳系质心惯性系或日心黄道坐标系，坐标原点分别为太阳系质心或日心，参考平面是该历元的平赤道或黄道，x 轴指向该历元的平春分点.

2. 各坐标系之间的转换关系

为了引用矩阵来表达坐标系之间的转换关系，首先回忆一下坐标旋转及其对应的旋转变换的矩阵表示方法. 原坐标系中的任一矢量用 $\boldsymbol{r}$ 表示，在旋转后的新坐标系中以 $\boldsymbol{r}'$ 表示. 那么，若 yz 平面，zx 平面和 xy 平面分别绕 x 轴，y 轴和 z 轴转动一个角度 θ（逆时针为正），则有

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}_x(\theta)\boldsymbol{r}, \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{r}, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(\theta)\boldsymbol{r}, \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

旋转矩阵 $\boldsymbol{R}(\theta)$ 有如下性质：

$$\boldsymbol{R}^{-1}(\theta) = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\theta) = \boldsymbol{R}(-\theta). \tag{1.13}$$

这里 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的逆和转置.

(1) 历元平赤道地心系与瞬时平赤道地心系之间的转换

这两个坐标系之间的差别是岁差. 历元平赤道地心系经三次旋转即与瞬时平赤道地心系相重合，有

$$\boldsymbol{r}_m = (\mathbf{PR})\boldsymbol{R}. \tag{1.14}$$

$(\mathbf{PR})$就是岁差矩阵，它由三个旋转矩阵构成，即

$$(\mathbf{PR}) = \boldsymbol{R}_z(-z_A)\boldsymbol{R}_y(\theta_A)\boldsymbol{R}_z(-\xi_A). \tag{1.15}$$

其中 ξ_A, z_A, θ_A 是赤道岁差角，由下式计算：

$$\begin{cases} \xi_A = 2306''.2181T + 0''.30188T^2 + 0''.017998T^3, \\ z_A = 2306''.2181T + 1''.09468T^2 + 0''.018203T^3, \\ \theta_A = 2004''.3109T - 0''.42665T^2 - 0''.041833T^3, \end{cases} \tag{1.16}$$

$$T = \frac{\mathrm{JD}(t) - 2451545.0}{36525.0}. \tag{1.17}$$

其中 t 是动力学时，可用 TDT. 相应的赤经岁差 m_A（或记作 μ）和赤纬岁差 n_A 为

$$\begin{cases} m_A = \xi_A + z_A = 4612''.4362T + 1''.39656T^2 + 0''.036201T^3, \\ n_A = \theta_A. \end{cases} \tag{1.18}$$

(2) 瞬时平赤道地心系与瞬时真赤道地心系之间的转换

这两个坐标系之间的差别是章动. 同样，经过三次旋转就可使前者与后者重合，相应地有

$$\boldsymbol{r}_t = (\mathbf{NR})\boldsymbol{r}_m. \tag{1.19}$$

这里的(NR)是章动矩阵,它亦由三个旋转矩阵构成,即

$$(\mathbf{NR}) = \boldsymbol{R}_x(-\Delta\varepsilon)\boldsymbol{R}_y(\Delta\theta)\boldsymbol{R}_z(-\Delta\mu). \tag{1.20}$$

或

$$(\mathbf{NR})=\boldsymbol{R}_x[-(\bar{\varepsilon}+\Delta\varepsilon)]\boldsymbol{R}_z(-\Delta\psi)\boldsymbol{R}_x(\bar{\varepsilon}). \tag{1.21}$$

上两式中的 $\bar{\varepsilon}$ 是平黄赤交角,$\Delta\psi$ 是黄经章动,而 $\Delta\mu$,$\Delta\theta$ 和 $\Delta\varepsilon$ 则分别为赤经章动,赤纬章动和交角章动. 章动量取 IAU(1980)序列,对于米级精度取该序列的前 20 项即可,计算公式如下:

$$\begin{cases}\Delta\psi = \displaystyle\sum_{j=1}^{20}(A_{0j}+A_{1j}t)\sin\Big(\sum_{i=1}^{5}k_{ji}\alpha_i(t)\Big),\\ \Delta\varepsilon = \displaystyle\sum_{j=1}^{20}(B_{0j}+B_{1j}t)\cos\Big(\sum_{i=1}^{5}k_{ji}\alpha_i(t)\Big).\end{cases} \tag{1.22}$$

相应的赤经和赤纬章动 $\Delta\mu$ 和 $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\mu = \Delta\psi\cos\varepsilon, \tag{1.23}$$

$$\Delta\theta = \Delta\psi\sin\varepsilon. \tag{1.24}$$

其中黄赤交角的计算公式如下:

$$\varepsilon = 23°26'21''.448 - 46''.8150t. \tag{1.25}$$

章动序列中的 5 个幅角计算公式为

$$\begin{cases}\alpha_1 = 134°57'46''.733+(1325^r+198°52'02''.633)t+31''.310t^2,\\ \alpha_2 = 357°31'39''.804+(99^r+359°03'01''.224)t-0''.577t^2,\\ \alpha_3 = 93°16'18''.877+(1342^r+82°01'03''.137)t-13''.257t^2,\\ \alpha_4 = 297°51'01''.307+(1236^r+307°06'41''.328)t-6''.891t^2,\\ \alpha_5 = 125°02'40''.280-(5^r+134°08'10''.539)t+7''.455t^2.\end{cases} \tag{1.26}$$

其中 $1^r=360°$. 上述各式中的 t,意义同(1.17)式中的 T. 章动序列前 20 项的有关系数见表 1.3.

事实上,按前面所说的精度考虑,保留大于 $0''.005$ 的周期项,且至多涉及距标准历元 T_0(J2000.0)25 年的计算,故公式(1.22)右端的 A_{1j} 和 B_{1j} 也可略去.

关于章动序列,还在不断地改进,但就原理和结果而言已无实质性改变,而就一般问题的精度要求而言,在定量上亦无明显的影响,对于高精度问题,请注意其差别.

表 1.3　IAU1980 章动序列的前 20 项

j	周期（日）	k_{j1}	k_{j2}	k_{j3}	k_{j4}	k_{j5}	A_{0j} (0″.0001)	A_{1j} (0″.0001)	B_{0j} (0″.0001)	B_{1j} (0″.0001)
1	6798.4	0	0	0	0	1	−171996	−174.2	92025	8.9
2	182.6	0	0	2	−2	2	−13187	−1.6	5736	−3.1
3	13.7	0	0	2	0	2	−2274	−0.2	977	−0.5
4	3399.2	0	0	0	0	2	2062	0.2	−895	0.5
5	365.2	0	1	0	0	0	1426	−3.4	54	−0.1
6	27.6	1	0	0	0	0	712	0.1	−7	0.0
7	121.7	0	1	2	−2	2	−517	1.2	224	−0.6
8	13.6	0	0	2	0	1	−386	−0.4	200	0.0
9	9.1	1	0	2	0	2	−301	0.0	129	−0.1
10	365.3	0	−1	2	−2	2	217	−0.5	−95	0.3
11	31.8	1	0	0	−2	0	−158	0.0	−1	0.0
12	177.8	0	0	2	−2	1	129	0.1	70	0.0
13	27.1	−1	0	2	0	2	123	0.0	−53	0.0
14	27.7	1	0	0	0	1	63	0.1	−33	0.0
15	14.8	0	0	0	2	0	63	0.0	−2	0.0
16	9.6	−1	0	2	2	2	−59	0.0	26	0.0
17	27.4	−1	0	0	0	1	−58	−0.1	32	0.0
18	9.1	1	0	2	0	1	−51	0.0	27	0.0
19	205.9	2	0	0	−2	0	48	0.0	1	0.0
20	1305.5	−2	0	2	0	1	46	0.0	−24	0.0

根据上面的讨论立即可知，由历元平赤道地心系到瞬时真赤道地心系的转换关系为

$$\boldsymbol{r}_t = (\mathrm{GR})\boldsymbol{r}\,. \tag{1.27}$$

我们不妨称(GR)为岁差章动矩阵，有

$$(\mathrm{GR}) = (\mathrm{NR})(\mathrm{PR})\,. \tag{1.28}$$

(3) 瞬时真赤道地心系与准地固坐标系之间的转换

因准地固坐标系是随着地球自转而转动的一种旋转坐标系，显然它与瞬时真赤道地心系之间的差别是地球自转角——格林尼治恒星时 S_G，于是有

$$\boldsymbol{R}_t = (\mathrm{ER})\boldsymbol{r}_t\,, \tag{1.29}$$

$$(\mathrm{ER}) = \boldsymbol{R}_z(S_G)\,. \tag{1.30}$$

(ER)即地球自转矩阵.

(4) 准地固坐标系与地固坐标系之间的转换

这两者之间的差别就是极移,有

$$\boldsymbol{R} = (\mathbf{EP})\boldsymbol{R}_t . \tag{1.31}$$

极移矩阵(EP)可由下式表达:

$$(\mathbf{EP}) = \boldsymbol{R}_y(-x_p)\boldsymbol{R}_x(-y_p) . \tag{1.32}$$

其中 x_p 和 y_p 就是极移两分量(它们的量级不超过 $0''.5$). 若略去极移的二阶量,则上式可简化为

$$(\mathbf{EP}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

为了便于读者看清上述五种地心系坐标系之间的转换关系,我们不妨用一"框图"(见图 1.1)来描绘它们,图 1.1 中的矩阵(HG)为

$$(\mathbf{HG}) = (\mathbf{EP})(\mathbf{ER})(\mathbf{GR}). \tag{1.34}$$

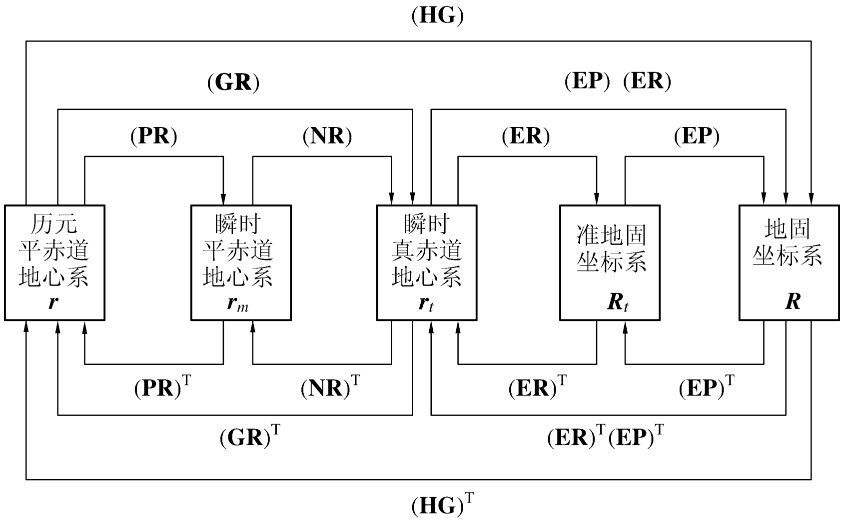

图 1.1 五种地心赤道坐标系之间的转换关系

(5) 轨道坐标系与其他地心坐标系之间的转换关系

由轨道坐标系的定义可知,经一次旋转,就可使瞬时真赤道地心系与它重合,相应地有

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)\boldsymbol{r}_t . \tag{1.35}$$

μ 和 $\Delta\mu$ 即赤经岁差和赤经章动,计算公式见(1.8)和(1.23).

利用(1.27)式,可立即得到轨道坐标系与历元平赤道地心系之间的转

换关系，即

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{r}\ , \tag{1.36}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{GR})\ . \tag{1.37}$$

变换矩阵 U 对应七次旋转，但是在一定精度要求下，可使 U 矩阵简化. 如考虑瞬时 t 与选取历元 T_0 的间隔在 25～50 年内，丢掉量级为 10^{-6} 和更小的项(包括章动的二阶项等)，则七次旋转就可简化为二次旋转，有

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_y(\theta_A + \Delta\theta)\boldsymbol{R}_x\left(\frac{\mu}{2}\theta_A - \Delta\varepsilon\right)\ . \tag{1.38}$$

若 $(t - T_0) < 25$ 年，为了保证上述精度，$\boldsymbol{U}$ 矩阵还可再简化些，即

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(\theta_A + \Delta\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ (\theta_A + \Delta\theta) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\Delta\varepsilon \\ 0 & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

也可写成下列形式：

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_y(\theta_A + \Delta\theta)\boldsymbol{R}_x(-\Delta\varepsilon)\ . \tag{1.40}$$

这对应更简单的二次旋转.

下面再给出轨道坐标系与地固坐标系之间的转换关系. 根据(1.35)式和图 1.1 不难得到

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{ER})^{\mathrm{T}}(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\ . \tag{1.41}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{ER})^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)\boldsymbol{R}_z(-S_G) \\ &= \boldsymbol{R}_z(-(S_G - (\mu + \Delta\mu))).\end{aligned} \tag{1.42}$$

若记

$$\theta_G = S_G - (\mu + \Delta\mu)\ . \tag{1.43}$$

θ_G 就是轨道坐标系中的格林尼治恒星时角. 于是(1.41)式又可写成

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}. \tag{1.44}$$

当然，这一转换关系亦可直接导出.

S_G 和 θ_G 的计算公式为

$$S_G = \overline{S}_G + \Delta\mu\ , \tag{1.45}$$

$$\theta_G = \overline{S}_G - \mu\ . \tag{1.46}$$

这里 μ 和 $\Delta\mu$ 即前面已提到的赤经岁差和章动. J2000.0 系统中的格林尼治平恒星时 $\overline{S}_G$ 由下式计算：

$$\overline{S}_G = 18^{\mathrm{h}}.6973746 + 879000^{\mathrm{h}}.0513367t + 0^{\mathrm{s}}.093104t^2 - 6^{\mathrm{s}}.2 \times 10^{-6}t^3\ , \tag{1.47}$$

$$t=\frac{\mathrm{JD}(t)-\mathrm{JD}(\mathrm{J2000.0})}{36525.0}. \tag{1.48}$$

§1.3 空间观测几何

1. 两种站心坐标系[2]

对航天器的观测量通常是相对观测站的(可以是地基站,也可以是天基站),其中方向观测量(即测角资料)又总是对应赤道系统或地平系统.为此,在有关工作中引进了站心赤道坐标系和站心地平坐标系.两种站心坐标系之间的几何关系见图 1.2.O 是辅助天球中心(即测站),OZ 是重力方向,Z 就是天顶,大圆 NS 是地平.OP 是天极方向,P 是北天极(实为平极,为了与地固坐标系一致,就用 CIO),大圆 QQ' 是天赤道(简称赤道).大圆弧 $PZ=90°-\varphi$,φ 是测站的天文纬度(φ 对应平极,它与大地纬度的差别即垂线偏差).通过天极和天顶的大圆称为测站的子午圈,它与地平相交于 N 和 S 两点,分别称为北点和南点.赤道与地平相交于 E 和 W 两点,分别称为东点和西点.S_* 是测站到天体方向与天球的交点(或就称为天体),大圆 ZS_* 称为地平经圈,而大圆 PS_* 称为时圈或赤经圈.

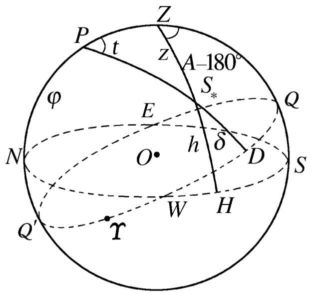

图 1.2　站心坐标系的辅助天球

天体的地平坐标记为 A,h.A 称为地平经度或方位角.由北点沿地平向东量到地平经圈;h 称为地平纬度或高度角,由地平经圈与地平的交点 H 沿地平经圈向天顶方向量到天体 S_*,有时用天顶距 $z=90°-h$ 代替高度角 h.天体的赤道坐标记为 t,δ 或 α,δ.这里的 t 称为天体的时角,由 A 点沿赤道向西量到时圈,时角常用 α 代替,α 称为赤经,由春分点 Υ 沿赤道向东量到时圈,它与 t 的关系为

$$\alpha=S-t.$$

S 是春分点的时角,即测站的地方恒星时;δ 称为赤纬,由时圈与赤道的交点 D 沿时圈向北天极方向量到天体.

上述两种站心坐标系可分别记作 $O-\Upsilon\Upsilon'P$ 和 $O-NWZ$,其中 Υ' 应在赤道 QQ' 上指向 Υ 以东 $90°$ 的方向(见图 1.2).若记航天器在这两种站心坐标系中的位置矢量各为 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\rho}'$,有

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

$$\boldsymbol{\rho}' = \rho \begin{pmatrix} \cos h\cos A \\ -\cos h\sin A \\ \sin h \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

ρ 是航天器到测站的距离.

如果测角资料 (α,δ) 是照相或用 CCD 技术等获得的,因采用了背景星定位的方法,给出的 (α,δ) 是对应历元(如 J2000.0)站心平赤道坐标系的,为了与上述站心赤道坐标系加以区别,暂记作 (α_J,δ_J),相应地有

$$\boldsymbol{\rho}_J = \rho \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}_{J2000.0}. \tag{1.51}$$

根据上述两种站心坐标系的定义,由图 1.2 不难看出,经两次坐标轴旋转,站心地平坐标系即与站心赤道坐标系重合,故它们之间的转换关系为

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{ZR})\boldsymbol{\rho}', \tag{1.52}$$

$$(\mathbf{ZR}) = \boldsymbol{R}_z(180^\circ - S)\boldsymbol{R}_y(90^\circ - \varphi). \tag{1.53}$$

其中 S 是地方(对应测站)恒星时. 由(1.51)式和(1.52)式可给出航天器的两种测角资料 $(\alpha,\ \delta)$ 和 $(A,\ h)$ 之间的具体函数关系,即

$$\begin{cases} \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{-\cos\delta\sin(S-\alpha)}{\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos(S-\alpha)}, \\ \sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(S-\alpha), \end{cases} \tag{1.54}$$

或

$$\begin{cases} \tan(S-\alpha) = \dfrac{\sin(S-\alpha)}{\cos(S-\alpha)} = \dfrac{-\cos h\sin A}{\cos\varphi\sin h - \sin\varphi\cos h\cos A}, \\ \sin\delta = \sin\varphi\sin h + \cos\varphi\cos h\cos A. \end{cases} \tag{1.55}$$

2. 站心坐标系与空间坐标系之间的转换关系

在处理航天器运行的轨道问题中,需将观测量与空间坐标相联系. 对于人造地球卫星而言,即需要给出站心坐标系与历元平赤道地心系和轨道坐标系之间的转换关系. 这里各坐标系中位置矢量的表示仍采用前面表 1.2 中引用的符号.

由于站心赤道坐标系的主方向(x 轴)指向瞬时真春分点,故它与地固坐标系之间的转换关系为旋转加平移,即

$$\boldsymbol{R} = (\mathbf{ER})\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}_A. \tag{1.56}$$

其中(ER)即地球自转矩阵,见(1.30)式,$\boldsymbol{R}_A$ 是测站在地固坐标系中的位置矢量.下面给出两种站心坐标系以及站心坐标系与地心坐标系之间的转换关系.

通过地固坐标系即可知,站心赤道坐标系和站心地平坐标系与历元平赤道地心坐标系之间的转换关系分别为

$$\boldsymbol{r} = (\mathbf{HG})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = (\mathbf{HG})^{\mathrm{T}}[(\mathbf{ER})\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}_A] \tag{1.57}$$

和

$$\boldsymbol{r} = (\mathbf{HG})^{\mathrm{T}}[(\mathbf{ER})(\mathbf{ZR})\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{R}_A], \tag{1.58}$$

矩阵(HG)的表达式见(1.34)式.根据 $S = S_G + \lambda$,λ 是测站经度,记矩阵(ER)(ZR)为(EZ),则可表示为

$$\begin{aligned}(\mathbf{EZ}) &= (\mathbf{ER})(\mathbf{ZR}) \\ &= \boldsymbol{R}_z(180^\circ - S + S_G)\boldsymbol{R}_y(90^\circ - \varphi) \\ &= \boldsymbol{R}_z(180^\circ - \lambda)\boldsymbol{R}_y(90^\circ - \varphi).\end{aligned} \tag{1.59}$$

前面提到的历元站心平赤道坐标系与历元平赤道地心系之间的转换关系较简单,就是经过一个平移,有

$$\begin{cases}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}_J + \boldsymbol{r}_A, \\ \boldsymbol{r}_A = (\mathbf{HG})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_A.\end{cases} \tag{1.60}$$

由地固坐标系与轨道坐标系之间的转换关系(1.44)式可知,站心赤道坐标系和站心地平坐标系与轨道坐标系之间的转换关系分别为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}[(\mathbf{ER})\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{R}_A], \tag{1.61}$$

或

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}[(\mathbf{EZ})\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{R}_A]. \tag{1.62}$$

历元站心平赤道坐标系与轨道坐标系的转换关系为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_z(\mu + \Delta\mu)(\mathbf{GR})[\boldsymbol{\rho}_J + \boldsymbol{r}_A] \approx \boldsymbol{U}[\boldsymbol{\rho}_J + \boldsymbol{r}_A]. \tag{1.63}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{U}$ 见(1.40)式.

3. 观测站的站址坐标

观测站的站址(指测站的标准点,简称测站)坐标用 H,λ,φ 三个分量表示,它们的定义如下.

H:大地高.它是从站址点沿法线方向到参考椭球面(参考椭球体是地固坐标系建立的依据,极是 CIO,其中心即当作地心)的距离.而到大地水准面的高度称为正高,亦称海拔高度,它与大地高之差称为高程异常.

λ:大地经度(亦称测地经度),简称站址经度.它是通过站址的大地子

午面(与辅助天球相交截出的大圆)与过格林尼治的大地子午面(称为本初子午面)之间的夹角,从本初子午面向东计量,由 0°到 360°.

φ: 大地纬度(亦称测地纬度),简称站址纬度. 它是通过站址的参考椭球面的法线与赤道面的夹角,从赤道面向北计量为正,由 0°到 90°,向南计量为负,由 0°到 −90°,大地纬度不同于天文纬度(它是站址点的铅垂线与赤道面的夹角),即同一点的铅垂线与相应的参考椭球面的法线通常并不重合,此即垂线偏差.

上述站址坐标 H,λ,φ 亦称为大地坐标. 对于一般精度要求,无需区分大地高与正高、大地纬度与天文纬度.

根据站址坐标的定义,在地固坐标系中,测站位置矢量 $\boldsymbol{R}_A$ 的三个分量 (X_A,Y_A,Z_A) 为

$$\begin{cases} X_A = (N+H)\cos\varphi\cos\lambda, \\ Y_A = (N+H)\cos\varphi\sin\lambda, \\ Z_A = [N(1-\epsilon)^2 + H]\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.64}$$

其中

$$N = a_e[\cos^2\varphi + (1-\epsilon)^2\sin^2\varphi]^{-1/2}, \tag{1.65}$$

a_e 是参考椭球体的赤道半径,ϵ 参考椭球体的扁率. 如果知道测站的地心距 R 和地心纬度 φ',则有

$$\begin{cases} X_A = R\cos\varphi'\cos\lambda, \\ Y_A = R\cos\varphi'\sin\lambda, \\ Z_A = R\sin\varphi'. \end{cases} \tag{1.66}$$

若在轨道坐标系中讨论问题,相应的测站位置矢量记为 $\boldsymbol{r}_A'$,坐标分量为 X,Y,Z. 根据转换关系(1.44),有

$$\boldsymbol{r}_A' = \boldsymbol{R}_z(-\theta_G)(\mathbf{EP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_A . \tag{1.67}$$

对于一般精度要求,不必考虑极移,那么轨道坐标系中的测站坐标可简化为

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \cos\varphi'\cos(\theta_G+\lambda) \\ \cos\varphi'\sin(\theta_G+\lambda) \\ \sin\varphi' \end{pmatrix}. \tag{1.68}$$

目前对航天器观测所得的资料基本上有四种类型,即

(1) 光学测角资料(Ⅰ)——地平坐标 (A,h) 型;

(2) 光学测角资料(Ⅱ)——赤道坐标 (α,δ) 型;

(3) 多普勒测速 $\dot{\rho}$ 型;

(4) 激光或雷达测距 ρ 型.

在取得原始观测资料后，需要经过一系列改正才能提供可用资料. 这些改正包括天文系统差（如大气折射、光行差等），各种物理因素的影响（如大气对流层、电离层的影响等）以及仪器误差等. 关于这些改正，请读者参看有关书籍和文献，本书不再介绍. 但有一点需要说明，即所有观测资料对应的空间坐标系必须清楚，显然，测速和测距资料并不存在这个问题，而需要注意的是光学测角资料，对此，前面已作了详尽的阐述.

除上述四种基本类型，还有星上测量（雷达测高等）和星间测量（如星载 GPS 测距等），但相应的空间观测几何与前面阐述的内容无实质性差别，不再介绍.

§1.4　航天器的可见条件

对人造地球卫星的观测，最早是光学观测，随着科技的进步，观测手段也多样了，如无线电观测、激光观测等等，但光学观测仍然是最主要的观测手段，特别是对于空间目标监视以及空间碎片的观测只能依赖光学手段. 光学观测的可见条件也具有代表性，可适用于其他观测手段. 因此，这里就以光学观测为例，说明航天器的可见条件.

航天器的观测通常是从地面测站进行的，首先就是测站和航天器的几何位置关系，最直观反应这个关系的量就是卫星对测站的方位角 A 、地平高度 h 以及斜距 ρ. 如图 1.3 所示. 方位角 A 是自北点向东起量；地平高度 h 从地平起量，范围在 $\pm 90°$之间；斜距 ρ 为测站到航天器的距离. 由坐标转换关系(1.58)式和(1.59)式可知，航天器在地固系中的坐标为

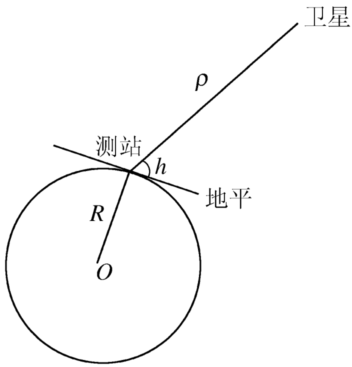

图 1.3　航天器与测站的几何关系

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}_z(180° - \lambda)\boldsymbol{R}_y(90° - \varphi)\begin{pmatrix} \rho\cos h\cos A \\ -\rho\cos h\sin A \\ \rho\sin h \end{pmatrix}. \tag{1.69}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为测站在地固系中的坐标.

航天器和测站间的一个重要关系是卫星能否被测站观测到，一个必要条件是卫星必出现在地平以上，即 $h > 0$. 但为了保证观测精度通常需要 $h > h_0$ ，h_0 在不同情况下取不同的值，通常在 5°～15°. 如图 1.4，r 为卫星的

地心距，R 为测站的地心距，θ 为卫星和测站的地心张角，ρ 为斜距. 容易导出如下关系：

$$\theta = \arccos\left(\frac{R}{r}\cos h\right) - h, \quad (1.70)$$

$$\tan h = \frac{r\cos\theta - R}{r\sin\theta}, \quad (1.71)$$

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta. \quad (1.72)$$

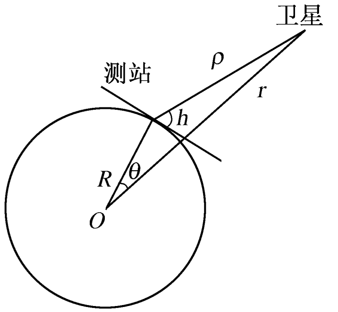

图 1.4　航天器的可观测区域

由此可见，要使卫星的地平高度不小于 h_0，那么卫星同测站的地心张角 θ 必须满足下列条件：

$$\theta < \theta_0 = \arccos\left(\frac{R}{r}\cos h_0\right) - h_0. \quad (1.73)$$

由 θ_0 确定的范围被称为可见范围，航天器在这个范围内才有可能被观测到. 由于大多数卫星都是近圆轨道，可用轨道半长径来代替上式中的 r，用于估计所需要的 θ_0. 无论利用哪种设备观测，上述可见范围都是一个必要条件.

航天器进入可见范围并不一定能被光学设备观测到，还需要考虑测站的天空背景是不是被太阳照亮，明亮的天空背景使得航天器不能被观测到. 这一条件可由太阳与测站的相对几何关系来决定，太阳与测站的相对几何关系通常用太阳的地平高度 β 来反映，对于观测来说需要太阳的地平高度满足条件 $\beta < \beta_0$. β_0 的值将根据不同的观测目标和观测要求来确定. 注意，这里的 β 意味着在地平以下的值，即 $\beta < 0$.

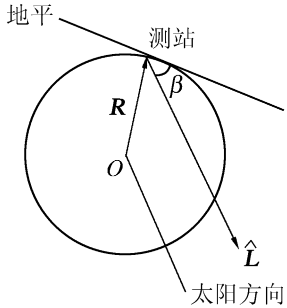

图 1.5　太阳和测站的关系

由于太阳很远，可认为太阳在无穷远处(即忽略视差)，地球上的太阳光线为平行光. 从图 1.5 上可看出，测站位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 与太阳方向 $\hat{\boldsymbol{L}}$(单位矢量)的夹角大于 $90° + |\beta_0|$，即在第二象限，此条件如下：

$$\arccos\frac{\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} > 90° + |\beta_0|. \quad (1.74)$$

在地面由 $90° + |\beta_0|$ 确定的边界称为日界线，日界线把地球表面分为两个区域，即“白天”和“黑夜”. 当测站为黑夜时才能进行光学观测.

光学观测还需要航天器表面被太阳照亮,此时设备才能观测到反射的光线. 这一条件是由航天器与太阳的相对位置关系决定的,也就是航天器必须在地影外. 对于这一条件,只需考虑简单的柱形地影即可,见图 1.6.

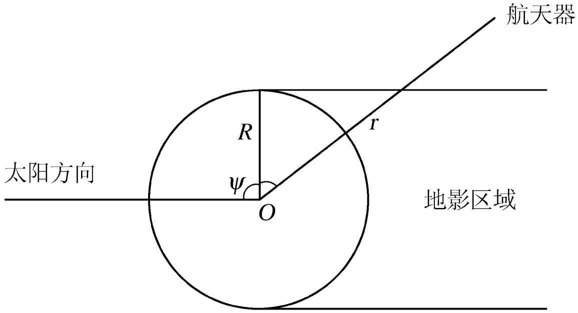

图 1.6 航天器进出地影的平面图

由图 1.6 可知,地影边界上满足下述条件:

$$\begin{cases}\sin\psi = \dfrac{R}{r}, \\ \cos\psi = -\sqrt{1-\dfrac{R^2}{r^2}}.\end{cases} \tag{1.75}$$

(1.75)式中 $\cos\psi$ 的右端取负号,是由于 $\psi > 90°$. 当航天器和太阳方向的夹角小于 ψ 时,航天器不在地影内,可以被太阳照亮. 太阳与地心的连线与椭球面的交点被称为日下点,地面上以日下点为中心半径为 ψ 的区域就是航天器可以被照亮的区域,该区域边界就称为地影线. 同样可用轨道半长径代替 r 来估计无地影区域的大小,即

$$\cos\psi = -\sqrt{1-\frac{R^2}{a^2}}. \tag{1.76}$$

对于航天器的光学观测而言,前面提到的三个条件都必须满足. 对于一个航天器,可观测范围相对测站是不变的,而日界线和地影线随太阳位置的变化而由东向西移动. 对于其他观测,如激光观测、无线电观测等,上述后两个条件理论上不是必需的.

§1.5 航天器的视运动——星下点轨迹与覆盖区域

航天器在高于地面几百公里以上的空间飞行,为了更好地表示它的运动状态,特别是反映它的运动与地球的相对关系,常用星下点的轨迹描绘.

航天器到地心的连线与地球参考椭球面的交点称为星下点，其位置用球坐标 (λ,φ) 来表示. 这里的 (λ,φ) 是大地经纬度，亦可用地心经纬度 (λ,φ') 来表示. 这一星下点的定义亦可用于绕飞其他中心天体(如月球，火星等)的航天器，只要相应的地球量改为另一中心天体即可.

关于星下点位置的计算，首先要将航天器的空间位置量转换到地固坐标系中. 例如定轨预报给出的是 J2000 地心天球坐标系中航天器的位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$，则首先要根据 §1.2 中介绍的坐标转换关系将 $\boldsymbol{r}$ 转换为地固坐标系中的位置矢量 $\boldsymbol{R}(t)$，由图 1.1 给出的转换关系可知：

$$\boldsymbol{R}(t) = (\mathbf{HG})\boldsymbol{r}(t)\,. \tag{1.77}$$

如果描述星下点位置需要的是地心纬度 φ'，则很简单，有如下关系：

$$\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi'\cos\lambda \\ R\cos\varphi'\sin\lambda \\ R\sin\varphi' \end{pmatrix}. \tag{1.78}$$

其中 R 是航天器的地心距，而 (λ,φ') 即可作为星下点在地球参考椭球面上的位置. 由(1.78)式不难给出 (λ,φ') 的计算公式如下：

$$\lambda = \arctan(Y/X), \tag{1.79}$$

$$\varphi' = \arcsin\left(\frac{Z}{R}\right) = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right). \tag{1.80}$$

如果需要的是大地纬度 φ，则可根据 §1.2 中给出的测站位置矢量 $\boldsymbol{R}_A$ 的计算公式(1.64)，令大地高 $H=0$ 即得：

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{1}{(1-e)^2}\tan\varphi' \\ &= \frac{1}{(1-e)^2}\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right). \end{aligned} \tag{1.81}$$

随着航天器的运行，星下点 $(\lambda(t),\varphi(t))$ 的连线即描绘出在自转的地球表面上的一条轨迹. 星下点轨迹清楚地反映了航天器运动和地面的关系，结合上一节可观测条件所对应的可观测范围、日界线和地影线就很容易体现航天器的动态观测几何.

航天器对地面的覆盖问题，可以从两个角度来看，一是卫星看地面的范围；另一个是地面可以看见卫星的范围. 航天器上的照相机对地面进行拍摄就属于卫星对地观测情况；前面提到卫星的可观测范围，是从测站角度考虑，当卫星进入该区域则可被该测站观测到. 随着卫星运动，可以找出地面可观测该卫星的区域，测站如果在该区域中则可观测该卫星. 覆盖几何图像见图 1.7.

对于第一种情况，已知 $\theta' = \theta_0'$，那么

$$\sin(90^\circ + h) = \frac{r\sin\theta_0'}{R}, \quad (1.82)$$

$$\theta = 180^\circ - \theta_0' - (90^\circ + h)$$
$$= 90^\circ - \theta_0' - h. \quad (1.83)$$

对于第二种情况，已知 $h = h_0$，那么地面看卫星的范围如下：

$$\sin(\theta') = \frac{R\sin(90^\circ + h_0)}{r}, \quad (1.84)$$

$$\theta = 180^\circ - \theta' - (90^\circ + h_0)$$
$$= 90^\circ - \theta' - h_0. \quad (1.85)$$

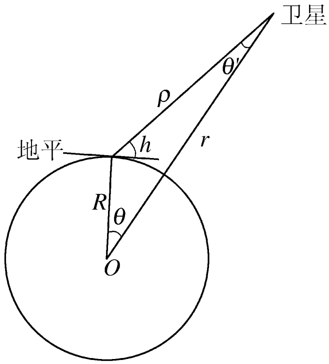

图 1.7 航天器对地面的覆盖

相应的覆盖范围在地图上即以星下点为中心，半径为 θ 的圆. 随着卫星运动这些区域形成的带就是卫星相应的覆盖范围. 对于近圆轨道，同样可以用 a 代替上式中的 r，估计基本的覆盖范围.

参 考 文 献

[1] 中国科学院紫金山天文台. 中国天文年历. 北京：科学出版社，每年一本

[2] 夏一飞，黄天衣. 球面天文学. 南京：南京大学出版社，1995

[3] 刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京：高等教育出版社，1992

[4] 刘林. 航天器轨道理论. 北京：国防工业出版社，2000

第 2 章　航天器在轨运行的无摄运动

若将地球或任何一个探测目标天体(如大行星、小行星等)看成一个质量密度分布均匀的球体,则它对绕其运行的航天器的引力作用可等效于一个质点,相当于质量全部集中在该天体质心上,于是就构成一个简单的二体系统,一个中心天体和一个运动天体. 以地球和人造卫星为例,将坐标系的原点放在地心上,讨论人造卫星相对地心的运动,这是很自然的. 卫星运动方程可写成

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{2.1}$$

其中 r 是卫星的地心向径,$\mu=GM$ 是地心引力常数,这里 M 是地球质量.

严格地说,人造卫星对地球亦有引力作用,地心坐标系并非惯性参考系. 因此,方程(2.1)的原形式应为

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}&=-\frac{GM}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)-\frac{Gm}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\&=-\frac{G(M+m)}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

方程右端第二项即惯性加速度. m 是人造卫星的质量,相对地球质量而言它是一个小量,例如一个 1 吨重的卫星,其质量与地球质量之比只有 $1:10^{22}$. 这个量对定轨精度的影响显然无需考虑,至少在当前的测量精度意义下是如此. 因此,卫星运动方程就可写成(2.1)的形式.

方程(2.1)或(2.2)是可积的,下面我们首先给出相应的六个独立积分,在此基础上再进行各种讨论.

§2.1　二体问题的六个积分与轨道根数

1. 动量矩积分(或称面积积分)

根据有心力的性质,可直接写出方程(2.1)的动量矩积分. 由方程(2.1)

很容易推出该积分,若记 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ 为面积速度矢量,则由方程(2.1)可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=0.$$

这表明 $\boldsymbol{h}$ 为常矢量,人造卫星绕地球的运动为一平面运动,相应的动量矩积分可写成

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=h\hat{\boldsymbol{R}}. \tag{2.3}$$

其中 $h=|\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}|$ 为面积速度常数,$\hat{\boldsymbol{R}}$ 即表示面积速度方向,它是卫星运动平面的法向单位矢量. 如果我们采用地心赤道坐标系,可用图2.1来描绘. 图中大圆 AA' 和 BB' 分别表示地球赤道和卫星轨道在辅助天球上的投影,X 方向即春分点方向,R 方向即轨道面法向,i 就是卫星轨道面与赤道面的夹角,Ω 即轨道升交点方向 N(或称节点)的赤经,在此坐标系中,利用球面三角形的余弦公式(或采用坐标旋转的方法),不难导出法向单位矢量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 的表达式为

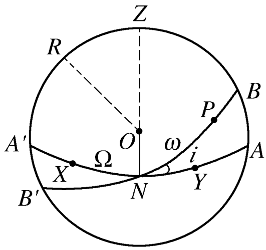

图 2.1 地心辅助天球

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\-\sin i\cos\Omega\\\cos i\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

积分(2.3)包含了 h,i,Ω 三个积分常数,h 是面积速度的两倍,i,Ω 则确定了卫星轨道平面的空间方向.

2. 运动平面内的轨道积分和活力公式

既然是平面运动,而相应的平面已由(i,Ω)确定,那么,我们即可在这一确定的平面内讨论降阶后的方程. 引入平面极坐标(r,θ),运动方程(2.1)可按径向和横向两个分量写成

$$\begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\dfrac{\mu}{r^2},\\[2ex] r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})=0.\end{cases} \tag{2.5}$$

第二个方程给出一个积分: $$r^2\dot{\theta}=h, \tag{2.6}$$

由空间极坐标(三个轴方向的单位矢量分别记作 $\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{k}},\hat{\boldsymbol{k}}$ 即前面的 $\hat{\boldsymbol{R}}$)中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tag{2.7}$$

立即可得

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{k}} = r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{R}}.$$

这表明积分(2.6)就是动量矩积分(2.3)式的标量形式.方程(2.5)和(2.6)构成了平面运动系统对应的三阶常微分方程,需要寻找三个独立积分.

上述方程组的特点是不显含自变量 t,由常微分方程的基本知识可知,对于这类方程,通过分离 t 的方法可使它降一阶,即能够首先讨论 r 对 θ 的变化规律.为此,记 $r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta, r'' = \mathrm{d}^2r/\mathrm{d}\theta^2$,由(2.6)式得

$$\begin{cases} \dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \dfrac{h}{r^2}r', \\ \ddot{r} = \mathrm{d}\dot{r}/\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \dfrac{h^2}{r^2}\left(-\dfrac{2}{r^3}r'^2 + \dfrac{1}{r^2}r''\right). \end{cases} \tag{2.8}$$

将这一关系代入方程(2.5)的第一个方程即可给出 r 对 θ 的二阶方程.但相应的方程比较复杂,仍不便于求解.如果在降阶的同时,再作变量变换

$$r = 1/u. \tag{2.9}$$

有

$$\begin{cases} \dot{r} = -hu', \\ \ddot{r} = -h^2u^2u''. \end{cases} \tag{2.10}$$

利用这一关系即可得到 u 对 θ 的一个二阶常系数线性方程:

$$u'' + u = \frac{\mu}{h^2}. \tag{2.11}$$

这是可积的.顺便提一下,如果将原方程右端作用力 μ/r^2 改为(或增加)μ/r^n 的形式,$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$,尽管经上述变换所得方程不同于(2.11)式,但仍然是可积的,这留给读者作为一道习题.

方程(2.11)给出一轨道积分:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos(\theta - \omega)}. \tag{2.12}$$

e 和 ω 即两个新积分常数.这是一圆锥曲线,在一定条件下它表示椭圆,地心就在椭圆的焦点上.对于人造地球卫星而言,当然属于这种情况,至于深空探测器所遇到的抛物线轨道和双曲线轨道,将在后面§2.4中介绍.既然是椭圆,可令

$$p = a(1 - e^2) = h^2/\mu, \tag{2.13}$$

那么积分(2.6)和(2.12)又可写成

$$r^2\dot{\theta} = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1-e^2)},\tag{2.14}$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)}.\tag{2.15}$$

积分常数 h 由 a 代替，p 是椭圆的半通径，a 是半长径，e 是偏心率，ω 则称为人造卫星过近地点的经度（或称幅角），因 $\theta=\omega$ 时，r 达到最小值. ω 的几何意义见图 2.1，图中 P 是近地点方向，幅角 ω 从节点 N 沿卫星运动方向计量.

将 $r=r(\theta)$ 的关系代入方程(2.14)，原则上可以给出最后一个与时间 t 有关的积分，我们暂时放一下，先导出椭圆运动的几个常用关系. 由(2.14)和(2.15)两式，经简单的运算可得

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).\tag{2.16}$$

此即活力公式. 另外，既然是椭圆运动，那么卫星向径在一个周期 T 内扫过的面积就是椭圆的面积 $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$，由此可知面积速度 $\frac{h}{2}$ 为

$$\frac{h}{2} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}/2 = \frac{\pi a^2\sqrt{(1-e^2)}}{T}.$$

整理后写成下列的形式：

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}.\tag{2.17}$$

若引进平均角速度（通常称其为平运动速度）$n=2\pi/T$，则上式又可写成

$$n^2a^3 = \mu.\tag{2.18}$$

这两个表达式就是万有引力定律导出的开普勒(Kepler)第三定律.

3. 第六个积分——开普勒方程

为了运算方便，在寻找第六个积分时，不直接引用方程(2.14)按 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 求解，而是利用(2.16)式按 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 积分，有

$$\dot{r}^2 = \mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)-\mu\frac{p}{r^2}.$$

通过(2.18)式消去 μ 整理后得

$$n\mathrm{d}t = \frac{r\mathrm{d}r}{a\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}.\tag{2.19}$$

对于椭圆轨道，r 的极大和极小值分别为

$$r_{\max} = a(1+e),\quad r_{\min} = a(1-e).$$

因此有 $|a-r|\leqslant ae$，故可引入辅助量 E：

$$a - r = ae\cos E$$

或

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{2.20}$$

代入(2.19)式可得

$$n\mathrm{d}t = (1 - e\cos E)\mathrm{d}E.$$

于是给出第六个积分：

$$E - e\sin E = n(t - \tau). \tag{2.21}$$

这又称为开普勒方程，τ 是积分常数. 当 $t=\tau$ 时，$E=0$，相应的 $r=a(1-e)=r_{\min}$，故 τ 就是卫星过近地点的时刻.

最后引进两个角度 f 和 M，定义如下：

$$f = \theta - \omega, \quad M = n(t - \tau). \tag{2.22}$$

f，M 和 E 是三个角度，分别称为真近点角，平近点角和偏近点角，都是从近地点开始计量，E 的几何意义见图 2.2，图中 O 是椭圆焦点，O' 是辅助圆的圆心. 显然，在二体问题中，面积积分可简化为

$$r^2 \dot{f} = h. \tag{2.23}$$

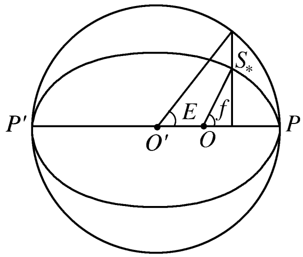

图 2.2　椭圆轨道和辅助圆

上述六个独立积分常数又称为轨道根数，只要初始条件给定，它们就完全被确定. a，e 是确定轨道大小和形状的根数；i，Ω 和 ω 是轨道平面和拱线（长半轴）的空间定向根数；第六个根数 τ 常被三种近点角代替，特别是平近点角 M，常被引用，它们本身同时包含时间 t，而不是常数，即随 t 而变化，故也被称作时间根数.

§2.2　椭圆运动的基本关系式

原则上说，上述六个积分就完全确定了二体问题意义下人造卫星绕地球的运动，但这六个积分的表达形式有时使用不便，有必要在它们的基础上导出一些常用关系式. 这里将根据理论研究和实际工作的需要进行整理，所涉及到的量，不外乎六个根数，时间 t、各种近点角、向径、速度等.

1. 椭圆运动中各量之间的几何关系

首先从图 2.2 和开普勒方程不难看出，三种近点角的象限关系很清楚，它们同时处在$[0, \pi]$或$[\pi, 2\pi]$区间上，这是一个很重要的关系，它们之间

的联系即

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}=a(1-e\cos E),\tag{2.24}$$

$$E-e\sin E=M.\tag{2.25}$$

另外,根据椭圆的性质可知,图 2.2 中的$\overline{OO'}=ae$,于是有

$$r\cos f=a(\cos E-e).\tag{2.26}$$

由此可立即导出

$$r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin E,\tag{2.27}$$

$$\tan\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}.\tag{2.28}$$

2. 椭圆运动中一些量对轨道根数的偏导数

在研究人造卫星的运动规律或计算其位置时,除遇到六个根数 a,e,i,Ω,ω,M 外,还会出现由它们构成的一些函数,这些函数关系中的基本量就是 E,f,r(或写成$\frac{a}{r}$较为方便),只要导出这些量对根数的偏导数就够了. 首先,我们来分析函数关系,由方程(2.24)~(2.26)可知

$$\begin{cases}E=E(e,M),\\ \dfrac{a}{r}=\dfrac{a}{r}(e,\ E(e,\ M))=\dfrac{a}{r}(e,M),\\ f=f(e,\ E(e,\ M),\ \dfrac{a}{r}(e,M))=f(e,M).\end{cases}\tag{2.29}$$

那么,利用前面的几何关系即可推出相应的偏导数,它们是

$$\frac{\partial E}{\partial e}=\frac{a}{r}\sin E,\quad \frac{\partial E}{\partial M}=\frac{a}{r},\tag{2.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{a}{r}\right)=\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos f,\quad \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{a}{r}\right)=-\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{r}\right)^2\sin f,\tag{2.31}$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}=\frac{1}{1-e^2}\left(1+\frac{p}{r}\right)\sin f,\quad \frac{\partial f}{\partial M}=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2.\tag{2.32}$$

有时为了需要,基本变量不用上述六个根数,而改用 $a,i,\Omega,\xi=e\cos\omega,\eta=e\sin\omega,\lambda=M+\omega$ 六个变量,f,E 将由 $u=f+\omega,\tilde{u}=E+\omega$ 代替. 若要推出相应的偏导数,其关键仍在于首先分析清楚函数关系. 由

$$e^2=\xi^2+\eta^2,\omega=\arctan(\eta/\xi),M=\lambda-\arctan(\eta/\xi),\tag{2.33}$$

可知

$$\begin{cases}f=f(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda)),\\ E=E(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda)),\\ \dfrac{a}{r}=\dfrac{a}{r}(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda)).\end{cases}\tag{2.34}$$

利用这一关系再去推导相应的偏导数显然是容易的，例如

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial e}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial e}{\partial \xi}+\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial M}{\partial \xi}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial e}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial e}{\partial \eta}+\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial M}{\partial \eta}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{\partial M}{\partial \lambda}. \end{cases} \tag{2.35}$$

其中$\dfrac{\partial}{\partial e}\left(\dfrac{a}{r}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{a}{r}\right)$前面已给出，剩下的问题只是根据(2.33)式去推导$\dfrac{\partial e}{\partial \xi}$，$\dfrac{\partial M}{\partial \xi}$，…，这对读者来说并不是难题.

3．近点角 M，E，f 与时间 t 之间的微分关系

根据三种近点角的定义，利用面积积分(2.23)和开普勒方程(2.25)以及上述关系，可给出

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n,\quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=n\left(\frac{a}{r}\right),\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=n\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2. \tag{2.36}$$

在后面要讨论的问题中，积分时常遇到上述几种变量之间的转换，为了方便，我们不妨根据(2.36)式将这些关系整理如下：

$$\mathrm{d}M=n\mathrm{d}t=\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}f, \tag{2.37}$$

$$\mathrm{d}E=n\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}M=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}f, \tag{2.38}$$

$$\mathrm{d}f=n\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\mathrm{d}t=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\mathrm{d}M=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}E, \tag{2.39}$$

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\mathrm{d}M=\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E=\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}f. \tag{2.40}$$

注意，这组微分关系是建立在六个轨道根数为常数基础上的，严格地说，它们仅适用于二体问题，这与前面两组关系式不一样.

4．向径 r 和速度 $\dot{r}$ 的表达式

作为二阶方程(2.1)的完整解，应该有

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t;C_1,\cdots,C_6), \\ \boldsymbol{r}=\dot{\boldsymbol{r}}(t;C_1,\cdots,C_6). \end{cases} \tag{2.41}$$

既然六个积分已得到,那么可以写出(2.41)式的具体形式.这里的积分常数 $C_1,\cdots,C_6$ 即前面的六个轨道根数,其中 C_6 是 τ,如果改用 M,(2.41)式中的 t 将包含在 M 中.

显然有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r\hat{\boldsymbol{r}} \\
&= r\cos f\,\hat{\boldsymbol{P}} + r\sin f\,\hat{\boldsymbol{Q}} \\
&= a(\cos E - e)\hat{\boldsymbol{P}} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\,\hat{\boldsymbol{Q}}.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

其中 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 分别表示近地点和半通径方向的单位矢量.通过坐标旋转,很容易给出它们在地心赤道坐标系中的表达式.若记

$$
\hat{\boldsymbol{P}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\tag{2.43}
$$

则

$$
\hat{\boldsymbol{P}} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\hat{\boldsymbol{P}}_0 .
\tag{2.44}
$$

关于旋转矩阵 $R_z(-\Omega)$,$R_x(-i)$, $R_z(-\omega)$的表达式请见第一章(1.10)~(1.12)式.至于 $\hat{Q}$ 的表达式,只要将 $R_z(-\omega)$改为 $R_z(-(\omega+90°))$即得.

为适合某些应用的需要,这里将 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 的具体表达式写出,即

$$
\hat{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\omega\sin i \end{pmatrix},
\tag{2.45}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{Q}} = \begin{pmatrix} -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\ -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\ \cos\omega\sin i \end{pmatrix}.
\tag{2.46}
$$

关于 $\dot{r}$,根据二体问题的性质,由 $\boldsymbol{r}$ 的表达式(2.42)可得

$$
\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.
\tag{2.47}
$$

利用前面的偏导数和微分关系即可具体写出上述表达式,即

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin f\hat{\boldsymbol{P}} + \sqrt{\frac{\mu}{p}}(\cos f + e)\hat{\boldsymbol{Q}} \\
&= \frac{\sqrt{\mu a}}{r}\left[-\sin E\hat{\boldsymbol{P}} + \sqrt{1-e^2}\cos E\hat{\boldsymbol{Q}}\right].
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

5. 椭圆运动的展开式

在很多问题中,需要将有关量通过平近点角 M 表示成时间 t 的显函

数，但由开普勒方程可知，这必将涉及到超越函数关系，无法直接达到上述要求. 因此，必须将 E，f，$\left(\dfrac{a}{r}\right)$等量展成 M 的三角级数，而在这些展开式中又要用到两个特殊函数：第一类贝塞耳函数和超几何函数（或称超几何级数），故首先简单地介绍一下这两个函数的有关知识，详细内容请查阅有关特殊函数的书籍.

第一类贝塞耳函数 $\mathrm{J}_n(x)$是二阶线性常微分方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-n^2)y=0$$

的一个解，它由下列级数表达：

$$\mathrm{J}_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(n+k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \tag{2.49}$$

其中 n 为整数($n=0,1,2,\cdots$)，x 为任意实数. 它又是 $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 展开式的系数，即

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)z^n. \tag{2.50}$$

其中 e 是自然对数的底，而 z 可以是复变量. 由此可给出 $\mathrm{J}_n(x)$的积分表达式，即

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(x\sin\theta-n\theta)}\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{2.51}$$

根据 $\mathrm{J}_n(x)$的定义，不难得出下列一些性质：

$$\begin{cases}\mathrm{J}_{-n}(x)=(-1)^n\mathrm{J}_n(x),\\ \mathrm{J}_n(-x)=(-1)^n\mathrm{J}_n(x),\\ \mathrm{J}_{-n}(-x)=\mathrm{J}_n(x),\\ \mathrm{J}_n(x)=\dfrac{x}{2n}[\mathrm{J}_{n-1}(x)+\mathrm{J}_{n+1}(x)],\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_n(x)=\dfrac{1}{2}[\mathrm{J}_{n-1}(x)-\mathrm{J}_{n+1}(x)].\end{cases} \tag{2.52}$$

超几何函数 $F(a,b,c;x)$是二阶线性常微分方程

$$(x^2-x)y''+[(a+b+1)x-c]y'+aby=0$$

的一个解，即

$$F(a,b,c;x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdot(b+n-1)}{n!\cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n$$

$$= 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \cdots. \quad (2.53)$$

其中 a,b,c 是常数.

（1）$\sin kE$, $\cos kE$ 和 E 的展开式

这里将直接列出展开结果,它们在文[1～3]中有详细的推导.

对 $k=1$,有

$$\sin E = \frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{J}_n(ne)\sin nM, \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}\cos E &= -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\mathrm{J}_{n-1}(ne) - \mathrm{J}_{n+1}(ne)]\cos nM \\ &= -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[\mathrm{J}_n(ne)]\cos nM. \end{aligned} \quad (2.55)$$

对 $k \geqslant 2$,有

$$\sin kE = k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\mathrm{J}_{n-k}(ne) + \mathrm{J}_{n+k}(ne)]\sin nM, \quad (2.56)$$

$$\cos kE = k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\mathrm{J}_{n-k}(ne) - \mathrm{J}_{n+k}(ne)]\cos nM. \quad (2.57)$$

由 $E = M + e\sin E$ 立即可得

$$E = M + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{J}_n(ne)\sin nM. \quad (2.58)$$

（2）$\frac{r}{a}$ 和 $\frac{a}{r}$ 的展开式

由 $\frac{r}{a} = 1 - e\cos E$, $\frac{a}{r} = \frac{\partial E}{\partial M}$ 可得

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[\mathrm{J}_n(ne)]\cos nM, \quad (2.59)$$

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_n(ne)\cos nM. \quad (2.60)$$

（3）$\sin f$, $\cos f$ 和 f 的展开式

利用偏导数关系式(2.31)可得

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{a}{r}\right)^{-1} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin f.$$

于是有

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$= 2\sqrt{1-e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[\mathrm{J}_n(ne)]\sin nM. \tag{2.61}$$

由轨道方程(2.15)得出

$$\cos f = \frac{1}{e}\left[-1+(1-e^2)\frac{a}{r}\right]$$

$$= -e + \frac{2}{e}(1-e^2)\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_n(ne)\cos nM, \tag{2.62}$$

利用 $\sin f$ 和 $\cos f$ 的展开式，可给出 f 的展开式，取到 e^4 项有

$$f = M + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \cdots\right)\sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \cdots\right)\sin 2M +$$

$$\left(\frac{13}{12}e^3 - \cdots\right)\sin 3M + \left(\frac{103}{96}e^4 - \cdots\right)\sin 4M + \cdots. \tag{2.63}$$

(4) $\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos mf$ 和 $\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin mf$ 的展开式

这里 n 和 m 均是任意整数(包括 0)．若仅用上述基本展开式，要给出这两个函数对 M 的三角级数(特别是一般表达式)，那是相当困难的，下面就对这两个函数直接进行傅立叶(Fourier)展开．函数 $F(f)$ 展成傅立叶级数的基本形式为

$$\begin{cases} F(f) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}(a_p\cos pM + b_p\sin pM), \\ a_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F(f)\cos pM\,\mathrm{d}M, \\ b_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F(f)\sin pM\,\mathrm{d}M, (p = 0,1,2,\cdots). \end{cases} \tag{2.64}$$

$\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos mf$ 是偶函数，$b_p = 0$，且

$$a_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n[\cos(mf - pM) + \cos(mf + pM)]\mathrm{d}M. \tag{2.65}$$

对于被积函数的第二部分，可令 p 取 $-p$，此时 $p=-1,-2,\cdots,-\infty$，于是有

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos mf = \sum_{p=-\infty}^{\infty}X_p^{n,m}(e)\cos pM$$

$$= X_0^{n,m}(e) + \sum_{p=1}^{\infty}(X_p^{n,m}(e) + X_{-p}^{n,m}(e))\cos pM. \tag{2.66}$$

其中

$$X_p^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos(mf - pM)\mathrm{d}M. \tag{2.67}$$

$\left(\dfrac{r}{a}\right)^n \sin mf$ 是奇函数，$a_p = 0$，b_p 的计算公式为

$$b_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n [\cos(mf - pM) - \cos(mf + pM)]\mathrm{d}M. \tag{2.68}$$

对于被积函数的第二部分的处理同上，结果得

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mf &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^{n,m}(e)\sin pM \\ &= \sum_{p=1}^{\infty}(X_p^{n,m}(e) - X_{-p}^{n,m}(e))\sin pM.\end{aligned} \tag{2.69}$$

由于上述两个函数的展开式系数相同，可用指数形式将这两个函数用统一形式来表达，即

$$\begin{cases}\left(\dfrac{r}{a}\right)^n \exp(jmf) = \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^{n,m}(e)\exp(jpM), \\ X_p^{n,m}(e) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp[j(mf - pM)]\mathrm{d}M.\end{cases} \tag{2.70}$$

其中 $j = \sqrt{-1}$. 因

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(mf - pM)\mathrm{d}M = 0.$$

(2.70)式中的 $X_p^{n,m}(e)$ 就是由(2.67)式表达的 $X_p^{n,m}(e)$，称为汉森(Hansen)系数，它是偏心率 e 的函数. 但它无法用初等函数来表达，只能引用贝塞耳函数和超几何级数，详细推导见文献[1]和[4]，这里列出展开结果.

$$X_p^{n,m} = (1+\beta^2)^{-(n+1)}\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_q(pe)X_{p,q}^{n,m}, \tag{2.71}$$

$$\beta = \frac{1}{e}(1 - \sqrt{1-e^2}) = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}. \tag{2.72}$$

$$X_{p,q}^{n,m} = \begin{cases}(-\beta)^{(p-m)-q}\dbinom{n-m+1}{p-m-q}F(p-q-n-1, -m-n-1, p-m-q+1, \beta^2), \\ \qquad\qquad (q \leqslant p-m), \\ (-\beta)^{q-(p-m)}\dbinom{n+m+1}{q-p+m}F(q-p-n-1, m-n-1, q-p+m+1, \beta^2), \\ \qquad\qquad (q \geqslant p-m).\end{cases} \tag{2.73}$$

其中

$$\begin{cases}\dbinom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}, \quad \dbinom{-n}{m} = (-1)^m\dbinom{n+m-1}{m}, \\ \dbinom{n}{-m} = \dbinom{-n}{-m} = 0, \quad \dbinom{n}{0} = \dbinom{-n}{0} = 1.\end{cases} \tag{2.74}$$

由(2.67)式即可给出

$$X_{-p}^{n,-m}(e) = X_p^{n,m}(e). \tag{2.75}$$

根据 $\mathrm{J}_q(pe)=O(e^q)$,可知

$$X_p^{n,m}(e) = O(e^{|m-p|}). \tag{2.76}$$

这两个性质在具体计算 $\left(\dfrac{r}{a}\right)^n\cos mf$ 和 $\left(\dfrac{r}{a}\right)^n\sin mf$ 的展开式时会用到.

以上各展开式的系数都是关于偏心率 e 的无穷级数,只有当 $e<e_c=0.6627\cdots$ 时才收敛,e_c 称为拉普拉斯(Laplace)极限.

给定 n,m 值和对 e 的取项要求后,根据性质(2.76)就可决定展开式(2.66)和(2.69)求和中 p 取值的范围. 对于人造地球卫星(甚至太阳系中大部分自然天体)的运动状况,绝大部分的轨道偏心率都是比较小的,取到 e^4 项有一定的实用价值. 为此,由性质(2.76)可知,展开式(2.66)和(2.69)的求和中,p 的取值如下:

$$\begin{cases} p = m-5+j,\ j=1,2,\cdots,9 \\ |m-p| \leqslant 4. \end{cases}$$

根据上面的分析,取到 e^4 项,只涉及 9 个 Hansen 系数,它们的简明表达式(e 的多项式)如下:

$$\begin{aligned} X_{m-4}^{n,m}(e) = {} & \frac{e^4}{384}[n^4-(18-8m)n^3+(95-102m+24m^2)n^2- \\ & (142-330m+192m^2-32m^3)n-(206m-283m^2+ \\ & 120m^3-16m^4)], \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned} X_{m-3}^{n,m}(e) = {} & -\frac{e^3}{48}[n^3-(9-6m)n^2+(17-33m+12m^2)n+ \\ & m(26-30m+8m^2)], \end{aligned} \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned} X_{m-2}^{n,m}(e) = {} & \frac{e^2}{8}[n^2-(3-4m)n+m(4m-5)]+\frac{e^4}{96}[n^4- \\ & (6-4m)n^3-(1+3m)n^2+(22-47m+48m^2- \\ & 16m^3)n+m(22-64m+60m^2-16m^3)], \end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned} X_{m-1}^{n,m}(e) = {} & -\frac{e}{2}(n+2m)-\frac{e^3}{16}[n^3-(1-2m)n^2-(3-5m+ \\ & 4m^2)n-m(2-10m+8m^2)], \end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned} X_{m}^{n,m}(e) = {} & 1+\frac{e^2}{4}(n^2+n-4m^2)+\frac{e^4}{64}[n^4-2n^3-(1+8m^2)n^2+ \\ & 2n-m^2(9-16m^2)], \end{aligned} \tag{2.81}$$

$$X_{m+1}^{n,m}(e) = -\frac{e}{2}(n-2m)-\frac{e^3}{16}[n^3-(1+2m)n^2-(3+5m+$$

$$4m^2)n+m(2+10m+8m^2)]. \tag{2.82}$$

$$X_{m+2}^{n,m}(e)=\frac{e^2}{8}[n^2-(3+4m)n+m(4m-5)]+\frac{e^4}{96}[n^4-(6+4m)n^3-(1-3m)n^2+(22+47m+48m^2+16m^3)n-m(22+64m+60m^2+16m^3)], \tag{2.83}$$

$$X_{m+3}^{n,m}(e)=-\frac{e^3}{48}[n^3-(9+6m)n^2+(17+33m+12m^2)n-m(26+30m+8m^2)]. \tag{2.84}$$

$$X_{m+4}^{n,m}(e)=\frac{e^4}{384}[n^4-(18+8m)n^3+(95+102m+24m^2)n^2-(142+330m+192m^2+32m^3)n+(206m+283m^2+120m^3+16m^4)]. \tag{2.85}$$

事实上，上述 Hansen **系数** $X_{m-k}^{n,m}(e)$**与** $X_{m+k}^{n,m}(e)$**还存在如下关系：**

$$X_{m-k}^{n,m}(e)=X_{(-m)+k}^{n,(-m)}(e),k=0,1,2\cdots. \tag{2.86}$$

因此，展开式取到 e^4 **项时，实际上只要给出** 5 **个** Hansen **系数** $X_{m+k}^{n,m}(e),k=0,1,2,3,4.$

利用(2.77)～(2.85)**式，很容易给出地球非球形引力主要摄动项和第三体引力摄动中涉及到的如下六个函数的展开式：**

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3=\left(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{15}{8}e^4\right)+\left(3+\frac{27}{8}e^2\right)e\cos M+\left(\frac{9}{2}+\frac{7}{2}e^2\right)e^2\cos 2M+\frac{53}{8}e^3\cos 3M+\frac{77}{8}e^4\cos 4M, \tag{2.87}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}e^2\right)e\cos M+\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{41}{48}e^4\right)\cos 2M+\left(\frac{7}{2}-\frac{123}{16}e^2\right)e\cos 3M+\left(\frac{17}{2}-\frac{115}{6}e^2\right)e^2\cos 4M+\frac{845}{48}e^3\cos 5M+\frac{533}{16}e^4\cos 6M, \tag{2.88}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2f=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}e^2\right)e\sin M+\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{37}{48}e^4\right)\sin 2M+\left(\frac{7}{2}-\frac{123}{16}e^2\right)e\sin 3M+\left(\frac{17}{2}-\frac{115}{6}e^2\right)e^2\sin 4M+\frac{845}{48}e^3\sin 5M+\frac{533}{16}e^4\sin 6M, \tag{2.89}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2=\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)+\left(-2e+\frac{1}{4}e^3\right)\cos M+$$

$$\left(-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{6}e^4\right)\cos 2M-\frac{1}{4}e^3\cos 3M-\frac{1}{6}e^4\cos 4M, \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f=&\frac{5}{2}e^2+\left(-3e+\frac{4}{3}e^3\right)\cos M+\\&\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{11}{8}e^4\right)\cos 2M+\left(e-\frac{19}{8}e^3\right)\cos 3M+\\&\left(e^2-\frac{5}{2}e^4\right)\cos 4M+\frac{25}{24}e^3\cos 5M+\frac{9}{8}e^4\cos 6M,\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f=&\left(-3e+\frac{23}{12}e^3\right)\sin M+\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{3}{2}e^4\right)\sin 2M+\\&\left(e-\frac{19}{8}e^3\right)\sin 3M+\left(e^2-\frac{5}{2}e^4\right)\sin 4M+\frac{25}{24}e^3\sin 5M\\&+\frac{9}{8}e^4\sin 6M.\end{aligned} \tag{2.92}$$

这里要说明一点，展开式(2.66)和(2.69)式的收敛性能并不好，首先当 $e>e_c=0.6627\cdots$ 时，展开式发散. 因此对展开式截断误差的估计就不像一般二项式 $(1+e)^n$ 展开那么简单，特别当 $e>0.2$ 时，而在 $e<0.2$ 时，勉强可用估计式 $O(\varepsilon^{k+1})$ 来表达展开式取到 e^k 项的截断误差，$\varepsilon=\dfrac{e}{e_c}$.

除上述展开式外，有些工作还需要其他类型的展开式，下面详细说明.

(5) $\left(\frac{a}{r}\right)^p$，$E$，$f-M$ 对 f 的展开式

$$\left(\frac{a}{r}\right)^p=(1-e^2)^{-p/2}\left[T_0(p,0)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(p,0)\binom{p}{n}\beta^n\cos nf\right], \tag{2.93}$$

其中 p 为正负整数，β 的意义同前，见(2.72)式，$T_n(p,q)$ 由超几何级数定义[2]，即

$$T_n(p,q)\equiv F\left(-p-q,p-q+1,n+1,-\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right). \tag{2.94}$$

当 $p=-1,-2$ 时有

$$T_n(-1,0)=T_0(-1,0)=1,$$

$$T_n(-2,0)=\frac{1}{n+1}\left(n+\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right), T_0(-2,0)=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.$$

于是可得

$$\left(\frac{r}{a}\right)=\sqrt{1-e^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\beta^n\cos nf\right], \tag{2.95}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \sqrt{1-e^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+n\sqrt{1-e^2})\beta^n\cos nf\right]. \tag{2.96}$$

这两个展开式下面将要用到.由

$$\frac{\partial E}{\partial f} = (1-e^2)^{-1/2}\left(\frac{r}{a}\right), \quad \frac{\partial M}{\partial f} = (1-e^2)^{-1/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2,$$

利用展开式(2.95)和(2.96),积分后即得

$$E = f + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\beta^n\sin nf, \tag{2.97}$$

$$f - M = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^2}\right)\beta^n\sin nf. \tag{2.98}$$

6. 一些函数的平均值

采用有摄二体问题作为人造卫星绕地球运动的数学模型时,需要求出卫星椭圆轨道的摄动变化,而这些变化又将包含周期项与非周期项这两类性质截然不同的部分.为了计算和理论分析的需要,有必要把它们分开.如何分解呢?有些量无法直接看出其性质,如$\left(\frac{a}{r}\right)$,$\cos f$等,它们是f的周期函数,但对时间t积分时,在一个卫星运动周期内的累积效果不为零(除非偏心率$e=0$);也就是说,这种类型的摄动力所引起的卫星轨道变化并不完全是周期性的.为此,我们可用求平均值的方法来加以区分.

任一函数$F(t)$,在一个卫星运动周期T内的平均值$\overline{F}$定义为

$$\overline{F} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.99}$$

若记F_S和F_c分别为周期项和非周期项,则显然有

$$F_c = \overline{F}, \quad F_S = F - \overline{F}. \tag{2.100}$$

于是,我们可用对一个卫星运动周期求平均值的方法把周期项分离出来,相应的函数F即被分解成两个部分:

$$F(t) = F_c + F_S(t). \tag{2.101}$$

从上述各表达式可清楚地看出,在求积分(2.99)式时,到底采用什么方法,并不影响由(2.100)和(2.101)式表达的函数分解结果的严格性.因此,尽管这一分解是针对后面求卫星轨道摄动变化的需要,可这里计算积分(2.99)时,却能采用椭圆运动关系.当然,考虑摄动时,运动周期T及所有椭圆轨道根数均要发生缓慢的变化,但它不会改变周期项F_S的基本特征.上述分解不仅严格,而且仍然保持原分解的意义.

讨论卫星轨道变化时所涉及到的摄动力，对应各种各样的函数，但需要通过求平均值来分离周期项的，基本上有下面四类：

$$\left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf,\qquad \left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf,\qquad \left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\sin qf,\qquad \left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\cos qf,\qquad (p,q=0,1,2,\cdots)$$

另一些特殊形式，在有关章节中再讨论.

首先通过几个特例来介绍求平均值的基本方法以及平均值的特征，并借此熟悉一下前面所介绍的各种椭圆关系式的具体应用.

（1）$p=0,q=1$ 时的 $\sin f$ 和 $\cos f$：

$$\begin{aligned}\overline{\sin f} &= \frac{1}{T}\int_0^T \sin f\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin f\,\mathrm{d}M \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin f\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2}\sin E\,\mathrm{d}E \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\cos f} &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos f\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos f\,\mathrm{d}M \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos f\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos E-e)\,\mathrm{d}E \\ &= -e.\end{aligned}$$

（2）$p=3,q=0$ 时的 $\left(\frac{a}{r}\right)^3$：

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} &= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{a}{r}\right)^3\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(1-e^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{2\pi}(1-e^2)^{-3/2}\int_0^{2\pi}(1+e\cos f)\,\mathrm{d}f \\ &= (1-e^2)^{-3/2}.\end{aligned}$$

（3）$p=-1,q=0$ 时的 $\left(\frac{r}{a}\right)$：

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{r}{a}\right)} &= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}E \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-e\cos E)^2\,\mathrm{d}E \\ &= 1+\frac{1}{2}e^2.\end{aligned}$$

这三个例子，一方面可使我们看出求平均值的方法，基本上是采用时间 t 与近点角 E,f 之间的变换和相应的几何关系. 另外，还可以看出，对不同的量

所求的平均值是不同的，例如 $\cos f$ 对 f 的平均值显然为 0，而对 t 的平均值却是 $-e$，这正说明椭圆运动的不均匀性.

下面不加推导地把上述四类函数平均值的一般表达式直接写出来，以供读者查用，具体证明留给读者作为习题.

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf} = 0,(p,q=0,1,2,\cdots). \tag{2.102}$$

$$\overline{\cos qf} = (1+q\sqrt{1-e^2})\left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q,(p,q=0,1,2,\cdots). \tag{2.103}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)\cos qf} = \left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q,(p,q=0,1,2,\cdots). \tag{2.104}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf} = \begin{cases} 0,\ (p\geqslant 2,q\geqslant p-1), \\ (1-e^2)^{-\left(p-\frac{3}{2}\right)} \displaystyle\sum_{n(2)=q}^{(p-2)-\delta} \binom{p-2}{n} \begin{bmatrix} n \\ \frac{1}{2}(n-q) \end{bmatrix} \left(\frac{e}{2}\right)^n, \\ \qquad (p\geqslant 2,q<p-1). \end{cases} \tag{2.105}$$

$$\delta = \frac{1-(-1)^{p-q}}{2}. \tag{2.106}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\cos qf} = 0,(p\geqslant 0,q\geqslant 0). \tag{2.107}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2 (f-M)\sin qf} = -\frac{1}{q}\frac{\overline{\cos qf}}{\sqrt{1-e^2}},(q\geqslant 1). \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M)\sin qf} = {} & (1-e^2)^{-\left(p-\frac{3}{2}\right)} \sum_{n=0}^{p-2}\sum_{m=0}^{n} \binom{p-2}{n}\binom{n}{m}\left(\frac{e}{2}\right)^n \times \\ & \left(-\frac{\overline{\cos(q+n-2m)f}}{q+n-2m}\right)_{2m\neq q+n},(p\geqslant 3,q\geqslant 1).\end{aligned} \tag{2.109}$$

对于 $p=0,1$ 的情况，很少遇到，这里不再讨论. (2.105)式求和中 $n(2)=q$ 表示取值“步长”为 2，即 $n=q,q+2,\cdots$，以后出现类似符号不再说明. 上述推导中要用到有关三角函数的两个表达式：

$$\begin{aligned}\sin^n f &= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{\frac{1}{2}(2m+n-\delta_1)}\binom{n}{m}[(1-\delta_1)\cos(n-2m)f + \\ &\qquad \delta_1 \sin(n-2m)f] \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(n-\delta_1)} 2^{\delta_2}(-1)^{\frac{1}{2}(2m+n-\delta_1)}\binom{n}{m}[(1-\delta_1)\cos(n-2m)f +\end{aligned}$$

$$\delta_1 \sin(n-2m)f],\tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}\cos^n f &= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cos(n-2m)f \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(n-\delta_1)} 2^{\delta_2}\binom{n}{m}\cos(n-2m)f.\end{aligned}\tag{2.111}$$

其中

$$\delta_1 = \frac{1-(-1)^n}{2},\quad \delta_2 = \begin{cases}1, n-2m\neq 0,\\ 0, n-2m=0.\end{cases}\tag{2.112}$$

为了读者方便,在书末附录中列出一些常用函数的平均值.

§2.3　位置矢量和速度矢量与轨道根数之间的转换关系

1. 星历计算

对于椭圆运动,一旦相应的六个积分常数(即轨道根数)被确定,轨道就被确定,由此即可计算任何时刻卫星的空间位置,这就是星历计算.

已知时刻 t 的六个椭圆根数 $a, e, i, \Omega, \omega, M$,要计算相应的卫星空间位置,可分三步:

首先也是最重要的一步,由 M 和 e 计算偏近点角 E,即解开普勒方程

$$E = M + e\sin E.$$

这虽然是一超越方程,但 $e<1$(有时很小),解此方程的方法很多(如简单迭代法,微分改正法等),读者是清楚的,这里不必多述.

得到 E 后,就可利用(2.42)式计算卫星的空间位置向量 $\boldsymbol{r}$,即

$$\boldsymbol{r} = a(\cos E - e)\hat{\boldsymbol{P}} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\,\hat{\boldsymbol{Q}}.$$

至于$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$的计算,可利用旋转矩阵(2.44)式,亦可直接用(2.45)式,依需要而定.

最后一步即将 $\boldsymbol{r}$ 转换为站心坐标 $\boldsymbol{\rho}(\rho, \alpha, \delta)$ 或 $\boldsymbol{\rho}'(\rho, A, h)$,前者即站心赤道坐标,由

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}\tag{2.113}$$

得

$$\begin{pmatrix}\rho\cos\delta\cos\alpha\\ \rho\cos\delta\sin\alpha\\ \rho\sin\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-X\\ y-Y\\ z-Z\end{pmatrix}.\tag{2.114}$$

即
$$\rho^2=(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2, \tag{2.115}$$
$$\alpha=\arctan\left(\frac{y-Y}{x-X}\right),\quad \delta=\arcsin\left(\frac{z-Z}{\rho}\right). \tag{2.116}$$
其中 $\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$是测站坐标.若要给出站心地平坐标(ρ,A,h),只需简单的坐标转换,详见第一章 §1.2.

2. 由位置矢量和速度矢量计算轨道根数

给定 t_0 时刻的卫星位置矢量 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0,z_0)$和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}_0(\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$,计算相应的六个椭圆轨道根数,这正是上一节星历计算的逆问题.因此,仍旧是那些椭圆运动关系式的简单应用.

(1) 根数 a,e,M_0 的计算

这三个根数可以确定卫星在轨道平面内相对于近地点的位置,利用下述椭圆运动关系式就可算出它们,即
$$\frac{1}{a}=\frac{2}{r_0}-\frac{v_0^2}{\mu}, \tag{2.117}$$
$$e\cos E_0=1-\frac{r_0}{a}, \tag{2.118}$$
$$e\sin e_0=r_0\dot{r}_0/\sqrt{\mu a}, \tag{2.119}$$
$$M_0=E_0-e\sin E_0. \tag{2.120}$$
其中(2.119)式是由(2.42)和(2.48)两式表达的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 进行数量乘积得到的. r_0,v_0 和 $r_0\dot{r}_0$ 由下式计算
$$\begin{cases} r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2, \\ v_0^2=\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2, \\ r_0\dot{r}_0=\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=x_0\dot{x}_0+y_0\dot{y}_0+z_0\dot{z}_0. \end{cases} \tag{2.121}$$

(2) 三个定向根数 i,Ω,ω 的计算

这三个根数确定了$\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$三个单位矢量,因此,要计算它们就必须利用椭圆运动关系中有关 $\boldsymbol{r}$ 和$\dot{\boldsymbol{r}}$,$\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$之间的关系.由(2.42)和(2.48)式容易解出
$$\hat{\boldsymbol{P}}=\frac{\cos E}{r}\boldsymbol{r}-\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sin E\dot{\boldsymbol{r}}, \tag{2.122}$$
$$\sqrt{1-e^2}\,\hat{\boldsymbol{Q}}=\frac{\sin E}{r}\boldsymbol{r}+\sqrt{\frac{a}{\mu}}(\cos E-e)\dot{\boldsymbol{r}}. \tag{2.123}$$
另外,动量矩积分给出

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}).\tag{2.124}$$

由 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 和已算出的 a,e,E_0，即可通过上面三个表达式计算 $\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$，但不必计算全部分量，只需要 $\boldsymbol{P}_z$，$\boldsymbol{Q}_z$ 和 $\boldsymbol{R}_x$，$\boldsymbol{R}_y$，$\boldsymbol{R}_z$. 根据 § 2.2 给出的 $\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{R}}$ 表达式可知，这五个分量与 i,Ω,ω 的关系为

$$\begin{cases}P_z=\sin i\sin\omega, \quad Q_z=\sin i\cos\omega,\\ R_x=\sin i\sin\Omega, \quad R_y=-\sin i\cos\Omega, \quad R_z=\cos i.\end{cases}\tag{2.125}$$

那么

$$\begin{cases}\omega=\arctan(P_z/Q_z),\\ \Omega=\arctan(R_x/(-R_y)),\\ i=\arccos R_z.\end{cases}\tag{2.126}$$

计算 ω,Ω 与 E_0 一样，均有确定象限问题，故必须用两个三角函数值，而对 i 只需用一个 $\cos i$ 值就够了，关于这一点，读者是容易理解的.

§ 2.4　抛物线轨道和双曲线轨道

尽管从天体力学这一角度来看，显然应该着重讨论椭圆轨道及其变化，但有些问题，如深空探测器的运动，也会涉及抛物线轨道和双曲线轨道，特别是双曲线轨道. 因此，作为二体问题，对这两种轨道作一简单介绍也是有必要的.

1. 抛物线轨道

动量矩积分(2.3)以及法向单位矢量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 与轨道平面的定向根数 (i,Ω) 之间的关系(2.4)仍不变，但此时，$e=1$，$a\to\infty$，故面积积分(2.6)式和轨道积分(2.12)式变为

$$r^2\dot{\theta}=\sqrt{\mu p}, \quad p=2q,\tag{2.127}$$

$$r=\frac{p}{1+\cos(\theta-\omega)}.\tag{2.128}$$

该抛物线的焦点仍在中心天体上，p 是半通径，q 是近星距. 定义 f 为真近点角，有

$$f=\theta-\omega.\tag{2.129}$$

那么(2.127)和(2.128)式即可分别写成下列形式

$$r^2\dot{f}=\sqrt{2\mu q},\tag{2.130}$$

$$r = \frac{p}{1+\cos f} = q\sec^2\frac{f}{2}, \tag{2.131}$$

将后一式代入前一式,积分得

$$2\tan\frac{f}{2} + \frac{2}{3}\tan^3\frac{f}{2} = \sqrt{2\mu}q^{-\frac{3}{2}}(t-\tau). \tag{2.132}$$

其中 τ 是最后一个积分常数,与椭圆运动类似,它也是运动天体 m 过近星点的时刻. 因此,抛物线轨道根数由于 $e=1$ 只剩下 5 个,即 i,Ω,q,ω,τ.

2. 双曲线轨道

与抛物线轨道类似,动量矩积分(2.3)以及法向单位矢量 $\hat{R}$ 的表达式(2.4)仍不变,但此时,$e>1$,相应的面积积分(2.6)式和轨道方程(2.12)式变为

$$r^2\dot{\theta} = \sqrt{\mu p}, \tag{2.133}$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos f}. \tag{2.134}$$

其中

$$p = a(e^2-1), \tag{2.135}$$

$$f = \theta - \omega. \tag{2.136}$$

这里 p 亦为半通径,p 和 a 的几何关系见图 2.3,f 是真近点角,ω 是近星点角距,而相应的近星距为

$$r_p = a(e-1). \tag{2.137}$$

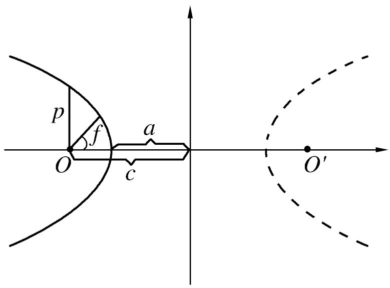

图 2.3 探测器相对目标天体(焦点 O)的双曲线轨道

活力公式(2.16)在这里变为下列形式:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right). \tag{2.138}$$

类似椭圆运动的积分方法,由(2.138)式利用(2.133)式消除 $\dot{\theta}$ 得

$$n a \mathrm{d} t=\frac{r \mathrm{~d} r}{\sqrt{(r+a)^{2}-a^{2} e^{2}}}. \tag{2.139}$$

其中

$$n=\sqrt{\mu a}^{-3/2}. \tag{2.140}$$

引进辅助量 E

$$r=a(e \operatorname{ch} E-1). \tag{2.141}$$

代入(2.139)式，积分得

$$e \operatorname{sh} E-E=n(t-\tau)=M. \tag{2.142}$$

其中 τ 为第六个积分常数，亦是过近星点的时刻. 虽然这里引进的 E 与椭圆运动中的偏近点角 E 意义不同，但上述 f，E 和 M 之间的关系与椭圆运动中的相应关系类似，即

$$\left\{\begin{array}{l}
r \cos f=a(e-\operatorname{ch} E), \\
r \sin f=a \sqrt{e^{2}-1} \operatorname{sh} E,
\end{array}\right. \tag{2.143}$$

$$\tan \frac{f}{2}=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{E}{2}. \tag{2.144}$$

由轨道方程(2.134)不难看出，$1+e\cos f=0$，$r \rightarrow \infty$，于是可知

$$-\pi+\arccos \left(\frac{1}{e}\right) \leqslant f \leqslant \pi-\arccos \left(\frac{1}{e}\right). \tag{2.145}$$

方程(2.142)类似于椭圆运动中的 Kepler 方程，但由于 $e>1$，不能用一般的迭代法求解，若用微分改正法(即简单的牛顿法)，亦容易由给定的 e，M 求出 E. 若取初值 $E=E^{(0)}$，则改正公式为

$$\left\{\begin{array}{l}
\Delta E=\dfrac{M-\left(e \operatorname{sh} E^{(0)}-E^{(0)}\right)}{e \operatorname{ch} E^{(0)}-1}, \\
E^{(1)}=E^{(0)}+\Delta E.
\end{array}\right. \tag{2.146}$$

例：由 $e=1.5$，$M=\pi/4=0.785398163$，求 E 值.

　　经计算，取 $E^{(0)}=M$，相应的改正过程如下：

$$\begin{aligned}
E^{(1)} &= 1.056738913, \\
E^{(2)} &= 1.018032116, \\
E^{(3)} &= 1.016994172, \\
E^{(4)} &= 1.016993449.
\end{aligned}$$

$E^{(4)}$ 对应的值 $e\operatorname{sh}E-E=0.785398163$，与 M 的值在 9 位有效数字上完全相同. 当然还可充分利用当代计算机的条件，采用更快速的“迭代”算法，这里只是举一个简单的算例供读者参考.

3. 位置矢量和速度矢量的计算公式

对于上述两种轨道,运动天体的位置矢量 r 的表达式与椭圆轨道相同,即

$$\boldsymbol{r} = r\cos f\,\hat{\boldsymbol{P}} + r\sin f\,\hat{\boldsymbol{Q}}. \tag{2.147}$$

其中 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 即近星点方向和半通径方向的单位矢量,它们的表达式与椭圆运动中的形式相同,见(2.45)和(2.46)两式.

速度矢量 $\dot{r}$ 的表达式,两种轨道稍有不同,对于抛物线轨道和双曲线轨道分别为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}[(-\sin f)\,\hat{\boldsymbol{P}} + (\cos f + 1)\,\hat{\boldsymbol{Q}}], \\ p = 2q, \end{cases} \tag{2.148}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}[(-\sin f)\,\hat{\boldsymbol{P}} + (\cos f + e)\,\hat{\boldsymbol{Q}}], \\ p = a(e^2 - 1). \end{cases} \tag{2.149}$$

对于双曲线轨道,还可以用辅助量 E 来表达 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{r}$ 的计算公式,即

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = a(e - \mathrm{ch}E)\,\hat{\boldsymbol{P}} + a\sqrt{e^2 - 1}\,\mathrm{sh}E\,\hat{\boldsymbol{Q}}, \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\sqrt{\mu a}}{r}[(-\mathrm{sh}E)\,\hat{\boldsymbol{P}} + (\sqrt{e^2 - 1}\,\mathrm{ch}E)\,\hat{\boldsymbol{Q}}]. \end{cases} \tag{2.150}$$

4. 双曲线轨道中由位置矢量和速度矢量计算轨道根数

由下列各式分别计算 a, e, E, M:

$$\frac{1}{a} = \frac{v^2}{\mu} - \frac{2}{r}, \tag{2.151}$$

$$\begin{cases} e\mathrm{sh}E = (\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})/\sqrt{\mu a}, \\ e\mathrm{ch}E = \left(\dfrac{r}{a}\right) + 1, \end{cases} \tag{2.152}$$

$$\begin{cases} e^2 = (e\mathrm{ch}E)^2 - (e\mathrm{sh}E)^2, \\ E = \mathrm{Arth}\,x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \quad x = \dfrac{e\mathrm{sh}E}{e\mathrm{ch}E}, \end{cases} \tag{2.153}$$

$$M = e\mathrm{sh}E - E. \tag{2.154}$$

关于 i, Ω, ω 的计算,与椭圆轨道中的计算基本相同,有

$$\cos i = (\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})_z/\sqrt{\mu p}, \tag{2.155}$$

$$\begin{cases}\sin i\ \sin\Omega=(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})_x/\sqrt{\mu p},\\ \sin i\ \cos\Omega=-(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})_y/\sqrt{\mu p},\end{cases}\tag{2.156}$$

$$\begin{cases}\sin i\ \sin\omega=P_z,\\ \sin i\ \cos\omega=Q_z,\end{cases}\tag{2.157}$$

其中

$$P_z=(\hat{\boldsymbol{P}})_z,\quad Q_z=(\hat{\boldsymbol{Q}})_z,\tag{2.158}$$

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{P}}=\left(\dfrac{\mathrm{ch}E}{r}\right)\boldsymbol{r}-\left(\sqrt{\dfrac{a}{\mu}}\mathrm{sh}E\right)\dot{\boldsymbol{r}},\\ \hat{\boldsymbol{Q}}=\dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}\left[\left(\dfrac{\mathrm{sh}E}{r}\right)\boldsymbol{r}+\sqrt{\dfrac{a}{\mu}}(e-\mathrm{ch}E)\ \dot{\boldsymbol{r}}\right].\end{cases}\tag{2.159}$$

§ 2.5　初轨计算

初轨计算无论在航天任务中，还是在太阳系各种小天体（小行星、自然卫星等）的发现过程中，都是不可缺少的. 在自然天体和人造天体的定轨问题中，通常所说的初轨计算是指二体问题意义下的短弧定轨，相对受摄二体问题意义下的精密定轨而言，它定出的是初轨（initial orbit），除直接被引用外，它主要为精密定轨提供初值（或称初始估计），经大量观测资料改进后的初轨就是在一定意义下的精轨，这一过程过去称为轨道改进，现在常与和定轨有关的一些几何和物理参数同时确定，被称为精密定轨，这就完全拓宽了轨道改进的概念.

初轨计算和精密定轨计算都是通过一个迭代过程完成的，但它们却有重大区别. 初轨计算对应一个特定的迭代过程，它不同于精密定轨中的多变元迭代过程，不过对于测距和测速等类型的测量资料，只能采用多变元迭代过程. 但是，我们一般所说的初轨计算，主要是针对测角资料（赤道型资料 α,δ 和地平型资料 A,h 等）的，或是将测距或测速资料转化成相应的形式. 而对于这些类型的测量资料，初轨计算可以由简单的迭代计算完成，不会出现多变元迭代所遇到的各种问题. 在天体力学发展的几百年历史中，就出现过测角型资料的多种定轨方法，就其实质而言可以归纳为 Laplace 型和 Guass 型两类方法[5~9]，特别在当今计算技术高度发展的背景下，Laplace 型方法显得更加简洁有效. 这里将重点介绍这一方法及其推广形式.

通常所说的 Laplace 型初轨计算方法，就是指在二体问题意义下的轨道计算方法. 事实上我们完全可以把这种类型的初轨计算方法推广到一般

受摄二体问题,既可以计算椭圆轨道,亦可以计算双曲线轨道.

随着地球卫星测量精度的提高(例如测角精度可达角秒级)和深空探测的发展,将会遇到各种目标天体轨道器的初轨计算问题,主星扁率摄动、第三体引力摄动等均可达到较大的程度,而且探测器飞往目标天体附近,在未变轨前处于双曲线轨道运行状态.因此针对精度要求的提高和力模型的复杂化,有必要建立一个适用范围广的初轨计算方法.为此,在经典 Laplace 方法基础上进行了推广,对于该方法不妨称其为广义 Laplace 方法.尽管这种方法可适用于受摄二体问题,但其基本原理和计算过程与二体问题意义下的 Laplace 方法并无重大区别,故该方法还是简单实用的.

1. 方法原理

选取空间坐标系 $O-xyz$,坐标原点是中心天体的质心,其坐标面 xy 可有多种选择.对于人造地球卫星,通常取地球赤道面,月球轨道器,即取月球赤道面,对小行星而言即取为日心黄道面等,总之,根据研究的对象而定.类似于精密定轨中的提法,初轨计算同样涉及到两类方程,即对应测量方程和状态微分方程的测量几何关系和天体运动方程.

(1) 几何条件——测量几何关系

在所选取的坐标系中(见图 2.4),测量几何满足如下关系:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{R}. \tag{2.160}$$

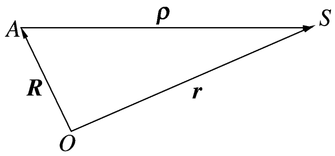

图 2.4 中心天体 O、测站 A 和运动天体 S 的相对几何构形

其中 $\boldsymbol{r}$ 是运动天体的位置矢量,$\boldsymbol{\rho}$ 是观测矢量,对于测角资料而言,即 $\boldsymbol{\rho}(\rho,\alpha,\delta)$ 或 $\boldsymbol{\rho}(\rho,A,h)$,其中测角量$(\alpha,\delta)$或$(A,h)$即赤经赤纬或方位角高度角.在坐标系 $O-xyz$ 中,$\boldsymbol{\rho}$ 可写成下列形式:

$$\boldsymbol{\rho}=\rho\hat{\boldsymbol{L}},\quad \hat{\boldsymbol{L}}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}. \tag{2.161}$$

直角坐标分量(λ,μ,ν)可由测角量(α,δ)或(A,h)经简单的坐标转换给出.如果在历元地心平赤道坐标系对人造卫星定轨,而测角量(α,δ)又是通过定标星给出的,即与定轨坐标系一致,则有

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}. \tag{2.162}$$

由于(A,h)资料对应的是瞬时真地平坐标系,于是有

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=(\mathbf{GR})^{\mathrm{T}}(\mathbf{ZR})\begin{pmatrix}\cos h\cos A\\ -\cos h\sin A\\ \sin h\end{pmatrix}. \tag{2.163}$$

其中(GR)＝(NR)(PR)是岁差章动矩阵，在第一章§1.2 中已给出具体表达式，而(ZR)是瞬时真赤道坐标系与地平坐标系之间的转换矩阵，在第一章§1.2 中也有其具体表达式. 测站坐标矢量 $\boldsymbol{R}$ 是给定的，有

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}. \tag{2.164}$$

(2) 动力学条件——天体运动方程

在坐标系 $O-xyz$ 中，运动天体相对中心天体(质量记为 M)的运动方程即

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{r}}=-\dfrac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon),\\ t_0:\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0),\quad \dot{\boldsymbol{r}}_0=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0).\end{cases} \tag{2.165}$$

其中 $\mu=GM$ 是中心天体的质心引力常数. 摄动加速度 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 对应各种力学因素，可以是保守力效应，亦可以是耗散效应，只要能写出相应力学因素的数学模型即可. 这里给出的初轨计算方法并不限于无摄运动，它可适用于不同类型的受摄运动，包括变化的椭圆轨道和双曲线轨道，计算给出的将是历元 t_0 时刻的瞬时椭圆轨道或是瞬时双曲线轨道.

(3) 初轨计算的基本方程

与精密定轨中对测量方程线性化后给出的条件方程(即精密定轨的基本方程)[9] 类似，将运动天体所遵循的动力学条件引入测量几何关系(2.160)，构成初轨计算的基本方程，不同的是动力学条件所对应的既不是运动方程(对应精密定轨中的状态微分方程)[9] 的数值解，亦不是小参数幂级数解(后面第四章中将要给出)，而是方程的另一种幂级数解，即时间间隔 $\Delta t=t-t_0$ 的幂级数解. 就中心天体的扁率摄动和第三体摄动而言，该级数解可写成如下形式：

$$\boldsymbol{r}(t)=F^*(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\boldsymbol{r}_0+G^*(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\dot{\boldsymbol{r}}_0. \tag{2.166}$$

其中 F^* 和 G^* 由 Δt 的幂级数表达，其具体形式下一段中给出. 以此解代入测量几何关系(2.160)可得

$$\hat{\boldsymbol{L}}\times(F^*\boldsymbol{r}_0+G^*\dot{\boldsymbol{r}}_0)=\hat{\boldsymbol{L}}\times\boldsymbol{R}. \tag{2.167}$$

对于一次测角采样资料，(2.167)式对应的三个方程只有两个是独立的，至

少需要三次采样才能定轨. 这是关于历元 t_0 时 $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ 形式上的线性代数方程. 如果能确定，那么再经简单的转换(见 §2.3 和 §2.4 中的有关内容)即可给出 t_0 时刻的瞬时轨道——椭圆轨道或双曲线轨道.

2. F, G 和 F_z, G_z 的表达式

只要运动方程(2.165)的右函数满足一定条件，其满足初始条件的解即存在，且可展成时间间隔 $\Delta t = t - t_0$ 的幂级数：

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_0^{(1)} \Delta t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{r}_0^{(2)} \Delta t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{r}_0^{(k)} \Delta t^k + \cdots. \qquad (2.168)$$

其中 $\boldsymbol{r}_0^{(k)}$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 对 t 的 k 阶导数在 t_0 点的取值，即

$$\boldsymbol{r}_0^{(k)} = \left(\frac{\mathrm{d}^k \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^k}\right)_{t=t_0}. \qquad (2.169)$$

要给出级数阶(2.168)满足初始条件的具体形式，就需要计算各阶导数 $\boldsymbol{r}^{(k)}$ 在处 t_0 的值 $\boldsymbol{r}_0^{(k)}$. 事实上有 $\boldsymbol{r}_0^{(1)} = \dot{\boldsymbol{r}}_0$，而二阶以上各导数值 $\boldsymbol{r}^{(k)}(k \geqslant 2)$ 均可根据运动方程(2.165)，由 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 构成，即

$$\boldsymbol{r}^{(k)} = \boldsymbol{r}^{(k)}(t_0, \boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0), \quad k \geqslant 2. \qquad (2.170)$$

对于无摄运动，级数解(2.166)中的 F^* 和 G^* 即 F 和 G，表达式简化为

$$\boldsymbol{r}(t) = F(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \Delta t)\boldsymbol{r}_0 + G(\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0, \Delta t)\,\dot{\boldsymbol{r}}_0. \qquad (2.171)$$

对于 $\boldsymbol{r}(t)$ 的三个分量 $x(t), y(t), z(t)$，F 和 G 各具有同一形式，为一数量函数. 对应受摄运动，通常相应的 F^* 和 G^* 对于三个分量 x, y, z 各具有不同的形式. 下面就中心天体扁率摄动和第三体引力摄动给出其具体表达式，相应的两种摄动加速度为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \left(\frac{3J_2}{2}\right)\left[\left(5\frac{z^2}{r^7} - \frac{1}{r^5}\right)\boldsymbol{r} - \left(\frac{2z}{r^5}\right)\hat{\boldsymbol{k}}\right] - \mu'\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3} - \frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right). \qquad (2.172)$$

为了便于量级分析和公式表达，这里已采用适当计算单位使各物理量无量纲化(详见后面第四章中的计算单位选取)，相应的中心天体的质心引力常数 $\mu = GM = 1$，$\mu' = GM'/GM$，M' 是第三体的质量. (2.172)式中的 J_2 为中心天体的动力学扁率. 其他有关量定义如下：

$$\hat{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'. \qquad (2.173)$$

$\boldsymbol{r}'$ 为第三体的坐标矢量.

略去推导过程，并记 $\tau=\Delta t$，直接写出形如(2.166)式的 τ 的幂级数解如下[10]：

$$\begin{cases} x=F(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)x_0+G(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\dot{x}_0, \\ y=F(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)y_0+G(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\dot{y}_0, \\ z=F_z(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)z_0+G_z(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,\Delta t)\dot{z}_0. \end{cases} \tag{2.174}$$

相应的基本方程(2.167)式按分量形式书写如下：

$$\begin{cases} (F\nu)x_0-(F_z\lambda)z_0+(G\nu)\dot{x}_0-(G_z\lambda)\dot{z}_0=(\nu X-\lambda Z), \\ (F\nu)y_0-(F_z\mu)z_0+(G\nu)\dot{y}_0-(G_z\mu)\dot{z}_0=(\nu Y-\mu Z), \\ (F\mu)x_0-(F\lambda)y_0+(G\mu)\dot{x}_0-(G\lambda)\dot{y}_0=(\mu X-\lambda Y). \end{cases} \tag{2.175}$$

其中

$$\begin{aligned} F=1&+\frac{\tau^2}{2}\left[-u_3+\left(\frac{3J_2}{2}\right)(5u_7z_0^2-u_5)-\mu'u_3'\right]+ \\ &\frac{\tau^3}{6}\left[(3u_5\sigma)+\left(\frac{3J_2}{2}\right)(5(u_7-7u_9z_0^2)\sigma+10u_7z_0\dot{z}_0)\right]+ \\ &\frac{\tau^4}{24}\left[u_5(3v_0^2-2u_1-15u_2\sigma^2)+\left(\frac{3J_2}{2}\right)(6u_8(4u_2z_0^2-1)-\right. \\ &5u_7(7u_2z_0^2-1)v_0^2+10u_7\dot{z}_0^2+35u_9(9u_2z_0^2-1)\sigma^2- \\ &\left.140u_9\sigma z_0\dot{z}_0)+u_3(\mu'u_3')\right]+\frac{\tau^5}{120}u_7[15\sigma(-3v_0^2+2u_1+ \\ &7u_2\sigma^2)]+\frac{\tau^6}{720}u_7[u_2\sigma^2(630v_0^2-420u_1-945u_2\sigma^2)-(22u_2 \\ &-66u_1v_0^2+45v_0^4)]+O(\tau^7), \end{aligned} \tag{2.176}$$

$$\begin{aligned} G=\tau&+\frac{\tau^3}{6}\left[-u_3+\left(\frac{3J_2}{2}\right)(5u_7z_0^2-u_5)-\mu'u_3'\right]+ \\ &\frac{\tau^4}{24}\left[6u_5\sigma+\left(\frac{3J_2}{2}\right)(20u_7z_0\dot{z}_0-10u_7(7u_2z_0^2-1)\sigma)\right]+ \\ &\frac{\tau^5}{120}u_5[9v_0^2-8u_1-45u_2\sigma^2]+ \\ &\frac{\tau^6}{720}u_7[30\sigma(-6v_0^2+5u_1+14u_2\sigma^2)]+O(\tau^7), \end{aligned} \tag{2.177}$$

$$\begin{aligned} F_z=F+\left(\frac{3J_2}{2}\right)&\left[\frac{\tau^2}{2}(-2u_5)+\frac{\tau^3}{6}(10u_7\sigma)+\right. \\ &\left.\frac{\tau^4}{24}u_7(10v_0^2-6u_1-70u_2\sigma^2)\right], \end{aligned} \tag{2.178}$$

$$G_z = G + \left(\frac{3J_2}{2}\right)\left[\frac{\tau^3}{2}(-2u_5) + \frac{\tau^4}{24}(20u_7\sigma)\right], \tag{2.179}$$

$$\begin{cases} u_n = 1/r_0^n, \quad \sigma = \boldsymbol{r}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_0, \quad v_0^2 = \dot{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_0, \\ u_3{}' = 1/r'^3_0, \quad r'_0 = |\boldsymbol{r}'_0|. \end{cases} \tag{2.180}$$

这里 $\boldsymbol{r}'_0$ 是第三体位置矢量 $\boldsymbol{r}'$在历元 t_0 时的值，即 $\boldsymbol{r}_0{}'=\boldsymbol{r}'(t_0)$.

在上述无量纲的表达式中，$|\tau|<1$，级数解收敛是显然的，而且收敛范围还可扩大. 对于人造地球卫星而言，$|\tau|<1$ 对应的有量纲物理量——时间间隔 $\Delta t=|t-t_0|<13^m.4468$，这与初轨计算对应的短弧是相适应的. 注意，上述表达式中的 $\sigma=O(e)$是小量，e 是轨道偏心率.

在上述 F^*，G^*（即 F，G 和 F_z，G_z）的表达式中，由于 τ 通常较小，只有在 τ 的低次幂中考虑了摄动，而在 τ^5 以上幂次中未列入相应的结果，这是很自然的，要写出 τ 高次幂中的摄动项并无任何困难. 不仅如此，对于其他类型的摄动，只要给出相应的数学模型，总是可以导出相应的 F^*，G^* 的表达式，因为运动方程(2.165)的右端仅出现 $\boldsymbol{r}$，$\dot{\boldsymbol{r}}$，高阶导数 $\boldsymbol{r}_0^{(k)}$ $(k\geqslant2)$总是可以用 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 来表达的.

3. 广义 Laplace 初轨计算方法的定轨过程

由一列测角采样资料：t_j，(α_j, δ_j)或(A_j, h_j)，$j=1,2,\cdots,N$，$N\geqslant3$ 即可由基本方程(2.168)进行定轨，即给出定轨历元 t_0 时的 $\boldsymbol{r}_0$，$\dot{\boldsymbol{r}}_0$，$t\in[t_1, t_N]$. 方程组(2.168)是关于 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 形式上的线性代数方程，只要知道 F，G，F_z，G_z，即可解出 $\boldsymbol{r}_0$，$\dot{\boldsymbol{r}}_0$，而 F，G，F_z，G_z 均是 $\boldsymbol{r}_0$，$\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的函数. 因此，这一定轨计算显然涉及一个迭代过程，但与精密定轨中的多变元迭代不同，它是一个特殊而简单的迭代过程. 由于

$$\begin{cases} F = 1 + O(\tau^2), \quad G = \tau + O(\tau^3), \\ F_z = 1 + O(\tau^2), \quad G_z = \tau + O(\tau^3), \end{cases} \tag{2.181}$$

而$|\tau|<1$. 因此，即使对于运动天体的轨道一无所知，亦可以采用

$$F^{(0)} = 1, \quad G^{(0)} = \tau, \quad F_z^{(0)} = F^{(0)}, \quad G_z^{(0)} = G^{(0)} \tag{2.182}$$

作迭代初值，按方程(2.168)和(2.176)～(2.180)式进行迭代，直到

$$\begin{cases} \Delta F = |F^{(m)} - F^{(m-1)}|, \quad \Delta G = |G^{(m)} - G^{(m-1)}|, \\ \Delta F_z = |F_z{}^{(m)} - F_z{}^{(m-1)}|, \quad \Delta G_z = |G_z^{(m)} - G_z^{(m-1)}|, \end{cases} (m = 1,2,\cdots) \tag{2.183}$$

满足一定精度终止计算，给出结果 t_0，$\boldsymbol{r}_0$，$\dot{\boldsymbol{r}}_0$，这和二体问题意义下的

Laplace 定轨方法就迭代过程而言没有任何差别.

获得 t_0, $\boldsymbol{r}_0$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 后,即可由简单的转换给出历元 t_0 时的椭圆轨道或双曲线轨道的瞬时根数 $a, e, i, \Omega, \omega, M$,具体转换关系已在前两节 §2.3 和 §2.4 中给出.

广义 Laplace 方法的定轨原理是严格的,如果用测角资料定轨,与二体问题一样,结果是唯一的,即所定出的轨道显然要通过三次观测对应的空间点. 正是由于这一原因,加上弧段又短,就使得资料误差会歪曲真实轨道,即定轨精度受到影响,特别是轨道半长径 a(这是一个很重要的根数)和偏心率 e. 例如,对于卫星椭圆轨道,应有 $a>1$,但有时因弧段短、资料精度又差,用拉普拉斯方法定出的轨道会出现 $a<1$ 的情况. 从前面的迭代计算中也可看出这一点,由于 F_j, G_j 的特点,通过方程(2.168)求解时,资料误差(反映在 λ_j, μ_j, ν_j 上)对 $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ 的影响较大,从而导致 a 和 e 有较大的误差.

上述问题并不是 Laplace 方法特有的,而是所有根据动力学原理通过三次观测(相应的弧段较短)严格定轨的一类方法的共同问题. 就人造地球卫星而言,考虑到下述观测的特点:

(1) 在一个较短的弧段内,可以得到较多的观测资料;

(2) 一天内可以得到多圈资料.

可以采用某些方法在一定程度上减轻资料误差的影响. 如采用多资料进行定轨,基本原理和方法以及计算过程不变,只是基本方程(2.175)式的个数增多,$j=1,2,\cdots,N$, $N\gg 3$,求解时采用简单的最小二乘法,给出 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的最佳解,这可充分利用统计信息减小资料误差的影响.

4. 其他类型资料的定轨问题

关于另一类 Guass 型方法,即首先确定两个以上的点位 $\boldsymbol{r}_j$($j=1,\cdots,k$, $k\geqslant 2$),然后再去定轨. 其定轨计算过程过于复杂,而基本原理与 Laplace 方法并无实质性差别,本书不再介绍. 这里将要给出另一种类似于 Laplace 方法的点位资料的定轨方法. 至于点位资料 $\boldsymbol{r}_j$($j\geqslant 2$)的获得,并不是由 Guass 方法中所指的由测角资料根据复杂的转换过程获得,而是直接由测量得到. 一种方法是现代测量手段可以实现的,即在取得测角量(α, δ 或 A, h)的同时获得卫星到“测站”(实为测量设备)的距离量 ρ,由此即给出卫星的空间点位 $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{R}.$$

相应的定轨基本方程(2.175)将由下列方程替代,即

$$\begin{cases} Fx_0 + G\dot{x}_0 = (\rho\lambda + X), \\ Fy_0 + G\dot{y}_0 = (\rho\mu + Y), \\ F_z z_0 + G_z \dot{z}_0 = (\rho\nu + Z). \end{cases} \tag{2.184}$$

只要有两次以上这样的采样资料即可定轨，定轨过程同前面第 3 段的介绍. 另一种取得卫星点位的方法就是通过卫星导航定位（如星载 GPS 定位方法）获得，即直接获得卫星的空间位置矢量 $\boldsymbol{r}$，由此，定轨基本方程更简单，即

$$\begin{cases} Fx_0 + G\dot{x}_0 = x, \\ Fy_0 + G\dot{y}_0 = y, \\ F_z z_0 + G_z \dot{z}_0 = z. \end{cases} \tag{2.185}$$

§2.6 二体问题意义下的轨道机动

在航天器的运行过程中常常需要进行轨道调整（即轨道机动），这就涉及到变轨问题，而变轨又往往采用脉冲式，那么这一机动过程是短暂的，可以看成是瞬时变轨变轨前的轨道根数记作 $\sigma_1(a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1, M_1)$，而变轨后目标轨道的轨道根数记作 $\sigma_2(a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \omega_2, M_2)$，变轨前后的轨道差为 $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$，变轨后目标轨道的轨道根数就相当于一个边值条件. 由于变轨时间短暂，可以看成是在二体问题意义下完成这一变轨过程，那么就需要在此前提下给出 $\Delta\sigma$ 与由脉冲能量获得的速度变化 $\Delta \boldsymbol{v}$ 之间的关系. 由它们之间的函数关系 $\Delta\sigma = \Phi(\Delta \boldsymbol{v})$，根据目标轨道的不同要求选择变轨方式（对应一定的 $\Delta \boldsymbol{v}$）.

瞬时椭圆轨道根数 σ 与位置矢量和速度矢量 $\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}$ 由严格的函数关系 $\sigma = f(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})$，§2.2 中已给出. 这里将用到如下关系式：

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}\right)^{-1}, \tag{2.186}$$

$$\begin{cases} e\cos E = 1 - \dfrac{r}{a}, \\ e\sin E = \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} / \sqrt{\mu a}, \end{cases} \tag{2.187}$$

$$M = E - e\sin E, \tag{2.188}$$

$$\cos i = (x\dot{y} - y\dot{x}) / \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \tag{2.189}$$

$$\tan\Omega = (y\dot{z} - z\dot{y})/(x\dot{z} - z\dot{x}), \tag{2.190}$$

$$\tan\omega = \frac{\sqrt{1-e^2}\left[e\cos E\left(\frac{z}{r}\right)-\sqrt{\frac{a}{\mu}}e\sin E\,\dot{z}\right]}{e\sin E\left(\frac{z}{r}\right)-\sqrt{\frac{a}{\mu}}(e\cos E-e^2)\,\dot{z}}. \tag{2.191}$$

其中

$$\begin{cases} r=|\,\boldsymbol{r}\,|, \quad \boldsymbol{r}=(x\quad y\quad z)^{\mathrm{T}}, \\ v=|\,\dot{\boldsymbol{r}}\,|, \quad v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2, \dot{\boldsymbol{r}}=(\dot{x}\quad \dot{y}\quad \dot{z})^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{2.192}$$

上标“T”表示转置，即 r 和 $\dot{r}$ 为列向量.

利用上述关系式不难导出

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{2a^2}{\mu}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}, \tag{2.193}$$

$$\left(\frac{\partial e^2}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{2a}{\mu}\left[\frac{1}{a^2}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}+\left((1-e^2)-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}\right], \tag{2.194}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \cos i}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\mu p}}(\boldsymbol{\Omega})^{\mathrm{T}}+\cos i\left[-\sqrt{\frac{a}{\mu}}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2(1-e^2)}\left(\frac{\partial e^2}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)\right], \\ \boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.195}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{1}{1+\tan^2\Omega}\left(-\frac{1}{x\dot{z}-z\dot{x}}\right)\left[(\boldsymbol{\Omega}_1)^{\mathrm{T}}-\tan\Omega(\boldsymbol{\Omega}_2)^{\mathrm{T}}\right], \\ \boldsymbol{\Omega}_1=\begin{pmatrix}0\\ z\\ -y\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}_2=\begin{pmatrix}z\\ 0\\ -x\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.196}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)= & \sin\omega\left[\frac{1}{e\sin i}\left(\frac{\dot{z}}{an}\right)-\frac{\cos\omega}{2(1-e^2)}\right]\left(\frac{\partial e^2}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)+ \\ & \frac{1}{e\sin i}\left\{\sqrt{1-e^2}\cos\omega\left[\frac{z}{r}\left(\frac{\partial(e\cos E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)-\sqrt{\frac{a}{\mu}}\dot{z}\left(\frac{\partial(e\sin E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)-\right.\right. \\ & \left.\sqrt{\frac{a}{\mu}}(e\sin E)(\hat{\boldsymbol{k}})^{\mathrm{T}}-\frac{\dot{z}}{\mu n}(e\sin E)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}\right]- \\ & \sin\omega\left[\frac{z}{r}\left(\frac{\partial(e\sin E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)+\sqrt{\frac{a}{\mu}}\dot{z}\left(\frac{\partial(e\cos E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)+\right. \\ & \left.\left.\sqrt{\frac{a}{\mu}}(e\cos E-e^2)(\hat{\boldsymbol{k}})^{\mathrm{T}}+\frac{\dot{z}}{\mu n}(e\cos E-e^2)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.197}$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\frac{1}{e^2}\left\{-\frac{a}{\mu}(e\sin E)\left[(1-e^2)+\frac{r}{a}\right](\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{\mu a}}\left[(1-e^2)-\frac{r}{a}\right](\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}\right\}. \tag{2.198}$$

(2.197)式右端出现的单位矢量 $\hat{k}$ 和四个偏导数$\frac{\partial(e\cos E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}$,$\frac{\partial(e\sin E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}$如下:

$$\hat{\boldsymbol{k}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \tag{2.199}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial(e\cos E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=\dfrac{2r}{\mu}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}},\\[2ex] \left(\dfrac{\partial(e\sin E)}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)=-\dfrac{(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{\sqrt{\mu a}}\left(\dfrac{a}{\mu}\right)(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}+\dfrac{1}{\sqrt{\mu a}}(\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{2.200}$$

根据上述各式即可给出如下函数关系:

$$\Delta\sigma=\Phi_v(\Delta\dot{r}). \tag{2.201}$$

例如,若要改变轨道半长径 a,则由(2.193)式不难给出

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(\dot{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}}(\Delta\dot{\boldsymbol{r}}). \tag{2.202}$$

这里 $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}=(\Delta\dot{x}\quad\Delta\dot{y}\quad\Delta\dot{z})^{\mathrm{T}}=(\Delta v_r\quad\Delta v_\theta\quad\Delta v_w)^{\mathrm{T}}$,其中 v_r,v_θ,v_w 即速度矢量$\dot{r}$的径向、横向和轨道面法向分量,且有 $v_w=0$. 那么(2.202)式可以分别写成下列形式:

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(\dot{x}\Delta\dot{x}+\dot{y}\Delta\dot{y}+\dot{z}\Delta\dot{z}) \tag{2.203}$$

和

$$\begin{cases}\Delta a=\dfrac{2a^2}{\mu}(v_r\Delta v_r+v_\theta\Delta v_\theta),\\[2ex] v_r=\dot{r},\quad v_\theta=r\dot{\theta}.\end{cases} \tag{2.204}$$

或用$\dot{r}$的模 v 来表达,有

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(v\Delta v). \tag{2.205}$$

由此表达式可以看出,若在变轨中仅要增大轨道半长径 a,则在近星点处(v 最大)最有利;而若需要抬高近星点高度,那么就需要在远星点加速($\Delta v>0$). 注意,这里的 Δv 是切向(即速度方向)分量,而不是 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的模$|\Delta\boldsymbol{v}|$.

一个速度增量 Δv 同样会改变轨道偏心率 e,根据(2.194)式可给出与

(2.205)式对应的关系式：

$$\Delta e = \left[\frac{2}{v\,e}\left(\frac{rv^2}{\mu}\right)\left(\frac{rv^2}{\mu}-1\right)\cos^2\theta\right]\Delta v$$
$$= \frac{2}{v\,e}\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{rv^2}{\mu}-1\right)\Delta v. \tag{2.206}$$

其中 θ 是速度方向(即切向)与横向的夹角.

这一节主要给出二体问题意义下轨道过渡(变轨)的一些基本关系式，至于轨道过渡的具体问题和细节将在后面有关章节中阐述.

参 考 文 献

[1] Plummer H. C. An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy. Cambridge at the University Press,1918

[2] Smart W. M. Celestial Mechanics, University of Glasgow, 1953

[3] Brouwer D. Clemence, G. M. Methods of Celestial Methanics, New York and London: Academic Press,1961

刘林,丁华译. 天体力学方法. 北京:科学出版社,1986

[4] Giacaglia G. E. O. Celest. Mech. 1976, 14(4): 515～523

[5] Taff L. G. On Initial Orbit Determination. Astron. J. 1984, 89(12): 1426～1478

[6] Morton B. G. and Taff L. G. A New Method of Initial Orbit Determination. Celest. Mech. 1986, 39(2): 181～190

[7] 刘林. 人造地球卫星轨道力学(第三章). 北京:高等教育出版社. 1992

[8] 刘林. 天体力学方法(第二章). 南京:南京大学出版社. 1998

[9] 刘林. 航天器轨道理论(第二章,第十五章). 北京:国防工业出版社. 2000

[10] 刘林, 王歆. 考虑地球扁率摄动影响的初轨计算方法. 天文学报. 2003, 44(2): 175～179

Liu Lin, Wang Xin. A Method of Orbit Computation Taking into Account the Earth's Oblateness. Chin. Astron. Astrophys. 2003,27(3):335～339

第 3 章　航天器在轨运行的受摄运动

第 2 章所讨论的二体问题(无摄运动)只是航天器绕中心天体运动的一种近似,从这一章开始将要仔细研究航天器在各种力学因素作用下的运动规律. 为了便于讨论,暂取中心天体的质心天球坐标系作为讨论问题的参考系. 在此参考系中,航天器绕中心天体运动的微分方程可写成如下形式:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\ \dot{\boldsymbol{r}},\ t). \tag{3.1}$$

这里,右函数 $\boldsymbol{F}$(尽管少一个质量因子,我们还是经常习惯地称它为作用力)极其复杂,若要获得运动方程(3.1)式的解,就必须对 $\boldsymbol{F}$ 作一些必要的分析和简化,给出合理的力学模型. 每一种力学因素的数学模型将要在后面各章中逐一给出,这一章先用中心天体质点引力外加保守力和耗散力影响的原则性力模型,介绍对受摄运动的处理方法,从而让读者了解求解这类方程的基本知识.

在上述前提下,航天器运动的基本方程(3.1)可以写成下列形式:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon, \tag{3.2}$$

而 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 的形式为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k(r,\ \dot{r},\ t;\ \varepsilon^k). \tag{3.3}$$

$\boldsymbol{F}_0$ 是中心天体的质点引力加速度,即

$$\boldsymbol{F}_0 = -\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right), \tag{3.4}$$

而 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 则包含了各种影响航天器运动的力因素,但它们满足下列条件:

$$|\boldsymbol{F}_\varepsilon| / |\boldsymbol{F}_0| = O(\varepsilon^k). \tag{3.5}$$

这里 $\varepsilon \ll 1$ 是小参数. 对于低轨人造地球卫星而言,$\varepsilon = O(J_2) = 10^{-3}$,$J_2$ 是地球非球形的扁率项因子. 对于不同的航天器,根据所处的不同力学环境,可取不同的参考量作为小参数标准.

满足方程(3.2)的运动不再是无摄运动,相应的二体问题意义下的圆锥曲线运动(椭圆或双曲线)就要发生轨道变化,此即受摄运动,(3.2)式即受

摄运动方程.

§3.1　轨道变化与常数变易法

如何求解受摄运动方程(3.2),从而给出航天器运动轨道的变化规律,这是航天器轨道力学的一个重点内容,本章将用分析方法来处理这一问题.

首先考虑无摄运动问题(即二体问题),这时 $\boldsymbol{F}_\varepsilon=0$,相应的方程(3.2)变为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 = -\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{3.6}$$

第二章已给出该问题的解:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(C_1, C_2, \cdots, C_6, t), \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g}(C_1, C_2, \cdots, C_6, t). \end{cases} \tag{3.7}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{r}}=\partial \boldsymbol{r}/\partial t$. 此解用来描述一圆锥曲线运动,六个积分常数 $C_1, C_2, \cdots, C_6$ 即轨道根数,依次排列为 $a, e, i, \Omega, \omega, \tau$. 回到原方程(3.2),$\boldsymbol{F}_\varepsilon \neq 0$,解(3.7)式当然不能满足它. 所谓常数变易法,即要使无摄运动的解(3.7)满足受摄方程(3.2),显然,$C_1, C_2, \cdots, C_6$ 不再是常数,应变为时间 t 的函数. 那么接下来就要导出这些积分常数(或轨道根数)的变化所满足的微分方程——摄动运动方程.

(3.7)第一式对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial C_j} \frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}. \tag{3.8}$$

由于要求(3.7)第二式亦满足受摄运动方程,所以应有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} = \boldsymbol{g}(C_1, C_2, \cdots, C_6, t). \tag{3.9}$$

此式再对 t 求一次导数,并让其满足受摄运动方程(3.2),即

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial C_j} \frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon, \tag{3.10}$$

而在该式中有

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} = \boldsymbol{F}_0, \tag{3.11}$$

由此可知,常数变易的两个条件应为

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial C_j} \frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t} = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial C_j} \frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.12}$$

其中$\dfrac{\partial f}{\partial C_j}$和$\dfrac{\partial g}{\partial C_j}$都是$C_j$和$t$的已知函数,因此共有六个“未知量”$\dfrac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}$,与方程个数相同. 对于具体应用,需要由该方程组给出$\dfrac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}$的显形式. 至于如何给出,暂放一下,先来看看上述常数变易法的实际意义. 显然,经上述处理,就是把受摄运动看成一个变化的圆锥曲线运动,无摄运动解的表达式(3.7)仍然成立,只是相应的六个不变根数C_j变为$C_j(t)$,即瞬时根数,亦称吻切根数.

关于由线性方程组(3.12)给出$\dfrac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}t}$的显形式问题,不再重复许多天体力学书中常用的推导方法,下面将介绍另一种比较简单的以轨道根数作为基本变量的直接推导方法,它无需假定摄动力是保守力,可普遍适用[1].

§3.2 摄动运动方程的直接推导

原理未变,但不是直接引用关系式(3.7),而是引用它们的原始形式,即二体问题的六个积分. 对于椭圆运动情况有

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\-\sin i\cos\Omega\\\cos i\end{pmatrix},\tag{3.13}$$

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),\tag{3.14}$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}=a(1-e\cos E),\tag{3.15}$$

$$M=E-e\sin E.\tag{3.16}$$

对于双曲线运动情况六个积分稍有差别,即

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\sqrt{\mu a(e^2-1)}\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\-\sin i\cos\Omega\\\cos i\end{pmatrix},\tag{3.17}$$

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right),\tag{3.18}$$

$$r=\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos f}=a(e\,\mathrm{ch}\,E-1),\tag{3.19}$$

$$M=e\,\mathrm{sh}\,E-E.\tag{3.20}$$

这里同时引用轨道积分和活力公式,仍算作两个独立积分. 因此两种轨道分别有六个关系式,可用来导出六个积分常数(可变根数)变化的微分方程. 同

样,让它满足受摄运动方程(3.2),而原不变根数变为时间 t 的函数.

为了下面推导的需要,现将 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 在空间极坐标系(r,θ,w)和中心天体质心直角坐标系 $O-xyz$ 中的形式分别列出,即

$$\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}=x\hat{\boldsymbol{i}}+y\hat{\boldsymbol{j}}+z\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{3.21}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}=\dot{x}\hat{\boldsymbol{i}}+\dot{y}\hat{\boldsymbol{j}}+\dot{z}\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}&=r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{w}}\\&=(y\dot{z}-z\dot{y})\hat{\boldsymbol{i}}+(z\dot{x}-x\dot{z})\hat{\boldsymbol{j}}+(x\dot{y}-y\dot{x})\hat{\boldsymbol{k}}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中 $\hat{r}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{w}$ 为径向,横向和轨道面法向单位矢量,$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ 为直角坐标三个方向的单位矢量. 摄动力(加速度)$\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 在上述两坐标系中的三个分量分别记为 S, T, W 和 F_x, F_y, F_z.

将常数变易的原理分别用于上述六个积分(3.13)～(3.16)和(3.17)～(3.20). 设

$$\varphi(C_1, C_2, \cdots, C_6, t)=\psi(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) \tag{3.24}$$

为无摄运动(3.6)的任一积分,对于无摄运动有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\ddot{\boldsymbol{r}}, \tag{3.25}$$

即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\boldsymbol{F}_0. \tag{3.26}$$

而对受摄运动却变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial C_j}\dot{C}_j=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\ddot{\boldsymbol{r}}\\&=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}(\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{F}_\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.27}$$

按常数变易的要求,其中 r 和 $\dot{r}$ 仍满足椭圆或双曲线运动关系,那么根据(3.26)式立即可得

$$\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial C_j}\dot{C}_j=\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\boldsymbol{F}_\varepsilon. \tag{3.28}$$

实际上,这就是条件(3.12)式的一般情况,当 $\psi=x$, y, z 和 $\psi=\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ 时,条件(3.28)式即退化为(3.12)式.

为了避免混乱,我们引用 a, e, i, Ω, ω, M 六个根数作为独立变量. 事实上,无论是理论研究还是具体应用问题,都没有必要引用过近星点时刻 τ 或常用的 $M_0=-n\tau$,真正有用的是时间根数 $M=n(t-\tau)$,或另两个近点角

f 和 E,而采用平近点角 M 比较方便. 引用 M 代替 τ 作为独立变量后,在求某些函数对 a 的偏导数时,不再有显含 a 和隐含 a 的问题. 上述六个积分中的前四个,即(3.13)~(3.14)式和(3.17)~(3.18)式,可以写成形如(3.24)式的简单形式:

$$\varphi(a,e,i,\Omega)=\psi(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}). \tag{3.29}$$

相应的条件(3.28)式为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\varphi}{\partial e}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\varphi}{\partial i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\ =&\frac{\partial\psi}{\partial\dot r}S+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\dot\theta}T\\ =&\frac{\partial\psi}{\partial\dot x}F_x+\frac{\partial\psi}{\partial\dot y}F_y+\frac{\partial\psi}{\partial\dot z}F_z.\end{aligned} \tag{3.30}$$

这可用来推导 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$. 关于另两个方程,虽然 M 或 f,E 可以代替 τ 作为独立变量,但它们都不能看成积分常数,因此对后两个积分(3.15)~(3.16)式和(3.19)~(3.20)式不便引用(3.28)式,但可用来直接推导 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$. 推导中将要用到 $\dot f$,这可由面积积分将它与 $\dot\omega$,$\dot\Omega$ 联系起来. 对于无摄运动有

$$\begin{cases}\dot\theta=\dot f,\\ r^2\dot\theta=r^2\dot f=h,\end{cases} \tag{3.31}$$

$$h=\sqrt{\mu p}=\begin{cases}\sqrt{\mu a(1-e^2)}\\ \sqrt{\mu a(e^2-1)}.\end{cases} \tag{3.32}$$

而对于受摄运动却有

$$\dot\theta=\dot f+\dot\omega+\dot\Omega\cos i,$$

$$r^2\dot\theta=r^2(\dot f+\dot\omega+\dot\Omega\cos i)=h(t),$$

即

$$r^2\dot f=h(t)-r^2(\dot\omega+\dot\Omega\cos i). \tag{3.33}$$

下面根据上述原理具体推导摄动运动方程,但仅对椭圆情况作全面阐述,而对双曲线运动情况,推导过程完全类似,不再重复. 首先将积分(3.14)式写成(3.29)式的形式:

$$\frac{\mu}{a}=\frac{2\mu}{r}-(\dot r^2+r^2\dot\theta^2).$$

根据(3.14)式得

$$-\frac{\mu}{a^2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=-2\dot{r}S-2r\dot{\theta}T.$$

其中

$$\begin{cases}\dot{r}=\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=\sqrt{\mu/p}e\sin f,\\ r\dot{\theta}=\dfrac{1}{r}\sqrt{\mu p}.\end{cases}\tag{3.34}$$

代入上式整理后得

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[Se\ \sin f+T(1+e\cos f)].\tag{3.35}$$

接着利用积分(3.13)式在轨道面法向和 x,y 方向上的分量来推导 $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$. 相应的形式为

$$h=r^2\dot{\theta},\tag{3.36}$$

$$h\ \sin i\sin\Omega=y\dot{z}-z\dot{y},\tag{3.37}$$

$$-h\ \sin i\cos\Omega=z\dot{x}-x\dot{z},\tag{3.38}$$

由(3.30)式得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=rT,\tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}rT\sin i\sin\Omega+h\ \cos i\sin\Omega\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+h\ \sin i\cos\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=yF_z-zF_y\\&=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_x,\end{aligned}\tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}-rT\sin i\cos\Omega-h\ \cos i\cos\Omega\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+h\ \sin i\sin\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=zF_x-xF_z\\&=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_y.\end{aligned}\tag{3.41}$$

由 $h=\sqrt{\mu p}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}$，(3.39)式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu}{2\sqrt{\mu p}}\left[(1-e^2)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-2ae\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right]=rT.\tag{3.42}$$

将方程(3.35)代入上式并消去 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$，即得

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}[S\ \sin f+T(\cos f+\cos E)].\tag{3.43}$$

为了由(3.40)式和(3.41)推出 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$，需要计算 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_x$ 和 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_y$. 在空间极坐标系中记 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)$ 为 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)^*$ ，有

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)^*=\begin{pmatrix}0\\-rW\\rT\end{pmatrix}.\tag{3.44}$$

经三次旋转可得 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 在地心赤道直角坐标系中的表达式，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon &= R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-u)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)^* \\ &= \begin{pmatrix} rT\sin i\sin\Omega + rW(\cos\Omega\sin u+\sin\Omega\cos u\cos i) \\ -rT\sin i\cos\Omega + rW(\sin\Omega\sin u-\cos\Omega\cos u\cos i) \\ rT\cos i - rW\cos u\sin i \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

其中 $u=f+\omega$. 将 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_x$ 和 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\varepsilon)_y$ 两个分量代入(3.40)式，作简单运算即得

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W, \tag{3.46}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\frac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W. \tag{3.47}$$

利用轨道积分(3.15)式分别得出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=&\frac{1-e^2}{1+e\cos f}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\left[\frac{p\cos f}{(1+e\cos f)^2}+\frac{2ae}{1+e\cos f}\right]\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+\\ &\frac{pe\sin f}{(1+e\cos f)^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=(1-e\cos E)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-a\cos E\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+ae\sin E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \tag{3.49}$$

而根据常数变易原理，按椭圆运动关系有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial r}{\partial t}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin f. \tag{3.50}$$

通过(3.33)式和开普勒积分给出的导数关系

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=(1-e\cos E)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}-\sin E\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}. \tag{3.51}$$

即可将(3.48)式和(3.49)式中的 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 与 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ 联系起来，从而导出最后两个方程

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right]-\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}, \tag{3.52}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n-\frac{1-e^2}{nae}\left[-S\left(\cos f-2e\frac{r}{p}\right)+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right]. \tag{3.53}$$

从上述六个方程的形式来看，中心天体质心引力常数 μ 仅出现在平运动速度 n 中，即

$$n=\sqrt{\mu a}^{-3/2}. \tag{3.54}$$

§ 3.3　椭圆运动的摄动运动方程

1. 以六个椭圆轨道根数为基本变量的摄动运动方程

基本变量记作 σ,它们是 a, e, i, Ω, ω, M 六个随时间变化的瞬时根数. 根据不同问题的需要,摄动力(加速度)将以三种形式表达. 其一是径向分量 S,横向分量 T,轨道面法向分量 W 表示. 另一种形式是将 S,T 改为切向分量 U,法向分量 N. 这里切向是指天体运动方向,N 是轨道面内的法向分量,也称主法线分量,而 W 又称次法线分量. U,N,W 与 S, T, W 一样,组成右手螺旋系统. 有些摄动力是保守力,存在势 R,相应的第三种形式即

$$\boldsymbol{F}_{\varepsilon} = \mathrm{grad} R. \tag{3.55}$$

其中 R 又称摄动函数.

为了由 S, T, W 型的摄动运动方程推出另两种形式,就必须找出 U, N, W 三个分量以及摄动函数的偏导数 $\partial R/\partial\sigma$ 与 S, T, W 的关系. 首先考虑 U, N,设径向与切向之间的夹角为 α,由坐标旋转,立即可得

$$\begin{cases} S = U\cos\alpha - N\sin\alpha, \\ T = U\sin\alpha + N\cos\alpha. \end{cases} \tag{3.56}$$

根据微分几何知识可知,对于曲线(即轨道)$r=r(\theta)$或 $r=r(f)$,有

$$\tan\alpha = \frac{r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}f}} = \frac{1+e\cos f}{e\sin f}. \tag{3.57}$$

由此可得

$$\cos\alpha = \frac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}. \tag{3.58}$$

将此结果代入(3.56)式得

$$\begin{cases} S = \dfrac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}U - \dfrac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}N, \\ T = \dfrac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}U + \dfrac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}N. \end{cases} \tag{3.59}$$

对于保守力情况有

$$S = \frac{\partial R}{\partial r}, \quad T = \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial u}, \quad W = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r\sin u}\frac{\partial R}{\partial i}. \tag{3.60}$$

有了这一关系,就可以写出用摄动函数描述瞬时根数变化的摄动运动方程.但方程右端还包含 r,u,f,E 等量,若要使给出的方程 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$,其右端仅出现 a,e,i 三个量和 $\partial R/\partial\sigma$,就必须求出 $\partial R/\partial\sigma$ 与 S,T,W 之间的关系.

因 $R=R(r)$,故有

$$\frac{\partial R}{\partial\sigma}=\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\sigma}=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\sigma}, \tag{3.61}$$

而其中

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon=\boldsymbol{R}_z(-\Omega)\boldsymbol{R}_x(-i)\boldsymbol{R}_z(-u)\begin{pmatrix}S\\T\\W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S\\T\\W\end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

这里 $l_j,m_j,n_j(j=1,2,3)$是径向、横向和轨道面法向单位矢量的三个分量,即

$$\hat{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}l_1\\m_1\\n_1\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}=\begin{pmatrix}l_2\\m_2\\n_2\end{pmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{\omega}}=\begin{pmatrix}l_3\\m_3\\n_3\end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

具体形式在第二章中已给出(那里的 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 即 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$),它们是:

$$\begin{cases}l_1=\cos\Omega\cos u-\sin\Omega\sin u\cos i,\\ m_1=\sin\Omega\cos u+\cos\Omega\sin u\cos i,\\ n_1=\sin u\sin i,\end{cases} \tag{3.64}$$

$$\begin{cases}l_2=-\cos\Omega\sin u-\sin\Omega\cos u\cos i,\\ m_2=-\sin\Omega\sin u+\cos\Omega\cos u\cos i,\\ n_2=\cos u\sin i,\end{cases} \tag{3.65}$$

$$\begin{cases}l_3=\sin\Omega\sin i,\\ m_3=-\cos\Omega\sin i,\\ n_3=\cos i.\end{cases} \tag{3.66}$$

$\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 满足下列关系:

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{r}}^2=\hat{\boldsymbol{\theta}}^2=\hat{\boldsymbol{\omega}}^2=1,\\ \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}}=\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=0.\end{cases} \tag{3.67}$$

剩下的问题是求$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\sigma}$. 由

$$\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}$$

可知

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma} = \frac{\partial r}{\partial \sigma}\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \sigma}. \tag{3.68}$$

其中

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \sigma} = \begin{pmatrix} l_3 \sin u\,\dfrac{\partial i}{\partial \sigma} - m_1\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + l_2\,\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} \\ m_3 \sin u\,\dfrac{\partial i}{\partial \sigma} + l_1\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + m_2\,\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} \\ n_3 \sin u\,\dfrac{\partial i}{\partial \sigma} + n_2\,\dfrac{\partial u}{\partial \sigma} \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

将(3.62)式和(3.68)式连同(3.63)～(3.66)式以及(3.69)式一并代入(3.61)式,经整理后得

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial r}{\partial \sigma}S + rT\left(\cos i\,\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\right) + rW\left(\sin u\,\frac{\partial i}{\partial \sigma} - \sin i \cos u\,\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}\right). \tag{3.70}$$

利用 § 2.2 中的结果

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial a} = \dfrac{r}{a}, \quad \dfrac{\partial r}{\partial e} = -a\,\cos f, \quad \dfrac{\partial r}{\partial M} = \dfrac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \omega} = 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial e} = \dfrac{1}{1-e^2}\left(1 + \dfrac{p}{r}\right)\sin f, \quad \dfrac{\partial u}{\partial M} = \left(\dfrac{a}{r}\right)^2\,\sqrt{1-e^2}. \end{cases} \tag{3.71}$$

就可给出(3.70)式的具体形式,即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a} = \dfrac{r}{a}S, \\ \dfrac{\partial R}{\partial e} = -a\,\cos f S + r\left(\dfrac{1}{1-e^2} + \dfrac{a}{r}\right)\sin f T, \\ \dfrac{\partial R}{\partial i} = r\,\sin u W, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \Omega} = r\,\cos i T - r\,\cos u\,\sin i W, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \omega} = rT, \\ \dfrac{\partial R}{\partial M} = \dfrac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f S + \dfrac{a^2\,\sqrt{1-e^2}}{r}T. \end{cases} \tag{3.72}$$

根据前面的推导,我们将三种形式的摄动运动方程整理于下:

（1）***S*，*T*，*W* 型**

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[S\,e\,\sin f+T(1+e\cos f)],\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}[S\sin f+T(\cos f+\cos E)],\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W,\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W,\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f+T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right]-\cos i\,\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{1-e^2}{nae}\left[-S\left(\cos f-2e\,\dfrac{r}{p}\right)+T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right].
\end{cases}
\tag{3.73}
$$

（2）***U*，*N*，*W* 型**

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}U,\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[2(\cos f+e)U-\sqrt{1-e^2}\sin E N\right],\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2\sin f\,U+(\cos E+e)N]-\\[1ex]
\qquad\cos i\,\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{1-e^2}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[\left(2\sin f+\dfrac{2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)U+\right.\\[1ex]
\qquad\left.(\cos E-e)N\right].
\end{cases}
\tag{3.74}
$$

$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$ 与（3.37）式中相应的两式表达相同. 上述两种类型称为高斯(Guass)型.

(3) $\partial R/\partial\sigma$ 型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial M},\\ \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1-e^2}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial M}-\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial\omega},\\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\cos i\dfrac{\partial R}{\partial\omega}-\dfrac{\partial R}{\partial\Omega}\right),\\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial R}{\partial i},\\ \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial e}-\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{1-e^2}{na^2e}\dfrac{\partial R}{\partial e}-\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial a}.\end{cases}\tag{3.75}$$

这种类型称为拉格朗日(Lagrange)型.

2. 适合任意偏心率($0\leqslant e<1$)问题的摄动运动方程

前面推出的方程,右端含有$\dfrac{1}{e}$因子,不能用于 $e=0$ 的情况. 为此引进新变量,它们是

$$a,\ i,\ \Omega,\ \xi=e\cos\omega,\ \eta=e\sin\omega,\ \lambda=M+\omega\tag{3.76}$$

这组变量当 $e=0$ 时是完全确定的. 根据变量的定义和前面已推出的方程,经简单运算即可给出以新变量表达的摄动运动方程,其形式如下:

(1) S, T, W 型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\sin u-\eta\cos u)+T\left(\dfrac{p}{r}\right)\right],\\ \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{S\sin u+\dfrac{T}{\sqrt{1-e^2}}\left[(1+\sqrt{1-e^2})\cos u-\right.\right.\\ \qquad\left.\left.\dfrac{\xi}{1+\sqrt{1-e^2}}(\xi\cos\tilde{u}+\eta\sin\tilde{u})\right]\right\}+\eta\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\ \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{-S\cos u+\dfrac{T}{\sqrt{1-e^2}}\left[(1+\sqrt{1-e^2})\cos u-\right.\right.\\ \qquad\left.\left.\dfrac{\eta}{1+\sqrt{1-e^2}}(\xi\cos\tilde{u}+\eta\sin\tilde{u})\right]\right\}-\xi\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{2S\sqrt{1-e^2}\left(\dfrac{r}{p}\right)+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\cos u+\right.\right.\\ \qquad\left.\left.\eta\sin u)-T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)(\xi\sin u-\eta\cos u)\right]\right\}-\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}.\end{cases}\tag{3.77}$$

其中 $\tilde{u}=E+\omega$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$ 与前面(3.73)式中的形式相同，不再重复.

(2) $\partial R/\partial\sigma$ 型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left[\cos i\left(-\eta\dfrac{\partial R}{\partial\xi}+\xi\dfrac{\partial R}{\partial\eta}+\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}\right)-\dfrac{\partial R}{\partial\Omega}\right],\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial R}{\partial i},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\dfrac{\partial R}{\partial\eta}-\xi\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}+\eta\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\dfrac{\partial R}{\partial\xi}-\eta\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}-\xi\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{2}{na}\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}+\dfrac{1-e^2}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\left(\xi\dfrac{\partial R}{\partial\xi}+\eta\dfrac{\partial R}{\partial\eta}\right)-\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}.\end{cases}\tag{3.78}$$

这两组方程的右端不再出现 $1/e$ 因子.

3. 适合任意偏心率($0\leqslant e<1$)和倾角($0\leqslant i<180°$)问题的摄动运动方程

上述方程右端还有 $1/\sin i$ 因子，不适用于 $i=0$ 或 $i=180°$的情况. 但对卫星型的航天器而言，一般不会出现 $i=180°$的情况，只需要考虑 $i=0$ 的问题. 为此，引进另一组新变量，它们是：

$$\begin{cases}a,\ h=\sin\dfrac{i}{2}\cos\Omega,\ k=\sin\dfrac{i}{2}\sin\Omega,\\ \xi=e\cos(\omega+\Omega),\ \eta=e\sin(\omega+\Omega),\ \lambda=M+\omega+\Omega.\end{cases}\tag{3.79}$$

在 h 和 k 的定义中采用的是 $\sin\dfrac{i}{2}$而不是 $\sin i$，其原因是采用 $\sin i$ 时，在相关问题中会出现 $1/\cos i$ 的因子，不适用于 $i=90°$的情况，而采用 $\sin\dfrac{i}{2}$不会出现这一问题. 下面分别列出 S，T，W 型的方程和 $\partial R/\partial\sigma$ 型的方程.

（1）*S*，*T*，*W* 型

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\sin u-\eta\cos u)+T\left(\frac{p}{r}\right)\right],\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\Bigg\{S\sin u+T\Bigg[\cos\tilde{u}+\cos u-\\
&\qquad \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}\,(1+\sqrt{1-e^2})}(\xi\sin\tilde{u}-\eta\cos\tilde{u})\Bigg]+\\
&\qquad W\left(\frac{r}{p}\right)\left[-\eta\,\frac{(h\sin u-k\cos u)}{\cos\dfrac{i}{2}}\right]\Bigg\},\\
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\Bigg\{-S\cos u+T\Bigg[\sin\tilde{u}+\sin u+\\
&\qquad \frac{\xi}{\sqrt{1-e^2}\,(1+\sqrt{1-e^2})}(\xi\sin\tilde{u}\eta\cos\tilde{u})\Bigg]+\\
&\qquad W\left(\frac{r}{p}\right)\left[\xi\,\frac{(h\sin u-k\cos u)}{\cos\dfrac{i}{2}}\right]\Bigg\},\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{W}{2na\sqrt{1-e^2}\cos\dfrac{i}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)[\cos u-h(k\sin u+h\cos u)],\\
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} &= \frac{W}{2na\sqrt{1-e^2}\cos\dfrac{i}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)[\sin u-k(k\sin u+h\cos u)],\\
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= n-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\Bigg\{2S\sqrt{1-e^2}\left(\frac{r}{p}\right)+\\
&\qquad \frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\Bigg[S(\xi\cos u+\eta\sin u)-\\
&\qquad T\left(1+\frac{r}{p}\right)(\xi\sin u-\eta\cos u)\Bigg]-\\
&\qquad W\left(\frac{r}{p}\right)\left[\frac{h\sin u-k\cos u}{\cos\dfrac{i}{2}}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.80}
$$

（2）∂R/∂σ 型

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \lambda},\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{1}{2k+2h-1-\cos i}\left[-2h\frac{\partial R}{\partial h}-(2h-\right.\right.\\
&\quad \left.\left.1-\cos i)\frac{\partial R}{\partial k}\right]+\frac{h}{1+\cos i}\left(\eta\frac{\partial R}{\partial \xi}-\xi\frac{\partial R}{\partial \eta}-\frac{\partial R}{\partial \lambda}\right)\right\},\\
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{1}{2k+2h-1-\cos i}\left[2k\frac{\partial R}{\partial k}+(2k-\right.\right.\\
&\quad \left.\left.1-\cos i)\frac{\partial R}{\partial h}\right]+\frac{k}{1+\cos i}\left(\eta\frac{\partial R}{\partial \xi}-\xi\frac{\partial R}{\partial \eta}-\frac{\partial R}{\partial \lambda}\right)\right\},\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2\eta\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \eta}-\\
&\quad \frac{\xi\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial \lambda},\\
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &= \frac{2\xi\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \xi}-\\
&\quad \frac{\eta\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial \lambda},\\
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{2\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\cos i)}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)+\\
&\quad \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\left(\xi\frac{\partial R}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial R}{\partial \eta}\right).
\end{aligned}\right. \tag{3.81}$$

上述两种形式的方程不再有 $1/e$ 和 $1/\sin i$ 因子.

§ 3.4 双曲线运动的摄动运动方程

直接写出下列两种形式的摄动运动方程[2]，即

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2}{n\sqrt{e^2-1}}[Se\sin f + T(1+e\cos f)],\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{e^2-1}}{na}[S\sin f + T(\cos f + \mathrm{ch}E)],\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{r\cos u}{na^2\sqrt{e^2-1}}W,\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{r\sin u}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i}W,\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{e^2-1}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right] - \cos i\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= n + \frac{e^2-1}{nae}\left[S\left(-\cos f + 2e\,\frac{r}{p}\right) + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right],
\end{aligned}
\right.
\tag{3.82}
$$

和

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M},\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{e^2-1}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial M} + \frac{\sqrt{e^2-1}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i}\left(\cos i\,\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega}\right),\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2\sqrt{e^2-1}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sqrt{e^2-1}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} - \cos i\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},\\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= n - \frac{e^2-1}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.83}
$$

其中 R 同样是保守力型摄动对应的摄动函数，即 $\boldsymbol{F}_\varepsilon = \mathrm{grad}R$.

从上述摄动运动方程不难看出，由于双曲线轨道对应的 $e>1$，相应的 a 和 e 以及相关的平近点角 M 的变化规律有别于椭圆轨道.

§3.5　各类摄动对轨道影响的定性分析

受摄运动方程(3.2)式右端的摄动加速度 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 通常包含保守力(引力等)和耗散力作用，不同的力因素对卫星轨道将会产生不同性质的影响. 在具体阐述相应摄动解之前，这里先对各类摄动因素及其影响特征作一简单介绍和分析. 就人造地球卫星而言，几类主要摄动源如下：

1. 地球非球形引力摄动

太阳系中各大行星、小行星以及月球，它们的质量分布都是不均匀的，形状也并非球形. 对于这样的天体，其引力位函数与球形引力位(即质点引力位)有差别，在质心赤道坐标系中，相应的非球形引力位可由下列球谐展开式表达：

$$V = V_0 + \Delta V, \tag{3.84}$$

$$V_0 = \frac{\mu}{r} = \frac{GM}{r}, \tag{3.85}$$

$$\Delta V = -GM \sum_{l \geqslant 2} \frac{J_l}{r^{l+1}} P_l(\sin\varphi) - \sum_{l \geqslant 2} \sum_{m=1}^{l} \frac{J_{l,m}}{r^{l+1}} P_l^m(\sin\varphi) \cos m\bar{\lambda}, \tag{3.86}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda - \lambda_{l,m}, \quad \lambda_{l,m} = \text{const}. \tag{3.87}$$

其中 r 为地心距，λ，φ 为地心经、纬度，$P_l(\sin\varphi)$ 和 $P_l^m(\sin\varphi)$ 分别为勒让德(Legendre)和缔合勒让德多项式. V_0 是地球引力位的主要部分，相当于密度均匀球体的引力位，或质量全部集中在质心的质点引力位. ΔV 是真实引力位对均匀球体的修正部分，包括带谐(Zonal Harmonic)和田谐(Tesseral Harmonic)两大项，它们反映了地球的不均匀性(包括形状不规则和密度分布的不均匀). 相应的 J_l 和 $J_{l,m}$ 即带谐项系数和田谐项系数，它们的大小则反映出上述不均匀性的程度. 其中 $J_2 = O(10^{-3})$，相应的项又称为扁率项，其他 J_l 和 $J_{l,m}$ 的量级几乎都不大于 10^{-6}. 因此，人造卫星在地球引力场中的运动方程又可写成下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon. \tag{3.88}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_0 = \text{grad} V_0 = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{3.89}$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \text{grad}(\Delta V), \tag{3.90}$$

且有

$$|\boldsymbol{F}_\varepsilon| / |\boldsymbol{F}_0| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon = O(J_2). \tag{3.91}$$

$\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 相对 $\boldsymbol{F}_0$ 是一小扰动，称为摄动部分. 这种由地球(或任一中心天体)不均匀性引起的摄动，常被称为非球形引力摄动或简称形状摄动.

2. 第三体引力摄动

对于人造卫星绕地球的运动，日、月(作为质点)引力是一种典型的第三体引力摄动，相应的摄动加速度为

$$\boldsymbol{F}_{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{2} (-m_j)\left(\frac{\boldsymbol{R}_j}{|\boldsymbol{R}_j|^3} + \frac{\boldsymbol{\Delta}_j}{|\boldsymbol{\Delta}_j|^3}\right), \tag{3.92}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_j = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_j, (j = 1, 2). \tag{3.93}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}_j$ 各为人造卫星和日、月的地心向径，$\boldsymbol{R}_j$ 是时间 t 的已知函数，由日、地、月三体系统确定，与人造卫星运动无关.

3. 大气阻力摄动

人造卫星(特别是低轨卫星)在地球高层大气中飞行，将受大气阻力的影响，阻力加速度可写成下列形式：

$$\boldsymbol{D} = -\frac{1}{2}\left(\frac{C_{\mathrm{D}}S}{m}\right)\rho v^2\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right). \tag{3.94}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是卫星相对大气的飞行速度，v 是其大小，ρ 是大气密度，S/m 是卫星对阻力而言的有效面积质量比(以后简称面质比)，C_{D} 是阻力系数. 对于绝大多数卫星而言，它们的有效截面积 S 不是太大，而飞行高度又不太低(通常距地面 200 km 以上)，$\boldsymbol{D}$ 相对前面的主项 $\boldsymbol{F}_0$ 是很小的，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}_{\varepsilon}$，是一种阻力摄动.

4. 太阳辐射压摄动

直接作用在人造卫星表面的太阳辐射压(或简称光压)，虽然并不大，但同样要影响卫星的运动，也是一种摄动源，相应的摄动加速度为

$$\boldsymbol{F}_{\varepsilon} = \nu\left(\frac{\kappa S}{m}\right)\rho_{\odot}\frac{a_u^2}{\Delta^2}\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta}\right). \tag{3.95}$$

其中 $\rho_{\odot}$ 是作用在离太阳一个天文单位 a_u 处的太阳辐射压强，$\kappa=1+\eta$，η 是卫星表面的反射系数，S/m 是卫星对辐射压而言的有效面质比，$\boldsymbol{\Delta}$ 是太阳到卫星的矢径，ν 是地影因子，由下式定义：

$$\nu = 1 - \Delta S/S_{\odot}. \tag{3.96}$$

这里 $S_{\odot}$ 是太阳视面积，ΔS 是被“蚀”部分，这涉及到地影问题，当 $\Delta S=S_{\odot}$ 时，$\nu=0$，此时对应卫星进入真正的地影.

上述四类力因素不仅是人造地球卫星运动中所承受的主要摄动源，对于其他类型的航天器(包括月球探测器、行星探测器)，在不同的运行过程中所承受的主要摄动源基本上也是这几类中的某几种. 这些摄动源不外乎保守力和耗散力，或引力和非引力.

对于保守力而言，航天器的能量不会有耗散，表现在椭圆轨道半长径 a 不会出现长期变化. 耗散力摄动则不同，航天器能量有耗损，轨道半长径和

偏心率都不断减小,即轨道变小变圆. 引力摄动与卫星的大小形状无关,而非引力摄动(如大气阻力和光压),它们是一面力,与承受这种力因素的截面有关,即与卫星的大小形状有关,这就涉及到卫星的姿态等问题. 这些还仅仅是各类摄动因素对航天器运行轨道影响的一个粗略的轮廓,具体细节(变化规律)还有待下两章建立各类摄动解时才有可能看得清楚,而这一点又是航天工程中必须充分了解的轨道信息,否则任何一个航天任务要圆满完成都是不可能的.

参考文献

[1] 刘林. 人造地球卫星轨道力学(第四章). 北京:高等教育出版社. 1992

[2] Liu Lin, Wang Xin. Hyperbolic Orbit and Its Variation of Deep-space Probe. Science in China (Series G). 2003, 46(2):191～197

第 4 章　摄动运动方程的解与中心天体的非球形引力摄动

根据前面两章的讨论,我们已经了解到卫星在轨运行(无论是人造地球卫星还是环绕其他探测目标天体运行的轨道器)对应的是一个受摄二体问题,并经常数变易法的处理,已将原受摄运动方程

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon \ ,$$

的求解问题转化为相应的摄动运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = f_\varepsilon(\sigma, t, \varepsilon) \ , \tag{4.1}$$

的求解问题. 这里 σ 表示一 6 维向量, 6 个分量即瞬时轨道根数,即无摄运动的 6 个积分常数. 右函数 f_ε 则是 6 维向量函数,有

$$|(f_\varepsilon)_i| = O(\varepsilon) \ll 1, \quad i = 1, 2, \cdots, 6. \tag{4.2}$$

原受摄运动问题的解由两部分组成,即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma, t), \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}(\sigma, t) \tag{4.3}$$

和

$$\sigma = \sigma(t) = \sigma(\sigma_0, t_0; t, \varepsilon), \quad \sigma(t_0) = \sigma_0. \tag{4.4}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式是已知的,即第二章中的(2.42)式和(2.48)式,它们对应于一个瞬时椭圆, σ_0 即 t_0 时的椭圆根数. 这一阐述对变化的双曲线轨道同样适用,但已不是卫星运动问题,只在本章有关内容中加以阐明. 现在剩下的问题是如何求解小参数方程(4.1),给出 $\sigma(t)$.

尽管方程(4.1)是复杂的非线性方程组,但其右端含小参数 ε,给出相应的小参数幂级数解并不困难,已有成熟的方法,即摄动法. 为了让读者深入了解摄动法,以便更好地学习后面要介绍的针对航天器在轨运行时所承受的各种摄动及相应摄动运动方程的具体解法,本章将首先对摄动法如何构造相应的小参数幂级数解以及摄动法的改进作必要的阐述.

§4.1 摄动运动方程的小参数幂级数解

1. 小参数幂级数解的构造——摄动法

如果第 6 个根数为 τ 或 $M_0=-n\tau$,则方程(4.1)的右函数 f_ε 的 6 个元素的量级均为 $O(\varepsilon)$,即满足(4.2)式. 然而,通常第六个根数是采用平近点角 M,那么上述右函数 f_ε 的第六个元素含有一项 $n=\sqrt{\mu a}^{\;-3/2}=O(\varepsilon^0)$,此时方程(4.1)应改写成下列形式

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f_0(a)+f_1(\sigma,t,\varepsilon),\tag{4.5}$$

$$f_0(a)=\delta n=O(\varepsilon^0),\tag{4.6}$$

$$|f_{1i}(\sigma,t,\varepsilon)|=O(\varepsilon),\quad i=1,2,\cdots,6,\tag{4.7}$$

其中

$$\delta=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}.\tag{4.8}$$

这里轨道根数 σ 的各元素排列次序为 a,e,i,Ω,w,M,δ 向量只有第 6 个元素为 1,对应 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$,δ 这一符号后面经常用到,不再说明.

方程(4.5)的小参数幂级数解形式为

$$\begin{cases}\sigma(t)=\sigma^{(0)}(t)+\Delta\sigma^{(1)}(t,\varepsilon)+\Delta\sigma^{(2)}(t,\varepsilon^2)+\cdots+\Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)+\cdots,\\ \Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)=\varepsilon^l\beta_l(t).\end{cases}\tag{4.9}$$

其中 $\sigma^{(0)}(t)$是对应 $\varepsilon=0$ 的无摄运动解,即

$$\sigma^{(0)}(t)=\sigma_0+\delta n_0(t-t_0),\tag{4.10}$$

或具体写成

$$\begin{cases}a^{(0)}(t)=a_0,\quad e^{(0)}(t)=e_0,\quad i^{(0)}(t)=i_0,\\ \Omega^{(0)}(t)=\Omega_0,\quad \omega^{(0)}(t)=\omega_0,\\ M^{(0)}(t)=M_0+n_0(t-t_0).\end{cases}\tag{4.11}$$

其中 $\sigma_0(a_0,e_0,i_0,\Omega_0,w_0,M_0)$是初始时刻 t_0 时的根数. 不难看出,对 ε 展开的小参数幂级数解(4.9),实际上就是解 $\sigma(t)$在参考轨道——无摄运动解 $\sigma^{(0)}(t)$处的展开. $\Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)$即 l 阶摄动变化项,简称 l 阶摄动项. 将形式解

(4.9)代入(4.5),得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sigma^{(0)}+\Delta\sigma^{(1)}+\Delta\sigma^{(2)}+\cdots+\Delta\sigma^{(l)}+\cdots]\\
&= f_0(a)+\frac{\partial f_0}{\partial a}[\Delta a^{(1)}+\Delta a^{(2)}+\cdots]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}[\Delta a^{(1)}+\cdots]^2+\cdots+\\
&\quad f_1(\sigma,t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}[\Delta\sigma_j^{(1)}+\Delta\sigma_j^{(2)}+\cdots]+\\
&\quad \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}[\Delta\sigma_j^{(1)}+\cdots][\Delta\sigma_k^{(1)}+\cdots]+\cdots.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

该式右端各项中出现的根数 σ 均应取参考轨道 $\sigma^{(0)}(t)$. 若级数(4.9)收敛,则可比较展开式(4.12)两端同次幂(ε^l)的系数,于是有

$$
\begin{cases}
\sigma^{(0)}(t)=\sigma_0+\delta n_0(t-t_0),\\
\Delta\sigma^{(1)}(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\delta\frac{\partial n}{\partial_a}\Delta a^{(1)}+f_1(\sigma,t,\varepsilon)\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t,\\
\Delta\sigma^{(2)}(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\delta\left(\frac{\partial n}{\partial a}\Delta a^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(\Delta a^{(1)})^2\right)+\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}\Delta\sigma_j^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t,\\
\cdots
\end{cases}
\tag{4.13}
$$

显然,这是一个有效的递推过程:由低阶摄动求高阶摄动,将 $f_1(\sigma,t,\varepsilon)$ 的具体形式代入后,即可给出解(4.9)中各阶摄动项的表达式,从而构造出摄动运动方程(4.5)的小参数幂级数解. 这一构造级数解的方法,即摄动法. 关于该小参数幂级数解的收敛性,实际上是常微分方程解析理论中的一个基本问题,早已获得证明,其收敛条件不再详述,对运动而言,收敛范围为

$$
s\sim\frac{1}{\varepsilon},\tag{4.14}
$$

这里 $s=n(t-t_0)$ 是运动弧段. 在 s 弧段外解仍可作解析延拓.

下面举一个简单的例子,以体现上述构造级数解的具体过程.

例:用摄动法求解二阶小参数方程

$$
\ddot{x}+\omega^2x=-\varepsilon x^3,\quad \varepsilon\ll 1.\tag{4.15}
$$

其中 $\omega>0$ 是实常数.

解:当 $\varepsilon=0$ 时,无摄运动方程

$$
\ddot{x}+\omega^2x=0
$$

的解为

$$
\begin{cases}
x=a\cos(\omega t+M_0),\\
\dot{x}=-\omega a\sin(\omega t+M_0).
\end{cases}
\tag{4.16}
$$

这里初始时刻 $t_0=0$,积分常数 a 和 M_0 相当于两个无摄根数.

当 $\varepsilon\neq 0$ 时,用常数变易法建立相应的摄动运动方程,有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial a}\dot{a}+\dfrac{\partial x}{\partial M_0}\dot{M}_0=0,\\[2ex] \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial a}\dot{a}+\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial M_0}\dot{M}_0=-\varepsilon x^3.\end{cases}\tag{4.17}$$

由此导出摄动运动方程如下:

$$\begin{cases}\dot{a}=\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^3\left(\dfrac{1}{4}\sin 2M+\dfrac{1}{8}\sin 4M\right)=(f_1)_a,\\[2ex] \dot{M}=\omega+\dot{M}_0=\omega+\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2M+\dfrac{1}{8}\cos 4M\right)=\omega+(f_1)_M.\end{cases}\tag{4.18}$$

其中积分常数 M_0 用 $M=M_0+\omega t$ 代替,方程(4.18)的小参数幂级数解即

$$\sigma(t)=\sigma^{(0)}(t)+\Delta\sigma^{(1)}(t)+\cdots.\tag{4.19}$$

其中

$$\sigma^{(0)}(t)=\begin{pmatrix}a_0\\ M_0+\omega t\end{pmatrix}.\tag{4.20}$$

因 $\omega=\text{const}$,于是有

$$\Delta\sigma^{(1)}(t)=\int_0^t[f_1(\sigma,t,\varepsilon)]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t.$$

积分得

$$\Delta a^{(1)}(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2}a^3\left(-\frac{1}{8}\cos 2M-\frac{1}{32}\cos 4M\right)\Bigg|_0^t,\tag{4.21}$$

$$\Delta M^{(1)}(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2}a^2\left(\frac{3}{8}\omega t+\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{32}\sin 4M\right)\Bigg|_0^t.\tag{4.22}$$

二阶摄动项的计算公式为

$$\begin{cases}\Delta a^{(2)}(t)=\displaystyle\int_0^t\left[\frac{\partial(f_1)_a}{\partial a}\Delta a^{(1)}+\frac{\partial(f_1)_a}{\partial M}\Delta M^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t,\\[2ex] \Delta M^{(2)}(t)=\displaystyle\int_0^t\left[\frac{\partial(f_1)_M}{\partial a}\Delta a^{(1)}+\frac{\partial(f_1)_M}{\partial M}\Delta M^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t.\end{cases}\tag{4.23}$$

将 $\Delta\sigma^{(1)}$ 代入后积分即得二阶摄动项 $\Delta a^{(2)}$ 和 $\Delta M^{(2)}$. 不难看出,由于$\Delta M^{(1)}$ 中含有 ωt 这种项,那么求 $\Delta\sigma^{(2)}(t)$时,将会出现下列形式的积分:

$$\int_0^t\begin{pmatrix}\sin kM\\ \cos kM\end{pmatrix}\omega t\,\mathrm{d}t,\quad k=0,1,\cdots.\tag{4.24}$$

此即混合项,亦称泊松(Poisson)项,正是摄动法在动力天文中用来求解摄动运动方程时应重视的问题.

如果摄动力是保守力,在有限时间间隔内,通常 a,e,i 仅有周期变化,Ω,ω 有随时间变化的长期变化,但比近点角 M(或 E,f)的变化缓慢得多,因为近点角 M 是直接反映运动天体绕中心天体运动的位置变化,而 Ω 和 ω 的变化仅仅是由摄动引起的,变化缓慢,故通常称 a,e,i 为"不变量",Ω 和 ω 为慢变量,而 M(或 E,f)为快变量. 在上述情况下,各阶摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)}$,$\Delta\sigma^{(2)}$,…中一般包含三种性质不同的项:长期项、长周期项和短周期项,长期项是$(t-t_0)$的线性函数或多项式,其系数仅是 a,e,i 的函数,长周期项是 Ω 和 ω 的三角函数,而短周期项则是 M 的周期函数(亦是三角函数). 对于短周期项,也会因某种通约而导致其转化为长周期项(后面有关内容中将会讨论它). 另外,还有形如$(t-t_0)\sin(At+B)$和$(t-t_0)\cos(At+B)$等形式的泊松项,即上一段最后提到的(4.24)型积分就可能导致这种混合项的出现.

从摄动法构造级数解的过程和例子中不难看出,即使摄动力为保守力,也会导致 $\varepsilon(t-t_0)$,$\varepsilon^2(t-t_0)^2$,…这种多项式型的长期项的出现,而且与 Ω 或 ω 有关的长周期项将会变为长期项或泊松项. 因为参考轨道取无摄运动解 $\sigma^{(0)}(t)$,那么将会有

$$\int_{t_0}^{t}\cos\omega_0\,\mathrm{d}t = \cos\omega_0(t-t_0)$$

等形式的出现,再按摄动解的构造过程(4.13)构造高阶摄动项,就可导致$(t-t_0)$,$(t-t_0)^2$,…这种类型的长期项或泊松项的出现. 而若积分时,ω 取为 $\bar{\omega}=\omega_0+\dot{\omega}(t-t_0)$,让其代替 $\omega^{(0)}(t)=\omega_0$,则上述积分变为

$$\int_{t_0}^{t}\cos\bar{\omega}\mathrm{d}t = \frac{\sin\bar{\omega}}{\dot{\omega}}\Big|_{t_0}^{t} = \frac{1}{\dot{\omega}}[\sin\bar{\omega}(t)-\sin\bar{\omega}(t_0)],$$

此为长周期项,从而不会出现上面提到的那些摄动项,这一点是相当重要的. 从定性角度看,当摄动力为保守力时,通常 a,e,i 是没有长期变化的,但按上述经典摄动法来构造摄动解,即会导致 a,e,i 出现长期变化,这就歪曲了轨道变化的性质. 即使从定量角度来看,虽然对于短弧而言无关紧要,但对于长弧情况,长周期项与长期项的差别就明显了,这将影响解的精度. 因此,选择参考轨道为无摄运动解的经典摄动法有明显的缺点,对它进行改进是完全有必要的.

本书重点介绍的是改进的摄动法,相应的参考轨道不再是最简单的无摄运动解 $\omega^{(0)}(t)$,而是一种长期进动椭圆,相应的轨道根数是带有长期变化的所谓平均根数$\bar{\sigma}(t)$,因此,它又不同于通常意义下的中间轨道,不会引起中间轨道理论中遇到的那些复杂性问题. 这种改进的实质,即将摄动变化项按其不同的性质区分开,以解除经典摄动法中所遇到的问题.

2. 改进的摄动法——平均根数法

在上一段中指出,求解摄动运动方程的经典摄动法有明显的缺点,对于较长的弧段,其定量计算精度不理想;如果取项太多则难以实现,即使在一定精度前提下,它也不能真实地反映轨道变化的规律. 导致这一状况的原因是参考轨道(即初始时刻的瞬时椭圆)太简单,因此有必要改进参考轨道的选择. 非线性力学中的一种渐进法,即平均法,其参考解就很有特点,本段要介绍的平均根数法就是将这种类型的参考解引入摄动法.

(1) 参考解的选择——平均根数法的引入

仍记

$$\sigma = (a, e, i, \Omega, \omega, M)^{\mathrm{T}} ,$$

相应的摄动运动对应的初值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = f_0(a) + f_\varepsilon(\sigma, t, \varepsilon), \\ \sigma_0 = \sigma(t_0). \end{cases} \tag{4.25}$$

其中

$$\begin{cases} f_0(a) = \delta n, \quad n = \sqrt{\mu}\, a^{-3/2}, \\ \delta = (0,0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{4.26}$$

$f_\varepsilon(\sigma, t, \varepsilon)$即对应摄动部分.

现将根数的摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)}, \Delta\sigma^{(2)}, \cdots$按其性质分解成长期变化、长周期变化和短周期变化三部分(其定义见上一段),分别记作 $\sigma_1(t-t_0), \cdots$, $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}, \cdots, \Delta\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}, \cdots$,而相应的方程(4.25)的小参数幂级数解的形式将改为

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(t) + \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)} + \cdots + \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)} + \cdots . \tag{4.27}$$

其中

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}^{(0)}(t) + \sigma_1(t-t_0) + \cdots , \tag{4.28}$$

$$\bar{\sigma}^{(0)}(t) = \bar{\sigma}_0 + \delta\bar{n}(t-t_0) , \tag{4.29}$$

$$\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}(t_0) = \sigma_0 - \left[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0) + \cdots + \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0) + \cdots\right]. \tag{4.30}$$

上述形式解表明,原摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)}(t), \Delta\sigma^{(2)}(t), \cdots$不仅按其变化性质分成不同部分,而且改为以摄动项表达的形式,即原

$$\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0), \quad \Delta\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) = \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)$$

在表达式(4.27)中只出现 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t), \cdots, \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)$,而 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0), \cdots, \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0), \cdots$已按(4.30)式从 σ_0 中消去. 这样的分解就使得$\bar{\sigma}(t)$只包含长期变化,故称其为平均轨道根数,简称平均根数,或平根数.

平均根数法就是采用 $\bar{\sigma}(t)$ 作为其参考解. 显然,$\bar{\sigma}(t)$ 对应的仍是一个

椭圆轨道，但它不再是一个对应历元 t_0 固定不变的椭圆，而是一个包含长期摄动的变化椭圆. 在保守力摄动下，它将是一个长期进动椭圆，即该椭圆轨道平面和拱线方向在空间转动. 因此，这种参考解又不同于通常意义下的中间轨道，原椭圆运动的各种几何关系式对它仍适用. 这就表明，平均根数法仍是建立在受摄二体问题基础上的一种摄动法，可以称其为改进的摄动法.

(2) 平均根数法——摄动解的构造

通常，方程(4.25)右函数的摄动部分 $f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon)$ 亦可展为小参数的幂级数，即

$$f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon) = f_1(\sigma,t,\varepsilon) + f_2(\sigma,t,\varepsilon^2) + \cdots + f_N(\sigma,t,\varepsilon^N) + \cdots, \tag{4.31}$$

其中

$$f_N = O(\varepsilon^N). \tag{4.32}$$

为了适应平均根数法中将摄动变化分解为长期项和周期项的需要，可利用第 2 章 § 2.2 中的方法，将 $f_N(\sigma,t,\varepsilon^N)$，$N=1,2,\cdots$分解成相应的三部分，即

$$f_N = f_{NC} + f_{NL} + f_{NS}, N = 1,2,\cdots. \tag{4.33}$$

这里第二个下标“C”、“L”和“S”各表示长期、长周期和短周期部分，即 f_{NC} 只与 a,e,i 有关，f_{NL}的周期取决于慢变量 Ω 和 ω 的变化，或是通约项(后面有关内容中会遇到)，f_{NS}的周期则取决于快变量 M. 要使平均根数法有效，则要求

$$f_{1L} = 0, \tag{4.34}$$

这在卫星(特别是低轨卫星)运动中是满足的.

将形式解(4.27)代入方程(4.25)，右函数在$\bar{\sigma}(t)$展开，得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\bar{\sigma}^{(0)}(t) + \sigma_1(t-t_0) + \sigma_2(t-t_0) + \cdots + \sigma_L^{(1)}(t) + \cdots + \sigma_S^{(1)}(t) + \cdots\right] \\
&= f_0(\bar{a}) + \frac{\partial f_0}{\partial a}\left[a_L^{(1)} + a_L^{(2)} + \cdots + a_S^{(1)} + a_S^{(2)} + \cdots\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}\left[a_L^{(1)} + \cdots + \right. \\
&\quad \left. a_S^{(1)} + \cdots\right]^2 + \cdots + f_1(\bar{\sigma},t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j}\left[\sigma_L^{(1)} + \cdots + \sigma_S^{(1)} + \cdots\right]_j + \\
&\quad \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma_j \partial \sigma_k}\left[\sigma_L^{(1)} + \cdots + \sigma_S^{(1)} + \cdots\right]_j\left[\sigma_L^{(1)} + \cdots + \sigma_S^{(1)} + \cdots\right]_k + \\
&\quad \cdots + f_2(\bar{\sigma},t,\varepsilon^2) + \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_2}{\partial \sigma}\left[\sigma_L^{(1)} + \cdots + \sigma_S^{(1)} + \cdots\right]_j + \cdots + \cdots + \\
&\quad f_N(\bar{\sigma},t,\varepsilon^N) + \cdots.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

该式右端出现的根数 σ 均为参考解$\bar{\sigma}(t)$. 若级数(4.27)收敛(该级数是前面(4.9)的重新组合,收敛性已有说明),则比较展开式(4.35)两端同次幂(ε^N)的系数,并积分,得

$$\bar{\sigma}^{(0)}(t)=\int_{t_0}^{t} f_0(\bar{a})\mathrm{d}t=\sigma^{(0)}+\delta\bar{n}(t-t_0), \tag{4.36}$$

$$\begin{cases}\sigma_1(t-t_0)=\int_{t_0}^{t}[f_{1\mathrm{C}}]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)=\int^{t}\left[\delta\dfrac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{S}}^{(1)}+f_{1\mathrm{S}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\end{cases} \tag{4.37}$$

$$\begin{cases}\sigma_2(t-t_0)=\int_{t_0}^{t}\left[\delta\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{C}}^2+\left(\sum_j\dfrac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{l}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})j\right)_{\mathrm{C}}+f_{2\mathrm{c}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\int^{t}\left[\delta\dfrac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{L}}^{(2)}+\delta\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{L}}^2+\left(\sum_j\dfrac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}+f_{2\mathrm{L}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=\int^{t}\left[\delta\dfrac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{S}}^{(2)}+\delta\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{S}}^2+\left(\sum_j\dfrac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{S}}+f_{2\mathrm{S}}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,\\ \cdots\end{cases} \tag{4.38}$$

上列各式右端被积函数中出现的$(A)_{\mathrm{C}}$,$(A)_{\mathrm{L}}$,$(A)_{\mathrm{S}}$ 分别表示括号中函数 A 的长期、长周期和短周期部分. 例如

$$A=\cos f+\cos(f+\omega)=\cos f+\cos f\ \cos\omega-\sin f\ \sin\omega, \tag{4.39}$$

利用第二章 §2.2 中的方法,即可分解为

$$\begin{cases}A=(A)_{\mathrm{C}}+(A)_{\mathrm{L}}+(A)_{\mathrm{S}},\\ (A)_{\mathrm{C}}=-e,\\ (A)_{\mathrm{L}}=-e\ \cos\omega,\\ (A)_{\mathrm{S}}=(\cos f+e)+(\cos f+e)\cos\omega-\sin f\ \cos\omega.\end{cases} \tag{4.40}$$

容易证明,当 $f_{1\mathrm{L}}=0$ 时,有 $a_{\mathrm{L}}{}^{(1)}=0$,详见下一段. 因此,只要满足条件(4.34),那么平均根数法对应的上述递推过程是有效的,即由低阶摄动求高阶摄动. 但有几点要说明,即

1) 对于保守力摄动,a,e,i 的变化无长期项,那么在 Ω,ω,M 的变化中,长期项将是$(t-t_0)$的线性函数,因为它们的长期项 σ_1,σ_2,… 对应的被积函数都是 a,e,i 的函数,且积分时取 $\bar{a}=\bar{a}_0$,$\bar{e}=\bar{e}_0$,$\bar{i}=\bar{i}_0$. 如果是耗散力,则解的结构要复杂些,例如长期项不再是$(t-t_0)$的线性函数. 但在一般情况下(即耗散力相对较小,是与 ε^2 同阶的二阶小量,甚至更小),它并不影响级数解的构造. 下面在类似的问题中不再重复说明这一点.

2) 与经典摄动法不同,参考解$\bar{\sigma}(t)$实际上是在递推过程中形成的,但

它并不影响上述级数解的构造. 例如,对于保守力摄动,有

$$\int \cos\bar{\omega}\mathrm{d}t = \frac{\sin\bar{\omega}}{(\omega_1 + \omega_2 + \cdots)} .$$

其中 ω_1,ω_2,…是 ω 变化的各阶长期项系数,它们都是 $\bar{a}$,$\bar{e}$,$\bar{i}$ 的函数,积分时不必知道它的具体形式,只是在导出结果后引用该公式计算时才可能用到.

3) 对于长周期项,其变化取决于慢变量 Ω 和 ω,例如 ω,因有

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \omega_1(t - t_0) + \cdots ,$$

其中 $\omega_1 = O(\varepsilon)$是一阶小量,不像 M 的变化速度那么快,即

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + \bar{n}_0(t - t_0) + M_1(t - t_0) + \cdots ,$$

其中 $\bar{n}_0 = O(\varepsilon^0)$. 因此,若 $f_{2\mathrm{L}} = \varepsilon^2\cos\omega$,将有

$$\int^t f_{2\mathrm{L}}\mathrm{d}t = \int^t \varepsilon^2 \cos\bar{\omega}\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon^2 \sin\bar{\omega}}{\omega_1 + \cdots} = A \sin\bar{\omega} .$$

这里 $A = O(\varepsilon)$. 积分结果给出的是一阶长周期项,而不是二阶长周期项,这就是长周期项积分的降阶现象,所以(4.38)式的长周期部分左端记为 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$而不是 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$. 实际上,在不太长的间隔内,$\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$对应的 $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)} = \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) - \sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)$与二阶长期项 $\sigma_2(t - t_0)$相当(后面有关章节中将会用到这一点),在经典摄动法中就是给出 $\sigma_2(t - t_0)$这样的结果,而在平均根数法中却以 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$的形式出现,它保持了周期项的本质,比较合理. 由 $f_{3\mathrm{L}}$ 积分给出 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$,依此类推. 但这又引起另一问题,即由(4.38)式计算 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$时,右端被积函数中不仅用到 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$,还用到 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$. 关于这一点,如果仔细分析一下,即可知道,它并不影响解的构造,后面 §4.2 中将要具体说明.

(3) $a_{\mathrm{L}}^{(1)} = 0$ 的证明

考虑保守了摄动,它对应一 Hamilton 系统. 受摄二体问题对应的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2}v^2 - V , \tag{4.41}$$

其中 V 包含中心天体的质点引力位和摄动位,由于摄动力是保守力,则有

$$V = \frac{\mu}{r} + R(r,\varepsilon) , \tag{4.42}$$

$\mu = GM$,R 即相应的摄动位或摄动函数. 这里可按定常情况考虑,对于非定常情况,可以用正则扩充的方法转化为定常情况. 对于受摄二体问题,将活力公式,即

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{4.43}$$

代入(4.41)式得

$$H = -\frac{\mu}{2a} - R\,. \tag{4.44}$$

存在一积分(能量积分)

$$\frac{\mu}{2a} + R = C\,, \tag{4.45}$$

该积分在参考解$\bar{\sigma}(t)$展开,并将不同性质的项分开,有“常数项”:

$$\frac{\mu}{2a} + (R_{1C} + R_{2C} + \cdots) = C\,. \tag{4.46}$$

一阶长周期项:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_L^{(1)}(t)] + R_{1L} = 0\,. \tag{4.47}$$

一阶短周期项:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_S^{(1)}(t)] + R_{1S} = 0\,. \tag{4.48}$$

由于 $f_{1L}=0$,而摄动运动方程的这一 f_{1L} 又是由 $\partial R_{1L}/\partial \sigma$ 形成的,那么必有 $R_{1L}=0$,因此

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_L^{(1)}] = 0\,. \tag{4.49}$$

显然,$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)\neq 0$,故证得

$$a_L^{(1)}(t) = 0\,. \tag{4.50}$$

(4) 举例

这里仍用求解上一段中提出的二阶小参数微分方程(4.15)作为一例,一是为了让读者初步了解如何用平均根数法构造摄动解,同时也可与经典摄动法作一简单比较.方程为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\varepsilon x^3\,,$$

其中 $\varepsilon \ll 1$,$\omega > 0$ 是实常数.上一段已给出无摄运动解,即

$$\begin{cases} x = a\cos M, \\ \dot{x} = -\omega a \sin M, \\ M = M_0 + \omega t\,. \end{cases} \tag{4.51}$$

相应的摄动运动方程为

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\varepsilon}{\omega}a^3\left(\frac{1}{4}\sin 2M + \frac{1}{8}\sin 4M\right), \\ \dot{M} = \omega + \frac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2M + \frac{1}{8}\cos 4M\right). \end{cases} \tag{4.52}$$

现用平均根数法解该方程,其形式改写成

$$\begin{cases}\dot{a}=(f_{1S})_a,\\ \dot{M}=(f_0)_M+(f_{1C})_M+(f_{1S})_M,\end{cases}\tag{4.53}$$

其中

$$(f_{1S})_a=\frac{\varepsilon}{\omega}a^3\left(\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{8}\sin 4M\right),\tag{4.54}$$

$$\begin{cases}(f_0)_M=\omega=\text{const},\\ (f_{1C})_M=\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\dfrac{3}{8}\right),\\ (f_{1S})_M=\dfrac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\dfrac{1}{2}\cos 2M+\dfrac{1}{8}\cos 4M\right).\end{cases}\tag{4.55}$$

按平均根数法构造级数解的过程(4.36)～(4.38)式，首先有

$$\begin{cases}\bar{a}^{(0)}(t)=\bar{a}_0,\\ \overline{M}^{(0)}(t)=\overline{M}_0+\omega(t-t_0).\end{cases}\tag{4.56}$$

由此积分(4.37)式给出

$$\begin{cases}a_1(t-t_0)=0,\\ M_1(t-t_0)=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}\bar{a}_0^2\left(\dfrac{3}{8}\right)\omega(t-t_0),\end{cases}\tag{4.57}$$

$$\begin{cases}a_S^{(1)}(t)=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)}\bar{a}_0^3\left(-\dfrac{1}{8}\cos 2\overline{M}-\dfrac{1}{32}\cos 4\overline{M}\right),\\ M_S^{(1)}(t)=\dfrac{\varepsilon}{\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)}\bar{a}_0^3\left(\dfrac{1}{4}\sin 2M+\dfrac{1}{32}\sin 4M\right).\end{cases}\tag{4.58}$$

由于 $M_1/\omega=O(\varepsilon)$，那么 $a_S^{(1)}(t)$ 和 $M_S^{(1)}(t)$ 右端的分母 $\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)$，在精确到一阶周期项时，可直接写成 ω^2.

给出 $a_S^{(1)}$ 和 $M_S^{(1)}$ 后，即可由(4.38)式的长期项计算公式给出 a 和 M 的二阶长期项，有

$$\begin{cases}a_2(t-t_0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial(f_{1S})_a}{\partial a}a_S^{(1)}+\frac{\partial(f_{1S})_a}{\partial M}M_S^{(1)}\right]_C\mathrm{d}t=0,\\ M_2(t-t_0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial(f_{1S})_M}{\partial a}a_S^{(1)}+\frac{\partial(f_{1S})_M}{\partial M}M_S^{(1)}\right]_C\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad=\left(\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}\bar{a}_0^2\right)^2\left(-\dfrac{51}{256}\right)\omega(t-t_0),\end{cases}\tag{4.59}$$

二阶短周期项不再给出，而该问题只有一个角变量 M，无慢变量 Ω,ω，故不出现长周期项.

从上列各阶摄动项的表达式可以看出，解的结构比上一章摄动法给出的简单，而且不会出现形如(4.24)式的积分，即不会导致泊松项(或称混合

项)的出项,该小参数方程(4.15)解的形式变得较简单,即

$$\begin{cases} a(t) = \bar{a}_0 + a_S^{(1)}(t) + \cdots, \\ M(t) = \overline{M}_0 + \omega + (M_1 + M_2 + \cdots)(t - t_0) + M_S^{(1)}(t) + \cdots. \end{cases} \tag{4.60}$$

平均根数法首先由 Kozai[1]成功地用于构造人造地球卫星在地球非球形引力(主要带谐项 J_2,J_3 和 J_4)摄动影响下的分析解. 因此,针对各类航天器(特别是卫星型航天器)的运动状况和太阳系各大行星及月球等天体的形状和质量分布的特征,本章将重点介绍平均根数法如何构造卫星在中心天体非球形引力场中运动的轨道分析解,从而即可让读者进一步了解平均根数法的具体细节,又能给出卫星椭圆轨道变化的主要特征,为轨道设计提供必要的依据. 最后还对一类探测器在接近目标天体或近距离飞越目标天体时的双曲线轨道变化进行讨论,构造相应的轨道摄动解.

§4.2 中心天体的非球形引力位

对于质点引力场,空间任何一点的引力位由下式表达:

$$V_0 = \frac{GM}{r}. \tag{4.61}$$

其中 G 是引力常数,M 是质点的质量,r 是空间测量点到该质点的距离. 显然,$V_0 = V_0(r)$是空间点的函数,亦称位函数. 相应的引力加速度为

$$\boldsymbol{F}_0 = \mathrm{grad}V_0 = -\frac{GM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{4.62}$$

如果各大行星是质量分布均匀的球形天体,则其引力场等价于质点引力场,相当于质量全部集中在质心上. 但是,无论是地球,还是其他大行星或是月球,质量分布并非均匀,而且形状也不是球形,最好的近似也只能看成一个扁球体(旋转椭球体),相应的动力学扁率状况如下:

地球:$J_2 = O(10^{-3})$, 月球:$J_2 = O(10^{-4})$,

火星:$J_2 = O(10^{-3})$, 木星:$J_2 = O(10^{-2})$,…

不仅如此,由于卫星(特别是低轨卫星)离中心天体较近,相应的非球形引力特征更加显著,因此必须给出一般天体的非球形引力位.

1. 引力位函数的一般式

由于大行星和月球等均有自转,又并非旋转对称体,故空间任一固定点的引力位都要随时间变化,为此必须在星固坐标系 $O-XYZ$ 中讨论这一问

题. 该坐标系在 §1.1 中曾提出过，即坐标原点在中心天体质心上，XY 坐标面是该天体的赤道面，X 轴是赤道面上的任一固定方向（对于地球即取为格林尼治子午线方向）. 采用球坐标（r,λ_G,φ），r 是向径，即空间点到中心天体质心（坐标原点）的距离，λ_G,φ 是经纬度，则引力位函数（对中心天体外任一点）的一般表达式如下：

$$V=\frac{GM}{r}\left[1+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\mu)(C_{lm}\cos m\lambda_G+S_{lm}\sin m\lambda_G)\right]. \tag{4.63}$$

此即球谐展开式，$P_{lm}(\mu)$ 是球谐函数. 其中 a_e 是中心天体的赤道半径（确切地说是相应的参考椭球体的赤道半径），$\mu=\sin\varphi$，谐系数 C_{lm} 和 S_{lm} 是与中心天体的形状和密度分布有关的常数. 其值的大小即反映了中心天体与等密度球体之间的差异，亦即反映了中心天体形状不规则（即与球形的差别）和密度不均匀的程度.

(4.63)式表明，一般天体的引力位函数与质点引力位函数之间的差别即该式右端括号内的第二项，此即非球形引力位部分，对卫星运动而言，亦称摄动函数，有

$$\begin{aligned}R&=\Delta V=V-V_0\\&=\frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\mu)[C_{lm}\cos m\lambda_G+S_{lm}\sin m\lambda_G].\end{aligned} \tag{4.64}$$

2. 非球形引力位的常用形式及有关参数

(1) 带谐项和田谐项

由(4.64)式可以看出，非球形引力位部分 ΔV 包含性质完全不同的两种球谐项：一种对应 $m=0$，此时 $\sin m\lambda_G=0$，$\cos m\lambda_G=1$，这种项显然与经度 λ_G 无关，称为带谐项，记作 ΔV_1；而另一种项则对应 $m=1,2,\cdots,l$，与经度 λ_G 有关，称为田谐项，记作 ΔV_2. 其中 $m=l$ 对应的 C_{ll} 和 S_{ll} 又称扇谐系数，相应的项则称为扇谐项，本书将不再从 ΔV_2 中区分出，统称田谐项. ΔV_1 和 ΔV_2 分别由下式表达：

$$\Delta V_1=\frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}C_{n,0}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_l(\sin\varphi), \tag{4.65}$$

$$\Delta V_2=\frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\sin\varphi)[C_{lm}\cos m\lambda_G+S_{lm}\sin m\lambda_G]. \tag{4.66}$$

对于带谐项，又常采用下列形式：

$$J_l = -C_{l,0}\ ,\tag{4.67}$$

$$\Delta V_1 = -\frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty} J_l\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_l(\sin\varphi)\ .\tag{4.68}$$

与带谐项类似,田谐项的另一种表达式为

$$\Delta V_2 = \frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l} J_{lm}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\sin\varphi)\cos m\bar{\lambda}\ ,\tag{4.69}$$

其中

$$\begin{cases} J_{lm} = (C_{lm}^2 + S_{lm}^2)^{1/2}, \\ m\lambda_{lm} = \arctan(S_{lm}/C_{lm}), \\ \bar{\lambda} = \lambda_G - \lambda_{lm}\ . \end{cases}\tag{4.70}$$

对于卫星运动问题,相应空间坐标系采用的是中心天体质心赤道坐标系($O-xyz$),除天体赤道面摆动等因素外,它与星固坐标系之间的差别是 x 轴方向不同,空间坐标系的 x 轴是指向空间一固定方向,如春分点方向. 那么,对于空间球坐标系($O-r\lambda\varphi$)而言,两者之间有如下关系:

$$\lambda = \lambda_G + S_G\ .\tag{4.71}$$

对地球而言,S_G 即格林尼治恒星时,对其他大行星或月球,也有类似的含义,S_G 即反映中心天体的自转. 由此从(4.65)或(4.66)式不难看出,带谐项实际上反映了中心天体非球形引力位的旋转对称部分,中心天体的自转不改变空间固定点的引力大小,就卫星运动而言,相应的摄动位不显含 t,对应一个定常问题. 而田谐项与带谐项有本质的差别,它反映的是中心天体非球形引力位的非旋转对称部分,由 $S_G=S_G(t)$ 导致中心天体的自转将改变空间固定点的引力大小. 就卫星运动而言,该项的影响对应一个非定常问题.

(2) 关于中心天体的引力场常数

(4.65)和(4.66)式中出现的球谐函数 $P_{lm}(\mu)$ 称为缔合勒让德多项式,而 $P_l(\mu)=P_{l0}(\mu)$ 则称为勒让德多项式,其定义如下:

$$P_{lm}(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l(\mu)}{\mathrm{d}\mu^m}\ ,\tag{4.72}$$

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l\,!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\mu^l}[(\mu^2-1)^l]\ .\tag{4.73}$$

$P_{lm}(\mu)$ 还有递推算法,这在各种有关特殊函数的书籍中都有阐述,本书将不再重复. 除此之外,$P_{lm}(\mu)$ 的模 N_{lm} 是一个很重要的值,有

$$[N_{lm}]^2 = \int_{-1}^{1}[P_{lm}(\mu)]^2\mathrm{d}\mu = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)\,!}{(l-m)\,!}.\tag{4.74}$$

如果直接采用(4.64)式表达非球形引力位,那么 $P_{lm}(\mu)$ 对不同的阶次

l 和 m，其值相差较大，而相应的谐系数值也因此起伏较大. 为了避免这种情况，通常采用归一化的表达式，即根据 $P_{lm}(\mu)$ 模 N_{lm} 的大小引进$\overline{P}_{lm}(\mu)$，定义如下：

$$\overline{P}_{lm}(\mu) = P_{lm}(\mu)/N_{lm}\ , \tag{4.75}$$

这里的符号 N_{lm} 与(4.74)式给出的模稍有差别，表达式为

$$N_{lm} = \left[\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(1+\delta)(l-m)!}\right]^{1/2}. \tag{4.76}$$

其中 δ 的定义如下：

$$\delta = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases} \tag{4.77}$$

由此定义，非球形引力位 ΔV 的归一化形式变为

$$\Delta V = \frac{GM}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l \overline{P}_{lm}(\sin\varphi)[\overline{C}_{lm}\cos m\lambda_G + \overline{S}_{lm}\sin m\lambda_G]\ , \tag{4.78}$$

其中归一化的谐系数为

$$\overline{C}_{lm} = C_{lm}N_{lm}\ ,\quad \overline{S}_{lm} = S_{lm}N_{lm}\ . \tag{4.79}$$

上述非球形引力位就反映了一个天体的真实引力场，其中 GM，a_e 和 $\overline{C}_{lm}$，$\overline{S}_{lm}$ 就是一个天体一套自洽的引力场参数，它们分别称为该天体的质心引力常数(如地心引力常数、月心引力常数等)，参考椭球体赤道半径和引力场谐系数. 在本书附录中我们将给出地球引力场较普遍采用的两套引力场参数 JGM－3 和 WGS84 以及一套较新的月球引力场参数 LP75G 和 LP175，以供读者参考，同时也为后面阐述有关内容提供依据.

下面将以人造卫星在地球非球形引力场中的运动为代表，具体阐述平均根数法的应用，给出相应的轨道分析解，并在有关内容中同时介绍构造其他类型航天器轨道分析解时应注意的问题.

在构造人造地球卫星轨道分析解时，为了公式表达的方便和对一些关键量进行量级分析的需要，习惯采用一种标准化的计算单位，即采用给定的地球引力场参数的有关量作为质量、长度和时间单位：[M]，[L]，[T]，有

$$\begin{cases} [M] = \text{地球质量 } M, \\ [L] = \text{地球参考椭球赤道半径 } a_e, \\ [T] = [a_e^3/GM] \approx 806^s.81038\cdots. \end{cases} \tag{4.80}$$

在此单位系统中，非球形引力位表达式中的引力常数 $\mu=GM=1$，$a_e=1$. 在本章下面的有关内容和其他章节中，如果对量纲没有具体说明，均为上述标准单位，这种对计算单位的处理，亦可称为“无量纲化”. 在讨论其他类型航

天器的运动时,对计算单位亦有类似的处理.

§4.3 中心天体非球形引力摄动(Ⅰ)——主要带谐项摄动

针对地球非球形引力场的特征,主要带谐项是指 J_2,J_3 和 J_4 三项,对于其他大行星、月球或某些值得探测的小行星和自然卫星等,未必是这三项,但对于所有有自转的天体,J_2 对应的扁率项确实是主要的,它反映了旋转扁球体这一主要特征,至少符合太阳系的状况.当然,对于快自转天体和慢自转天体,动力学扁率因子 J_2 与其他球谐项的相对大小是有明显差别的.例如若将 J_2 作为一阶小量,那么,对于地球,其他球谐项的归一化系数将为二阶小量,甚至更小;而对于月球,由于自转慢,相应的 J_2 较小,其他球谐项归一化系数与其相差不太大(见附录月球引力场参数).关于这一点,将在后面有关内容的阐述中加以区别.

J_2,J_3,J_4 三项是地球引力场球谐展开式中的低阶带谐项(或长波项),对于精度要求不高的问题,非球形引力位的修正取此三项就足够了.更重要的是,通过对这三项的讨论,可以较完整地体现平均根数的定义和平均根数法构造摄动解的细节.在上述标准单位中,仅考虑 J_2,J_3 和 J_4 三项,(4.68)式变为下列形式:

$$\Delta V_1 = -\sum_{l=2}^{4} \frac{J_l}{r^{l+1}} P_l(\sin\varphi)\,. \tag{4.81}$$

讨论人造地球卫星在相应的地球引力场中的运动时,ΔV_1 即摄动函数 R.

1. 摄动函数的分解

根据 $P_l(\sin\varphi)$ 的定义(4.73)式,摄动函数表达式(4.81)的具体形式为

$$R = -\frac{J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) - \frac{J_3}{r^4}\left(\frac{5}{2}\sin^3\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi\right) - \frac{J_4}{r^5}\left(\frac{35}{8}\sin^4\varphi - \frac{15}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{8}\right)\,. \tag{4.82}$$

为了与已有习惯一致,引入

$$A_2 = \frac{3}{2}J_2\,,\quad A_3 = -J_3\,,\quad A_4 = -\frac{35}{8}J_4\,, \tag{4.83}$$

并以

$$\sin\varphi = \sin i\ \sin(f+\omega) \tag{4.84}$$

代入(4.82)式得

$$R = \frac{A_2}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)+\frac{1}{2}\sin^2 i\ \cos 2(f+\omega)\right]+$$
$$\frac{A_3}{a^4}\left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin i\left[\left(\frac{15}{8}\sin^2 i-\frac{3}{2}\right)\sin(f+\omega)-\frac{5}{8}\sin^2 i\ \sin 3(f+\right.$$
$$\left.\omega)\right]+\frac{A_4}{a^5}\left(\frac{a}{r}\right)^5\left[\left(\frac{3}{35}-\frac{3}{7}\sin^2 i+\frac{3}{8}\sin^4 i\right)+\right.$$
$$\left.\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)\sin^2 i\ \cos 2(f+\omega)+\frac{1}{8}\sin^4 i\ \cos 4(f+\omega)\right]. \tag{4.85}$$

从(4.85)式可知，摄动函数 R 不显含 t 也不含 Ω，这也是所有带谐项的特征.

仅考虑上述三项，相应的摄动运动方程(4.25)即

$$\frac{d\sigma}{dt} = f_0(a) + f_1(\sigma, J_2) + f_2(\sigma, J_3, J_4)\ , \tag{4.86}$$

这里取 $\varepsilon = J_2, J_3, J_4 = O(\varepsilon^2)$. 将摄动函数 R 代入摄动运动方程(3.75)式即可给出(4.86)式的具体形式. 但为了用平均根数法构造级数解，还需要将 f_1, f_2 分解成 f_{kC}, f_{kL} 和 $f_{kS}(k=1,2)$，既然如此，先对 R 进行分解似乎更简单些. 首先对卫星运动(即时间 t 或平近点角 M)求平均值，可将短周期项分离出，剩下的项中关于 ω 的周期函数部分即长周期项，这样便将 R 分解成五部分

$$R = R_C + R_L + R_S = R_{1C} + R_{2C} + R_{2L} + R_{1S} + R_{2S}\ . \tag{4.87}$$

其中一、二阶长期部分 $R_C = R_{1C}(J_2) + R_{2C}(J_4)$ 是 a, e, i 的函数，$R_{1L}=0$，$R_{2L}(J_3, J_4)$ 是长周期部分，而 $R_S = R_{1S}(J_2) + R_{2S}(J_3, J_4)$ 是一、二阶短周期部分. 从 R 的表达式(4.85)可以看出，分解过程中仅涉及形如

$$\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf,\quad \left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf\ ,$$

这类函数的求平均值问题. 利用第二章 §2.2 给出的方法或直接引用附录中的结果：

$$\begin{cases}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} = (1-e)^{-3/2}, \quad \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f} = 0, \\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos f} = e(1-e^2)^{-5/2}, \quad \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos 3f} = 0, \\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5} = \left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2},\end{cases} \tag{4.88}$$
$$\begin{cases}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 2f} = \frac{3}{4}e^2(1-e^2)^{-7/2}, \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 4f} = 0, \\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf} = 0\ .\end{cases}$$

便可得到(4.87)式中5个部分的具体形式如下：

$$R_{1C}=\frac{A_2}{a^3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)(1-e^2)^{-3/2}\ , \tag{4.89}$$

$$R_{2C}=\frac{A_4}{a^5}\left(\frac{3}{35}-\frac{3}{7}\sin^2 i+\frac{3}{8}\sin^4 i\right)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}\ , \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}R_{2L}=&-\frac{3}{4}\frac{A_3}{a^4}\sin i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)(1-e^2)^{-5/2}e\ \sin\omega+\\&\frac{3}{4}\frac{A_4}{a^5}\sin^2 i\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)(1-e^2)^{-7/2}e^2\ \cos 2\omega\ ,\end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}R_{1S}=&\frac{A_2}{a^3}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.\\&\left.\frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\ \cos 2(f+\omega)\right\}\ ,\end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}R_{2S}=&-\frac{A_3}{a^4}\left\{\frac{3}{4}\sin i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\ \sin(f+\omega)-\right.\right.\\&\left.\left.(1-e^2)^{-5/2}e\ \sin\omega\right]+\frac{5}{8}\sin^3\ i\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin 3(f+\omega)\right\}+\\&\frac{A_4}{a^5}\left\{\left(\frac{3}{35}-\frac{3}{7}\sin^2 i+\frac{3}{8}\sin^4 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^5-\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}\right]+\right.\\&\sin^2 i\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^5\cos 2(f+\omega)-\frac{3}{4}(1-e^2)^{-7/2}e^2\cos 2\omega\right]+\\&\left.\frac{1}{8}\sin^4 i\left(\frac{a}{r}\right)^5\cos 4(f+\omega)\right\}\ .\end{aligned} \tag{4.93}$$

对于一阶解，二阶短周期部分 R_{2S} 是不需要的.

将 R 的各个部分代入摄动运动方程(3.75)，就可分别给出方程(4.86)右函数的具体形式，即

$$f_0=(0,0,0,0,0,n)^{\mathrm{T}}\ , \tag{4.94}$$

$$f_{1C}=(0,0,0,(f_{1C})_\Omega,(f_{1C})_\omega,(f_{1C})_M)^{\mathrm{T}}\ , \tag{4.95}$$

$$f_{1S}=((f_{1S})_a,(f_{1S})_e,(f_{1S})_i,(f_{1S})_\Omega,(f_{1S})_\omega,(f_{1S})_M)^{\mathrm{T}}\ , \tag{4.96}$$

$$f_{2C}=(0,0,0,(f_{2C})_\Omega,(f_{2C})_\omega,(f_{2C})_M)^{\mathrm{T}}\ , \tag{4.97}$$

$$f_{2L}=(0,(f_{2L})_e,(f_{2L})_i,(f_{2L})_\Omega,(f_{2L})_\omega,(f_{2L})_M)^{\mathrm{T}}\ . \tag{4.98}$$

其中

$$(f_{1C})_\Omega=-\frac{A_2}{p^2}n\ \cos i\ , \tag{4.99}$$

$$(f_{1C})_\omega=\frac{A_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\ , \tag{4.100}$$

$$(f_{1C})_M = \frac{A_2}{p^2} n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\ , \tag{4.101}$$

$$(f_{1S})_a = \frac{2nA_2}{a}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\left\{-\frac{e\sin f}{1-e^2}\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right]-\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)\right\}\ , \tag{4.102}$$

$$(f_{1S})_e = \frac{nA_2}{a^2 e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\left\{-e\sin f\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\right.\right.$$
$$\left.\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right]-(1-e^2)\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)+$$
$$\left.\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)\right\}\ , \tag{4.103}$$

$$(f_{1S})_i = -\frac{nA_2}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\sin 2i\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2(f+\omega)\ , \tag{4.104}$$

$$(f_{1S})_\Omega = -\frac{nA_2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\cos i\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]-\right.$$
$$\left.\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\}\ , \tag{4.105}$$

$$(f_{1S})_\omega = \frac{nA_2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\cos^2 i\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]-\right.$$
$$\left.\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\}+\frac{nA_2}{a^2 e}\sqrt{1-e^2}\left\{\left(1-\right.\right.$$
$$\left.\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f-e(1-e^2)^{-5/2}\right]+$$
$$\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f$$
$$\cos 2(f+\omega)-\frac{\sin^2 i}{1-e^2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin f\sin 2(f+\omega)+\right.$$
$$\left.\left.(1-e^2)\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin f\sin 2(f+\omega)\right]\right\}\ , \tag{4.106}$$

$$(f_{1S})_M = \left(-\frac{3n}{2a}\right)a_S^{(1)}+\frac{2nA_2}{a^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.$$
$$\left.\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\}-$$
$$\frac{nA_2}{a^2 e}\sqrt{1-e^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f-e(1-e^2)^{-5/2}\right]+\right.$$

$$\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\ \cos 2(f+\omega)-$$

$$\frac{\sin^2 i}{1-e^2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin f\ \sin 2(f+\omega)+\right.$$

$$\left.\left.(1-e^2)\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin f\sin 2(f+\omega)\right]\right\}, \tag{4.107}$$

$$(f_{2C})_\Omega=-\frac{A_4}{p^4}n\cos i\left[\left(\frac{6}{7}+\frac{9}{7}e^2\right)-\sin^2 i\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}e^2\right)\right], \tag{4.108}$$

$$(f_{2C})_\omega=\frac{A_4}{p^4}n\left[\left(\frac{12}{7}+\frac{27}{14}e^2\right)-\sin^2 i\left(\frac{93}{14}+\frac{27}{4}e^2\right)+\sin^4 i\left(\frac{21}{4}+\frac{81}{16}e^2\right)\right], \tag{4.109}$$

$$(f_{2C})_M=\frac{A_4}{p^4}n\sqrt{1-e^2}\left[e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{45}{14}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right], \tag{4.110}$$

$$(f_{2L})_e=-\frac{1-e^2}{e}\tan i(f_{2L})_i, \tag{4.111}$$

$$(f_{2L})_i=-\frac{A_3}{p^3}n\left[\frac{3}{4}\cos i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\right]e\cos\omega-$$

$$\frac{A_4}{p^4}n\left[\sin 2i\left(\frac{9}{28}-\frac{3}{8}\sin^2 i\right)\right]e^2\sin 2\omega, \tag{4.112}$$

$$(f_{2L})_\Omega=-\frac{A_3}{p^3}n\left[\frac{3}{8}\cot i(4-15\sin^2 i)\right]e\sin\omega+$$

$$\frac{A_4}{p^4}n\left[\cos i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right]e^2\cos 2\omega, \tag{4.113}$$

$$(f_{2L})_\omega=-\frac{A_3}{p^3}n\frac{1}{e\sin i}\left[\frac{3}{8}\sin^2 i(4-5\sin^2 i)-\frac{3}{8}e^2(4-35\sin^2 i+\right.$$

$$\left.35\sin^4 i)\right]\sin\omega+\frac{A_4}{p^4}n\left[\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)-\right.$$

$$\left.e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{15}{4}\sin^2 i+\frac{27}{8}\sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega, \tag{4.114}$$

$$(f_{2L})_M=\frac{A_3}{p^3}n\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sin i}\left[\frac{3}{8}\sin^2 i(4-5\sin^2 i)(1-4e^2)\right]\sin\omega-$$

$$\frac{A_4}{p^4}n\sqrt{1-e^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\right]\cos 2\omega. \tag{4.115}$$

以上各式中的 n **和** p **分别为** $a^{-\frac{3}{2}}$ **和** $a(1-e^2)$**，不要与某些公式中的整数取值相混淆. 推导中涉及的** $\partial f/\partial\sigma$ **和** $\partial\left(\frac{a}{r}\right)/\partial\sigma$**，在第二章 § 2.2 中给出.**

2. J_2, J_3, J_4 三项摄动的一阶解

将上述右函数 f_{1C}, f_{1S}, f_{2C} 和 f_{2L} 分别代入(4.37)～(4.38)式,即可给出一阶解所需要的个摄动项,下面分别列出.

(1) 一阶长期项 $\boldsymbol{\sigma}_1(t-t_0)$

$$a_1(t-t_0)=0,\quad e_1(t-t_0)=0,\quad i_1(t-t_0)=0\ , \tag{4.116}$$

$$\Omega_1(t-t_0)=-\frac{A_2}{\bar{p}^2}\bar{n}\cos\bar{i}(t-t_0)\ , \tag{4.117}$$

$$\omega_1(t-t_0)=\frac{A_2}{\bar{p}^2}\bar{n}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}\right)(t-t_0)\ , \tag{4.118}$$

$$M_1(t-t_0)=\frac{A_2}{\bar{p}^2}\bar{n}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}\right)\sqrt{1-\bar{e}^2}(t-t_0)\ . \tag{4.119}$$

其中

$$\bar{n}=\bar{a}^{-3/2},\quad \bar{p}=\bar{a}(1-\bar{e}^2)\ . \tag{4.120}$$

(2) 一阶短期项 $\boldsymbol{\sigma}_S^{(1)}$

根据 f_{1S} 的表达式可以看出,由于积分时 σ 应以 $\bar{\sigma}(t)$ 代入,被积函数中会同时出现 f 和 t 两种变量,对 t 无法严格积分. 但由于 f_{1S} 的变化具有短周期特征,又是求一阶项,故可按无摄运动引用变换关系,而且积分时 $\bar{\omega}(t)$ 可当作常数.

$$\begin{aligned}a_S^{(1)}(t)&=\int^t\frac{2}{an}\frac{\partial R_{1S}}{\partial M}\mathrm{d}t=\int^M\frac{2}{an}\frac{\partial R_{1S}}{\partial M}\frac{\mathrm{d}M}{n}=\frac{2}{n^2a}R_{1S}\\&=\frac{A_2}{a}\left\{\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.\\&\qquad\left.\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos2(f+\omega)\right\}\ ,\end{aligned} \tag{4.121}$$

$$\begin{aligned}i_S^{(1)}(t)&=\int^t(f_{1S})_i\mathrm{d}t\\&=-\frac{A_2}{2a^2(1-e^2)}\sin2i\int^t\left(\frac{a}{r}\right)\sin2(f+\omega)\mathrm{d}f\\&=\frac{A_2}{4p^2}\sin2i\left[\cos2(f+\omega)+e\cos(f+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right].\end{aligned} \tag{4.122}$$

关于 $e_S^{(1)}(t)$,不必求积分 $\int^t(f_{1S})_e\mathrm{d}t$,根据 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 的积分方法,可由摄动运动方程(3.75)直接给出

$$e_S^{(1)}(t)=\frac{1-e^2}{e}\left[\frac{1}{2a}a_S^{(1)}(t)-\tan i\cdot i_S^{(1)}(t)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A_2}{a^2}\left(\frac{1-e^2}{e}\right)\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.\\
&\quad \frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)-\frac{\sin^2 i}{2(1-e^2)^2}\left[\cos 2(f+\omega)+\right.\\
&\quad \left.\left. e\cos(f+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right]\right\}, \qquad (4.123)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) &= \int^t (f_{1\mathrm{S}})_\Omega \mathrm{d}t\\
&= -\frac{nA_2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\cos i\left\{\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\int^t\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}f-\right.\\
&\quad \left.\frac{1}{n}(1-e^2)^{-3/2}\int^M \mathrm{d}M-\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\int^t\left(\frac{a}{r}\right)\cos 2(f+\omega)\mathrm{d}f\right\}\\
&= -\frac{A_2}{p^2}\cos i\left\{(f-M+e\sin f)\right\}-\\
&\quad \left.\frac{1}{2}\left[\sin 2(f+\omega)+e\sin(f+2\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right]\right\},
\end{aligned}
$$

(4.124)

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) &= \int^t (f_{1\mathrm{S}})_\omega \mathrm{d}t\\
&= \frac{A_2}{p^2}\left\{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)(f-M+e\sin f)+\right.\\
&\quad \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]-\\
&\quad \left[\frac{1}{4e}\sin^2 i+\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 i\right)e\right]\sin(f+2\omega)-\\
&\quad \left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin 2(f+\omega)+\left[\frac{7}{12e}\sin^2 i-\right.\\
&\quad \left.\left(\frac{1}{6}-\frac{19}{48}\sin^2 i\right)e\right]\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin^2 i\sin(4f+2\omega)+\\
&\quad \left.\frac{e}{16}\sin^2 i[\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega)]\right\}, \qquad (4.125)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{S}}^{(1)}(t) &= \int^t\left[\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)+(f_{1\mathrm{S}})_M\right]\mathrm{d}t\\
&= \frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\left\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\right.\right.\\
&\quad \left.\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)-\right.
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{7}{12e}-\frac{e}{48}\right)\sin(3f+2\omega)-\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)-$$

$$\left.\left.\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)-\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\right]\right\}. \tag{4.126}$$

上述 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 表达式右端出现的根数均为 $\bar{\sigma}(t)$. 当然,在一阶解意义下, $\bar{a},\bar{e},\bar{i}$ 就是 $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$,也可用 a_0,e_0,i_0 代替,但 $\bar{\omega}(t)=\bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0)$,$\overline{M}(t)=\overline{M_0}+(\bar{n}+M_1)(t-t_0)$.

将 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 对卫星运动求平均值,得

$$\begin{cases}\overline{a_S^{(1)}(t)}=0,\\ \overline{e_S^{(1)}(t)}=\dfrac{A_2}{p^2}\sin^2 i\left(\dfrac{1-e^2}{6e}\right)\overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\\ \overline{i_S^{(1)}(t)}=-\dfrac{1}{12}\dfrac{A_2}{p^2}\sin 2i\ \overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\\ \overline{\Omega_S^{(1)}(t)}=-\dfrac{1}{6}\dfrac{A_2}{p^2}\cos i\ \overline{\cos 2f}\sin 2\omega,\\ \overline{\omega_S^{(1)}(t)}=\dfrac{A_2}{p^2}\left[\sin^2 i\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1-e^2}{6e}\overline{\cos 2f}\right)+\dfrac{1}{6}\cos^2 i\ \overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega,\\ \overline{M_S^{(1)}(t)}=-\dfrac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1-e^2/2}{6e}\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega.\end{cases} \tag{4.127}$$

在求平均值过程中已经将 $\overline{\cos qf}$ 表示成 $\overline{\cos 2f}$ 的形式,而 $\overline{\cos 2f}$ 由下式计算

$$\overline{\cos 2f}=\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2. \tag{4.128}$$

上述结果表明,$\sigma_S^{(1)}(t)-\overline{\sigma_S^{(1)}(t)}$ 才是真正的短周期项. 事实上,求 $\sigma_S^{(1)}(t)$ 时是按无摄运动变换关系积分的,而 $\overline{\sigma_S^{(1)}(t)}$ 只是 a,e,i,ω 的函数,因此,该项实为这种积分方法所导致的一个“积分常数”. 如果积分 $\int^t f_{1S}\mathrm{d}t$ 时,将 f_{1S} 展成平近点角 M 的三角级数,从而表示成时间 t 的显函数后直接对 t 积分,则必有 $\sigma_S^{(1)}(t)=0$.

(3) 二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$

推导 $\sigma_2(t-t_0)$ 和 $\sigma_1^{(1)}(t)$ 时,均涉及到

$$\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_S^{(1)}(t))_j$$

这类表达式求平均值时分解成 C,L,S 三种项的问题. 为了书写方便,这里引用符号 C,L,S 分别表示前面提出的仅与 a,e,i 有关的部分,性质取决于

ω 变化的长周期部分和变化由 M 决定的短周期部分. 在分离上述各项时要注意以下两点:

1) C,L,S 三种项相乘的结果,一般为

$$\begin{cases} \mathrm{C}\cdot\mathrm{C}\to\mathrm{C}, & \mathrm{C}\cdot\mathrm{L}\to\mathrm{L}, & \mathrm{C}\cdot\mathrm{S}\to\mathrm{S}, \\ & \mathrm{L}\cdot\mathrm{L}\to\mathrm{C},\mathrm{L}, & \mathrm{L}\cdot\mathrm{S}\to\mathrm{S}, \\ & & \mathrm{S}\cdot\mathrm{S}\to\mathrm{C},\mathrm{L},\mathrm{S}, \end{cases} \quad . \tag{4.129}$$

例如

$$\sin f\cdot\sin f=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\overline{\cos 2f}\right)-\left(\frac{1}{2}\cos 2f-\frac{1}{2}\,\overline{\cos 2f}\right),$$

即 S·S=C+S.

2) 在求平均值时,显然有$\overline{A\pm B}=\overline{A}\pm\overline{B}$. 而对一般情况,存在下列不等式:

$$\overline{A\cdot B}\neq\overline{A}\cdot\overline{B},\quad \overline{\left(\frac{A}{B}\right)}\neq\overline{A}/\overline{B}\,. \tag{4.130}$$

略去推导过程,对于 a,e,i,很容易得到下述结果:

$$a_2=0,\quad e_2=0,\quad i_2=0\,. \tag{4.131}$$

对于 Ω,ω,相应的$(f_{2\mathrm{C}})_\Omega$ 和$(f_{2\mathrm{C}})_\omega$ 已由(4.108)和(4.109)式给出,另一大项的结果为

$$\left(\sum_j\frac{\partial(f_1)_\Omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}-\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}})_j\right)_{\mathrm{C}}=-\frac{A_2^2}{p^4}n\cos i\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}\right)-\sin^2 i\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\right], \tag{4.132}$$

$$\left(\sum_j\frac{\partial(f_1)_\omega}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}-\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}})_j\right)_{\mathrm{C}}=\frac{A_2^2}{p^4}n\left[\left(4+\frac{7}{12}e^2+2\sqrt{1-e^2}\right)-\sin^2 i\left(\frac{103}{12}+\frac{3}{8}e^2+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}\right)+\sin^4 i\left(\frac{215}{48}-\frac{15}{32}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}\right)\right]. \tag{4.133}$$

因 $\bar{a}=\bar{a}_0,\bar{e}=\bar{e}_0,\bar{i}=\bar{i}_0$,故由(4.38)式可知,$\Omega$ 和 ω 的二阶长期项系数 Ω_2 和 ω_2 就分别由上述(4.108),(4.132)式和(4.109),(4.133)式两部分之和给出.

对于 M,与上类似,$(f_{2\mathrm{C}})_M$ 已由(4.110)式给出,另一大项是

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2+\sum_j\frac{\partial(f_1)_M}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{C}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A_2^2}{p^4} n \sqrt{1-e^2} \Big[\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)^2 \sqrt{1-e^2} + \left(\frac{5}{2}+\frac{10}{3}e^2\right) - \\
&\quad \sin^2 i\left(\frac{19}{3}+\frac{26}{3}e^2\right) + \sin^4 i\left(\frac{233}{48}+\frac{103}{12}e^2\right) + \\
&\quad \frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{12}-\frac{35}{4}\sin^2 i+\frac{315}{32}\sin^4 i\right)\Big], \qquad (4.134)
\end{aligned}
$$

同样 M_2 就是上述(4.110)和(4.134)式给出的两项之和.

关于二阶长期项,需要说明两点:

1) 推导中 $\sigma_S^{(1)}$ 这一项与 $\sigma_S^{(1)}-\overline{\sigma_S^{(1)}}$ 的效果相同,即$\overline{\sigma_S^{(1)}}$对二阶长期项的推导不起作用,这可从 $f_1=f_{1C}+f_{1S}$和运算规律(4.129)式得到答案.

2) Ω_2 和 ω_2 与古在由秀给出的结果[1]不一致,与后来库克(Cook)给出的结果[2]也不一致,下面将回答这一问题. 分别记我们的结果、古在由秀的结果和库克的结果为$(\Omega_2)_1$,$(\omega_2)_1$;$(\Omega_2)_2$,$(\omega_2)_2$;$(\Omega_2)_3$,$(\omega_2)_3$,有

$$
\begin{cases}
(\Omega_2)_1 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n \cos i\left[-\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right], \\
(\omega_2)_1 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n\left[\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],
\end{cases} \qquad (4.135)
$$

$$
\begin{cases}
(\Omega_2)_2 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n \cos i\left[2\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right], \\
(\omega_2)_2 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n\left[-2\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],
\end{cases} \qquad (4.136)
$$

$$
\begin{cases}
(\Omega_2)_3 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n \cos i\left[\dfrac{5}{2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right], \\
(\omega_2)_3 = \dfrac{A_2^2}{p^4} n\left[-\dfrac{5}{2}\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\cdots\right],
\end{cases} \qquad (4.137)
$$

各式右端的根数都是平均根数.(4.135)式的形式已重新整理过,与前面(4.132)和(4.133)式不一样,这是为了比较不同的部分,请读者注意.

上述三种结果显然是不同的,产生的原因是平均根数 $\bar{a}$ 和 $\bar{n}$ 的取法不同. 我们的结果是按平均根数的严格定义给出的,即

$$\bar{a}=\overline{a_0}, \quad \bar{n}=\overline{n_0}, \quad \bar{a}^3\bar{n}^2=1\,. \qquad (4.138)$$

而古在由秀用的却是

$$\begin{cases}\bar{a}=\bar{a}_0\left[1-\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right],\\ \bar{n}=\overline{n_0}\left[1+\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right],\\ \bar{a}^3\bar{n}^2\neq 1,\end{cases}\tag{4.139}$$

库克用的则是

$$\begin{cases}\bar{a}=\bar{a}_0\left[1-\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right],\\ \bar{n}=\overline{n_0}\left[1+\dfrac{3}{2}\,\dfrac{A_2}{p^2}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}\right].\end{cases}\tag{4.140}$$

$\bar{a}$ 与古在由秀的相同，但 $\bar{n}$ 则是根据 $\bar{a}^3\bar{n}^2=1$ 给出的. 由于这个原因，Ω_1 和 ω_1 也产生差别，相应地有

$$\begin{aligned}(\Omega_1)_2&=-\frac{A_2}{\bar{a}^2(1-\bar{e}_0^2)^2}\bar{n}\cos\bar{i}_0\\ &=(\Omega_1)_1-\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\bar{n}_0\left[3\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3),\\ (\omega_1)_2&=\frac{A_2}{\bar{a}^2(1-\bar{e}_0^2)^2}\bar{n}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\\ &=(\omega_1)_1+\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\bar{n}_0\left[3\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3),\\ (\Omega_1)_3&=(\Omega_1)_1-\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\bar{n}_0\left[\frac{7}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3),\\ (\omega_1)_3&=(\omega_1)_1+\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\bar{n}_0\left[\frac{7}{2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+\\ &\quad O(A_2^3).\end{aligned}$$

而由(4.134)，(4.136)和(4.137)三式给出的 Ω_2 和 ω_2 的差别为

$$\begin{aligned}(\Omega_2)_2&=(\Omega_2)_1+\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\overline{n_0}\left[3\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3),\\ (\omega_2)_2&=(\omega_2)_1-\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\overline{n_0}\left[3\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3),\\ (\Omega_2)_3&=(\Omega_2)_1+\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\overline{n_0}\left[\frac{7}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right],\\ (\omega_2)_3&=(\omega_2)_1-\frac{A_2^2}{\overline{p_0}^4}\overline{n_0}\left[\frac{7}{2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right]+O(A_2^3),\end{aligned}$$

这正与上面的差别相差一个符号. 因此，对于整个解来说是没有差别的，只是表达形式不一致. 在使用上述公式时，要注意各自的系统，不能混淆. 而我们给出的解是完全按照平均根数的定义来构造的，没有人为地引进任何不

一致的辅助量，因此，在实际应用中不会出现混乱.

(4) 一阶长周期项 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$

由(4.8)式和(4.95)，(4.96)式可知，对于 a,e,i，因相应的

$$f_{1\mathrm{C}}=0,f_{1\mathrm{L}}=0,f_1=f_{1\mathrm{S}},$$

故被积函数只有两部分，即

$$\left(\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}},f_{2\mathrm{L}}.$$

后者已由(4.98)式和相应的(4.111)，(4.112)式给出，至于前者，经计算有

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_1)_a}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=0.$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_1)_i}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=\frac{A_2^2}{p^4}n\sin 2i\left[\frac{1}{6}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\overline{\cos 2f}\sin 2\omega+\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i\right)e^2\sin 2\omega\right].$$

将这一结果与 $f_{2\mathrm{L}}$ 代入(4.38)式的长周期项部分，积分后得

$$a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=0, \tag{4.141}$$

$$i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\frac{1}{12}\frac{A_2}{p^2}\sin 2i\,\overline{\cos 2f}\cos 2\omega-\frac{A_2}{p^2}\frac{\sin 2i}{(4-5\sin^2 i)}\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i\right)e^2\cos 2\omega-\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cos ie\ \sin\omega+\frac{1}{p^2}\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{\sin 2i}{(4-5\ \sin^2 i)}\left(\frac{9}{28}-\frac{3}{8}\sin^2 i\right)e^2\cos 2\omega. \tag{4.142}$$

利用$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$与$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$的关系并注意到带谐项摄动函数不含 Ω，不难给出

$$e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right)i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t). \tag{4.143}$$

对于 Ω 和 ω，(4.38)式长周期部分的被积函数有三大项，即

$$\left(\sum_j \frac{\partial f_{1\mathrm{C}}}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}},\quad \left(\sum_j \frac{\partial f_{1\mathrm{S}}}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}},\quad f_{2\mathrm{L}},$$

第三大项见(4.112)～(4.113)式. 第一大项看上去似乎无法计算，推导 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$时要用其本身，但实际上无妨. 因对 Ω,ω 和 M 都有

$$f_{1\mathrm{C}}=f_{1\mathrm{C}}(a,e,i),$$

$$\frac{\partial f_{1\mathrm{C}}}{\partial(\Omega,\omega,M)}=0,$$

故第一大项中不涉及 $\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)},\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}$ 和 $M_{\mathrm{L}}^{(1)}$，而 $a_{\mathrm{L}}^{(1)},e_{\mathrm{L}}^{(1)},i_{\mathrm{L}}^{(1)}$ 均已推出. 经计算有

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_{1\mathrm{C}})_\Omega}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{l}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=\left(5\frac{A_2}{p^2}n\sin i\right)i_{\mathrm{L}}^{(1)},$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_{1\mathrm{C}})_\omega}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}} = -\frac{A_2}{p^2} n \tan i (13 - 15\sin^2 i) i_{\mathrm{L}}^{(1)} .$$

第二大项算出的结果为

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_{1\mathrm{C}})_\Omega}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}} = \frac{A_2}{p^2} n \cos i \left\{\left[-\frac{1}{6}(4-5\sin^2 i)\overline{\cos 2f} + \frac{5}{6}\sin^2 i\,\overline{\cos 2f}\right]\cos 2\omega - e^2\left(\frac{7}{12} - \frac{5}{4}\sin^2 i\right)\cos 2\omega\right\} ,$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_{1\mathrm{C}})_\omega}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}} = \frac{A_2^2}{p^4} n \left\{\left[\sin^2 i (4-5\sin^2 i)\left(\frac{1}{8} + \frac{1-e^2}{6e}\overline{\cos 2f}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{11}{3}\sin^2 i + \frac{10}{3}\sin^4 i\right)\overline{\cos 2f}\right]\cos 2\omega + \left[-\sin^2 i\left(\frac{25}{12} - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) + e^2\left(\frac{7}{12} - \frac{79}{24}\sin^2 i + \frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega\right\} .$$

将上述三大项代入(4.38)**式的长期项部分,积分得**

$$\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\frac{1}{6}\frac{A_2}{p^2}\cos i\,\overline{\cos 2f}\sin 2\omega - \frac{A_2}{p^2}\frac{\cos i}{(4-5\sin^2 i)^2}\left(\frac{7}{3} - 5\sin^2 i + \frac{25}{8}\sin^4 i\right)e^2\sin 2\omega + \frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cot i\; e\;\cos\omega + \frac{1}{p^2}\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{\cos i}{(4-5\sin^2 i)^2}\left(\frac{18}{7} - 6\sin^2 i + \frac{15}{4}\sin^4 i\right)e^2\sin 2\omega , \tag{4.144}$$

$$\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \frac{A_2}{p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{1}{8} + \frac{1-e^2}{6e}\overline{\cos 2f}\right) + \frac{1}{6}\cos^2 i\,\overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega - \frac{A_2}{p^2}\frac{1}{(4-5\sin^2 i)^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{25}{3} - \frac{245}{12}\sin^2 i + \frac{25}{2}\sin^4 i\right) - e^2\left(\frac{7}{3} - \frac{17}{2}\sin^2 i + \frac{65}{6}\sin^4 i - \frac{75}{16}\sin^6 i\right)\right]\sin 2\omega + \frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\frac{1}{e\sin i}[(1-e^2)\sin^2 i - e^2]\cos\omega + \frac{1}{p^2}\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{1}{(4-5\sin^2 i)^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{18}{7} - \frac{87}{14}\sin^2 i + \frac{15}{4}\sin^4 i\right) - e^2\left(\frac{18}{7} - \frac{69}{7}\sin^2 i + \frac{90}{7}\sin^4 i - \frac{45}{8}\sin^6 i\right)\right]\sin 2\omega . \tag{4.145}$$

对于 M**,稍微复杂些,涉及五大项,即**

$$\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{L}}^{(2)},\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{L}}^2,$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_{1\mathrm{C}})_M}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}},\left(\sum_j \frac{\partial (f_{1\mathrm{S}})_M}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}},\quad (f_{2\mathrm{L}})_M .$$

首先遇到的问题是：由于 M 的摄动运动方程右端有一零阶项 n，因此推导 $M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 时需要知道 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$，这将引起平均根数法本身遇到的麻烦，但可借助于其他手段绕过这一障碍. 关于这个问题将留到后面第四段中讨论，此处先引用 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$ 的结果. 最后一大项 $(f_{2\mathrm{L}})_M$ 见(4.115)**式，其余四大项分别算得**

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial a}a_{\mathrm{L}}^{(2)} = \frac{A_2^2}{p^4}n\sqrt{1-e^2}\Big\{&\Big[\frac{1}{4}\sin^2 i(4-5\sin^2 i)\overline{\cos 2f}+\\&e^2\sin^2 i\left(-\frac{17}{8}+\frac{57}{16}\sin^2 i\right)\Big]\cos 2\omega-\\&\frac{e^4}{1-e^2}\Big[\frac{7}{2}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega+\frac{3}{64}\sin^4 i\cos 4\omega\Big]\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})_{\mathrm{L}}^2+\left(\sum_j \frac{\partial (f_{1\mathrm{S}})_M}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}\\=&\frac{A_2^2}{p^4}n\sqrt{1-e^2}\Big\{\Big[-\sin^2 i(4-5\sin^2 i)\left(\frac{1}{4}+\frac{1+2e^2}{6e^2}\right)\overline{\cos 2f}+\\&\sin^2 i\left(\frac{19}{12}-\frac{15}{8}\sin^2 i\right)+e^2\sin^2 i\left(\frac{2}{3}-2\sin^2 i\right)\Big]\cos 2\omega+\\&\frac{e^4}{1-e^2}\Big[\frac{7}{2}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega+\frac{3}{63}\sin^4 i\cos 4\omega\Big]\Big\},\end{aligned}$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial (f_{1\mathrm{C}})_M}{\partial \sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j\right)_{\mathrm{L}}=-\frac{3}{2}\frac{A_2}{p^2}n\sqrt{1-e^2}\tan i(4-5\sin^2 i)i_{\mathrm{L}}^{(1)} .$$

将以上各部分全部代入(4.38)**式的相应部分，积分得**

$$\begin{aligned}M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\frac{A_2}{p^2}&\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1+e^2/2}{6e^2}\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega+\\&\frac{A_2}{p^2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{(4-5\sin^2 i)}\sin^2 i\Big[\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)-\\&e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)\Big]\sin 2\omega .\end{aligned}\qquad(4.146)$$

从 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 的结果(4.142)～(4.146)**式清楚地看出，它们的右端第一大项就是 $\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)}$. 因此，在引用 J_2 项摄动时，不必从 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)$ 中减掉 $\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)}$，而相应的 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 中却删去 $\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)}$ 这一项，对解 $\sigma(t)$ 而言，这样处理既正确又简单. 下面将按这种形式整理一套完整的计算公式，请读者注意.**

3. 公式整理

经前面的推导，已经给出 J_2, J_3, J_4 三项摄动一阶解的完整结果. 摄动项中同时包含了二阶长期项，是由于该项随着轨道外推弧段的增长而增大，当弧段 $s=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时，二阶长期项的大小增大到一阶小量的量级 $O(\varepsilon)$. 因此在一阶解中通常都包含二阶长期项，但在实际应用中可视具体要求而有所取舍. 具体结果下面逐一列出.

$$\begin{cases}\sigma(t)=\bar{\sigma}_0+(\delta\bar{n}+\sigma_1+\sigma_2)(t-t_0)+\sigma_L^{(1)}(t)+\sigma_S^{(1)}(t),\\ \bar{\sigma}_0=\sigma_0-[\sigma_L^{(1)}(t_0)+\sigma_S^{(1)}(t_0)].\end{cases}\tag{4.147}$$

六个根数的形式分别为

$$\begin{cases}a(t)=\bar{a}_0+a_S^{(1)}(t),\\ e(t)=\bar{e}_0+e_L^{(1)}(t)+e_S^{(1)}(t),\\ i(t)=\bar{i}_0+i_L^{(1)}(t)+i_S^{(1)}(t),\\ \Omega(t)=\bar{\Omega}_0+\Omega_1(t-t_0)+\Omega_2(t-t_0)+\Omega_L^{(1)}(t)+\Omega_S^{(1)}(t),\\ \omega(t)=\bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0)+\omega_2(t-t_0)+\omega_L^{(1)}(t)+\omega_S^{(1)}(t),\\ M(t)=\bar{M}_0+(\bar{n}+M_1)(t-t_0)+M_2(t-t_0)+M_L^{(1)}(t)+M_S^{(1)}(t).\end{cases}\tag{4.148}$$

根据 M 的特点，计算 $\bar{n}_0$ 所用的 $\bar{a}_0$ 要消去二阶周期项，即

$$\bar{a}_0=a_0-[a_S^{(1)}(t_0)+a_S^{(2)}(t_0)+a_L^{(2)}(t_0)],\tag{4.149}$$

但在实际工作中，往往是通过精密定轨直接给出 $\bar{a}_0$.

下面列出各项摄动公式具体形式.

(1) $\boldsymbol{\sigma_1}$ 和 $\boldsymbol{\sigma_2}$

$$a_1=0, e_1=0, i_1=0,\tag{4.150}$$

$$\Omega_1=-\frac{A_2}{p^2}n\cos i,\tag{4.151}$$

$$\omega_1=\frac{A_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right),\tag{4.152}$$

$$M_1=\frac{A_2}{p^2}n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2},\tag{4.153}$$

$$a_2=0, e_2=0, i_2=0,\tag{4.154}$$

$$\Omega_2=-\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 n\cos i\left\{\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}\right)-\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^2 i\right]+\right.$$

$$\left(\frac{A_4}{A_2^2}\right)\left[\left(\frac{6}{7}+\frac{9}{7}e^2\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}e^2\right)\sin^2 i\right]\bigg\}\ , \tag{4.155}$$

$$\omega_2=\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 n\bigg\{\bigg[\left(4+\frac{7}{12}e^2+2\sqrt{1-e^2}\right)-\left(\frac{103}{12}+\frac{3}{8}e^2+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^2 i+\left(\frac{215}{48}-\frac{15}{32}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^4 i\bigg]+\left(\frac{A_4}{A_2^2}\right)\left[\left(\frac{12}{7}+\frac{27}{14}e^2\right)-\left(\frac{93}{14}+\frac{27}{4}e^2\right)\sin^2 i+\left(\frac{21}{4}+\frac{81}{16}e^2\right)\sin^4 i\right]\bigg\}, \tag{4.156}$$

$$M_2=\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 n\sqrt{1-e^2}\bigg\{\bigg[\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)^2\sqrt{1-e^2}+\left(\frac{5}{2}+\frac{10}{3}e^2\right)-\left(\frac{19}{3}+\frac{26}{3}e^2\right)\sin^2 i+\left(\frac{233}{48}+\frac{103}{12}e^2\right)\sin^4 i+\frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{12}-\frac{35}{4}\sin^2 i+\frac{315}{32}\sin^4 i\right)\bigg]+\left(\frac{A_4}{A_2^2}\right)e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{35}{14}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\bigg\}\ . \tag{4.157}$$

上述各式中的 a,e,i **均为** $\bar{a},\bar{e},\bar{i}$**，且有**

$$\begin{cases}\bar{a}=\bar{a}_0\,,\ \bar{e}=\bar{e}_0\,,\ \bar{i}=\bar{i}_0\\ \bar{n}=\bar{a}^{-\frac{3}{2}}=\bar{a}_0^{-3/2}\,,\bar{p}=\bar{a}(1-\bar{e}^2)=\bar{a}_0(1-\bar{e}_0^2).\end{cases} \tag{4.158}$$

（2）$\boldsymbol{\sigma}_S^{(1)}(t)$

$$a_S^{(1)}(t)=\frac{A_2}{a}\bigg\{\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\bigg\}\ , \tag{4.159}$$

$$e_S^{(1)}(t)=\frac{1-e^2}{e}\left[\frac{1}{2a}a_S^{(1)}(t)-(\tan i)i_S^{(1)}(t)\right], \tag{4.160}$$

$$i_S^{(1)}(t)=\frac{A_2}{4p^2}\sin 2i\left[e\cos(f+2\omega)+\cos 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right], \tag{4.161}$$

$$\Omega_S^{(1)}(t)=-\frac{A_2}{p^2}\cos i\bigg\{(f-M+e\sin f)-\frac{1}{2}\left[e\sin(f+2\omega)+\sin 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right]\bigg\}\ , \tag{4.162}$$

$$\omega_S^{(1)}(t)=-\cos i\,\Omega_S^{(1)}(t)+\frac{A_2}{p^2}\bigg\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\Big[(f-M)+e\sin f+$$

$$\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\Big]+$$

$$\sin^2 i\Big[-\left(\frac{1}{4e}-\frac{7}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+\frac{3}{4}\sin 2(f+\omega)+$$

$$\left(\frac{7}{12e}+\frac{11}{48}e\right)\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+$$

$$\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)+\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\Big]\Big\}, \tag{4.163}$$

$$M_S^{(1)}(t)=\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\Big\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\Big[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+$$

$$\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\Big]-\sin^2 i\Big[-\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+$$

$$\left(\frac{7}{12e}-\frac{1}{48}e\right)\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+$$

$$\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)+\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\Big]\Big\}. \tag{4.164}$$

上述各式涉及 a,e,i,ω 和 M 五个根数,均为准到一阶长期项的平均根数,即

$$\bar{a}(t)=\bar{a}_0,\bar{e}(t)=\bar{e}_0,\bar{i}(t)=\bar{i}_0,$$

$$\bar{\omega}(t)=\overline{\omega_0}+\omega_1(t-t_0),$$

$$\overline{M}(t)=\overline{M_0}+(\bar{n}+M_1)(t-t_0),$$

而$\left(\frac{a}{r}\right)$和 f 则是 e,M 的函数,它们的值由 $\bar{e}(t)$和$\overline{M}(t)$给出.

(3) $\boldsymbol{\sigma}_L^{(1)}(t)$

$$a_L^{(1)}(t)=0, \tag{4.165}$$

$$e_L^{(1)}(t)=-\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right)i_L^{(1)}(t), \tag{4.166}$$

$$i_L^{(1)}(t)=-\frac{1}{2p^2}\frac{\sin 2i}{(4-5\sin^2 i)}\Big[A_2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)-$$

$$\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)\Big]e^2\cos 2\omega-\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cos i\, e\sin\omega. \tag{4.167}$$

$$\Omega_L^{(1)}(t)=-\frac{1}{p^2}\frac{\cos i}{(4-5\sin^2 i)^2}\Big[A_2\left(\frac{7}{3}-5\sin^2 i+\frac{25}{8}\sin^4 i\right)-$$

$$\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\left(\frac{18}{7}-6\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right)\Big]e^2\sin 2\omega+$$

$$\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cot i\ e\ \sin\omega . \tag{4.168}$$

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = &-\frac{1}{p^2}\frac{1}{(4-5\sin^2 i)^2}\left\{A_2\left[\sin^2 i\left(\frac{25}{3}-\frac{245}{12}\sin^2 i+\frac{25}{2}\sin^4 i\right)-\right.\right.\\ &e^2\left.\left(\frac{7}{3}-\frac{17}{2}\sin^2 i+\frac{65}{6}\sin^4 i-\frac{75}{16}\sin^6 i\right)\right]-\\ &\left(\frac{A_4}{A_2}\right)\left[\sin^2 i\left(\frac{18}{7}-\frac{87}{14}\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right)-\right.\\ &e^2\left.\left.\left(\frac{18}{7}-\frac{69}{7}\sin^2 i+\frac{90}{7}\sin^4 i-\frac{45}{8}\sin^6 i\right)\right]\right\}\sin 2\omega+\\ &\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\frac{1}{e\ \sin i}\left[(1+e^2)\sin^2 i-e^2\right]\cos\omega ,\end{aligned} \tag{4.169}$$

$$\begin{aligned}M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = &\frac{1}{p^2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{(4-5\sin^2 i)}\sin^2 i\left\{A_2\left[\left(\frac{15}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)-\right.\right.\\ &e^2\left.\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)\right]-\left(\frac{A_4}{A_2}\right)(1-e^2)\left.\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)\right\}\sin 2\omega-\\ &\frac{3}{4p}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\frac{1}{e}(1-e^2)^{3/2}\sin i\ \cos\omega .\end{aligned} \tag{4.170}$$

上述各式中的根数与 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)$ 中的根数作同样的处理.

上述(4.147)～(4.170)式是一套完整的摄动计算公式. 如果给出的初始条件是

$$t_0, \sigma_0(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega, M_0),$$

那么利用这组公式计算 t 时刻的瞬时根数 $\sigma(t)$ 的步骤如下：

(1) 由 σ_0 代替 $\bar{\sigma}_0$（对于一阶解，这样做精度已够），用(4.159)～(4.170)式计算 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)$ 和 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)$，从而给出 $\bar{\sigma}_0$，即

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 - \left[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0) + \sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)\right]$$

在计算短周期项 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)$ 时出现的两个量，$\left(\frac{a}{r}\right)$ 和 f，按下列公式计算：

$$\begin{cases} E = M + e\sin E, \\ \left(\dfrac{a}{r}\right) = (1 - e\cos E)^{-1}, \\ \tan f = \dfrac{\sqrt{1-e^2}\ \sin E}{\cos E - e}. \end{cases} \tag{4.171}$$

由于平近点角 M 变化的特殊性，所需要的 $\bar{\sigma}_0$ 必须从 a_0 中消除精确到二阶量的 $a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)$ 和二阶周期项 $a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t_0)$ 和 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t_0)$，那么 $a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)$ 还必须重新由上面算出的 $\bar{\sigma}_0$ 计算，给出精确到二阶量的 $a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t_0)$.

(2) 由$\overline{\sigma}_0$ 用(4.150)～(4.157)式计算 σ_1 和 σ_2，从而给出瞬时平均根数 $\overline{\sigma}(t)$，即

$$\overline{\sigma}(t)=\overline{\sigma}_0+(\delta\overline{n}_0+\sigma_1+\sigma_2)(t-t_0).$$

(3) 由$\overline{\sigma}(t)$再用(4.159)～(4.170)式计算 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$和 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)$，从而给出瞬时根数 $\sigma(t)$，即

$$\sigma(t)=\overline{\sigma}(t)+\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t).$$

原来这一步要用$\overline{\sigma}(t)=\sigma_0+(\delta\overline{n}_0+\sigma_1)(t-t_0)$计算 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)$和 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$就符合精度要求了，但为了计算程序上的方便，按上述方法计算也可以，对一阶解而言，精度一致.

在实际工作中，往往给出的初始条件是

$$t_0,\quad \overline{\sigma}_0=\overline{\sigma}(t_0),$$

于是，可直接从上述第(2)步开始计算. 正因为如此，也就不必考虑平近点角 M 对 $\overline{n}_0$(或 $\overline{a}_0$)的特殊要求，即为了使 $M(t)$的计算精度与其他五个根数一致，必须从 a_0 中消除一阶和二阶周期项.

对于低轨卫星，在 $n(t-t_0)=10^3$ 弧段内，一阶摄动解的定轨精度可达 10^{-5}. 这在很多航天任务中得到了广泛的应用.

除定量计算外，还可以通过上述分析解了解卫星轨道变化的基本特征. 如摄动解中 Ω 和 ω 具有长期变化，这说明地球形状带谐项摄动，导致人造卫星轨道平面及拱线在空间不断旋转，而旋转方向取决于倾角 i 的大小. 由

$$\Omega_1=-\frac{A_2}{p^2}n\cos i,$$

$$\omega_1=\frac{A_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right),$$

可知当 $0<i<90°$时，轨道面西退，$90°<i<180°$时，轨道面东进. 而当$i=90°$(极地轨道)时，轨道面不动，这是容易理解的，因为此时人造卫星受一个具有旋转对称特性的地球引力场作用，对轨道面而言，受力是平衡的.

当 $i=i_{\mathrm{C}}=63°23'$或 $116°34'$时$\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i=0\right)$，拱线"不动"，$i_{\mathrm{C}}$ 称为临界倾角.

以上特征可以帮助我们了解人造卫星轨道变化的规律，在轨道设计等工作中将会用到. 如设计一个太阳同步卫星(轨道面每天东进约 $1°$，与太阳"运动"同步)，就要使 $\Omega_1>0$，即 $i>90°$(逆行卫星).

在摄动表达式 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)$和 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$中，有$\frac{1}{e}$，$\frac{1}{\sin i}$，$\frac{1}{4-5\sin^2 i}$这类因子，对于 $e=0$，$i=0$ 或 $180°$，$i=i_{\mathrm{C}}$，上述摄动解无效，此即摄动解的"奇点"，但并不

是运动的实质性奇点，是可以消除的，具体方法是采用无奇点根数和相应的拟平均根数法（即改变参考解），详见参考文献[3]~[5].

最后必须指出：平均根数法的原理确实很简单，只是改变了经典摄动法的参考解. 但无论是摄动法还是平均根数法，构造小参数幂级数解的过程相对而言都较烦，若要构造二阶解，那将更难让人接受. 如果采用哈密顿力学来构造相应的级数解，则要简单很多. 参考文献[6]就在此框架下，通过 Von-Zeipel 变换较简单地构造了上述主要带谐项摄动解，但必须引用正则共轭变量，而轨道根数 $\sigma(a,e,i,\Omega,\omega,M)$ 不符合这一条件. 为此，参考文献[7]又将这种变换思想推广到一般变量，直接用轨道根数，同样可以采用该变换方法来构造相应的级数解. 所有这些，从构造小参数幂级数解的角度来看有其特点，但在实际工作中是否一定要采用，要视具体情况而定，这里所介绍的方法仅供参考.

4. 能量积分的利用——半长径 a 的二阶周期项的推导

讨论所有带谐项摄动，并将 J_2 和 $J_l(l\geqslant 3)$ 分开. 记

$$F=\frac{1}{2a}+R(\sigma,J_2,J_n)\ , \tag{4.172}$$

这里带谐项摄动函数 R 不显含 t，有

$$\frac{\partial F}{\partial t}=0\ .$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\sum_j\frac{\partial F}{\partial\sigma_j}\dot{\sigma}_j=-\frac{1}{2a}+\sum_j\frac{\partial R}{\partial\sigma_j}\dot{\sigma}_j\ .$$

其中 $\dot{\sigma}_j$ 由摄动运动方程给出，代入上式整理后得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=0\ . \tag{4.173}$$

因此，存在一积分

$$F=\frac{1}{2a}+R=C\ , \tag{4.174}$$

此即能量积分.

能量积分(4.174)式有一个非常显著的特点：F 有两部分，$\dfrac{1}{2a}$和 R，且

$$\frac{1}{2a}=O(\varepsilon^0),\quad R=O(\varepsilon)\ ,$$

ε 即 J_2，零阶部分仅含半长径 a 一个根数. 这一特点非常重要，它至少有两

个用途,即

1) 由 a,e,i,Ω,ω,M 的一阶摄动,可简单地求出 a 的二阶摄动.

2) 在积分常数满足一定精度的条件下,由精度较低的六个根数可重新算出精度较高(高一阶)的半长径 a. 前者就是本节用来推导 a 的二阶周期项的基础,而后者将在数值求解卫星运动方程时,用以控制沿迹误差的扩大.

将能量积分对平均根数$\bar{\sigma}(t)$展开,得

$$\frac{1}{2a}+\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_{\mathrm{S}}^{(1)}+a_{\mathrm{L}}^{(1)}+a_{\mathrm{S}}^{(2)}+a_{\mathrm{L}}^{(2)}+\cdots)\right]_{\bar{\sigma}}+\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_{\mathrm{S}}^{(1)}+a_{\mathrm{L}}^{(1)}+\cdots)^2\right]_{\bar{\sigma}}+(R_{1\mathrm{C}}+R_{2\mathrm{C}}+R_{1\mathrm{S}}+R_{2\mathrm{S}}+R_{2\mathrm{L}})_{\bar{\sigma}}+\left[\sum_j\frac{\partial(R_{1\mathrm{C}}+R_{1\mathrm{S}})}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})\right]_{\bar{\sigma}}+\cdots=C. \tag{4.175}$$

下面为了书写方便,平均根数$\bar{\sigma}$就写成 σ,请注意这一点. 还有,长周期项 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)},\sigma_{\mathrm{L}}^{(2)},\cdots$分成两部分,一部分为 J_2 项产生的,仍记作 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)},\sigma_{\mathrm{L}}^{(2)},\cdots$,另一部分为 $J_l(l\geqslant3)$项产生,记作 $\sigma_{l\mathrm{L}}^{(1)},\sigma_{l\mathrm{L}}^{(2)},\cdots$. 根据积分(4.174)式的性质,展开式左端仅与 a,e,i 有关的"常数项"之和应等于右端的常数 C,与时间 t 有关的全部周期项之和应为 0,而且不同性质的周期项应分别为 0,相同性质的周期项按 J_2 不同阶的各部分亦应分别为 0. 于是有

$$\text{常数项:}\ \frac{1}{2a}+(R_{1\mathrm{C}}+R_{2\mathrm{C}})+\cdots=C. \tag{4.176}$$

$$\text{一阶周期项:}\ \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_{\mathrm{L}}^{(1)}+a_{l\mathrm{L}}^{(1)})=0, \tag{4.177}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_{\mathrm{S}}^{(1)}+R_{1\mathrm{S}}=0. \tag{4.178}$$

二阶周期项:

$$\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_{\mathrm{L}}^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2+\sum_j\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)})_j+\sum_j\frac{\partial R_{1\mathrm{S}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j\right]_{\mathrm{L}}=0, \tag{4.179}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial_a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_{l\mathrm{L}}^{(2)}+\sum_j\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{l\mathrm{L}}^{(1)})_j+R_{2\mathrm{L}}\right]_{\mathrm{L}}=0, \tag{4.180}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2a}\right)a_{\mathrm{S}}^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{2a}\right)(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2+\sum_j\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j+\sum_j\frac{\partial R_{1\mathrm{S}}}{\partial\sigma_j}(\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}+\sigma_{l\mathrm{L}}^{(1)})_j+R_{2\mathrm{S}}\right]_{\mathrm{S}}=0 \tag{4.181}$$

只写到二阶就够了，其中$[\quad]_{\mathrm{L}}$和$[\quad]_{\mathrm{S}}$分别表示括号内的长周期和短周期部分.

由(4.177)和(4.178)式直接得出

$$a_l^{(1)}+a_{l\mathrm{L}}^{(1)}=0\,, \tag{4.182}$$

$$a_{\mathrm{S}}^{(1)}(t)=2a^2R_{1\mathrm{S}}=\frac{2}{n^2a}R_{1\mathrm{S}}\,. \tag{4.183}$$

此即前面平均根数法导出的结果，而通过能量积分却很容易得出这一结论.

对于二阶周期项，首先证明一个有趣的结论，即

$$a_{l\mathrm{L}}^{(2)}=0\,, \tag{4.184}$$

这表明所有带谐项 $J_l(l\geqslant 3)$对 a 的二阶长周期项均无贡献. 由(4.180)式，根据 $R_{1\mathrm{C}}$仅是 a,e,i 的函数可得

$$a_{l\mathrm{L}}^{(2)}=2a^2\left\{-\frac{1}{a}\left(\frac{A_2}{p^2}\right)\sqrt{1-e}\tan i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)i_{l\mathrm{L}}^{(1)}+R_{2\mathrm{L}}\right\}\,,$$

其中 $i_{l\mathrm{L}}^{(1)}$正是用 $R_{2\mathrm{L}}$代入摄动运动方程求得的，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_{l\mathrm{L}}^{(1)})=\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R_{2\mathrm{L}}}{\partial\omega}\,,$$

而这里的 ω 应为

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0)\,,$$

因此有

$$\mathrm{d}\bar{\omega}=\omega_1\mathrm{d}t=\frac{A_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\mathrm{d}t\,,$$

代入上式得

$$\mathrm{d}(i_{l\mathrm{L}}^{(1)})=\frac{\cot i}{\frac{A_2}{p^2}n^2a^2\sqrt{1-e^2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)}\frac{\partial R_{2\mathrm{L}}}{\partial\omega}\mathrm{d}\omega\,,$$

即

$$i_{l\mathrm{L}}^{(1)}=\frac{\cot i}{\frac{A_2}{p^2}n^2a^2\sqrt{1-e^2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)}R_{2\mathrm{L}}\,,$$

以此代入上面 $a_{l\mathrm{L}}^{(2)}$的表达式即得

$$a_{l\mathrm{L}}^{(2)}=2a^2\{-R_{2\mathrm{L}}+R_{2\mathrm{L}}\}=0\,,$$

这就是要证明的结果. 因此，a 的二阶长周期项仅与 J_2 有关，$a_{\mathrm{L}}^{(2)}$ 也就是 a 的完整的二阶长周期项，下面就来具体计算 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$和 $a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$.

(1) $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$

引进算符 D：

$$D = \sum_j (\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)})_j \frac{\partial}{\partial \sigma_j}, \tag{4.185}$$

(4.179)**式可写成**

$$\left[-\frac{1}{2a^2}a_{\mathrm{L}}^{(2)} + \frac{1}{2a^3}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2 + DR_{1\mathrm{S}} + \left(\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial e}e_{\mathrm{L}}^{(1)} + \frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial i}i_{\mathrm{L}}^{(1)}\right)\right]_{\mathrm{L}} = 0.$$

将 D **作用于**(4.178)**式，取其长周期部分**：

$$\left\{-\frac{1}{2a}D\left(\frac{a_{\mathrm{S}}^{(1)}}{a}\right) + \frac{1}{2a^3}(a_{\mathrm{S}}^{(1)})^2 + DR_{1\mathrm{S}}\right\}_{\mathrm{L}} = 0.$$

以上两式相减给出 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}$**，即**

$$a_{\mathrm{L}}^{(2)} = \left[aD\left(\frac{a_{\mathrm{S}}^{(1)}}{a}\right) + 2a^2\left(\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial e}e_{\mathrm{L}}^{(1)} + \frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial i}i_{\mathrm{L}}^{(1)}\right)\right]_{\mathrm{L}}. \tag{4.186}$$

经计算给出

$$\begin{aligned}\left[aD\left(\frac{a_{\mathrm{S}}^{(1)}}{a}\right)\right]_{\mathrm{L}} = \left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2 a\sqrt{1-e^2}\Big\{&\left[-\frac{1}{3}\sin^2 i(4-\sin^2 i)\overline{\cos 2f} + \right.\\ &\left. e^2\sin^2 i\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{4}\sin^2 i\right)\right]\cos 2\omega + \\ &\frac{e^4}{1-e^2}\left[\frac{7}{3}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega + \right.\\ &\left.\frac{1}{32}\sin^4 i\ \cos 4\omega\right]\Big\},\end{aligned} \tag{4.187}$$

$$2a^2\left(\frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial e}e_{\mathrm{L}}^{(1)} + \frac{\partial R_{1\mathrm{C}}}{\partial i}i_{\mathrm{L}}^{(1)}\right) = -2a\left(\frac{A_2}{p^2}\right)\sqrt{1-e^2}\tan i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)i_{\mathrm{L}}^{(1)}. \tag{4.188}$$

将(4.142)**式** $i_{\mathrm{L}}^{(1)}$ **的** A_2 **部分与上两式一并代入**(4.186)**式，即得** $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$**的表达式**：

$$\begin{aligned}a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t) = \left(\frac{A_2^2}{p^4}a\right)\sqrt{1-e^2}\Big\{&\left[-\frac{1}{6}\sin^2 i(4-5\ \sin^2 i)\overline{\cos 2f} + \right.\\ &\left. e^2\sin^2 i\left(\frac{17}{12}-\frac{19}{8}\sin^2 i\right)\right]\cos 2\omega + \\ &\frac{e^4}{1-e^2}\left[\frac{7}{3}\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos 2\omega + \frac{1}{32}\sin^4 i\ \cos 4\omega\right]\Big\}.\end{aligned} \tag{4.189}$$

(2) $a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$

类似 $a_{\mathrm{L}}^{(2)}(t)$**的推导，将算符** D **引进**(4.181)**式，并将** D **作用于**(4.178)

式，取其短周期部分，这两式相减就给出 $a_S^{(2)}(t)$，即

$$a_S^{(2)}(t)=\left\{aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)+2a^2\left[\sum_j\frac{\partial R_{1C}}{\partial\sigma_j}(\sigma_S^{(1)})_j+\sum_j\frac{\partial R_{1S}}{\partial\sigma_j}(\sigma_L^{(1)}+\sigma_{lL}^{(1)})_j+R_{2S}\right]\right\}.\tag{4.190}$$

经简单计算就可给出具体表达式如下：

$$\begin{aligned}a_S^{(2)}(t)=&\left\{-\frac{2}{a}a_S^{(1)}(t)-\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right\}a_S^{(1)}+\\&\left\{-a\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\tan i(4-5\sin^2 i)\right\}(i_S^{(1)}-\overline{i_S^{(1)}})+\\&\frac{A_2}{a}\left\{2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f-e(1-e^2)^{-5/2}\right]+\right.\\&3\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\cos 2(f+\omega)-\frac{4}{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^5\left(\sin f+\right.\\&\left.\left.\frac{e}{4}\sin 2f\right)\sin 2(f+\omega)\right\}(e_S^{(1)}+e_L^{(1)}+e_{lL}^{(1)})+\\&\frac{A_2}{a}\left\{\sin 2i\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^3+(1-e^2)^{-3/2}+\right.\right.\\&\left.\left.\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right]\right\}(i_S^{(1)}+i_L^{(1)}+i_{lL}^{(1)})+\\&\frac{A_2}{a}\left\{-2\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2(f+\omega)\right\}(\omega_S^{(1)}+\omega_L^{(1)}+\omega_{lL}^{(1)})+\\&\frac{A_2}{a}\left\{-\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin f\left[2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\right.\right.\\&\left.3\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right]-2\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^5\sin 2(f+\\&\left.\omega)\right\}(M_S^{(1)}+M_L^{(1)}+M_{lL}^{(1)})+2a^2R_{2S}-\\&\left\{\left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_C+\left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_L\right\},\end{aligned}\tag{4.191}$$

其中

$$\begin{aligned}\left[aD\left(\frac{a_S^{(1)}}{a}\right)\right]_C=&\left(\frac{A_2}{p^2}\right)^2a\sqrt{1-e^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)^2\left[\left(\frac{16}{9}+\frac{19}{9}e^2\right)+\right.\right.\\&\left.\frac{2}{9}\sqrt{1-e^2}+\frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{18}\right)\right]+\sin^2 i\left(1+\frac{2}{3}e^2\right)+\\&\left.\sin^4 i\left[\left(-\frac{5}{6}+\frac{25}{24}e^2\right)+\frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{16}\right)\right]\right\}.\end{aligned}\tag{4.192}$$

关于$\left[aD\left(\frac{a_{\mathrm{S}}^{(1)}}{a}\right)\right]_{\mathrm{L}}$，见(4.187)式. 注意，(4.191)式中 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}$ 与 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}$ 同时出现的地方，若 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}$ 不减去$\overline{\sigma_{\mathrm{S}}^{(1)}}$，则 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}$ 中要舍去这一项.

从上面的推导过程可以看出，对根数的处理与平均根数法完全相同，但具体导出 a 的二阶周期项却简单得多，这就弥补了平均根数法的不足之处(即推导过程的复杂性).

§4.4 中心天体非球形引力摄动(Ⅱ)——主要田谐项摄动

主要带谐项(J_2 项)反映天体的扁球形(两极扁，赤道隆起)，而主要田谐项($J_{2,2}$项)则反映天体赤道是椭圆状，该项对 24^{h}地球同步卫星轨道的影响非常显著.

1. $J_{2,2}$项摄动函数

在标准单位系统中，仅考虑 $l=m=2$ 这一项，由(4.69)式给出相应的摄动函数为

$$R_{2,2} = \frac{J_{2,2}}{r^3}P_{2,2}(\sin\varphi)\cos 2\bar{\lambda}, \tag{4.193}$$

有

$$\begin{cases} J_{2,2} = (C_{2,2}^2 + S_{2,2}^2)^{1/2}, \\ \bar{\lambda} = \lambda_{\mathrm{G}} - \lambda_{2,2}, \\ \tan 2\lambda_{2,2} = S_{2,2}/C_{2,2}. \end{cases} \tag{4.194}$$

注意，这里 $J_{2,2}$的符号与我们过去的有关工作中采用的 $J_{2,2}$正好相反. 显然，由(4.193)式表达的摄动函数对$\bar{\lambda}$而言是对称的，即

$$R_{2,2}(+\bar{\lambda}) = R_{2,2}(-\bar{\lambda}).$$

这里$\bar{\lambda}$是从 $\lambda=\lambda_{2,2}$ 的赤道"对称轴"(即赤道长轴)方向起量的经度. 根据P_{lm}的定义，$R_{2,2}$可写成下列形式：

$$R_{2,2} = \frac{3J_{2,2}}{r^3}\cos^2\varphi\cos 2\bar{\lambda}. \tag{4.195}$$

现在将 $R_{2,2}$表示为轨道根数的形式. 这将涉及到地固坐标系与历元平赤道地心系(或轨道坐标系)之间的转换问题(见第一章 §1.1)，但对于一般问题可不考虑赤道的变化. 在这种情况下，可由图 4.1 来表示两坐标系之间的

关系. 图中 $\bar{x}$ 是"对称轴"方向,因此有

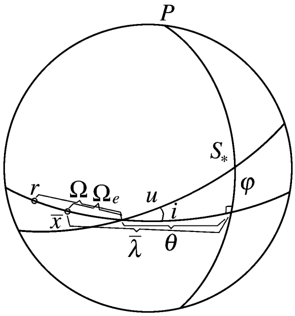

图 4.1　两种坐标系之间的关系

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \Omega_e + \theta, \\ \Omega_e = (\Omega - S_{2,2}) - n_e(t - t_0), \end{cases} \tag{4.196}$$

其中 $S_{2,2}$ 是历元 t_0 时"对称轴"方向的地方恒星时, n_e 是地球自转角速度. 由球面三角公式

$$\cos\varphi\cos\theta = \cos u, \quad \cos\varphi\sin\theta = \sin u\cos i,$$
$$\sin\varphi = \sin u\sin i,$$

得出

$$\begin{aligned} \cos^2\varphi\cos 2\bar{\lambda} &= \cos^2\varphi(\cos 2\theta\cos 2\Omega_e - \sin 2\theta\sin 2\Omega_e) \\ &= \frac{1}{4}(1+\cos i)^2\cos(2u+2\Omega_e) + \\ &\quad \frac{1}{4}(1-\cos i)^2\cos(2u-2\Omega_e) + \frac{1}{2}\sin^2 i\cos 2\Omega_e, \end{aligned}$$

其中 $u = f + \omega$. 将此式代入(4.195)式得

$$\begin{aligned} R_{2,2} = \frac{3J_{2,2}}{4a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 [&(1+\cos i)^2\cos(2u+2\Omega_e) + \\ &(1-\cos i)^2\cos(2u-2\Omega_e) + 2\sin^2 i\cos 2\Omega_e]. \end{aligned} \tag{4.197}$$

这就是主要田谐项摄动函数的根数形式,它与带谐项摄动函数有显著差别,即显含时间 t,这在 §4.2 中已提过.

由于摄动函数显含 t,又与真近点角 f 分不开,这给积分造成了困难,必须将 $\left(\frac{a}{r}\right)$ 和 f 等量展成平近点角 M 的三角级数,相应的摄动解对偏心率 e 将是不"封闭"的. 利用第二章 §2.2 中给出的结果 $R_{2,2}$ 中出现的 $\left(\frac{a}{r}\right)^3$, $\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f$ 和 $\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2f$ 展成 M 的三角级数,取到 e^2 项的形式为

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3=\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)+3e\cos M+\frac{9}{2}e^2\cos 2M+\cdots, \tag{4.198}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f=-\frac{e}{2}\cos M+\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\cos 2M+\frac{7}{2}e\cos 3M+\frac{17}{2}e^2\cos 4M+\cdots, \tag{4.199}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2f=-\frac{e}{2}\sin M+\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\sin 2M+\frac{7}{2}e\sin 3M+\frac{17}{2}e^2\sin 4M+\cdots, \tag{4.200}$$

将此式代入(4.197)式得

$$\begin{aligned}R_{2,2}=\frac{3J_{2,2}}{4a^3}\Big\{&(1+\cos i)^2\Big[\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-\\&e\left(\frac{1}{2}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{2}\cos(3M+2\omega+2\Omega_e)\right)-\\&e^2\left(\frac{5}{2}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{17}{2}\cos(4M+2\omega+2\Omega_e)\right)\Big]+\\&(1-\cos i)^2\Big[\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-\\&e\left(\frac{1}{2}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{2}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)\right)-\\&e^2\left(\frac{5}{2}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{17}{2}\cos(4M+2\omega-2\Omega_e)\right)\Big]+\\&2\sin^2 i\Big[\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\cos 2\Omega_e+\\&\frac{3}{2}e(\cos(M+2\Omega_e)+\cos(M-2\Omega_e))+\\&\frac{9}{4}e^2(\cos(2M+2\Omega_e)+\cos(2M-2\Omega_e))\Big]\Big\}+O(e^3J_{2,2}).\end{aligned} \tag{4.201}$$

不难看出,$R_{2,2}$ 包含的全是短周期项,只有一项的周期稍长些,即 $\cos 2\Omega_e$,其周期为半天. 因此,$J_{2,2}$ 项对卫星轨道的影响基本上具有短周期性质,将 $R_{2,2}$ 代入摄动运动方程(3.75)式即得右函数 f_{2S}.

2. $J_{2,2}$ 项的摄动解

仅 $J_{2,2}$ 一项产生的摄动解应为

$$\sigma_S^{(2)}(t)=\int^t\left[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_S^{(2)}+f_{2S}\right]_{\bar\sigma}\mathrm{d}t,$$

考虑到实际情况和分析问题时的需要，解保留到 $O(e)$ 项就够了. 积分后得

$$
\begin{aligned}
a_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{2a}\Big\{&(1+\cos i)^2\Big[\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-\\
&\frac{e}{2}\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{1-2\alpha/3}\cos(3M+2\omega+\\
&2\Omega_e)\Big)\Big]+(1-\cos i)^2\Big[\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-\\
&\frac{e}{2}\Big(\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{1-2\alpha/3}\cos(3M+2\omega-\\
&2\Omega_e)\Big)\Big]+2\sin^2 i\\
&\Big(\frac{3e}{2}\Big)\Big[\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e)\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.202}
$$

$$
\begin{aligned}
e_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\Big\{&(1+\cos i)^2\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)+\\
&\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega+2\Omega_e)\Big)+\\
&\frac{e}{2}\Big(-\frac{e}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)+\\
&\frac{17}{2(1-\alpha/2)}\cos(4M+2\omega+2\Omega_e)\Big)\Big]+\\
&(1-\cos i)^2\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)+\\
&\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)\Big)+\\
&\frac{e}{2}\Big(-\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)+\\
&\frac{17}{2(1+\alpha/2)}\cos(4M+2\omega-2\Omega_e)\Big)\Big]+\\
&2\sin^2 i\Big[\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e)\Big)+\\
&\frac{9}{4}e\Big(\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M-2\Omega_e)\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.203}
$$

$$
\begin{aligned}
i_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\sin i\Big\{&-(1+\cos i)\Big[\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-\\
&e\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega+
\end{aligned}
$$

$$2\Omega_e)\Big)\Big]+(1-\cos i)\Big[\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-$$

$$e\Big(\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-$$

$$\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)\Big)\Big]+2\Big[\frac{1}{\alpha}\cos(2\Omega_e)-$$

$$3e\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)-\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e)\Big)\Big]\Big\}, \quad (4.204)$$

$$\Omega_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\Big\{-(1+\cos i)\Big[\frac{1}{1-\alpha}\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)-$$

$$e\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega+$$

$$2\Omega_e)\Big)\Big]+(1-\cos i)\Big[\frac{1}{1+\alpha}\sin(2M+2\omega-2\Omega_e)-$$

$$e\Big(\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega-$$

$$2\Omega_e)\Big)\Big]-2\cos i\Big[\frac{1}{a}\sin(2\Omega_e)-$$

$$3e\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M-2\Omega_e)\Big)\Big]\Big\}. \quad (4.205)$$

$$\omega_S^{(2)}(t)=[\omega_S^{(2)}(t)]_1+[\omega_S^{(2)}(t)]_2. \quad (4.206)$$

其中

$$[\omega_S^{(2)}(t)]_1=-\cos\Omega_S^{(2)}(t),$$

$$[\omega_S^{(2)}(t)]_2=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\Big(\frac{1}{e}\Big)\Big\{-(1+\cos i)^2\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+$$

$$2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega+2\Omega_e)\Big)+$$

$$e\Big(\frac{5}{2(1-\alpha)}\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)-$$

$$\frac{17}{4(1-\alpha/2)}\sin(4M+2\omega+2\Omega_e)\Big)\Big]-$$

$$(1-\cos i)^2\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M+2\omega-2\Omega_e)-$$

$$\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega-2\Omega_e)\Big)+$$

$$e\Big(\frac{5}{2(1+\alpha)}\sin(2M+2\omega-2\Omega_e)-$$

$$\frac{17}{4(1+\alpha/2)}\sin(4M+2\omega-2\Omega_e)\Big)\Big]+$$

$$2\sin^2 i\Big[\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\ \sin(M+2\Omega_e)+$$

$$\frac{1}{1+2\alpha}\ \sin(M-2\Omega_e)\Big)+$$

$$\frac{9}{4}e\Big(-\frac{2}{3}\alpha\ \sin 2\Omega_e+\frac{1}{1-\alpha}\ \sin(2M+2\Omega_e)+$$

$$\frac{1}{1+\alpha}\ \sin\ (2M-2\Omega_e)\Big)\Big]\Big\},$$

$$M_S^{(2)}(t)=-[\omega_S^{(2)}(t)]_2+\frac{9(J_{2,2})}{4a^2}\Big\{(1+\cos i)^2\Big[\frac{1}{1-\alpha}(1-$$

$$\frac{1}{2(1-\alpha)}\ \Big)\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)-$$

$$e\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\Big(1-\frac{1}{2(1-2\alpha)}\Big)\ \sin(M+2\omega+2\Omega_e)-$$

$$\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\ \Big(1-\frac{1}{2(1-2\alpha/3)}\Big)\ \sin(3M+2\omega+2\Omega_e)\Big)\Big]+$$

$$(1-\cos i)^2\Big[\frac{1}{1+\alpha}\Big(1-\frac{1}{2(1+\alpha)}\Big)\ \sin(2M+2\omega-2\Omega_e)-$$

$$e\Big(\frac{1}{1+2\alpha}\Big(1-\frac{1}{2(1+2\alpha)}\Big)\ \sin(M+2\omega-2\Omega_e)-$$

$$\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\ \Big(1-\frac{1}{2(1+2\alpha/3)}\Big)\ \sin(3M+2\omega-2\Omega_{2,2})\Big)\Big]+$$

$$2\sin^2 i\Big[-\frac{1}{\alpha}\ \sin(2\Omega_e)+$$

$$3e\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\Big(1-\frac{1}{2(1-2\alpha)}\Big)\ \sin(M+2\Omega_e)+$$

$$\frac{1}{1+2\alpha}\Big(1-\frac{1}{1+2\alpha}\Big)\ \sin(M-2\Omega_e)\Big)\Big]\Big\}. \tag{4.207}$$

以上各式中的 α 为“速度”比：

$$\alpha=n_e/\bar{n}, \tag{4.208}$$

即地球自转角速度 n_e 与卫星平运动角速度 $\bar{n}$ 之比. 各式中出现的根数应为平均根数.

从积分结果(4.202)～(4.207)**式可以看出，对于低轨卫星，$J_{2,2}$ 项摄动只是二阶短周期的，但有一项$\frac{1}{\alpha}\sin 2\Omega_e$（或$\frac{1}{\alpha}\ \cos 2\Omega_e$）例外. 因 $\alpha\approx 0.1$，该项要比二阶小量大一个量级，且周期稍长些，在某些人造卫星工作中还是应该考虑这一项的. 对于高轨卫星，特别是 24^h 地球同步卫星，$J_{2,2}$ 项的摄动影响将是显著的，下面予以讨论.**

3. 通约问题和 24^{h} 卫星

从上述 $\sigma_S^{(2)}(t)$ 的表达式可以看出，当 $1-2\alpha, 1-\alpha, 1-2\alpha/3, 1-\alpha/2$ 四个因子中有一个为零，解就不能用，相应地有 $\dfrac{\bar{n}}{n_e}=2,1,2/3,1/2$，这对应于 $12^h, 24^h, 36^h, 48^h$ 卫星，它们的平运动角速度与地球自转角速度成简单整数比，此即通约问题. 与 §4.3 中的 $i=i_C$（临界倾角）问题类似，也是一种奇点（通约奇点）. 当 $\bar{n}/n_e$ 接近 $2,1,2/3,1/2$ 时，$1-2\alpha, 1-\alpha, 1-2\alpha/3, 1-\alpha/2$ 的量级可达到 10^{-3}（即 J_2 的量级），出现小分母，二阶短周期项 $\sigma_S^{(2)}(t)$ 的表达式(4.202)～(4.207)中相应的项（即通约项）将转化为一阶长周期项 $\sigma_l^{(1)}(t)$. 因此，$J_{2,2}$ 对 $12^h, 24^h, 36^h, 48^h$ 卫星轨道的影响就比较显著，特别是对 24^h 卫星，其通约项前面无 e 因子. 下面具体给出 $J_{2,2}$ 项对这种卫星轨道的长周期摄动解.

考虑 $\alpha=n_e/\bar{n}=1$ 的通约项，由(4.201)式立即可得 24^h 卫星通约项对应的摄动函数：

$$R_{2,2}=\frac{3(J_{2,2})}{4a^3}\left\{(1+\cos i)^2\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)+\right.$$
$$\left.2\sin^2 i\left(\frac{9}{4}e^2\right)\cos(2M+2\Omega_e)\right\}, \tag{4.209}$$

将这一 $R_{2,2}$ 带入摄动运动方程(3.75)式，即得相应的右函数 $f_{2l}(J_{2,2})$. 由(4.38)式得出

$$\sigma_L^{(1)}(t)=\int^t\left[\delta\left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)a_L^{(2)}+\sum_j\frac{\partial f_{1c}}{\partial\sigma_j}(\sigma_L^{(1)})_j+f_{2L}(J_{2,2})\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t. \tag{4.210}$$

另外，由于 $a_L^{(1)}(t)\neq 0$，因此对 M 还应有一项，即

$$\int^t\left[\frac{\partial n}{\partial a}a_L^{(1)}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t,$$

该项积分后变成零阶长周期项，方法失效. 因此，对于通约问题，与带谐项摄动中的临界角问题一样，不能简单地采用平均根数法，必须加以改进. 如拟平均根数法[3,4]，上述各间接部分

$$\frac{\partial n}{\partial a}(a_L^{(1)}+a_L^{(2)}),\ \sum_j\frac{\partial f_{1c}}{\partial\sigma_j}(\sigma_L^{(1)})_j$$

都不出现. 故这里对六个根数只计算直接部分，即

$$\sigma_L^{(1)}(t)={}^t[f_{2L}(J_{2,2})]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t. \tag{4.211}$$

对于 24^h 卫星，通常是近圆轨道 $e\approx 0$. 因此，即使是一阶长周期项，也只

要保留到 $O(e)$ 项就够了，由此积分后得

$$a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{2a}\bar{n}\left[(1+\cos i)^2\frac{\cos(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right],\tag{4.212}$$

$$e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{8a^2}\bar{n}e\left[-(1+\cos i)^2\frac{\cos(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}+9\sin^2 i\frac{\cos(2M+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+M_1)}\right],\tag{4.213}$$

$$i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\frac{3(-J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\sin i\left[-(1+\cos i)\frac{\cos(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right],\tag{4.214}$$

$$\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\left[-(1+\cos i)\frac{\sin(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right],\tag{4.215}$$

$$\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_1+[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2.\tag{4.216}$$

其中

$$[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_1=-\cos i\ \Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t),$$

$$[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\left[-\frac{5}{2}(1+\cos i)^2\frac{\sin(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}+\frac{9}{2}\sin^2 i\frac{\sin(2M+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+M_1)}\right],$$

$$M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\frac{9(J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\left[(1+\cos i)^2\frac{\sin(2M+2\omega+2\Omega_{\mathrm{e}})}{(\bar{n}-n_{\mathrm{e}})+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right]-[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2.\tag{4.217}$$

上述各式右端出现的根数均为平均根数 $\bar{\sigma}$，有 $\bar{\sigma}(t)=\bar{\sigma}_0+\sigma_1(t-t_0)$，其中 Ω_1,ω_1 和 M_1 的计算公式已在§4.3 中给出，见(4.117)～(4.119)式.

4. 一点注解

上述结果是针对地球卫星的，地球自转较快，(4.208)式定义的速度比 α 不是太小. 但对于慢自转天体，如金星与月球，相应的 α 值很小，中心天体自转项 $n_{\mathrm{e}}t$ 将以慢变量出现在田谐项摄动函数 $R_{2,2}$（或一般项 $R_{l,m}$）中，与卫星运动的慢变量 Ω,ω 相当. 那么，在构造摄动解时，就不需要将摄动函数展成平近点角 M 的三角级数，相应的摄动解对偏心率 e 仍是封闭的. 关于如何构造金星轨道器和环月卫星的摄动分析解，请见参考文献[8]和[9].

§4.5 带谐项(J_l,$l\geqslant 3$)摄动解的一般形式

在标准单位系统中,由(4.68)式给出一般带谐项(J_l,$l\geqslant 3$)摄动函数的轨道根数表达形式如下[5]:

$$R_l = \sum_{l\geqslant 3} \frac{(-J_l)}{a^{l+1}} \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^{p} (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_2)} \times \right.$$
$$\left. \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q)} \right] \times$$
$$\left[(1-\delta_1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \cos(l-2p)u + \delta_1 \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sin(l-2p)u \right]. \tag{4.218}$$

式中 $u=f+\omega$,符号 δ_1 和 δ_2 的定义如下:

$$\delta_1 = \frac{1}{2}[1-(-1)^l] = \begin{cases} 1, & l\ \text{奇}, \\ 0, & l\ \text{偶}, \end{cases} \tag{4.219}$$

$$\delta_2 = \begin{cases} 0, & l-2p=0, \\ 0, & l-2p\neq 0. \end{cases} \tag{4.220}$$

用求平均值的方法即可将 R_l 分解成长期、长周期和短周期三个部分,即

$$(R_l)_{\mathrm{C}} = \sum_{l(2)\geqslant 4} \frac{(-J_l)}{a^{l+1}} \left[\sum_{q=0}^{l/2} (-1)^{(l+2q)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{l+2q} \times \right.$$
$$\left. \binom{l}{l/2-q} \binom{l+2q}{l} \binom{2q}{q} (\sin i)^{2q} \right] K_{l+1}(e), \tag{4.221}$$

$$(R_l)_{\mathrm{L}} = \sum_{l\geqslant 3} \frac{(-J_l)}{a^{l+1}}$$
$$\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^{p} (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)(2l-2p+2q-1) \times \right.$$
$$\left. \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q)} \right] \times$$
$$K_{l+1}^{p}(e)[(1-\delta_1)\cos(l-2p)\omega + \delta_1 \sin(l-2p)\omega], \tag{4.222}$$

$$(R_l)_{\mathrm{S}} = R_l - [(R_l)_{\mathrm{C}} + (R_l)_{\mathrm{L}}]. \tag{4.223}$$

其中

$$\begin{cases} K_{l+1} = \overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^{l+1}}, \\ K_{l+1}^{p}(e) = \overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)f}, \end{cases} \tag{4.224}$$

这两个平均值的具体形式将在下面给出.

按平均根数法即可导出带谐项摄动的二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$,一阶长周期项 $\sigma_L^{(1)}(t)$和轨道半长径 a 的二阶短周期项 $a_S^{(2)}(t)$,下面分别给出.

1. $\boldsymbol{\sigma}_2$

$$a_2=0,\quad e_2=0,\quad i_2=0, \tag{4.225}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 = {} & n\cos i \sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{q=1}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}\times \\ & 2q\binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q}(\sin i)^{(2q-2)}K_1(e), \end{aligned} \tag{4.226}$$

$$\begin{aligned} \omega_2 = {} & -\cos i\ \Omega_2 + \\ & n\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{q=0}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}\times \\ & \binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q}(\sin i)^{2q}\times \\ & [(2l-1)K_1(e)+(1-e^2)K_2(e)], \end{aligned} \tag{4.227}$$

$$\begin{aligned} M_2 = {} & -\sqrt{1-e^2}(\omega_2+\cos i\Omega_2)+ \\ & n\sqrt{1-e^2}\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{q=0}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}2(l+1)\times \\ & \binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q}(\sin i)^{2q}K_1(e). \end{aligned} \tag{4.228}$$

其中

$$\begin{cases} K_1(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=0}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha}, \\ K_2(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=2}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha/2}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha-2}, \end{cases} \tag{4.229}$$

上述各式中出现的根数 a,e,i 及 n,p_0 均为$\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$和 $\bar{n}=\bar{a}_0^{-3/2},\bar{p}_0=\bar{a}_0(1-\bar{e}_0^2)$.

2. $\boldsymbol{\sigma}_L^{(1)}(t)$

直接部分如下:

$$a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=0, \tag{4.230}$$

$$\begin{aligned}e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) &= -\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right) i_1^{(1)}(t)\\ &= -(1-e^2)\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\times\\ &\quad \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right.\\ &\quad \left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times\\ &\quad \frac{1}{e}K_3(e)I(\omega),\end{aligned} \tag{4.231}$$

$$\begin{aligned}i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) &= \cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right.\\ &\quad \left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q-1)}\right]\times\\ &\quad K_3(e)I(\omega),\end{aligned} \tag{4.232}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) &= \cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\\ &\quad \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}(l-2p+2q)\times\right.\\ &\quad \binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}\\ &\quad \left.(\sin i)^{(l-2p+2q-2)}\right]K_3(e)H(\omega),\end{aligned} \tag{4.233}$$

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) &= -\cos i\ \Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\\ &\quad \sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right.\\ &\quad \left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times\\ &\quad \left[(2l-1)K_3(e)+(1-e^2)K_4(e)\right]H(\omega),\end{aligned} \tag{4.234}$$

$$M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\sqrt{1-e^2}\left[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\cos i\ \Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)\right]+$$

$$
\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\Bigg[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\times
\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}2(l+1)\times\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\times
\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\Bigg]K_3(e)H(\omega). \tag{4.235}
$$

对 Ω,ω,M 还有间接部分，公式如下：

$$
\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}=\frac{5\cos i}{(2-5\sin^2 i/2)}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)
\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\Bigg[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times
\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\Bigg]\times
K_3(e)H(\omega), \tag{4.236}
$$

$$
\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}=\frac{(13-15\sin^2 i)}{(2-5\sin^2 i/2)}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\times
\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\Bigg[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times
\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\Bigg]\times
K_3(e)H(\omega), \tag{4.237}
$$

$$
M_{\mathrm{L}}^{(1)}=-3\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}
\Bigg[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times
\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\Bigg]\times
K_3(e)H(\omega). \tag{4.238}
$$

上述各式中有关量由下列各式表达：

$$
\begin{cases}
K_3(e)=\displaystyle\sum_{\alpha(2)=l-2p}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{(\alpha-l+2p)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha}, \\
K_4(e)=\displaystyle\sum_{\alpha(2)=l-2p}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{(\alpha-l+2p)/2}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha-2},
\end{cases} \tag{4.239}
$$

$$\begin{cases} I(\omega)=\left(\dfrac{n}{\omega_1}\right)\left[(1-\delta_1)\cos(l-2p)\omega+\delta_1\sin(l-2p)\omega\right], \\ H(\omega)=\left(\dfrac{n}{\omega_1}\right)\left[(1-\delta_1)\dfrac{1}{l-2p}\sin(l-2p)\omega-\delta_1\dfrac{1}{(l-2p)}\cos(l-2p)\omega\right]. \end{cases} \tag{4.240}$$

上述各式中出现的根数除 a,e,i 及 n,p_0 与 σ_2 中相同外,ω 亦为平均根数$\bar{\omega}(t)$,相应的 ω_1 是其一阶长期项的变率,见(4.118)式.

3. $a_S^{(2)}(t)$中的 J_L部分

由摄动运动方程 da/dt 的表达式和$(R_l)_S$ 的特征,不难给出 $a_S^{(t)}$,如下:

$$a_S^{(2)}(t)=\frac{2}{n^2a}R_{2S}=2a^2(R_l)_S. \tag{4.241}$$

$(R_l)_S$ 的表达式前面已给出,见(4.223)式,涉及到的两个平均值 $K_{l+1}(e)$和 $K_{l+1}^p(e)$由下式表达:

$$\begin{cases} K_{l+1}(e)=(1-e^2)^{-\left(l-\frac{1}{2}\right)}K_1(e), \\ K_{l+1}^p(e)=\delta_3(1-e^2)^{-\left(l-\frac{1}{2}\right)}K_3(e), \end{cases} \tag{4.242}$$

其中

$$\delta_3=\begin{cases} 0, & p=0 \\ 1, & p\neq 0 \end{cases} \tag{4.243}$$

§4.6 田谐项($J_{l,m}, l\geqslant 2, m=1\sim l$)摄动解的一般形式

利用线性变换的方法,可将球谐函数 $P_{lm}(\sin\varphi)\cos\lambda_G$ 和 $P_{lm}(\sin\varphi)\sin\lambda_G$表示成轨道根数 $u=f+\omega$ 和 Ω 的三角函数的线性组合[10],从而将(4.66)式给出的田谐项摄动函数 ΔV_2 写成下列形式:

$$\begin{aligned} R_{lm} = \frac{GM}{a}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_e}{a}\right)^l F_{lmp}(i)\left(\frac{a}{r}\right)^{(l+1)} & \\ \{[(1-\delta_m)C_{lm}-\delta_m S_{lm}]\cos((1-2p)u+m(\Omega-S_G))+ & \\ [(1-\delta_m)S_{lm}+\delta_m C_{lm}]\sin((l-2p)u+m(\Omega-S_G))\}. & \end{aligned} \tag{4.244}$$

其中倾角函数 $F_{lmp}(i)$后面将具体给出,而符号 δ_m 定义如下:

$$\delta_m=\frac{1}{2}[1-(-1)^{l-m}]. \tag{4.245}$$

进一步将其中的 $\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)u$ **和** $\left(\frac{a}{r}\right)\sin(l-2p)u$ **展成平近点角** M **的三角级数，最终将** R_{lm} **的形式表达如下：**

$$R_{lm}=\frac{GM}{a}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\sum_{p=0}^{l}\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}F_{lmp}(i)\sum_{q=-\infty}^{\infty}G_{lpq}(e)S_{lmpq}(M,\omega,\Omega;S_{\mathrm{G}}). \tag{4.246}$$

其中

$$\begin{aligned}S_{lmpq}=&[(1-\delta_{lm})C_{lm}-\delta_{lm}S_{lm}]\cos\psi_{lmpq}+\\&[(1-\delta_{lm})S_{lm}+\delta_{lm}C_{lm}]\sin\psi_{lmpq},\end{aligned} \tag{4.247}$$

$$\psi_{lmpq}=(l-2p+q)M+(l-2p)\omega+m(\Omega-S_{\mathrm{G}}), \tag{4.248}$$

$$G_{lpq}(e)=X_{(l-2p+q)}^{-(l+1),(l-2p)}(e). \tag{4.249}$$

(4.249)**式右端即第 2 章 § 2.2 中给出的汉森系数.**

与 $J_{2,2}$ **一样，对于地球卫星，田谐项摄动均为短周期效应，包括地球自转效应，相应的短周期项记为** $\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$**，有**

$$\begin{cases}\sigma_{\mathrm{S}}{}^{(2)}(t)=\displaystyle\sum_{L\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\sum_{p=0}^{l}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\Delta\sigma_{lmpq},\\ \Delta\sigma_{lmpq}=\begin{cases}C_{lmpq}^{\sigma}\,S_{lmpq}, & \text{对 } a,e,i,\\ C_{lmpq}^{\sigma}\,S_{lmpq}^{*}, & \text{对 } \Omega,\omega,M,\end{cases}\end{cases} \tag{4.250}$$

$$\begin{aligned}S_{lmpq}^{*}=&[(1-\delta_{lm})C_{lm}-\delta_{lm}S_{lm}]\sin\dot{\psi}_{lmpq}-\\&[(1-\delta_{lm})S_{lm}+\delta_{lm}C_{lm}]\cos\psi_{lmpq}.\end{aligned} \tag{4.251}$$

C_{lmpq}^{σ} **的具体形式如下：**

$$C_{lmpq}^{a}=2a\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}(l-2p+q)F_{lmp}(i)G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right), \tag{4.252}$$

$$\begin{aligned}C_{lmpq}^{e}=&\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}\frac{\sqrt{1-e^{2}}}{e}\left[(l-2p+q)\sqrt{1-e^{2}}-(l-2p)\right]F_{lmp}(i)\times\\&G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right),\end{aligned} \tag{4.253}$$

$$C_{lmpq}^{i}=\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}\frac{1}{\sqrt{1-e^{2}}\,\sin i}[(l-2p)\cos i-m]F_{lmp}(i)\,G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right), \tag{4.254}$$

$$C_{lmpq}^{\Omega}=\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}\frac{1}{\sqrt{1-e^{2}}\,\sin i}F'_{\mathrm{lmp}}(i)G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right), \tag{4.255}$$

$$C_{lmpq}^{\omega}=-\cos i\,C_{lmpq}^{\Omega}+\left(\frac{a_{\mathrm{e}}}{a}\right)^{l}\frac{\sqrt{1-e^{2}}}{e}F_{lmp}(i)\,G'_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right), \tag{4.256}$$

$$C_{lmpq}^{M} = -\sqrt{1-e^2}\,(C_{lmpq}^{\omega} + \cos i\, C_{lmpq}^{\Omega}) + \left(\frac{a_e}{a}\right)^l \Big[2(l+1) - 3(l-2p+q)\left(\frac{n}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right)\Big] F_{lmp}(i)\, G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right). \tag{4.257}$$

其中$\dot{\psi}_{lmpq}$可按下式取近似值：

$$\begin{cases}\dot{\psi}_{lmpq} = (l-2p+q)\,\dot{\bar{M}} + (l-2p)\,\dot{\bar{\omega}} + m(\dot{\bar{\Omega}} - n_e) \\ \qquad \approx (l-2p+q)\bar{n} - m\, n_e = \bar{n}[(l-2p+q) - m\,\alpha]. \\ \alpha = n_e/\bar{n}, \qquad \bar{n} = \bar{a}^{-3/2}.\end{cases} \tag{4.258}$$

n_e是地球自转角速度，即恒星时变率，在历元地心平赤道系和轨道坐标系中均可采用下列数值：

$$n_e = 360^\circ.985647365/d. \tag{4.259}$$

相应的上述坐标系中的格林尼治恒星时 S_G 可用平恒星时$\bar{S}_G$，计算公式如下：

$$\bar{S}_G = 280^\circ.460619 + 360^\circ.985647365d, \tag{4.260}$$

$$d = \mathrm{JD}(t) - \mathrm{JD}(\mathrm{J}2000.0), \tag{4.261}$$

其中 d 为 J2000.0 起算的儒略日.

倾角函数 $F_{lmp}(i)$和汉森系数 $G_{lpq}(e)$以及它们的导数分别由下列各式表达：

$$\begin{aligned}F_{lmp}(i) &= \frac{(l+m)!}{2^l p!(l-p)!}\sum_{k=k_1}^{k_2}(-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2}\binom{2l-2p}{k}\binom{2p}{l-m-k}\times \\ &\quad \left(\sin\frac{i}{2}\right)^{-(l-m-2p-2k)}\left(\cos\frac{i}{2}\right)^{(3l-m-2p-2k)} \\ &= \frac{(l+m)!}{2^{2l}p!(l-p)!}\sum_{k=k_1}^{k_2}(-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2}\binom{2l-2p}{k}\binom{2p}{l-m-k}\times \\ &\quad (\sin i)^{-(l-m-2p-2k)}(1+\cos i)^{(2l-m-2p-2k)},\end{aligned} \tag{4.262}$$

$$k_1 = \max(0, l-m-2p), \quad k_2 = \min(l-m, 2l-2p), \tag{4.263}$$

$$\begin{aligned}F'_{lmp}(i) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}F_{lmp}(i) \\ &= \frac{(l+m)!}{2^l p!(l-p)!}\left(\frac{1}{\sin i}\right)\sum_{k=k_1}^{k_2}(-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2}\times \\ &\quad \binom{2l-2p}{k}\binom{2p}{l-m-k}\times\end{aligned}$$

$$\left[-2l\sin^2\frac{i}{2}-(l-m-2p-2k)\right]\times$$
$$\left(\sin\frac{i}{2}\right)^{-(l-m-2p-2k)}\times\left(\cos\frac{i}{2}\right)^{(3l-m-2p-2k)}. \tag{4.264}$$

精确到 $O(e^2)$ **项有**

$$X_p^{l,p}(e)=1+\frac{1}{4}(l^2+l-4p^2)e^2, \tag{4.265}$$

$$\begin{cases}X_{p+1}^{l,p}(e)=-\dfrac{1}{2}(l-2p)e,\\ X_{p-1}^{l,p}(e)=-\dfrac{1}{2}(l+2p)e,\end{cases} \tag{4.266}$$

$$\begin{cases}X_{p+2}^{l,p}(e)=\dfrac{1}{8}[l^2-(4p+3)l+p(4p+5)]e^2,\\ X_{p-2}^{l,p}(e)=\dfrac{1}{8}[l^2+(4p-3)l+p(4p-5)]e^2.\end{cases} \tag{4.267}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_p^{l,p}(e))=\frac{1}{2}(l^2+l-4p^2)e, \tag{4.268}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p+1}^{l,p}(e))=-\dfrac{1}{2}(l-2p),\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p-1}^{l,p}(e))=-\dfrac{1}{2}(l+2p),\end{cases} \tag{4.269}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p+2}^{l,p}(e))=\dfrac{1}{4}[l^2-(4p+3)l+p(4p+5)]e,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p-2}^{l,p}(e))=\dfrac{1}{4}[l^2+(4p-3)l+p(4p-5)]e.\end{cases} \tag{4.270}$$

上述(4.244)～(4.257)**式中出现的地球参考椭球体赤道半径** a_e **和地心引力常数** GM**,在前面采用的标准单位中均有** $a_e=1, GM=1$**,在下述公式中不再出现.**

除计算单位外,为了简便,采用前面§4.4 **中的表达式,将田谐项的两个谐系数** C_{lm} **和** S_{lm} **改用下列形式表达:**

$$\begin{cases}C_{lm}=J_{lm}\cos m\lambda_{lm}, \qquad S_{lm}=J_{lm}\sin m\lambda_{lm},\\ J_{lm}=(C_{lm}^2+S_{lm}^2)^{1/2},\\ m\lambda_{lm}=\arctan(S_{lm}/C_{lm}),\end{cases} \tag{4.271}$$

由此,S_{lmpq} **和** S_{lmpq}^* **的表达式**(4.247)**和**(4.251)**以及相应的**$\dot{\psi}_{lmpq}$ **变为下列形式:**

$$S_{lmpq}=J_{lm}[(1-\delta_{lm})\cos\dot{\psi}_{lmpq}^*+\delta_{lm}\sin\dot{\psi}_{lmpq}^*], \tag{4.272}$$

$$S_{lmpq}^*=J_{lm}[(1-\delta_{lm})\sin\dot{\psi}_{lmpq}^*-\delta_{lm}\cos\dot{\psi}_{lmpq}^*], \tag{4.273}$$

$$\dot{\psi}^{*}_{lmpq} = \dot{\psi}_{lmpq} - m\lambda_{lm}$$
$$= (l-2p+q)M + (l-2p)\omega + m\Omega_{lm}, \tag{4.274}$$
$$\Omega_{lm} = \Omega - (S_G + \lambda_{lm}). \tag{4.275}$$

由 R_{lm} 的表达式(4.246)或 $\sigma_S^{(2)}(t)$ 的表达式(4.252)~(4.257)式可以看出,当

$$l-2p+q=m\alpha,$$

即

$$\frac{\bar{n}}{n_e} = \frac{m}{l-2p+q} \tag{4.276}$$

时,卫星平运动角速度与地球自转角速度成简单整数比,上述摄动解无意义,这就是前面讨论 $J_{2,2}$ 项时所说的通约问题,(4.276)式即通约问题的判别准则. 显然,$(n-2p+q)$要取正值,即

$$l-2p+q=1,2,\cdots.$$

因此,对于任何一个卫星,几乎都存在通约问题. 特别是 24^h 卫星,所有田谐项都引起通约问题. 对于 2^h 近地卫星,有 $\bar{n}/n_e=12$,相应地 $m=12,24,\cdots$,即 $J_{12,12},J_{13,12},\cdots;J_{24,24},J_{25,24},\cdots$ 都会引起通约问题,只不过这些通约项含有因子 $1/r^{13},\cdots,1/r^{25},\cdots$,通约现象不显著.

当接近通约时,摄动解 $\sigma_S^{(2)}(t)$ 中有些项相应地转化为长周期项,这与前面 $J_{2,2}$ 项类似,不再论述.

§4.7 几类特殊卫星轨道

1. 太阳同步卫星与极轨道卫星

太阳同步卫星,即其轨道升交点(经度为 Ω)的进动速度 $\dot{\Omega}$ 与地球绕日公转的平运动速度 n_S 相等的卫星,也就是说,该卫星轨道平面在空间的移动与太阳向东运动(从地球上看)同步. 这是一种常见的应用卫星,如我国的第一代气象卫星风云 1 号等. 极轨卫星是指轨道倾角 $i=90°$的卫星,其轨道平面几乎不变,即 $\dot{\Omega}=0$.

这两种卫星轨道能否实现,可从地球非球形引力摄动导致的卫星轨道变化规律中找到答案. 根据 §4.3 中得到的结果,在主要带谐项(J_2)的影响下,轨道升交点经度变化的一阶长期项系数(即变率)为

$$\Omega_1 = -\frac{3J_2}{2p^2} n\cos i.$$

由此可知，当 $i=90°$ 时，轨道平面不动；又根据 $\Omega_1=n_S$ 的条件，在给定 a 和 e 两个根数的前提下，可以确定倾角 i，使轨道平面的运动与太阳同步. 但这些都仅仅是根据一阶长期摄动项（当然，也是最主要的摄动项）的结果而得出的结论，若完整地考虑各种摄动源的影响，上述结论是否还能保持，本节将对此作进一步的阐明.

（1）卫星轨道变化的有关规律

上述两种卫星都涉及到轨道平面的定向问题，前者是进动速度保持定值问题，而后者则是轨道平面保持不变的问题. 关于轨道平面的两个定向根数（i，Ω），在受摄情况下，所满足的微分方程如下

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\cos i\dfrac{\partial R}{\partial\omega}-\dfrac{\partial R}{\partial\Omega}\right),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial R}{\partial i},\end{cases}\tag{4.277}$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r\cos(f+\omega)}{na^2\sqrt{1-e^2}}W,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r\sin(f+\omega)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W,\end{cases}\tag{4.278}$$

其中 R 是摄动函数，W 是摄动加速度的轨道平面法向分量，其他各量 a，e 等皆为常用的符号，不再说明.

根据前面几节的结果，我们已了解到如下几点：

1）对于地球非球形引力位的带谐项 J_l（即 $C_{l,0}$，$l=1,2,\cdots$）部分，相应的摄动函数 $R(J_l)$ 与 Ω 无关，而且含有因子 $\sin i$（奇次带谐项）或 $\sin^2 i$（偶次带谐项）. 因此，相应的方程（4.277）有如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\cos i\,\Phi_1(J_l;a,e,i,\omega,M),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=-\cos i\,\Phi_2(J_l;a,e,i,\omega,M),\end{cases}\tag{4.279}$$

显然，该方程有一特解

$$\begin{cases}a=a(t),\quad e=e(t),\quad \omega=\omega(t),\quad M=M(t),\\ i=90°,\\ \Omega=\Omega_0,\end{cases}\tag{4.280}$$

其中 Ω_0 为 $[0,2\pi)$ 上的任意实数.

2）对于田谐项 J_{lm}（$l=1,2,\cdots,m=1,2,\cdots,l$）部分，相应的摄动函数 $R(J_{lm})$ 不再有上述特征，既与 Ω 有关，又不再含有公共因子 $\sin i$（或 $\sin^2 i$），

故对 i 和 Ω 的变化而言，不再满足类似(4.279)的方程、但是，田谐项 J_{lm} 对卫星轨道的影响，除高轨卫星会因通约小分母的出现引起共振项外，仅有较小的短周期效应，即相应于解(4.280)致使 i 在 $90°$附近摆动，Ω 在 Ω_0 附近摆动.

3) 对于地球非球形引力摄动，消除角变量(包括快变量 M 和慢变量 Ω 和 ω)后，即得到平均根数$\bar{i}$和$\bar{\Omega}$所满足的微分方程，有

$$\frac{\mathrm{d}\,\bar{i}}{\mathrm{d}t}=0,\quad \bar{i}=\bar{i}_0, \tag{4.281}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\bar{\Omega}}{\mathrm{d}t}=-\cos i\left[\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)n+O(J_2^2,J_{2l})\,\bar{\psi}(\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0)\right]. \tag{4.282}$$

其中 $J_{2l}(l=2,\cdots)$ 对应偶次带谐项，$p=a(1-e^2)=\bar{a}_0(1-\bar{e}_0^2)$，$n=\bar{n}_0=\bar{a}_0^{-3/2}$. 这里顺便提一句，即使考虑日、月摄动，$\bar{\Omega}$的变化亦含有共同因子 $\cos i$，后面第五章中将要介绍.

(2) 太阳同步卫星轨道的参数选择

根据上述特征(4.282)式和太阳同步轨道的要求$\dot{\Omega}=n_S$，可得

$$\begin{aligned}n_S=&-\cos i\left(\frac{3J_2}{2p^2}n\right)\left\{1+\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}\right)-\right.\right.\\&\sin^2 i\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\right)-\\&\left.\left.\frac{35}{18}\left(\frac{J_4}{J_2^2}\right)\left(\frac{6}{7}+\frac{9}{7}e^2-\sin^2 i\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}e^2\right)\right)+O\left(\frac{J_{2l}}{J_2^2}\right)_{l\geqslant 3}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{4.283}$$

当给定 a,e 后即可确定相应的倾角 $i=i(n_S;a,e)$. 严格地说，这里的 i 和 a，e 均为$\bar{i}$和$\bar{a}$，$\bar{e}$. 但在进行轨道设计选择参数时，就可当作瞬时根数，而无需像精密定轨那样严格要求. 如果同时考虑日、月摄动，仅在(4.282)式右端增加相应的项，除像 24^{h}地球同步卫星那样的高轨卫星外，所增加的项与 J_2^2 项相当.

关于太阳同步卫星轨道设计中主要参数 a,e,i 的选择问题，通常采用近圆轨道，剩下的问题是 a 的选择，当 a,e 确定后即可由(4.283)式确定 i 值. 按(4.283)式由 a,e 确定 i 时，是否同时考虑一阶项(J_2)和二阶项(J_2^2,J_{2l})比只考虑一阶项好？事实上，无法真正严格地确定 i 值，即使同时考虑 J_2^2，J_{2l}和日、月等摄动项，也只能包含长期项，而且还有一些摄动因素无法按(4.283)式考虑，那么，按前者选择就不一定比后者好. 既然如此，还是仅考虑一阶项既简单又实用，即

$$\cos i = -n_s \Big/ \left(\frac{3J_2}{2p^2}\ n\right) \tag{4.284}$$

(3) 极轨道的保持问题

根据前面第 1 段的阐述，在地球非球形引力位带谐项(J_l)的影响下，极轨道是存在的，即

$$i = i_0 = 90°, \Omega = \Omega_0.$$

而同时考虑日、月摄动的长期的长期效应时亦有上述结论，对于静止(非旋转)大气，亦不影响上述结论. 因此，极轨道基本上能实现的，在周期摄动影响下，真实的轨道平面将作相应的摆动. 为此，下面给出算例，使读者了解这一摆动的幅度.

以 2^h 卫星为背景，取初值

$$i_0 = 90°, \Omega = 45°,$$

对完整的摄动运动方程积分 10^4 圈(这一弧段已相当长)，以显示极轨道保持的状况，计算结果列与表 4.1.

表 4.1 中四种类型分别为：

Ⅰ型：只考虑 J_2, J_3, J_4 的摄动影响；

Ⅱ型：同时考虑 J_2, J_3, J_4 和 $J_{2,2}$ 的摄动影响；

Ⅲ型：同时考虑 J_2, J_3, J_4 和日、月引力的摄动影响；

Ⅳ型：同时考虑 $J_2, J_3, J_4, J_{2,2}$，日、月引力，太阳光压和大气阻力摄动的影响. 取光压和大气阻力摄动量级各为 10^{-7} 和 10^{-8}，且不考虑地影和大气旋转，故这两种摄动对轨道平面的影响不大，关于这一点，下一章会仔细介绍.

表 4.1　极轨道的保持与变化范围

类型	i/度	Ω/度
Ⅰ	90.0(不变)	45.0(不变)
Ⅱ	89.993～90.0017	44.9999～45.0310
Ⅲ	89.9966～90.0376	44.9785～45.9359
Ⅳ	89.9975～90.0395	44.9900～46.0597

对于较高轨道(如 Lageos 卫星)的计算，所得结果的特征与 2^h 卫星基本相同. 由结果可以看出，前面的分析是正确的，极轨道是可以保持的，即使在各种摄动力的影响下，运行时间足够长时，轨道平面的摆动范围仍然较小.

2. 拱线静止轨道及其稳定性

拱线静止轨道即轨道半长轴指向不变的轨道，也就是说近地点幅角 ω

不变的轨道. 这是另一类型的应用卫星,如美国 1985 年 3 月 12 日发射的一颗海洋测高卫星 Geosat,就设计成这样的轨道. 拱线静止轨道是靠相应的小偏心率 e 来维持的. 确定的 e 和 ω 值可以保持卫星地面高度在同一地区几乎不变,这种轨道也称为冻结轨道(frozen orbit). 文献[11]曾在仅考虑地球非球形引力位 J_2 和 J_3 项摄动时,给出了这种轨道存在的条件,这里将对其作较深入的分析与讨论.

(1) 讨论拱线静止轨道存在的基本方程

根据前几节的讨论,考虑地球非球形引力摄动时,在历元地心平赤道系中,略去岁差章动和极移的影响,卫星轨道变化满足下列方程

$$\dot{\sigma}=f(\sigma,t,\beta). \tag{4.285}$$

这里 σ 即六个轨道向量

$$\sigma=(a\quad e\quad i\quad \Omega\quad \Omega\quad M)^{\mathrm{T}}, \tag{4.286}$$

T 表示转置. (4.285)式右端向量函数 f 中的 β 则表示地球非球形引力场参数,f 显含 t,是地球自转(通过田谐项)的反映. 显然,这一非自治系统(4.285)不存在 $\dot{\omega}=0$ 的特解,因此严格的拱线静止轨道是不存在的.

如果消除方程组(4.285)中的快变量(即分离出变化特征取决于平近点角 M 的短周期项,包括地球自转项),而对于非高轨卫星,田谐项部分又不会产生摄动效应明显增强的共振项,那么方程组(4.285)就退化为下列 4 维自治系统

$$\begin{cases}\dot{X}=f(X;J_l)\\ X=(a\quad e\quad i\quad \omega)^{\mathrm{T}}\end{cases}. \tag{4.287}$$

这里的 X 实为仅消除短周期项的拟平均根数 $\bar{\sigma}$,其变化只包含长期项和长周期项,为了书写方便,仍记作 a,e,i,ω. 方程组(4.287)的右函数不仅不显含 t,亦与轨道升交点经度 Ω 无关,故 Ω 和 M 可与 a,e,i,ω 分离开. 这就是上述方程组(4.285)在分离出短周期项后退化为 4 维自治系统(4.287)的原因. 方程组(4.287)正是讨论拱线静止轨道存在性的基本方程,即在一定条件下,该方程组存在对应 $\dot{\omega}=0$ 的特解.

将方程组(4.287)中的右函数 f 记为

$$f=\begin{pmatrix}(f_a)\\(f_e)\\(f_i)\\(f_\omega)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\end{pmatrix}, \tag{4.288}$$

则四个分量 f_1,f_2,f_3,f_4 分别为 a,e,i,ω 四个根数各自对应的右函数. 若

记

$$\begin{cases} f_j = \sum_{k=1}^{N} f_j^{(k)} = f_j^{(1)} + f_j^{(2)} + \cdots + f_j^{(N)}, \\ f_j^{(k)} = O(\varepsilon^k), \quad j = 1,2,3,4, \end{cases} \tag{4.289}$$

其中 $\varepsilon = J_2 = O(10^{-3})$，$f_j$ 各有如下特点

$$f_1 = f_1^{(3)} + f_1^{(4)} + \cdots, \tag{4.290}$$

$$\begin{cases} f_1^{(3)} = f_1^{(3)}(J_2^3), \\ f_1^{(4)} = f_1^{(4)}(J_2^4, \cdots), \end{cases} \tag{4.291}$$

$$f_j = f_j^{(2)} + f_j^{(3)} + f_j^{(4)} + \cdots, \quad j = 2,3, \tag{4.292}$$

$$\begin{cases} f_j^{(2)} = f_j^{(2)}(J_2^2, J_3, J_4, \cdots), \\ f_j^{(3)} = f_j^{(3)}(J_2^3, J_2 J_3, J_2 J_4, \cdots), \\ f_j^{(4)} = f_j^{(4)}(J_2^4, J_2^2 J_3, J_2^2 J_4, \cdots, J_3^2, J_4^2, \cdots, J_{lm}^2), \end{cases} \tag{4.293}$$

$$f_4 = f_4^{(1)} + f_4^{(2)} + f_4^{(3)} + f_4^{(4)} + \cdots, \tag{4.294}$$

$$\begin{cases} f_4^{(1)} = f_4^{(1)}(J_2), \\ f_4^{(2)} = f_4^{(2)}(J_2^2, J_3, J_4, \cdots), \\ f_4^{(3)} = f_4^{(3)}(J_2^3, J_2 J_3, J_2 J_4, \cdots), \\ f_4^{(4)} = f_4^{(4)}(J_2^4, J_2^2 J_3, J_2^2 J_4, \cdots, J_3^2, J_4^2, \cdots, J_{lm}^2). \end{cases} \tag{4.295}$$

不失一般性，右函数 f 只取到 3 阶项（J_{lm}^2 项将不再出现），并以 J_3 和 J_4 分别代表二阶奇次带谐项 J_{2l-1} 和偶次带谐项 J_{2l}，$l = 1,2,3,\cdots$，因为右函数中的这两部分能反映与讨论拱线静止轨道直接有关的“特征”，包括 $\frac{1}{e}$ 因子以及含有幅角 $\omega, 3\omega, \cdots, 2\omega, 4\omega, \cdots$ 的三角函数的状况. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = f_1 = f_1^{(3)}, \tag{4.296}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = f_2 = -\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right) f_3, \tag{4.297}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = f_3 = f_3^{(2)} + f_3^{(3)}, \tag{4.298}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = f_4 = f_4^{(1)} + f_4^{(2)} + f_4^{(3)}. \tag{4.299}$$

其中

$$f_1^{(3)} = \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^3 n \left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) a\sqrt{1-e^2} \cdot$$

$$\left\{\left[\frac{1}{3}\sin^2 i\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) cf - \right.\right.$$

$$\sin^2 i\left(\frac{17}{12}-\frac{19}{8}\sin^2 i\right)-\frac{e^2}{1-e^2}\left(\frac{7}{3}\sin^2 i\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\Bigg]\times$$

$$2e^2\sin 2\omega-\frac{1}{1-e^2}\left[\frac{1}{32}\sin^4 i\right]4e^2\sin 4\omega\Bigg\}, \tag{4.300}$$

$$f_3^{(2)}=\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n\sin 2i\left[\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i\right)+\frac{1}{6}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)cf\right]e^2\times$$

$$\sin 2\omega+\left(\frac{35J_4}{8p^4}\right)n\sin 2i\left[\frac{9}{28}-\frac{3}{8}\sin^2 i\right]e^2\sin 2\omega+$$

$$\left(\frac{3J_3}{4p^3}\right)n\cos i\left[2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right]e\cos\omega, \tag{4.301}$$

$$f_3^{(3)}=I_1(J_2^3;a,e,i)e^2\sin 2\omega+[I_{22}(J_2J_4;a,e,i)e^2\sin 2\omega+$$

$$I_{24}(J_2J_4;a,e,i)e^4\sin 4\omega]+[I_{31}(J_2J_3;a,e,i)e\cos\omega+$$

$$I_{33}(J_2J_3;a,e,i)e^3\cos 3\omega], \tag{4.302}$$

$$f_4^{(1)}=\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right), \tag{4.303}$$

$$f_4^{(2)}=f_{4C}^{(2)}+f_{4L}^{(2)}, \tag{4.304}$$

$$f_{4C}^{(2)}=\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n\left[\left(4-\frac{103}{12}\sin^2 i+\frac{215}{48}\sin^4 i\right)+\right.$$

$$e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{3}{8}\sin^2 i-\frac{15}{32}\sin^4 i\right)+$$

$$\left.\sqrt{1-e^2}\left(2-\frac{11}{2}\sin^2 i+\frac{15}{4}\sin^4 i\right)\right]-$$

$$\left(\frac{35J_4}{8p^4}\right)n\left[\left(\frac{12}{7}-\frac{93}{14}\sin^2 i+\frac{21}{4}\sin^4 i\right)+\right.$$

$$\left.e^2\left(\frac{27}{14}-\frac{27}{4}\sin^2 i+\frac{81}{16}\sin^4 i\right)\right], \tag{4.305}$$

$$f_{4L}^{(2)}=\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n\left[\sin^2 i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1-e^2}{3}cf\right)+\right.$$

$$e^2\left(\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\sin^2 i+\frac{10}{3}\sin^4 i\right)cf-$$

$$\left.\sin^2 i\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{79}{24}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega+$$

$$\left(\frac{35J_4}{8p^4}\right)n\left[-\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)+e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{15}{4}\sin^2 i+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{27}{8}\sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega+\left(\frac{3J_3}{4p^3}\right)n\frac{1}{e}\left[\sin i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)-\right.$$

$$\left.\frac{e^2}{\sin i}\left(2-\frac{35}{2}\sin^2 i+\frac{35}{2}\sin^4 i\right)\right]\sin\omega, \tag{4.306}$$

$$f_4^{(3)} = f_{4C}^{(3)} + f_{4L}^{(3)}, \tag{4.307}$$

$$f_{4C}^{(3)} = \omega_c(J_2^3, J_2 J_4; a, e, i), \tag{4.308}$$

$$\begin{aligned} f_{4L}^{(3)} = {} & \omega_1(J_2^3; a, e, i)\cos 2\omega + \omega_{22}(J_2 J_4; a, e, i)\cos 2\omega + \\ & \omega_{24}(J_2 J_4; a, e, i) e^2 \cos 4\omega + \omega_{31}(J_2 J_3; a, e, i)\frac{1}{e}\sin\omega + \\ & \omega_{33}(J_2 J_3; a, e, i) e \sin 3\omega. \end{aligned} \tag{4.309}$$

上述各式中的有关量为

$$n = a^{-3/2}, \quad p = a(1-e^2), \tag{4.310}$$

$$cf = \frac{1}{e^2}\overline{\cos 2f} = \frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2} = \frac{3}{4} + O(e^2). \tag{4.311}$$

尽管 $f_3^{(3)}$ 和 $f_4^{(3)}$ 并未完全将具体形式写出，即 $I_1(J_2^3; a, e, i), \cdots, \omega_{33}(J_2 J_3; a, e, i)$，但已清楚地表明了相应函数的具体特征，即奇次和偶次带谐项以及它们的联合项中分别包含 $\sin\omega, \cos\omega, \cdots, \sin 2\omega, \cos 2\omega, \cdots$ 的区别，特别是有关这些项中 e（或$\frac{1}{e}$）因子出现的不同形式；还有 a, e, i 和 ω 相应右函数中出现上述各项的差异. 这些正是讨论拱线静止轨道存在性所必须了解的特征.

(2) 拱线静止轨道——方程组(4.296)～(4.299)的特解

首先根据上一段给出的右函数特征之一，即对于 a, e, i，右函数中出现的是 $\sin 2\omega, \sin 4\omega, \cdots, \cos\omega, \cos 3\omega, \cdots$，当 $\omega = 90°$和 $\omega = 270°$时，显然有

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

再看右函数的特征之二，即对于 ω，右函数中出现的是 $\cos 2\omega, \cos 4\omega, \cdots, \sin\omega, \sin 3\omega, \cdots$，当 $\omega = 90°$和 $\omega = 270°$时，分别有

$$\cos 2\omega = -1, \quad \cos 4\omega = 1, \cdots$$

$$\sin\omega = \pm 1, \quad \sin 3\omega = \mp 1, \cdots$$

这里$\pm$或$\mp$号依次分别对应 $\omega = 90°$和 $\omega = 270°$. 将 ω 值带入(4.299)式后即可给出 a, e, i 所满足的一个关系式，从而获得 $e = e(a, i)$，只要该关系合理即可. 然而根据 $J_2 > 0, J_3 < 0$，以 $\omega = 270°$代入方程(4.299)后，在一般条件下，给出的结果 $e < 0$. 因此，方程组(4.296)～(4.299)有如下特解

$$a \equiv a_0, e \equiv e_0, i \equiv i_0, \omega \equiv \omega_0 = 90°. \tag{4.312}$$

a_0, e_0, i_0 所满足的关系如下

$$e_0 = \left\{ \frac{3(-J_3)}{4p} \sin i \left[\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) - \frac{e^2}{\sin^2 i}\left(2 - \frac{35}{2}\sin^2 i + \frac{35}{2}\sin^4 i\right) \right] + \right.$$

$$O\left(\frac{J_5}{p^3},\cdots\right)\Bigg\}\times\Bigg\{\frac{3J_2}{2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+\left(\frac{3J_2}{2p}\right)^2\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\times\right.$$
$$\left(3-\frac{79}{24}\sin^2 i\right)-e^2\left(\frac{5}{12}-\frac{19}{8}\sin^2+\frac{75}{32}\sin^4 i\right)+O(e^4)\Bigg]+$$
$$\frac{35(-J_4)}{8p^2}\left[\left(\frac{12}{7}-\frac{93}{14}\sin^2 i+\frac{21}{4}\sin^4 i\right)+e^2\left(\frac{27}{14}-\frac{27}{4}\sin^2 i\right)\times\right.$$
$$\left.\left(\frac{81}{16}\sin^4 i\right)\right]+O(J_2^3,J_2J_4,\cdots)_{\mathrm{C}}-\left(\frac{3J_2}{2p}\right)^2\left[\sin^2 i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\times\right.$$
$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1-e^2}{3}cf\right)+e^2\left(\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\sin^2 i+\frac{10}{3}\sin^4 i\right)cf-$$
$$\left.\sin^2 i\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{79}{24}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right]-$$
$$\frac{35(-J_4)}{8p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)-e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{15}{4}\sin^2 i+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{27}{8}\sin^4 i\right)\right]+\left(O(J_2^3,J_2J_4,J_2J_3,\cdots)_{\mathrm{L}}\right\}^{-1}. \tag{4.313}$$

该式右端出现的 a,e,i **皆为** $a_0,e_0,i_0,p=a_0(1-e_0^2)$**，而** $O(\cdots)_{\mathrm{C}}$ **和** $O(\cdots)_{\mathrm{L}}$ **则表示相应的长期和长周期部分对应的项. 若** i_0 **不十分接近临界角** $i_c=63°26'$**，即当** $\left|2-\frac{5}{2}\sin^2 i_0\right|>10^{-3}$ **时，上式的主要部分为**

$$e_0=\left(\frac{-J_3}{J_2}\right)\frac{1}{2a_0}\sin i_0[1+O(e_0^2)]=O(10^{-3}), \tag{4.314}$$

这表明拱线静止轨道是以近圆轨道实现的. 当 $i_0\to i_c$ **进入临界角范围，则将出现相应的轨道共振问题，见参考文献**[12].

(4.312)**式和**(4.313)**式即拱线静止轨道解及相应轨道根数之间的关系，给定** a_0,i_0 **后就可确定相应的** e_0 **值，而** $\omega_0\equiv 90°$**，近地点指向不变. 至于根数** Ω **的变化（东进或西退）对该轨道特征无影响.**

根据右函数中表现出的规律，除 J_2 **和** J_3 **项外，同时考虑** J_{2l-1} **项，**J_{2l} **项**($l=2,3,\cdots$)**和田谐项** J_{lm}**，也不会改变上述结论（指平均系统）. 但这仅仅是地球卫星的情况，对于不同的中心天体将有不同的结论. 从上述特解可以看出，奇次带谐项** J_{2l-1} **将起着重要作用，只是地球非球形引力位的** $J_5,J_7,\cdots$ **相对** J_3 **而言较小，不改变前面的结论，而对月球则不然，相应的** J_5,J_7,J_9 **项相对** J_3 **项而言，对低轨卫星更重要，冻结轨道的解有差别，详见参考文献**[13]**和**[14].

(3) 拱线静止轨道解的稳定性问题

上述轨道解所对应的是一个平均系统的特解，那么在原完整力学系统

中，这种特解所固有的特征——拱线指向不变是否还能保持，这就涉及到该特解的稳定性问题. 若仅限于线性意义下的稳定性，那是容易回答这一问题的，略去证明过程，结论为：拱线静止轨道对应的特解(4.312)是稳定的.

至于非线性情况，特别是除地球非球形引力摄动外，还有更复杂的摄动因素，对相应的完整力学系统，上述特解是否还保持稳定，目前还难以回答. 但人们关心的是在有限扰动下，这种轨道特征的变化状况. 因此，用具体计算来表明该轨道特征的保持或变化，显得更具实际意义. 计算表明，如果适当选取初始条件可以使拱线在较长间隔内保持小范围摆动的状态，即这种特殊轨道在一定条件下是可以实现的. 不过，实际轨道中拱线的摆动(甚至摆动幅度较大)，在具体工程任务中是要考虑的，特别是需要在较长间隔内保持拱线“静止”状态的那种应用卫星.

3. 地球同步卫星的运动特征及其漂移

地球同步卫星的轨道周期与地球自转周期相同，除周期相同外，如果轨道面又与地球赤道面“重合”(即轨道倾角 $i\approx 0$)，且偏心率 $e\approx 0$，这种卫星相对地面固定点将是静止的，所以也称为地球静止卫星，常作为通信卫星. 关于这种卫星，地球非球形引力位的田谐项(特别是 $C_{2,2}$，$S_{2,2}$ 项)对其轨道的摄动作用会产生一种通约小分母所导致的共振项. 这种卫星轨道的一个基本特征，即当轨道周期有误差时，只要误差在一定范围内，它会围绕地球赤道短轴方向摆动，却不会远离原定点方向“漂移而去”. 这里将直接从原运动方程着手，阐明在一定条件下它围绕地球赤道短轴方向摆动的力学机制.

(1) 运动方程

考虑地球非球形引力位中的主要项(扁率项和椭率项)J_2 和 $J_{2,2}$ 项的影响，引用地心赤道坐标系 $O-r,\lambda,\phi$，略去岁差、章动和极移，并采用标准计算单位，则相应的地球引力位函数为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{r}\left[1-\frac{J_2}{r^2}P_2(\sin\varphi)+\frac{J_{2,2}}{r^2}P_{2,2}(\sin\varphi)\cos 2\bar{\lambda}\right] \\ &= \frac{1}{r}-\frac{J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)+\frac{J_{2,2}}{r^3}(3\cos^2\varphi)\cos 2\bar{\lambda}. \end{aligned} \tag{4.315}$$

其中$\bar{\lambda}$是卫星相对地球赤道长轴方向(该方向在地固坐标系中的经度为 $\lambda_{2,2}$)的经度，这在前面 §4.4 中已有阐述.

在上述球坐标系中，卫星的位置矢量$\boldsymbol{r}$和速度矢量$\dot{\boldsymbol{r}}$的表达如下

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.316}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}\dot{r}\\ r\cos\varphi\dot{\lambda}\\ r\dot{\varphi}\end{pmatrix},\tag{4.317}$$

其中

$$\dot{\lambda}=\dot{\bar{\lambda}}+S_{2,2}=\dot{\bar{\lambda}}+n_e,\tag{4.318}$$

n_e 即地球自转角速度. 相应的卫星的动能(去掉质量因子)T 即表示为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2+r^2\dot{\varphi}^2).\tag{4.319}$$

根据动力学中运动方程的拉格朗日形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q}=\dfrac{\partial V}{\partial q},\\ q=\begin{pmatrix}r\\ \lambda\\ \varphi\end{pmatrix},\dot{q}=\begin{pmatrix}\dot{r}\\ \dot{\lambda}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix},\end{cases}\tag{4.320}$$

可给出卫星运动的基本方程如下

$$\begin{cases}\ddot{r}-r\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2-r\dot{\varphi}^2=-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{3J_2}{r^4}\left(\dfrac{3}{2}\sin^2\varphi-\dfrac{1}{2}\right)-\\ \qquad\dfrac{9J_{2,2}}{r^4}\cos^2\varphi\cos2\bar{\lambda},\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda})=-\dfrac{6J_{2,2}}{r^3}\cos^2\varphi\sin^2\bar{\lambda},\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})+\dfrac{1}{2}r^2\sin2\varphi\dot{\lambda}^2=\dfrac{3J_2}{2r^3}\sin2\varphi-\dfrac{3J_{2,2}}{r^3}\sin2\varphi\cos2\bar{\lambda}.\end{cases}\tag{4.321}$$

(2) 运动方程的特解——地球同步卫星的运动特征

不难证明,方程(4.321)存在如下特解

$$\dot{r}\equiv r_0,\quad\bar{\lambda}\equiv\bar{\lambda}_0,\quad\varphi\equiv0.\tag{4.322}$$

证明如下:

此时有

$$\dot{r}=0,\qquad\ddot{r}=0;$$

$$\dot{\lambda}=\dot{\bar{\lambda}}+n_e=n_e,\quad\ddot{\lambda}=0;$$

$$\dot{\varphi}=0,\quad\ddot{\varphi}=0.$$

以此代入运动方程(4.321)得

$$
\begin{cases}
-r_0 n_e^2 = -\dfrac{1}{r_0^2} - \dfrac{3J_2}{2r_0^4} - \dfrac{9J_{2,2}}{r_0^4}\cos 2\bar{\lambda}, \\
0 = \dfrac{6J_{2,2}}{r_0^3}\sin 2\bar{\lambda}_0, \\
0 = 0,
\end{cases}
\tag{4.323}
$$

只要能由该方程确定 r_0 和 $\bar{\lambda}_0$ 即得证. 由方程(4.323)的第二式可知

$$
\begin{cases}
\bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda}_{01}, \bar{\lambda}_{02}, \\
\bar{\lambda}_{01} = 90°, 270°, \\
\bar{\lambda}_{02} = 0°, 180°.
\end{cases}
\tag{4.324}
$$

由此,第一式变为下列形式:

$$
r_0 n_e^2 = \frac{1}{r_0^2} + \left[\frac{3J_2}{2r_0^4} \mp \frac{9J_{2,2}}{r_0^4}\right],
\tag{4.325}
$$

其中 $J_{2,2}$ 项前的"$-$"号和"$+$"号分别对应 $\bar{\lambda}_{01}$ 和 $\bar{\lambda}_{02}$. r_0 的解可写成

$$
r_0^{-3} = n_e^2 - \left(\frac{3}{2}J_2 \mp 9J_{2,2}\right)/r_0^5.
\tag{4.326}
$$

该式确实可得 r_0 的两个实解. 由于 J_2, $J_{2,2}$ 是小量,可用简单迭代法求解 r_0,最后得运动方程(4.321)的两个特解,即

$$
r \equiv r_{01}, \quad \bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda}_{01} = 90°, 270°, \quad \varphi \equiv 0;
\tag{4.327}
$$

$$
r \equiv r_{02}, \quad \bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda}_{02} = 0°, 180°, \quad \varphi \equiv 0.
\tag{4.328}
$$

这两个特解分别表示卫星定点在地球赤道短轴和长轴上空. 如果取

$$
J_2 = 1.082637 \times 10^{-3}, J_{2,2} = 1.771156 \times 10^{-6},
$$

则由(4.326)式解得

$$
r_{01} = 42164.71346\ \text{km}(\text{短轴上空}),
\tag{4.329}
$$

$$
r_{02} = 42164.72371\ \text{km}(\text{长轴上空}).
\tag{4.330}
$$

上述特解即平衡解. 容易证明解(4.327)和(4.328)分别对应中心和鞍点,后者是不稳定的,前者容易证明是线性稳定的. 至于在非线性意义下是否稳定,这并无实际意义,关键在于同时考虑其他摄动因素时(即不同性质的有限扰动),该平衡解是否稳定,或者说得确切一些,即在此情况下,卫星是否在上述稳定平衡点(地球赤道短轴上空)附近"摆动". 这里的特征量即 $\bar{\lambda}$,如果稳定,则 $\bar{\lambda}$ 在平衡位置 90°(或 270°)附近的变化范围 $\Delta\bar{\lambda}$ 应小于 $\pm$90°,实际计算证实了这一特征,具体变化特点如下:

1) **同步卫星在地球赤道短轴上空附近摆动的特征明显,并不因初始轨道周期有误差就从平衡点漂移离去而不返回.**

2) **仅考虑地球非球形引力摄动时,e 和 i 的变化很小,而考虑日、月引**

力和光压摄动后,则变化范围明显增大,特别是轨道倾角 i,这是低轨卫星轨道变化没有的现象. 关于这一问题,下一章中将要介绍,主要原因是日、月引力(特别是月球引力)摄动效应所致.

根据地球同步卫星运动的特点,作为地球上空的定点通信工具显然是可行的,这已广为采用. 但不可能都定点在地球赤道短轴上空的两个位置上(即东经 75°和西经 105°),因此,就有东西向漂移问题和倾角变化引起的南北漂移现象,这都需要不断进行轨控.

§4.8 双曲线轨道的扁率摄动

对于深空探测器的运动,当它从地球停泊轨道上飞抵目标天体附近时,未变轨前,相对目标天体的运动通常是双曲线轨道. 要使其变为绕目标天体运动的轨道器,就必须再次变轨,将双曲线轨道变为椭圆轨道;或者仅需要接近探测过程中的某个目标天体,绕飞或接近目标天体后离去. 无论是前一种探测形式,还是后一种,探测器接近目标天体时,相对该天体总有一段运行轨道是双曲线轨道. 为了更好了解探测器的运动状态,给地面测控系统或者星上自主设备提供必要的轨道信息(不仅仅是孤立点上的位置速度值),有必要对双曲线轨道的变化特征进行研究,给出类似椭圆轨道变化的一些基本特征. 而接近目标天体时,该天体的扁率效应显然是主要的,因此这一节将给出双曲线轨道在扁率摄动影响下的变化规律.

仍采用标准单位系统,即长度、质量和时间单位取下列值:

$$\begin{cases}[L]=R_{\mathrm{e}}(\text{中心天体赤道半径})\\ [M]=M_0(\text{中心天体质量}).\\ [T]=(R_{\mathrm{e}}^3/GM_0)^{1/2}\end{cases}\tag{4.331}$$

在此计算单位系统中,$G=1$,$\mu=GM_0=1$.

扁率(J_2)项对应的摄动函数为

$$\begin{aligned}R&=-\frac{J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{J_2}{2a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2u\right],\end{aligned}\tag{4.332}$$

其中 $u=f+\omega$. 将 R 代入摄动运动方程(3.75)即可得轨道变化对应的小参数方程:

$$\dot{\sigma}=f(\sigma,t;\varepsilon).\tag{4.333}$$

由于双曲线轨道是"开放的",近点角 f 和 M 的变化不同于椭圆轨道,

故相应摄动解无长期项和周期项之分，因此可将轨道解记为

$$\sigma(t)=\sigma(t_0)+\Delta\sigma(t). \tag{4.334}$$

根据解的特征，这里的 $\Delta\sigma(t)$ 又记为下列形式：

$$\Delta\sigma=\sigma_S(t)-\sigma_S(t_0). \tag{4.335}$$

式中 $\sigma_S(t)$ 的一阶形式如下（略去推导过程）：

$$a_S(t)=-\frac{3J_2}{2a}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\sin^2 i\cos(2f+2\omega)\right],$$

$$e_S(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(1+\frac{e^2}{4}\right)\cos f+\frac{e}{2}\cos 2f+\frac{e^2}{12}\cos 3f\right]+\sin^2 i\left[\frac{1}{16}e^2\cos(f-2\omega)+\left(\frac{1}{4}+\frac{11}{16}e^2\right)\cos(f+2\omega)+\frac{5}{4}e\cos(2f+2\omega)+\left(\frac{7}{12}+\frac{17}{48}e^2\right)\cos(3f+2\omega)+\frac{3}{8}e\cos(4f+2\omega)+\frac{1}{16}e^2\cos(5f+2\omega)\right]\right\}, \tag{4.337}$$

$$i_S(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2i\right)\left[\frac{e}{2}\cos(f+2\omega)+\frac{1}{2}\cos(2f+2\omega)+\frac{e}{6}\cos(3f+2\omega)\right], \tag{4.338}$$

$$\Omega_S(t)=-\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\left[(f+e\sin f)-\frac{e}{2}\sin(f+2\omega)-\frac{1}{2}\sin(2f+2\omega)-\frac{e}{6}\sin(3f+2\omega)\right], \tag{4.339}$$

$$\omega_S(t)=-\cos i\,\Omega_S(t)+\frac{3J_2}{2p^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[f+\left(\frac{1}{e}+\frac{3}{4}e\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\frac{1}{16}e\sin(f-2\omega)-\left(\frac{1}{4e}-\frac{7}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+\frac{3}{4}\sin(2f+2\omega)+\left(\frac{7}{12e}+\frac{11}{48}e\right)\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+\frac{1}{16}e\sin(5f+2\omega)\right]\right\}, \tag{4.340}$$

$$M_S(t)=\frac{3}{2a}a_S(t_0)M+\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{(e^2-1)}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{4}e\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\frac{1}{16}e\sin(f-2\omega)-\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+\left(\frac{7}{12e}-\frac{1}{48}e\right)\sin(3f+\right.\right.$$

$$2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+\frac{1}{16}e\sin(5f+2\omega)\Big]\Big\},\qquad(4.341)$$

上述各式中 $a=a_0, e=e_0, i=i_0, \Omega=\Omega_0, \omega=\omega_0, M=M(t), M_0=M(t_0)$.

以月球探测器为例，探测器飞抵月球作用范围边界时，相对月球为双曲线运动. 作为算例，选取向月飞行轨道的一种，即探测器到达该作用范围边界（月心距为 57800 km$=33.26R_e$，$R_e=1738$ km 是月球赤道半径）时，相对月球的速度为 0.903783403 km/s$=$0.538105019，相应的近月点高度为 100 km. 这一双曲线轨道（这里取顺行轨道，对逆行轨道，计算情况相同）的 6 个初始根数为

$$\begin{cases} a_0=4.358728198, & \Omega_0=45^\circ, \\ e_0=1.242625222, & \omega_0=45^\circ, \\ i_0=45^\circ, & M_0=-338^\circ.88866330. \end{cases}\qquad(4.342)$$

分别用高精度数值解（积分器为 RKF7(8)[15]）和上述摄动分析解，计算探测器从进入月球作用范围（图 4.2 中的 A 点）到飞离作用范围（图 4.2 中的 B 点）这一关键弧段上双曲线轨道的变化. 按二体问题，这一弧段的飞行时间为 $1^d.2892668=1856^m.544192$，计算结果列于表 4.2.

表 4.2　两种方法给出的根数和坐标速度矢量的结果

根数	数值法	分析法	坐标速度	数值解	分析解
$a(R_e)$	4.358728041280	4.358728041277	$x(R_e)$	−22.5037946917	−22.5037946623
e	1.24263185315	1.242623181860	$y(R_e)$	−24.4517219010	−24.4517219719
$i(^\circ)$	44.9997324696	44.9997320198	$z(R_e)$	−1.3956476350	−1.3856470591
$\Omega(^\circ)$	44.9857322459	44.9857333244	$\dot{x}$(km/s)	−0.5671864971	−0.5671864968
$\omega(^\circ)$	45.0150039744	45.0150023362	$\dot{y}$(km/s)	−0.6975563433	−0.6975563457
$M(^\circ)$	338.8885835763	338.8885835407	$\dot{z}$(km/s)	−0.0924072365	−0.0924072201

从计算结果可以看出，以数值解为标准，分析解的误差也只有 10^{-8}，这于上述一阶摄动解的精度是相当的，在这一弧段上，月球扁率摄动量级为 $10^{-5}\sim10^{-4}$，而且又是保守力摄动，二阶摄动的量级应为 10^{-8}. 对于探测器的运动，另一种重要摄动源是第三体（地球）的引力摄动，但其影响不会超过月球扁率摄动. 故上述双曲线轨道的一阶摄动分

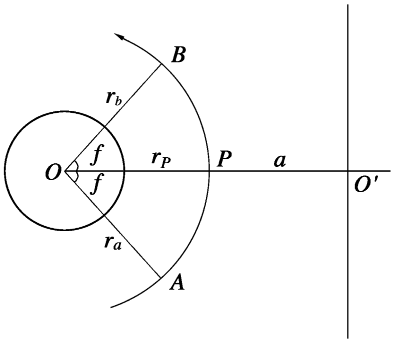

图 4.2　双曲线轨道

析解还是有其实际意义的，而建立第三体引力摄动也并不困难.

这一章结合卫星运动中最主要的摄动源——中心天体非球形引力摄动，对构造小参数幂级数解的方法及其具体过程作了详尽的阐述，剩下的问题是级数解中出现的奇点如何处理？关于根数变化的周期项中出现的小 e 和小 i 问题，只要采用第三章 § 3.3 中提出的无奇点根数即可. 另一个奇点问题是长周期项中出现的通约(通常所说的小分母)问题，这是平均根数法带来的，作为本章的结束，对此再作必要的阐述，简要介绍问题解决的一种途径.

针对平均根数法出现该问题的特点，可对摄动法采用更进一步的改进，即用拟平均根数代替平均根数作为参考解. 拟平均根数的定义与平均根数稍有差别，但仍用$\overline{\sigma}(t)$表示，精确到二阶长期项的表达式如下：

$$\overline{\sigma}(t) = \overline{\sigma}_0 + (\delta\overline{n}_0 + \sigma_1 + \sigma_2)(t - t_0) + \Delta\sigma_L^{(1)}(t),$$
$$\Delta\sigma_L^{(1)}(t) = \sigma_L^{(1)}(t) - \sigma_L^{(1)}(t_0),$$
$$\overline{\sigma}_0 = \sigma_0 - [\sigma_S^{(1)}(t_0)].$$

相应的瞬时根数 $\sigma(t)$即由下式表达：

$$\sigma(t) = \overline{\sigma}(t) + \sigma_S^{(1)}(t).$$

因为通约问题发生在长周期项中，故应对其另行处理，将其变化 $\Delta\sigma_L^{(1)}(t)$以二阶长期项对待，放入拟平均根数中，由此即可解决相应的小分母问题. 在此参考解的基础上即可构造相应的无奇点的小参数幂级数解，其原理和过程与平均根数法类似，详见参考文献[3～5].

参 考 文 献

[1] Kozai Y. The motion of a close earth satellite. Astron. J. 1959,64(9)：367～377

[2] Cook G E. Basic theroy for prod, a program for computing the devolopment of satellite orbits. Celest. Mech, 1973,7(3)：301～314

[3] 刘林. 人造地球卫星在临界角附近运动的解. 天文学报, 1974,15(2)：230～240

LIU Lin. A Solution of the Motion of an Artificial Satellite in the Vicinity of the Critical Inclination. Chin. Astron. Astrophys. 1977,1(1)：31～42

[4] 刘林. 一种人造地球卫星的摄动计算方法. 天文学报, 1975,16(1)：65～80

LIU Lin. A Method of Calculation the Perturbation of Artificial Satellites. Chin. Astron. Astrophys, 1977,1(1)：63～78

[5] 刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京：高等教育出版社,1992

［6］ Brouwer D. Solution of the Problem of Artifical Satellite Theory without Drag. Astron. J，1959，64(9)：378～397

［7］ **刘林，章圣泮．非正则形式的变换方法及其应用．中国科学**(A)，1983，13(5)：455～465

LIU Lin，ZHANG Sheng-pan. A Transformation Method of Non-Hamiltonian Systems and Its Application. SCIENCE IN CHINA(Series A)，1983，26(8)：861～873

［8］ **刘林**，Chum C K. **在非球形引力摄动下金星轨道器运动的分析解．中国科学**(A)，1999，29(10)：952～960

LIU Lin，Chum C K. Analytic Perturbation to the Venusian Orbiter Due to the Nonspherical Gravitational Potential. SCIENCE IN CHINA(Series A)，2000，43(5)：552～560

［9］ **刘林，王家松．月球卫星轨道变化的分析解．天文学报**，1998，39(1)：81～102

［10］ **刘林．航天器轨道理论(第五章)．北京：国防工业出版社**．2000

［11］ Cook G E. Perturbations of near-circular orbits by the earth's gravitational potential. Planet. Space Sci，1966，14(3)：433～444

［12］ **刘林**，Iunanen K. A. **关于人造卫星运动中的临界角和通约问题．天文学报**，1986，27(1)：1～8

LIU Lin，Iunanen K. A. Problem of Critical Inclination and Commensurability in the Motion of Artificial Satellites. Chin. Astron. Astrophys，1986，10(3)：245～251

［13］ **刘林，刘世元，王彦荣．关于大行星(或月球)轨道器的冻结轨道．飞行器测控学报**，2003，22(2)：19～24

［14］ **刘林，王歆．月球卫星轨道力学综述．天文学进展**，21(4)：281～288

［15］ Fehlberg E. Classical Fifith- sixth- seventh and Eighth Order Runge-Kutta with Stepsize Control. NASA TR R－287，1968

第 5 章　第三体引力摄动、非引力摄动及后牛顿效应

对于可以处理成受摄二体问题的航天器运动而言，除中心天体的非球形引力摄动外，还有另外几类摄动源，即第三体（其他天体）引力摄动，非引力摄动（大气的耗散效应和一般情况下的太阳辐射压作用）及后牛顿效应等.

就人造地球卫星的运动而言，第三体主要指太阳和月球，即通常所说的日、月摄动，如果是环月轨道器的运动，则第三体即地球和太阳. 不管是第三体引力摄动，还是非引力中的太阳辐射压摄动和大气阻力摄动，都将涉及到太阳的坐标或太阳和月球的坐标. 因此本章将首先介绍日、月坐标的计算方法.

§5.1　日、月坐标

对于轨道摄动的分析解，着重的是卫星轨道变化规律，并不要求高精度. 因此，计算可采用日、月平均轨道，即长期进动椭圆，而在几天的弧段内，还可采用"不变椭圆"轨道. 下面给出日、月在历元地心平赤道坐标系中的位置计算方法和相应的计算公式.

1. 日、月的平均轨道

太阳在 J2000.0 地心天球坐标系（即地心平赤道坐标系）中的平均轨道根数 $\bar{\sigma}'$ 为[1]

$$\begin{cases}\bar{a}=1.00000102(\mathrm{AU}), \quad \mathrm{AU}=1.49597870\times10^{8}\ \mathrm{km},\\ \bar{e}=0.016709,\\ \bar{i}=\varepsilon=23^{\circ}.4393,\\ \bar{\Omega}=0^{\circ}.0,\\ \bar{\omega}=282^{\circ}.9373+0^{\circ}.32T,\\ \bar{M}=357^{\circ}.5291+0^{\circ}.9856d,\end{cases} \tag{5.1}$$

月球在 J2000.0 地心平黄道坐标系中的平均轨道根数 $\bar{\sigma}'$ 为[1]

$$\begin{cases}\bar{a}=384747.981\ \text{km},\\ \bar{e}=0.054880,\\ \bar{i}=J=5^\circ.1298,\\ \bar{\Omega}=125^\circ.0446-1934^\circ.14T,\\ \bar{\omega}=318^\circ.3087+6003^\circ.15T,\\ \bar{M}=134^\circ.9634+13^\circ.0650d,\end{cases}\tag{5.2}$$

上述两公式中出现的 T 和 d 分别为由标准历元 J2000.0 起算的世纪数和儒略日.

2. 日、月在历元(J2000.0)地心平赤道坐标系中的轨道根数 σ'

在日、月引力摄动解中将会出现的轨道根数 σ'：$a',e',i',\Omega',u'=f'+\omega'$，对太阳有

$$\begin{cases}a'=\bar{a},\quad e'=\bar{e},\quad i'=\bar{i}=\varepsilon,\quad \Omega'=0^\circ.0,\\ u'=\bar{f}+\bar{\omega}.\end{cases}\tag{5.3}$$

其中 $\bar{f}$ 将通过解 Kepler 方程由 $\bar{e},\bar{M}$ 给出 $\bar{E}$，再由 $\bar{E},E$ 给出该真近点角. 对月球有

$$a'=\bar{a},\quad e'=\bar{e}.\tag{5.4}$$

而 i',Ω',u' 的计算公式如下：

$$\begin{cases}\cos i'=\cos\varepsilon\cos J-\sin\varepsilon\sin J\cos\bar{\Omega},\\ \sin i'=\sqrt{1-\cos^2 i'},\end{cases}\tag{5.5}$$

$$\begin{cases}\sin\Omega'=\dfrac{\sin J\sin\bar{\Omega}}{\sin i'},\\ \cos\Omega'=\dfrac{\cos J-\cos\varepsilon\cos i'}{\sin\varepsilon\sin i'},\end{cases}\tag{5.6}$$

$$\begin{cases}u'=(\bar{f}+\bar{\omega}+\bar{\Omega})-(\bar{\Omega}-\varphi),\\ \sin(\bar{\Omega}-\varphi)=\dfrac{\cos\varepsilon\sin\bar{\Omega}}{\sin i'}\sin J-\dfrac{\sin\varepsilon\sin 2\bar{\Omega}}{\sin i'}\sin^2\dfrac{J}{2}.\end{cases}\tag{5.7}$$

在日、月引力摄动长周期项中将要涉及到变率 Ω'_C 和 n'，对太阳，见(5.1)，有

$$\Omega'_C=0,n'=0^\circ.9856/d.\tag{5.8}$$

对月球，由(5.5)和(5.6)式给出

$$\begin{cases}\Omega'_C=\left(\dfrac{\sin J}{\cos J-\cos^2\varepsilon}\right)\cos\bar{\Omega}\cdot\dot{\bar{\Omega}},\\ n'=13^\circ.0650/d,\end{cases}\tag{5.9}$$

其中 $\dot{\bar{\Omega}}$ 由(5.2)式 $\bar{\Omega}$ 的计算公式给出，即$-1934^\circ.14/T$，T 是世纪数.

§5.2　第三体引力摄动

关于第三体引力摄动，基本上有两大类. 一种是外摄情况，即摄动天体到中心天体的距离 r' 大于运动天体(卫星)到中心天体的距离 r，即$(r/r')<1$. 另一种是内摄情况，即$(r'/r)<1$. 对于外摄情况，有两种可能，$r/r'\ll 1$ 或 $m'\ll M$(这里 m' 和 M 分别为摄动天体即第三体的质量和中心天体的质量)，或两者兼而有之. 对于内摄情况，则有些不同，通常要求 $m'\ll M$，而并不需要 $r'/r\ll 1$；如果同时有 $r'/r\ll 1$，即摄动天体非常靠近中心天体，在此情况下，往往改为讨论运动天体相对中心天体和第三体两者质心的运动.

就低轨卫星(不仅是低轨地球卫星)的运动而言，显然属于外摄情况. 对于地球卫星，在历元地心平赤道坐标系中，运动方程如下：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} - Gm'\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3}+\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right).$$

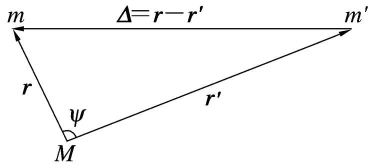

图 5.1　三天体的相对位置

其中各量见图 5.1，如采用标准计算单位，则上式变化如下简单形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} - m'\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3}+\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right), \tag{5.10}$$

这里 m' 是第三体的以中心天体质量 M 为单位的无量纲质量. 相应的摄动函数 R 的形式如下：

$$\begin{cases} R = m'\left(\dfrac{1}{\Delta} - \dfrac{r}{r'^2}\cos\psi\right), \\ \cos\psi = \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}'}{r'}\right). \end{cases} \tag{5.11}$$

对于外摄情况有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\psi)\left(\frac{r}{r'}\right)^l, \end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 $P_l(\cos\psi)$是上一章出现过的勒让德多项式，上一章已出现过，只不过变量 $\sin\varphi$ 变为 $\cos\psi$，有

$$\begin{cases} P_0(\cos\psi) = 1, P_1(\cos\psi) = \cos\psi, \\ P_2(\cos\psi) = \dfrac{3}{2}\cos^2\psi - \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

将这些关系引入(5.11)式得

$$R = m'\left[\frac{r^2}{r'^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}\right) + \frac{r^3}{r'^4}\left(\frac{5}{2}\cos^3\psi - \frac{3}{2}\cos\psi\right) + \cdots\right]. \tag{5.13}$$

对于低轨人造地球卫星而言，日、月引力摄动量级为二阶小量，即由(5.10)式给出下列估计：

$$|\boldsymbol{F}_\varepsilon| / |\boldsymbol{F}_0| \approx \left(\frac{m'}{M}\right)\left(\frac{r}{r'}\right)^3 = O(J_2{}^2).$$

就一阶摄动解而言，只需要给出二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$、一阶长周期项$\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$和轨道半长径 a 的二阶短周期项. 但考虑到对稍高的地球卫星，以及其他类型的探测器，第三体引力摄动的重要性，这里仍将六个轨道根数的二阶短周期项一并给出. 而且，日、月引力摄动将用“同一”公式表达，应用时可分开. 既然日、月摄动量为二阶小量，则相应的摄动函数(5.13)式可取为下列简单形式：

$$R = \frac{m'}{r'^3}r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}\right). \tag{5.14}$$

利用位置矢量与根数的关系(见第二章§2.3)，不难导出

$$\cos\psi = A\cos f + B\sin f. \tag{5.15}$$

其中

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{4}\{&(1-\cos i)[(1+\cos i')\cos(\omega-\theta+u') + (1-\cos i')\cos(\omega-\theta \\ &-u')] + (1+\cos i)[(1+\cos i')\cos(\omega+\theta-u') + \\ &(1-\cos i')\cos(\omega+\theta+u')] + 2\sin i\sin i'[\cos(\omega-u') - \\ &\cos(\omega+u')]\}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} B = -\frac{1}{4}\{&(1-\cos i)[(1+\cos i')\sin(\omega-\theta+u') + \\ &(1-\cos i')\sin(\omega-\theta-u')] + (1+\cos i)[(1+\cos i')\sin(\omega+ \\ &\theta-u') + (1-\cos i')\sin(\omega+\theta+u')] + 2\sin i\sin i'[\sin(\omega-u') - \\ &\sin(\omega+u')]\}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

这里

$$\theta = \Omega - \Omega', u' = f' + \omega'. \tag{5.18}$$

所有带“′”的根数 i', Ω', ω', f' 等均为摄动天体相对同一中心天体的轨道根

数，下面不再说明. 将 $\cos\psi$ 代入(5.14)式，得

$$R=\frac{3}{2}\beta\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\Big[-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(A^2+B^2)+\frac{1}{2}(A^2-B^2)\cos 2f+AB\sin 2f\Big],\tag{5.19}$$

$$\beta=m'/r'^3.\tag{5.20}$$

对于 $\left(\frac{r}{r'}\right)\ll 1$ 的外摄情况，上述表达式比较理想，因为在这种情况下，只有运动天体的真近点角 f 是快变量，而 Ω,ω 和摄动天体的 Ω',ω',f' 都是慢变量，上述表达式正好将快、慢变量完全分离开，这便于求相应摄动解的各种摄动项.

利用下列平均值

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2}=1+\frac{3}{2}e^2,\ \overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f}=\frac{5}{2}e^2,\ \overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f}=0,\tag{5.21}$$

可将摄动函数 R 分解为

$$R=R_{\mathrm{C}}+R_{\mathrm{L}}+R_{\mathrm{S}},\tag{5.22}$$

$$R_{\mathrm{C}}=\frac{3}{2}\beta\alpha^2\left[C\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\right],\tag{5.23}$$

$$R_{\mathrm{L}}=\frac{3}{2}\beta\alpha^2\left[L_1\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)+L_2\left(\frac{5}{2}e^2\right)\right],\tag{5.24}$$

$$R_{\mathrm{S}}=\frac{3}{2}\beta\alpha^2\left\{S_1\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2-\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\right]+S_2\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f-\frac{5}{2}e^2\right]+S_3\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f\right\}.\tag{5.25}$$

其中

$$C=\frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right),\tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}L_1=\frac{1}{16}\Big\{&\sin^2 i[2\sin^2 i'\cos 2\theta+(1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u')+\\&(1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')]+2\sin 2i[2\sin 2i'\cos\theta-\\&\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u')+\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')]+\\&4\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)[\sin^2 i'\cos 2u']\Big\},\end{aligned}\tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}L_2=\frac{1}{16}\Big\{&\frac{1}{2}(1-\cos i)^2D_1+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2D_2+\sin^2 iD_3+\\&2\sin i(1-\cos i)D_4+2\sin i(1+\cos i)D_5\Big\},\end{aligned}\tag{5.28}$$

$$S_1=C+L_1,\tag{5.29}$$

$$S_2 = L_2, \tag{5.30}$$

$$S_3 = -\frac{1}{16}\Big\{\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_6 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_7 + \sin^2 i D_8 + 2\sin i(1-\cos i)D_9 + 2\sin i(1+\cos i)D_{10}\Big\}. \tag{5.31}$$

关于 $D_1, D_2, \cdots, D_{10}$ **的表达式如下：**

$$\begin{cases} D_1 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega-2\theta)+(1+\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta+2u')+ \\ \qquad (1-\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta-2u'), \\ D_2 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega+2\theta)+(1+\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta-2u')+ \\ \qquad (1-\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta+2u'), \\ D_3 = 2(2-3\sin^2 i')\cos 2\omega+3\sin^2 i'\cos(2\omega-2u')+ \\ \qquad 3\sin^2 i'\cos(2\omega+2u'), \\ D_4 = \sin i'[2\cos i'\cos(2\omega-\theta)-(1+\cos i')\cos(2\omega-\theta+2u')+ \\ \qquad (1-\cos i')\cos(2\omega-\theta-2u')], \\ D_5 = \sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega+\theta)+(1+\cos i')\cos(2\omega+\theta-2u')- \\ \qquad (1-\cos i')\cos(2\omega+\theta+2u')], \end{cases} \tag{5.32}$$

$$\begin{cases} D_6 = 2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta)+(1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u')+ \\ \qquad (1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u'), \\ D_7 = 2\sin^2 i'\sin(2\omega+2\theta)+(1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u')+ \\ \qquad (1-\cos i')^2\sin(2\theta+2\omega+2u'), \\ D_8 = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega+ \\ \qquad 3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u')+3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u'), \\ D_9 = \sin i'[2\cos i'\sin(2\omega-\theta)-(1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+2u')+ \\ \qquad (1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')], \\ D_{10} = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta)+(1+\cos i')\sin(2\omega+\theta-2u')- \\ \qquad (1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u')], \end{cases} \tag{5.33}$$

将上述分解后的摄动函数 R_C, R_L **和** R_S **分别代入摄动运动方程，即可给出卫星轨道变化所满足的小参数方程，同时考虑一阶量** J_2**（扁率项），有**

$$\frac{d\sigma}{dt} = f_0(a) + f_1(\sigma, J_2) + f_2(\sigma, \beta). \tag{5.34}$$

其中 f_2 **有三项，即**

$$f_2 = f_{2C} + f_{2L} + f_{2S}. \tag{5.35}$$

采用平均根数法构造小参数幂级数解，在一阶摄动意义下，下面给出第三体引力摄动相应的摄动项[2].

1. 长期项 $\boldsymbol{\sigma}_2(t-t_0)$ 的变率 $\boldsymbol{\sigma}_2$

$$a_2 = 0, e_2 = 0, i_2 = 0, \tag{5.36}$$

$$\Omega_2 = -\left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-1/2} n\cos i, \tag{5.37}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+\frac{1}{2}e^2\right](1-e^2)^{-1/2} n, \tag{5.38}$$

$$M_2 = -\left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(\frac{7}{3}+e^2\right)n. \tag{5.39}$$

各式右端出现的根数 a, e, i，和 n 均为平均根数 $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$ 和 $\bar{n}_0 = \bar{a}_0^{-\frac{3}{2}}$. 日、月有关量 β 的定义如下：

$$\beta = m'/r'^3. \tag{5.40}$$

上述各式中，凡带有“′”的量（包括质量 m' 和根数 $a', e', i', \cdots$）均为第三体（即摄动天体日、月）的有关量. 下面不再说明.

对于中低轨卫星的定轨，基本上涉及的弧段不会太长，日、月位置（或轨道）变化不大，可采用简单模型（例如平均椭圆轨道）计算日、月的轨道及相应的距离量 r'，具体计算方法见 § 5.1.

2. 长周期项 $\sigma_L^{(1)}(t)$

$$a_L^{(1)}(t) = 0, \tag{5.41}$$

$$e_L^{(1)}(t) = -\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\left(5e\sqrt{1-e^2}\right) n H_1, \tag{5.42}$$

$$i_L^{(1)}(t) = \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\frac{n}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\times \left[(5e^2)\cos i H_1 - 2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)H_2 - (5e^2)H_3\right], \tag{5.43}$$

$$\Omega_L^{(1)}(t) = \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\frac{n}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\left[\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)H_4 + \left(\frac{5}{2}e^2\right)\cos i H_5\right] + \left(\frac{3}{2}\beta\right)\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[(25e^2)\cos i H_1^* - 2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)H_2^* - (5e^2)H_3^*\right], \tag{5.44}$$

$$\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = \left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right) n \Bigg\{ \sqrt{1-e^{2}}(3H_{6}+5H_{7}) - \frac{\cos i}{\sqrt{1-e^{2}}\sin i}\left[\left(1+\frac{3}{2}e^{2}\right)H_{4}+\left(\frac{5}{2}e^{2}\right)H_{5}\right]\Bigg\} - \left(\frac{3}{2}\beta\right)\left(\frac{3J_{2}}{2p^{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^{2}}}\Bigg[(5e^{2})(13-15\sin^{2}i)H_{1}^{*} - 10\left(1+\frac{3}{2}e^{2}\right)\cos i\, H_{2}^{*} - (25e^{2})\cos i\, H_{3}^{*}\Bigg], \tag{5.45}$$

$$M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right) n [(7+3e^{2})H_{6}+(5+5e^{2})H_{7}] - \left(\frac{3}{2}\beta\right)\left(\frac{3J_{2}}{2p^{2}}\right)\Bigg[(15e^{2})\left(2-\frac{5}{2}\sin i\right)H_{1}^{*} - 6\left(1+\frac{3}{2}e^{2}\right)\cos i\, H_{2}^{*} - (15e^{2})\cos i\, H_{3}^{*}\Bigg]. \tag{5.46}$$

上述各式右端出现的各量，除在 σ_2 **中已出现过的之外，**$p=a(1-e^2)$**亦为平均根数，而** $H_1, H_2, \cdots, H_7$ **和** H_1^*, H_2^*, H_3^* **由下列各式表达：**

$$H_{1} = \frac{1}{16}\Bigg[\frac{1}{2}(1-\cos i)^{2}K_{1}+\frac{1}{2}(1+\cos i)^{2}K_{2}+\sin^{2}i\,K_{3} + 2\sin i(1-\cos i)K_{4}+2\sin i(1+\cos i)K_{5}\Bigg], \tag{5.47}$$

$$H_{2} = \frac{1}{16}[\sin^{2}i\,K_{6}+\sin 2i\,K_{7}], \tag{5.48}$$

$$H_{3} = \frac{1}{16}\Bigg[-\frac{1}{2}(1-\cos i)^{2}K_{1}+\frac{1}{2}(1+\cos i)^{2}K_{2} - \sin i(1-\cos i)K_{4}+\sin i(1+\cos i)K_{5}\Bigg], \tag{5.49}$$

$$H_{4} = \frac{1}{16}[\sin 2i\,K_{16}+4\cos 2i\,K_{17}-6\sin 2i\,K_{18}], \tag{5.50}$$

$$H_{5} = \frac{1}{16}[\sin i(1-\cos i)K_{11}-\sin i(1+\cos i)K_{12}+\sin 2i\,K_{13} + 2(\cos i-\cos 2i)K_{14}+2(\cos i+\cos 2i)K_{15}], \tag{5.51}$$

$$H_{6} = \frac{1}{16}[\sin^{2}i\,K_{16}+2\sin 2i\,K_{17}+2(2-3\sin^{2}i)K_{18}], \tag{5.52}$$

$$H_{7} = \frac{1}{16}\Bigg[\frac{1}{2}(1-\cos i)^{2}K_{11}+\frac{1}{2}(1+\cos i)^{2}K_{12}+\sin^{2}i\,K_{13} + 2\sin i(1-\cos i)K_{14}+2\sin i(1+\cos i)K_{15}\Bigg], \tag{5.53}$$

$$K_{1} = 2\sin^{2}i'\cos(2\omega-2\theta)/n_{1}+(1+\cos i')^{2}\cos(2\omega-2\theta+2u')/n_{3}+$$

$$(1-\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta-2u')/n_4, \tag{5.54}$$

$$K_2 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega+2\theta)/n_2+(1+\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta-2u')/n_5+(1-\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta+2u')/n_6, \tag{5.55}$$

$$K_3 = 2(2-3\sin^2 i')\cos 2\omega/2\omega_1+3\sin^2 i'\cos(2\omega-2u')/n_7+3\sin^2 i'\cos(2\omega+2u')/n_8, \tag{5.56}$$

$$K_4 = \sin i'[2\cos i'\cos(2\omega-\theta)/n_9-(1+\cos i')\cos(2\omega-\theta+2u')/n_{11}+(1-\cos i')\cos(2\omega-\theta-2u')/n_{12}], \tag{5.57}$$

$$K_5 = \sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega+\theta)/n_{10}+(1+\cos i')\cos(2\omega+\theta-2u')/n_{13}-(1-\cos i')\cos(2\omega+\theta+2u')/n_{14}], \tag{5.58}$$

$$K_6 = 2\sin^2 i'\cos 2\theta/2\theta_C+(1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u')/n_{15}+(1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')/n_{16}, \tag{5.59}$$

$$K_7 = \sin 2i'\cos\theta/\theta_C-\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u')/n_{17}+\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')/n_{18},, \tag{5.60}$$

$$K_{11} = 2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta)/n_1+(1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u')/n_3+(1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u')/n_4, \tag{5.61}$$

$$K_{12} = 2\sin^2 i'\sin(2\omega+2\theta)/n_2+(1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u')/n_5+(1-\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta+2u')/n_6, \tag{5.62}$$

$$K_{13} = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega/2\omega_1+3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u')/n_7+3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u')/n_8, \tag{5.63}$$

$$K_{14} = \sin i'\Big[2\cos i'\sin(2\omega-\theta)/n_9-(1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+2u')/n_{11}+(1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')/n_{12}\Big], \tag{5.64}$$

$$K_{15} = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta)/n_{10}+(1+\cos i')\sin(2\omega+\theta-2u')/n_{13}-(1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u')/n_{14}], \tag{5.65}$$

$$K_{16} = 2\sin^2 i'\sin 2\theta/2\theta_C+(1+\cos i')^2\sin(2\theta-2u')/n_{15}+(1-\cos i')^2\sin(2\theta+2u')/n_{16}, \tag{5.66}$$

$$K_{17} = \sin 2i'\sin\theta/\theta_C-\sin i'(1+\cos i')\sin(\theta-2u')/n_{17}+\sin i'(1-\cos i')\sin(\theta+2u')/n_{18}, \tag{5.67}$$

$$K_{18} = (\sin^2 i'\sin 2u')/2n', \tag{5.68}$$

$$H_1^* = \frac{1}{16}\Big[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2K_1^*+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2K_2^*+\sin^2 i\,K_3^*+2\sin i(1-\cos i)K_4^*+2\sin i(1+\cos i)K_5^*\Big], \tag{5.69}$$

$$H_2^* = \frac{1}{16}[\sin^2 i\,K_6^*+\sin 2i\,K_7^*], \tag{5.70}$$

$$H_3^* = \frac{1}{16}\Big[-\frac{1}{2}(1-\cos i)^2K_1^* + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2K_2^* - \sin i(1-\cos i)K_4^* + \sin i(1+\cos i)K_5^*\Big], \tag{5.71}$$

$$K_1^* = 2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta)/n_1^2 + (1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u')/n_3^2 + (1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u')/n_4^2, \tag{5.72}$$

$$K_2^* = 2\sin^2 i'\sin(2\omega+2\theta)/n_2^2 + (1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u')/n_5^2 + (1-\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta+2u')/n_6^2, \tag{5.73}$$

$$K_3^* = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega/4\omega_1^2 + 3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u')/n_7^2 + 3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u')/n_8^2, \tag{5.74}$$

$$K_4^* = \sin i'[2\cos i'\sin(2\omega-\theta)/n_9^2 - (1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+2u')/n_{11}^2 + (1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')/n_{12}^2], \tag{5.75}$$

$$K_5^* = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta)/n_{11}^2 + (1+\cos i')\sin(2\omega+\theta-2u')/n_{13}^2 - (1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u')/n_{14}^2], \tag{5.76}$$

$$K_6^* = 2\sin^2 i'\sin 2\theta/4\theta_C^2 + (1+\cos i')^2\sin(2\theta-2u')/n_{15}^2 + (1-\cos i')^2\sin(2\theta+2u')/n_{16}^2, \tag{5.77}$$

$$K_7^* = \sin 2i'\sin\theta/\theta_C^2 - \sin i'(1+\cos i')\sin(\theta-2u')/n_{17}^2 + \sin i'(1-\cos i')\sin(\theta+2u')/n_{18}^2. \tag{5.78}$$

上述各式中的 $n_1, n_2, \cdots, n_{18}$ 均是慢变化的变化率，即

$$\begin{cases} n_1 = 2\omega_1 - 2\theta_C, & n_2 = 2\omega_1 + 2\theta_C, & n_3 = 2\omega_1 - 2\theta_C + 2n' \\ n_4 = 2\omega_1 - 2\theta_C - 2n', & n_5 = 2\omega_1 + 2\theta_C - 2n', & n_6 = 2\omega_1 + 2\theta_C + 2n' \\ n_7 = 2\omega_1 - 2n', & n_8 = 2\omega_1 + 2n', & n_9 = 2\omega_1 - \theta_C \\ n_{10} = 2\omega_1 + \theta_C, & n_{11} = 2\omega_1 - \theta_C + 2n', & n_{12} = 2\omega_1 - \theta_C - 2n' \\ n_{13} = 2\omega_1 + \theta_C - 2n', & n_{14} = 2\omega_1 + \theta_C + 2n', & n_{15} = 2\theta_C - 2n' \\ n_{16} = 2\theta_C + 2n', & n_{17} = \theta_C - 2n', & n_{18} = \theta_C + 2n' \end{cases} \tag{5.79}$$

其中

$$\begin{cases} \theta = \Omega - \Omega', \\ \theta_C = \Omega_1 - \Omega'_C. \end{cases} \tag{5.80}$$

Ω_1 和 ω_1 是卫星轨道根数 Ω 和 ω 的一阶长期项系数（即变率），即上一章给出的地球扁率（J_2）摄动项. 而 Ω'_C 和 n' 是日、月轨道根数 Ω' 和 u' 的长期变率. 关于 Ω'_C，对于太阳轨道，无此项，而对于月球轨道，见(5.9)式. 关于 n'，在上述摄动解中，就可当作日、月的平运动角速度，即相应平近点角 M' 的变率，具体计算公式见(5.1)和(5.2)式中 $\overline{M}$ 的表达式.

3. 短周期项 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$

$$a_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)2aG_{1},\tag{5.81}$$

$$e_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)\left(\frac{\sqrt{1-e^{2}}}{e}\right)\left(\sqrt{1-e^{2}}G_{1}-G_{2}\right),\tag{5.82}$$

$$i_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^{2}}\sin i}\left(\cos iG_{2}-G_{3}\right),\tag{5.83}$$

$$\Omega_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^{2}}\sin i}G_{4},\tag{5.84}$$

$$\omega_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)\left(\frac{\sqrt{1-e^{2}}}{e}\right)G_{5}-\cos i\Omega_{\mathrm{S}}(t),\tag{5.85}$$

$$M_{\mathrm{S}}(t)=-\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)\left(\frac{1-e^{2}}{e}G_{5}+7G_{6}\right).\tag{5.86}$$

其中

$$\begin{aligned}G_{1}=&S_{1}\left[-e^{2}-2e\cos E+\frac{1}{2}e^{2}\cos 2E\right]+\\&S_{2}\left[-e^{2}-2e\cos E+\left(1-\frac{1}{2}e^{2}\right)\cos 2E\right]+\\&S_{3}\sqrt{1-e^{2}}\left[-2e\sin E+\sin 2E\right],\end{aligned}\tag{5.87}$$

$$\begin{aligned}G_{j}(j=2,3,4,6)=&S_{1j}\left[e\left(-2+\frac{3}{4}e^{2}\right)\sin E+\frac{3}{4}e^{2}\sin 2E-\frac{1}{12}e^{3}\sin 3E\right]+\\&S_{2j}\left[-\frac{5}{2}e\left(1-\frac{1}{2}e^{2}\right)\sin E+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}e^{2}\right)\sin 2E-\right.\\&\left.\frac{1}{6}e\left(1-\frac{1}{2}e^{2}\right)\sin 3E\right]+S_{3j}\sqrt{1-e^{2}}\left[\frac{5}{2}e\cos E-\right.\\&\left.\frac{1}{2}(1+e^{2})\cos 2E+\frac{1}{6}e\cos 3E\right],\end{aligned}\tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}G_{5}=&S_{1}\left[(-2+e^{2})\sin E+\frac{1}{2}e\sin 2E\right]+\\&S_{2}\left[-3(1-e^{2})\sin E-\frac{1}{2}e\sin 2E+\frac{1}{3}\sin 3E\right]+\\&S_{3}(1-e^{2})^{-1/2}\left[3\left(1-\frac{11}{6}e^{2}\right)\cos E+\frac{1}{2}e(1+e^{2})\cos 2E-\right.\\&\left.\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}e^{2}\right)\cos 3E\right].\end{aligned}\tag{5.89}$$

这里 S_{1},S_{2},S_{3} 和 $S_{1j},S_{2j},S_{3j}(j=2,3,4,6)$ 的表达式如下：

$$S_1 = \frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+$$
$$\frac{1}{16}\Big\{\sin^2 i[2\sin^2 i'\cos 2\theta + (1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u') +$$
$$(1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')] +$$
$$2\sin 2i[\sin 2i'\cos\theta - \sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u') +$$
$$\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')] + 4\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)[\sin^2 i'\cos 2u']\Big\}, \tag{5.90}$$

$$S_2 = \frac{1}{16}\Big[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_1 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_2 + \sin^2 i D_3 +$$
$$2\sin i(1-\cos i)D_4 + 2\sin i(1+\cos i)D_5\Big], \tag{5.91}$$

$$S_3 = -\frac{1}{16}\Big[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_6 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_7 + \sin^2 i D_8 +$$
$$2\sin i(1-\cos i)D_9 + 2\sin i(1+\cos i)D_{10}\Big]. \tag{5.92}$$

$$S_{12} = 0, \tag{5.93}$$

$$S_{13} = \frac{1}{16}\{-2\sin^2 i[2\sin^2 i'\sin 2\theta + (1+\cos i')^2\sin(2\theta-2u') +$$
$$(1-\cos i')^2\sin(2\theta+2u')] - 2\sin 2i[\sin 2i'\sin\theta -$$
$$\sin i'(1+\cos i')\sin(\theta-2u') + \sin i'(1-\cos i')\sin(\theta+2u')]\}, \tag{5.94}$$

$$S_{14} = -\frac{1}{4}\sin 2i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right) + \frac{1}{16}\{\sin 2i[2\sin^2 i'\cos 2\theta +$$
$$(1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u') + (1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')] +$$
$$4\cos 2i[\sin 2i'\cos\theta - \sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u') +$$
$$\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')] -$$
$$6\sin 2i[\sin^2 i'\cos 2u']\}, \tag{5.95}$$

$$S_{16} = S_1, \tag{5.96}$$

$$S_{22} = 2S_3, \tag{5.97}$$

$$S_{23} = \frac{1}{16}[(1-\cos i)^2 D_6 - (1+\cos i)^2 D_7 +$$
$$2\sin i(1-\cos i)D_9 - 2\sin i(1+\cos i)D_{10}], \tag{5.98}$$

$$S_{24} = \frac{1}{16}[\sin i(1-\cos i)D_1 - \sin i(1+\cos i)D_2 +$$
$$\sin 2i D_3 + 2(\cos i - \cos 2i)D_4 + 2(\cos i + \cos 2i)D_5], \tag{5.99}$$

$$S_{26} = S_2 , \tag{5.100}$$

$$S_{32} = -2S_2 , \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned} S_{33} = &\frac{1}{16}[(1-\cos i)^2 D_1 - (1+\cos i)^2 D_2 + \\ &2\sin i(1-\cos i)D_4 - 2\sin i(1+\cos i)D_5], \end{aligned} \tag{5.102}$$

$$\begin{aligned} S_{34} = &-\frac{1}{16}[\sin i(1-\cos i)D_6 - \sin i(1+\cos i)D_7 + \\ &\sin 2iD_8 + 2(\cos i - \cos 2i)D_9 + 2(\cos i + \cos 2i)D_{10}], \end{aligned} \tag{5.103}$$

$$S_{36} = S_3 . \tag{5.104}$$

$D_1, D_2, \cdots, D_{10}$ **都是慢变量的函数,它们的表达式如下:**

$$\begin{cases} D_1 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega - 2\theta) + (1+\cos i')^2\cos(2\omega - 2\theta + 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\cos(2\omega - 2\theta - 2u'), \\ D_2 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega + 2\theta) + (1+\cos i')^2\cos(2\omega + 2\theta - 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\cos(2\omega + 2\theta + 2u'), \\ D_3 = 2(2-3\sin^2 i')\cos 2\omega + \\ \qquad 3\sin^2 i'\cos(2\omega - 2u') + 3\sin^2 i'\cos(2\omega + 2u'), \\ D_4 = \sin i'[2\cos i'\cos(2\omega - \theta) - (1+\cos i')\cos(2\omega - \theta + 2u') \\ \qquad (1-\cos i')\cos(2\omega - \theta - 2u')], \\ D_5 = \sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega + \theta) + (1+\cos i')\cos(2\omega + \theta - 2u') \\ \qquad (1-\cos i')\cos(2\omega + \theta + 2u')], \end{cases} \tag{5.105}$$

$$\begin{cases} D_6 = 2\sin^2 i'\sin(2\omega - 2\theta) + (1+\cos i')^2\sin(2\omega - 2\theta + 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\sin(2\omega - 2\theta - 2u'), \\ D_7 = 2\sin^2 i'\sin(2\omega + 2\theta) + (1+\cos i')^2\sin(2\omega + 2\theta - 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\sin(2\theta + 2\omega + 2u'), \\ D_8 = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega + \\ \qquad 3\sin^2 i'\sin(2\omega - 2u') + 3\sin^2 i'\sin(2\omega + 2u'), \\ D_9 = \sin i'[2\cos i'\sin(2\omega - \theta) - (1+\cos i')\sin(2\omega - \theta + 2u') + \\ \qquad (1-\cos i')\sin(2\omega - \theta - 2u')], \\ D_{10} = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega + \theta) + (1+\cos i')\sin(2\omega + \theta - 2u') - \\ \qquad (1-\cos i')\sin(2\omega + \theta + 2u'), \end{cases} \tag{5.106}$$

§5.3 太阳光压摄动

太阳辐射压(简称光压)是一表面力,与承受辐射压的卫星表面形状和大小有关,因此光压摄动应与卫星姿态有关. 除球形卫星外,承受光压力的卫星截面积 $S=S(t)$是变化的,要严格计算光压力的大小有一定程度的困难,通常采用一确定值,即所谓的有效截面积 S. 如果对卫星姿态完全了解,可给出 $S(t)$随时间的变化规律,不管这一规律多么复杂,对数值求解光压摄动方程而言,不会遇到任何问题,但往往会给光压摄动分析解的建立带来困难. 故在构造光压摄动分析解时,通常采用固定值的有效截面积,即 $S=\text{const}$,我们亦作如此处理.

太阳光压摄动的另一个特点是:尽管光压力可以近似地处理成有心斥力(力心即作为质点的太阳),但常会遇到地影问题(从卫星上看即"日蚀"),在一定意义下,光压力实为一"间断力",摄动效应不同于一般保守力,相应摄动解的结构亦不同于中心天体非球形引力和第三体质点引力的摄动解形式.

1. 光压摄动加速度

从实用的角度来看,可对相应的光压摄动加速度进行一些合理简化. 其原始形式为

$$\boldsymbol{F}_{\varepsilon}=\mu_{\mathrm{S}}\left(\rho_{\mathrm{S}}\frac{\Delta_{\mathrm{S}}^{2}}{\Delta^{2}}\right)\hat{\boldsymbol{\Delta}},\tag{5.107}$$

$$\mu_{\mathrm{S}}=\frac{\kappa S}{m}.\tag{5.108}$$

这里 $\kappa=1+\eta$,η 是卫星表面反射系数,$0<\eta<1$. S/m 即卫星的有效面质比,ρ_{S} 是地球附近(距太阳 $\Delta_{\mathrm{s}}=1.0\ \mathrm{AU}$,AU 是天文单位)的太阳辐射压强度,有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{S}}&=4.5605\times10^{-6}\ \mathrm{N/m^{2}}\\&=0.3166\times10^{-17}.\end{aligned}\tag{5.109}$$

后一个无量纲值对应标准单位系统. $\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}$,$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}$ 各为卫星和太阳的地心位置矢量,$\hat{\boldsymbol{\Delta}}=\boldsymbol{\Delta}/\Delta$ 即单位矢量.

对于典型的有效截面积与质量之比(以下简称有效面质比)为 10^{9} 的人造地球卫星,光压摄动量级为

$$\varepsilon=\frac{|\boldsymbol{F}_{\varepsilon}|}{|\boldsymbol{F}_{0}|}=\begin{cases}10^{-8} & \text{中低轨卫星,}\\10^{-7} & \text{高轨卫星.}\end{cases}\tag{5.110}$$

面质比为 10^9 相当于 0.00681 m^2/kg，一个半径为 1.5 m 重 1 t 的球形卫星的面质比即 1.038×10^9. 因此，对于低轨人造地球卫星的运动，光压摄动亦可当作二阶摄动小量. 既然如此，考虑到太阳离地球远得多，有 $\frac{r}{r_S}=O(10^{-4})$，那么进一步作些简化是合理的，即

(1) 可用 $-\boldsymbol{r}_S$ 代替 $\boldsymbol{\Delta}$；

(2) 可认为太阳光来自无穷远，为平行光，可采用圆柱型地影模型，相应的圆截面的半径 R 就采用地球参考椭球体赤道半径 a_e 值，最大误差也只有 10^{-3}（即地球几何扁率的量级）.

在上述近似处理下，光压摄动加速度变为下列形式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_\varepsilon=-k_0\boldsymbol{r}_S/r_S,\\ k_0=\left(\dfrac{kS}{m}\right)\rho_S,\end{cases}\tag{5.111}$$

$\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 的三个分量 S,T,W 即

$$S=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\hat{\boldsymbol{r}},\quad T=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\hat{\boldsymbol{t}},\quad W=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\hat{\boldsymbol{w}},\tag{5.112}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{t}},\hat{\boldsymbol{w}}$ 即卫星径向，横向和轨道面法向单位矢量. 不难给出

$$\begin{cases}S=-k_0(A\cos f+B\sin f),\\ T=-k_0(B\cos f-A\sin f),\\ W-k_0C,\end{cases}\tag{5.113}$$

$$C=\sin i[\sin(\Omega-u')+\sin(\Omega+u')]+\sin i\cos i'[\sin(\Omega-u')-\sin(\Omega+u')]+\cos i\sin i'[\sin u'].\tag{5.114}$$

A 和 B 的表达式见(5.16)和(5.17)，A,B 和 C 仅涉及慢变量，C 中的 i' 即黄赤交角. 由 S,T,W 三分量可给出受摄运动方程(3.73)的右函数 $f_2(\sigma,k_0)$.

2. 无地影情况的光压摄动解[2]

在此情况下只有长周期项和短周期项，分别为 $\sigma_L^{(1)}(t)$ 和 $\sigma_S^{(2)}(t)$.

(1) 长周期项 $\boldsymbol{\sigma}_L^{(1)}$

$$a_L^{(1)}(t)=0,\tag{5.115}$$

$$e_L^{(1)}(t)=-\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\sqrt{1-e^2}[(1-\cos i)G_1+(1+\cos i)G_2+2\sin i\,G_3],\tag{5.116}$$

$$i_L^{(1)}(t)=\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}[\sin i\,G_1-\sin i\,G_2+2\cos i\,G_3],\tag{5.117}$$

$$\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\ \frac{e}{\sqrt{1-e^2}\sin i}[\sin i\ G_4-\sin i\ G_5+2\cos i\ G_6],\tag{5.118}$$

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=&-\cos i\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\\&\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}[(1-\cos i)G_4+(1+\cos i)G_5+\\&2\sin i\ G_6].\end{aligned}\tag{5.119}$$

$$M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\left(\frac{1+e^2}{e}\right)[(1-\cos i)G_4+(1+\cos i)G_5+2\sin i\ G_6].\tag{5.120}$$

其中 $\mu=GM=1,G_1$ **等量的表达式如下：**

$$\begin{cases}G_1=(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega+u')/n_1+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega-u')/n_2,\\G_2=(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega-u')/n_1+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega+u')/n_2,\\G_3=\sin\varepsilon[\cos(\omega-u')/n_5-\cos(\omega+u')/n_6],\end{cases}\tag{5.121}$$

$$\begin{cases}G_4=(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega+u')/n_1+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega-u')/n_2,\\G_5=(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-u')/n_1+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+u')/n_2,\\G_6=\sin\varepsilon[\sin(\omega-u')/n_5-\sin(\omega+u')/n_6],\end{cases}\tag{5.122}$$

$$\begin{cases}n_1=\omega_1-\Omega_1+n', & n_2=\omega_1-\Omega_1-n',\\n_3=\omega_1+\Omega_1+n', & n_4=\omega_1+\Omega_1+n',\\n_5=\omega_1-n', & n_6=\omega_1+n'.\end{cases}\tag{5.123}$$

这里 Ω_1 **和** ω_1 **即第四章给出的一阶长期项系数**（J_2 **项**），**而** u'**和相应的** n'**就是太阳平黄经及其变率，而** n'**亦可用太阳平运动角速度，黄赤交角** ε **的计算公式见**(5.1)**式.**

上述 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$**是直接部分，而间接部分**（**即与地球扁率** J_2 **项的联合效应**）**如下，记作**$[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}]_2$**：**

$$\begin{cases}[\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2=\dfrac{5\sin i}{\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)}I,\\[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2=-\tan i\ \dfrac{(13-15\sin^2 i)}{\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)}I,\\[M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2=-3\sqrt{1-e^2}\tan i\ I.\end{cases}\tag{5.124}$$

其中

$$\begin{aligned} I &= \int^t \omega_1 i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\left(\frac{3}{8}k_0\right) n a^2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}[-\sin i\, G_7 + \sin i\, G_8 - 2\cos i\, G_9], \end{aligned} \tag{5.125}$$

$$\begin{cases} G_7 = (1+\cos\varepsilon)\sin(\omega - \Omega + u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_1^2}\right) + (1-\cos\varepsilon)\sin(\omega - \Omega - u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_2{}^2}\right), \\ G_8 = (1+\cos\varepsilon)\sin(\omega + \Omega - u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_1^2}\right) + (1-\cos\varepsilon)\sin(\omega + \Omega + u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_4^2}\right), \\ G_9 = \sin\varepsilon\left[\sin(\omega - u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_5^2}\right) - \sin(\omega + u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_6^2}\right)\right]. \end{cases} \tag{5.126}$$

(2)短周期项 $\boldsymbol{\sigma}_S^{(2)}(\mathbf{t})$

$$a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = -2k_0 a^3\left[A\left(\cos E + \frac{1}{2}e\right) + B\sqrt{1-e^2}\sin E\right], \tag{5.127}$$

$$\begin{aligned} e_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = -k_0 a^2\sqrt{1-e^2}\Big[&\sqrt{1-e^2}A\left(\frac{1}{4}\cos 2E\right) + \\ &B\left(-\frac{e}{2}\sin E + \frac{1}{4}\sin 2E\right)\Big], \end{aligned} \tag{5.128}$$

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = -\frac{1}{4}k_0 a^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\Big[&\sqrt{1-e^2}\left(\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \frac{e}{4}\cos 2E\right)H_1 - \\ &\left(\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E\right)H_2\Big], \end{aligned} \tag{5.129}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = -\frac{1}{4}k_0 a^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\Big[&\left(\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E\right)H_1 + \\ &\sqrt{1-e^2}\left(\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \frac{e}{4}\cos 2E\right)H_2\Big], \end{aligned} \tag{5.130}$$

$$\begin{aligned} \omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = -\cos i\ \Omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) - k_0\frac{a^2}{e}\Big[&\sqrt{1-e^2}A\left(-\frac{e}{2}\sin E + \frac{1}{4}\sin 2E\right) + \\ &B\left(e\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \frac{1}{4}\cos 2E\right)\Big], \end{aligned} \tag{5.131}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) = &-\sqrt{1-e^2}[\omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t) + \cos i\ \Omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)] + \\ &5k_0 a^2\Big\{A\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E\right] + \\ &B\sqrt{1-e^2}\left[-\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) + \frac{e}{4}\cos 2E\right]\Big\}, \end{aligned} \tag{5.132}$$

其中

$$\left\{\begin{aligned}H_1=&\sin i[(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega+u')+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega-u')]-\\&\sin i[(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega-u')+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega+u')]+\\&2\cos i\sin\varepsilon[\cos(\omega-u')-\cos(\omega+u')],\\H_2=&\sin i[(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega+u')+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega-u')]-\\&\sin i[(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-u')+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+u')]+\\&2\cos i\sin\varepsilon[\sin(\omega-u')-\sin(\omega+u')].\end{aligned}\right.$$

(5.133)

上述各式中出现的卫星根数,都是平均根数 $\bar{\sigma}$,有关太阳的各种量意义同前.

3. 地影存在情况下的光压摄动解

此时,光压摄动的结构不同于无地影情况,考虑到地影的空间几何位置相对卫星的运动而言变化缓慢,可处理成卫星每圈进、出地影的位置相同,或以计算弧段中间一圈的进、出地影位置代替整个弧段的相应值.于是光压摄动解全部变成长周期项,在计算弧段不太长的情况下可按二阶长期项处理,但公式右端涉及到的 Ω,ω 以及太阳位置量 u',宜取 $(t-t_0)$ 的中间时刻的平均根数 $\bar{\sigma}_{1/2}$. 摄动解变为如下形式:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma(t)&=\sigma_2(t-t_0)\\&=[\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{L}}+[\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{S}},\end{aligned}\tag{5.134}$$

其中

$$[\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{L}}=(1-\Delta E/2\pi)[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)-\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)],\tag{5.135}$$

$$[\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{S}}=\frac{1}{2\pi}[\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_1)-\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_0)]n(t-t_0),\tag{5.136}$$

其中 E_0 和 E_1 各为卫星出地影和进地影时的偏近点角,这将由求解地影方程给出,见下面第 4 段.有两点说明:

(1) (5.135)式右端出现的 $\Delta E=\widehat{E_1E_0}$,是卫星在地影内运行的弧段(用弧度单位表示),当无地影时 $\Delta E=0$,解(5.135)退化为(5.115)~(5.120)的形式,只是当作长周期变化项处理:$[\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{L}}=\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)-\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)$. 而此时短周期变化项(5.136)式消失,即无地影时 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_1)=\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_0+2\pi)$,导致 $[\Delta\sigma(t)]_{\mathrm{S}}=0$,这相当于不计算光压摄动短周期项,亦是合理的.故可用(5.135)~(5.136)式代替地影存在与否两种情况的计算公式,而不必分别处理.

(2) $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 与 $\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(E)$ 的公式除 $M_{\mathrm{S}}^{(2)}$ 外全部用(5.115)~(5.120)和(5.127)~(5.131)式的形式,而原(5.132)式给出的 $M_{\mathrm{S}}^{(2)}$ 由下列两部分代替.

$$[\Delta M(t)]_{\mathrm{S}} = [\Delta M]_1 + [\Delta M]_2, \tag{5.137}$$

$$[\Delta M]_1 = \frac{1}{2\pi}[M_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_1) - M_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_0)]n(t-t_0); \tag{5.138}$$

$$M_{\mathrm{S}}^{(2)}(E) = k_0\frac{a^2}{e}\left\{A\left[\frac{1}{2}(3-e^2)e\sin E + \frac{1}{4}(1-3e^2)\sin 2E\right] - \sqrt{1-e^2}B\left[e\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) + \frac{1}{4}(1-2e^2)\cos 2E\right]\right\}, \tag{5.139}$$

$$[\Delta M]_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2a}\right)[\Delta a(t)]_{\mathrm{S}}n(t-t_0). \tag{5.140}$$

其中$[\Delta a(t)]_{\mathrm{S}}$即由(5.136)式给出的 a 的变化部分.

从(5.137)～(5.140)式可以看出,当无地影时,$[\Delta M(t)]_{\mathrm{S}}$ 的两个部分,直接部分$[\Delta M]_1$ 和由 Δa 导致的间接部分$[\Delta M]_2$ 均为 0,即 M 的短周期项 $M_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$同样消失.

4. 地影方程的解

卫星进出柱形地影边界处满足如下条件:

$$\cos\psi = A\cos f + B\sin f,\ \sin\psi = R/r, \tag{5.141}$$

其中 ψ 即卫星进出地影边界径向与太阳方向的地心张角,由此不难导出地影方程如下:

$$\begin{cases}\sin(\theta+f) = -\dfrac{1}{K}\left[1-\dfrac{R^2}{p^2}(1+e\cos f)^2\right]^{1/2},\\ K^2 = A^2+B^2, \qquad (K>0),\\ \theta = \arctan(A/B).\end{cases} \tag{5.142}$$

A,B 的表达式前面已有注明,$p=a(1-e^2)$,而 R 是圆柱形地影圆截面的半径,可取 $R=a_{\mathrm{e}}=1$.

求解地影方程即寻找满足方程(5.142)的两个真近点角 f 对应的 f_0(出地影)和 f_1(进地影),具体求解方法是一迭代过程:

(1)首先令 $e=0$,由

$$\sin(\theta+f)^{(0)} = -\frac{1}{K}\left[1-\left(\frac{R}{p}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{5.143}$$

给出 f_0 和 f_1 的迭代初值 $f_0^{(0)}$ 和 $f_1^{(0)}$. (5.143)式两个解分别在第三和第四象限,而根据地影的特点要求弧 $f_0f_1>180°$,因此$(\theta+f)^{(0)}$在第四象限的一个解给出的是 $f_0^{(0)}$,另一个是 $f_1^{(0)}$. 如果无解,即$|\sin(\theta+f)^{(0)}|>1$,则取 $\sin(\theta+f)^{(0)}=-1$,$(\theta+f)^{(0)}=270°$,$f_0{}^{(0)}=f_1{}^{(0)}=270°-\theta$.

(2)由初值 $f_0^{(0)}$ 和 $f_1^{(0)}$ 分别代入原方程(5.142)进行迭代:

$$\sin(\theta+f)^{(k)}=-\frac{1}{K}\left[1-\frac{R^2}{p^2}(1+e\cos f^{(k-1)})^2\right]^{\frac{1}{2}},\qquad k=1,2,\cdots,$$

(5.144)

直到 f_0 和 f_1 满足精度要求终止,即相邻两次的 f_0 和 f_1 满足下列条件:

$$|f_0^{(k)}-f_0^{(k-1)}|<\varepsilon\,|f_1^{(k)}-f_1^{(k-1)}|<\varepsilon. \tag{5.145}$$

ε 是所给的精度要求,根据光压摄动量的大小和所采用的各种近似,可取 $\varepsilon=10^{-3}$.

注意,迭代时,$f_0^{(k)}$ 和 $f_1^{(k)}$ 是分别进行的,它们始终分别对应$(\theta+f)^{(k)}$在第四象限和第三象限.

在迭代过程中,只要再有一次 $|\sin(\theta+f)^{(k)}|>1$,就认为无地影,此时可取 $f_0=0$,$f_1=2\pi$.

求得出、进地影位置 f_0 和 f_1 后,根据下列几何关系即可给出最终需要的 E_0 和 E_1:

$$\sin E=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos f}\sin f,\quad \cos E=\frac{1-e^2}{1+e\cos f}\cos f+e. \tag{5.146}$$

§5.4 大气阻力摄动

对于典型的有效面质比为 10^9 的人造地球卫星,如果运行高度在 300 km以上,大气阻力摄动的量级不会高于 10^{-6},即对中低轨卫星的运动而言,大气阻力摄动量级亦可当作二阶小量来处理.

1. 大气阻力摄动加速度的近似公式

对于 200 km 以上的高层大气而言,实属稀薄大气,对于尺度不是特别大的航天器而言,其运动是处于自由分子流中. 高马赫数的航天器在这种状态的稀薄气体中飞行,所受的气动力主要表现为一种阻力,并有很好的近似表达式:

$$\boldsymbol{D}=-\frac{1}{2}(C_{\mathrm{D}}S)\rho V^2\left(\frac{\boldsymbol{V}}{V}\right), \tag{5.147}$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}, \tag{5.148}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ 各为卫星和大气相对地心坐标系的速度矢量. 公式(5.147)中有几个量必须处理好,下面分别加以说明.

(1)阻力系数 C_{D},通常取

$$C_{\mathrm{D}}=2.2. \tag{5.149}$$

当高度降低后，特别是 150 km 以下，大气状态将处于自由分子流和连续介质流之间的过渡状态，阻力系数要随高度变化，而且还没有严格的计算公式，这里暂不考虑它.

(2) 大气阻力亦是表面力，卫星承受阻力的截面积 S 很重要，对阻力加速度而言，即面质比 S/m. 与光压摄动类似，要严格给出相应的 S/m，必须了解卫星的形状和姿态. 如果缺乏这种信息，只能采用一个等效的面质比，亦称有效面质比，$S/m=\text{const}$.

(3) 大气运动速度 v_{a}，通常大气运动表现为一个旋转运动，其旋转角速度 ω_{a} 比较复杂，其值有一个范围，即

$$\omega_{\mathrm{a}}=(0.8\sim1.4)n_{\mathrm{e}},$$

其中 n_{e} 是地球自转角速度. 不过，对于大气阻力摄动特别重要的低轨卫星，飞行高度 $h=200\sim400\ \mathrm{km}$，可取

$$\omega_{\mathrm{a}}=n_{\mathrm{e}}. \tag{5.150}$$

随着飞行高度的增加，大气阻力的影响减小，因此对中低轨卫星的运动而言，就采用(5.150)式的值.

(4) 大气密度模式 $\rho=\rho(\boldsymbol{r},t)$，这是一个极其复杂的问题，在目前大气模式的精度还不够高的情况下，取如下指数模式：

$$\rho=\rho_0\exp\left(-\frac{r-\sigma(r_0)}{H(r)}\right). \tag{5.151}$$

其中 ρ_0 对应 r_0，$\sigma(r_0)$ 是过 r_0 的等密度椭球面（或称扁球面），有：

$$\sigma=r_0\ \frac{1-\epsilon\sin^2\varphi}{1-\epsilon\sin^2\varphi_0}, \tag{5.152}$$

ϵ 是地球几何扁率. 在 $h=200\sim600\ \mathrm{km}$ 范围内，密度标高 $H(r)$ 随 r 线性变化，且有

$$H(r)=H_0+\frac{\mu}{2}(r-r_0),\quad \mu=0.1. \tag{5.153}$$

考虑到密度随时间的变化（太阳辐射效应），取

$$\rho_0=\bar{\rho}_0(1+F^*\cos\psi^*), \tag{5.154}$$

$$F^*=\frac{f^*-1}{f^*+1},\quad f^*=\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}, \tag{5.155}$$

$$\cos\psi^*=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_m. \tag{5.156}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{r}}_m$ 是密度周日峰方向的单位矢量，其地心赤道球坐标表达式为

$$\boldsymbol{r}_m=\begin{pmatrix}\cos\delta_{\mathrm{S}}\cos(\alpha_{\mathrm{S}}+\lambda_m)\\ \cos\delta_{\mathrm{S}}\sin(\alpha_{\mathrm{S}}+\lambda_m)\\ \sin\delta_{\mathrm{S}}\end{pmatrix},\quad \lambda_m\geqslant30^\circ. \tag{5.157}$$

这里 α_S 和 δ_S 是太阳的赤经赤纬，λ_m 是否取 $30°$（即太阳偏西 2^h）可视具体情况而定.

在具体引用上述大气密度分布公式时，参考点总是取初始近地点 p_0 对应的 r_{p_0}，于是密度公式即写成下列形式：

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{p_0}\exp\left(-\frac{r-\sigma(p_0)}{H(r)}\right)\\ &= \bar{\rho}_{p_0}(1+F^*\cos\psi^*)\exp\left(-\frac{r-\sigma(p_0)}{H(r)}\right),\end{aligned}\tag{5.158}$$

其中

$$\begin{cases}F^* = \dfrac{f^*-1}{f^*+1}, \quad f^* = \left(\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\right)_{p_0},\\ \sigma(p_0) = r_{p_0}(1-\epsilon\sin^2\varphi)/(1-\epsilon\sin^2\varphi_{p_0}),\\ \sin\varphi = \sin i\sin(f+\omega)\sin\varphi_{p_0} = \sin i\sin\omega_0,\\ H(r) = H_{p_0}+\dfrac{\mu}{2}(r-r_{p_0}).\end{cases}\tag{5.159}$$

计算中需注意首先要提供参考点处的平均大气密度 $\bar{\rho}_{p_0}$，它对应高度 h_{p_0}，有

$$h_{p_0} = a_0(1-e_0)-(1-\epsilon\sin^2 i_0\sin^2\omega_0),\tag{5.160}$$

其中根数 a_0, e_0, i_0 和 ω_0 是取初始平均根数还是初始瞬时根数均无妨，这里指的是参考点，与具体求摄动分析解用什么方法无关，只要计算参考点及其相应的各种参量（见公式(5.159)），采用统一的根数值即可.

2. 大气阻力摄动运动方程

对于旋转大气，其旋转速度 v_a 在 (U, N, W) 三个方向的分量为

$$\begin{cases}(v_a)_U = (v_a)_T\sin\theta, & \cos\varphi\cos i' = \cos i,\\ (v_a)_N = (v_a)_T\cos\theta, & \cos\varphi\sin i' = \cos(f+\omega)\sin i,\\ (v_a)_W = -r\cos\varphi\, n_e\sin i'.\end{cases}\tag{5.161}$$

其中 $(v_a)_T = r\cos\varphi n_e\sin i'$，$i'$ 是大气旋转方向与轨道面横向（T）之间的夹角，θ 是径向与速度方向（即 U 向）之间的夹角，并有

$$\sin\theta = 1+O(e^2), \quad \cos\theta = O(e).\tag{5.162}$$

而卫星运动速度 v 在上述三个方向的分量为 $(v, 0, 0)$. 考虑到大气模式本身的状况，且反映大气旋转的特征量

$$\frac{rn_e}{v}\approx O(10^{-1}).$$

可对大气阻力 D 作一些简化，三个阻力加速度分量 U,N,W 可以写成下列形式：

$$\begin{cases} U = -\dfrac{1}{2}A_1\,\dfrac{(1+2e\cos f+e^2)}{a(1-e^2)}\rho, \\ N = 0, \\ W = -\dfrac{1}{2}A_2 r\cos u\sin i\left[\dfrac{1+2e\cos f+e^2}{a(1-e^2)}\right]^{1/2}\rho, \end{cases} \tag{5.163}$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = \left(\dfrac{C_D S}{m}\right)F^2, \quad A_2 = \left(\dfrac{C_D S}{m}\right)n_{\mathrm{e}}F, \\ F = \left(1-\dfrac{rn_{\mathrm{e}}}{v}\cos i\right)\approx\left(1-\dfrac{r_{p_0}n_{\mathrm{e}}}{v_{p_0}}\cos i\right). \end{cases} \tag{5.164}$$

将 U,N,W 代入摄动运动方程即得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_1 na^2}{(1-e^2)^{3/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{3/2}\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_1 na}{(1-e^2)^{1/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(\cos f+e)\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_2 a\sin i}{4(1-e^2)}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(1+\cos 2u)\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_2 a}{4(1-e^2)}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\sin 2u\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_1 na^2}{e(1-e^2)^{1/2}}\sin f(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\partial n}{\partial a}\right)\Delta a+\dfrac{A_1 na}{e(1-e^2)}\left(\dfrac{r}{a}\right)\sin f(1+e\cos f+ \\ \qquad e^2)(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\rho. \end{cases} \tag{5.165}$$

由此还可给出近星距 $r_p=a(1-e)$ 的变化率，即

$$\frac{\mathrm{d}r_p}{\mathrm{d}t}=-\frac{A_1 na^2}{(1-e^2)^{3/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(1-\cos f)(1-e^2)\rho\leqslant 0. \tag{5.166}$$

从上述摄动运动方程可知，如果大气静止，运动天体的轨道面则不变，而无论大气是静止还是旋转，半长径 a 和近星距 r_p 都在不断减小. 虽然 $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$ 右端因子$(\cos f+e)$并不恒大于零，但后面将会从平均效应得知，e 亦是减小的. 这就表明，阻力摄动效应的主要特点是使运动天体的轨道不断变小变圆，此即阻尼作用下，轨道能量耗散的一种表现，这种耗散效应将是低

轨地球卫星轨道寿命长短的决定性因素.

3. 大气阻力摄动解[2]

上述大气阻力摄动运动方程(5.165)实为完整的卫星受摄运动对应的小参数方程中的二阶小量部分,即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f_0(a)+f_1(J_2)+f_2(\boldsymbol{D}/m)$$

中的 $f_2(\boldsymbol{D}/m)$. 仍采用平均根数法构造小参数幂级数解,只需给出二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$.

只保留上述对球形静止平均大气模式各种修正的一次项(10^{-1} 的量级),它们彼此的联合效应(10^{-2} 的量级)均略去. 因为大气模式本身的误差可有 5%~10%(即 10^{-1}),故在构造 $\sigma_2(t-t_0)$时,密度公式中保留到与此相当的 10^{-1} 量级的摄动量,有如下形式:

$$\rho=\rho_{p_0}\exp\left(-\frac{1}{H_{p_0}}(a-a_0+a_0e_0)-C\cos2\omega_0\right)\times$$
$$\{1+C\cos2\omega\cos2E-C\sin2\omega\sin2E+\Delta(\mu,F^*)\}\exp(z\cos E),\tag{5.167}$$

$$\Delta(\mu,F^*)=\mu z_0^2\left(\frac{3}{4}-\cos E+\frac{1}{4}\cos2E\right)+$$
$$F^*A^*\left(-\frac{e}{2}+\cos E+\frac{e}{2}\cos2E\right)+F^*B^*\left(\sin E+\frac{e}{2}\sin2E\right).$$

其中

$$z=\frac{ae}{H_{p_0}},\quad z_0=\frac{a_0e_0}{H_{p_0}}.\tag{5.168}$$

以这种形式的密度公式代入摄动运动方程(5.165)即可给出右函数 $f_2(\boldsymbol{D}/v)$ 的具体形式. 与前面各种摄动影响不同,在分解该右函数求平均值时,将要出现下列形式的积分及其结果:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nE\exp(z\cos E)=0,\qquad(n=1,2,\cdots),\tag{5.169}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nE\exp(z\cos E)=I_n(z),\qquad(n=0,1,2,\cdots).\tag{5.170}$$

$I_n(z)$称为第一类虚变量的贝赛尔函数,具体计算公式后面第 4 段中介绍.

根据上述平均值的表达,二阶长期项系数 σ_2 的表达式如下:

$$a_2=-B_1a^2n\left\{(I_0+2eI_1)+C(\cos2\omega I_2)+\mu z_0^2\left(\frac{3}{4}I_0-I_1+\frac{1}{4}I_2\right)+\right.$$

$$F^* A^* \left(\frac{e}{2}I_0 + I_1 + \frac{3}{2}eI_2\right)\Bigg\}, \tag{5.171}$$

$$\begin{aligned} e_2 = &-B_1 an\Bigg\{\left(\frac{e}{2}I_0 + I_1 + \frac{e}{2}I_2\right) + \frac{C}{2}\cos 2\omega(I_1 + I_3) + \\ &\mu z_0^2\left(-\frac{1}{2}I_0 + \frac{7}{8}I_1 - \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{8}I_3\right) + \\ &F^* A^* \left(\frac{1}{2}I_0 + \frac{e}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 + \frac{e}{2}I_3\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{5.172}$$

$$i_2 = -\frac{1}{4}B_2 a\sin i[(I_0 + \cos 2\omega I_2)], \tag{5.173}$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{4}B_2 a\ I_2 \sin 2\omega, \tag{5.174}$$

$$\begin{aligned} \omega_2 = &-\cos i\Omega_2 - B_1 an\Bigg\{C\sin 2\omega\left[\frac{1}{4}I_0 - \frac{1}{2e}I_1 - I_2 + \frac{1}{2e}I_3 + \frac{3}{4}I_4\right] + \\ &F^* B^*\left[\left(\frac{1}{2e} + \frac{e}{16}\right)I_0 + \frac{1}{2}I_1 - \left(\frac{1}{2e} - \frac{e}{4}\right)I_2 - \frac{1}{2}I_3 - \frac{5}{16}eI_4 - \right. \\ &\left.\frac{e}{4}(I_0 - I_2)\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{5.175}$$

$$\begin{aligned} M_2 = &-(\omega_2 + \cos i\Omega_2) + B_1 an\left\{F^* B^*\left[\frac{e}{4}(I_0 - I_2)\right]\right\} - \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2a}\right)a_2(t - t_0). \end{aligned} \tag{5.176}$$

上述摄动解表达式右端出现的慢变量 Ω,ω **以及太阳平黄经** $u'=L$**,宜取**$(t-t_0)$**的中间值** $\bar{\sigma}_{1/2}$ **,即**

$$\begin{cases} \Omega = \bar{\Omega}_0 + \dfrac{1}{2}\Omega_1(t - t_0), \\ \omega = \bar{\omega}_0 + \dfrac{1}{2}\omega_1(t - t_0), \\ L = L_0 + \dfrac{1}{2}n'(t - t_0). \end{cases} \tag{5.177}$$

其中 Ω_1 **和** ω_1 **是第 4 章给出的一阶长期项系数**(J_2 **项**)**,**n'**即太阳平运动角速度. 见**(5.1)**式.**

注意,为了计算公式的统一,凡长周期项变化按长期项处理的计算公式中,出现 Ω,ω **以及有关量时,均取** $\bar{\sigma}_{1/2}$ **代替** $\bar{\sigma}_0$**.**

(5.171)～(5.176)**式中有关大气阻力的几个参数** B_1,B_2,C,μ,F^* **和** A^*,B^***,除** μ **和** F^* **在前面**(5.153)**和**(5.159)**式已给出外,其他各变量意义如下:**

$$B_1 = \left(\frac{C_D S}{m}\right)\bar{\rho}_{p_0} F^2 \exp\left(-\frac{1}{H_{p_0}}(a - a_0 + a_0 e_0) - C\cos 2\omega_0\right),$$
(5.178)

$$B_2 = \left(\frac{C_D S}{m}\right)\bar{\rho}_{p_0} F n_e \exp\left(-\frac{1}{H_{p_0}}(a - a_0 + a_0 e_0) - C\cos 2\omega_0\right), \tag{5.179}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{H_{p_0}} r_{p_0}\right)\sin^2 i_0. \tag{5.180}$$

$\epsilon=1/298.257$ 即前面所提到的地球几何扁率，A^* 和 B^* 的表达式与上一章的 A 和 B 类似，见公式(5.16)和(5.17)，只是那里的 Ω 在 A^* 和 B^* 中改为 $\Omega-\lambda_m$ 即可. 剩下的一个问题是(5.178)和(5.179)式右端指数函数中包含的 a，这与计算参考点处各参数采用的 a_0, e_0 不一样，按平均根数法，它应取 $\bar{a}_0$. 考虑到有地影时的光压摄动和大气阻力摄动，轨道半长径 a 有二阶长期项 $a_2(t-t_0)$，可在计算弧段$(t-t_0)$中取 $\bar{a}_{1/2}=\bar{a}_0+\frac{1}{2}a_2(t-t_0)$代替 $\bar{a}_0$.

4. 第一类虚变量 Bessel 函数 $I_n(z)$ 的计算

计算公式为

$$\begin{cases} I_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, \\ I_{n+1} = I_{n-1} - \left(\dfrac{2n}{z}\right) I_n, \qquad (n \geqslant 1), \\ z = \dfrac{ae}{H_{p_0}} = \dfrac{\bar{a}\,\bar{e}}{H_{p_0}}, \end{cases} \tag{5.181}$$

有

$$I_n(z) = O(z^n). \tag{5.182}$$

计算中 k 的取值由相对精度控制，若记

$$\begin{cases} [I_n(z)]_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(n+k)!k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} = \sum_{k=0}^{N} [I_n(z)]_k, \\ [I_n(z)]_{k=N+1} = \dfrac{1}{(n+N+1)!(N+1)!}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{n+2(N+1)}, \end{cases} \tag{5.183}$$

则要求满足下列条件：

$$[I_n(z)]_{k=N+1} \big/ [I_n(z)]_N < \varepsilon^*. \tag{5.184}$$

这里 ε^* 是精度控制值，根据具体要求取值.

计算 $I_n(z)$比较麻烦，对于偏心率较小的卫星轨道，高度变化幅度 Δh 不会太大，在精度要求不太高时，可将密度表达式中的 $\exp(z\cos E)$展开，表

示成$(z\cos E)$的幂形式，取其几项即可，这可在摄动解中避免出现 $I_n(z)$.

§5.5　后牛顿效应

这是高速问题中，广义相对论对牛顿力学的修正. 对于受摄二体问题，相应的后牛顿摄动加速度为

$$A_{\mathrm{PN}}=\frac{\mu}{c^2r^2}\left[\left(\frac{4\mu}{r}-v^2\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+4\dot{r}v\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{v}\right)\right],\tag{5.185}$$

显然有

$$\varepsilon=|A_{\mathrm{PN}}|\Big/\left(\frac{\mu}{r^2}\right)=O\left(\frac{v^2}{c^2}\right).\tag{5.186}$$

其中 c 是光速，$\mu=GM$ 是中心天体的引力常数，在标准单位系统中 $\mu=1$. 但下面仍然保持写为 μ 的形式.

在太阳系中，水星绕日运动和人造卫星绕地球运动，这一摄动量级分别为 10^{-8}和 10^{-9}. 对水星运动而言，后牛顿项相对其他天体的引力摄动是不太小的，而对人造地球卫星(确切地说是指近地卫星)的运动，后牛顿项相对地球扁率摄动仅为三阶小量，即 $O(J_2^3)$，但仍然给出相应的摄动解.

由 $\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}$与轨道根数之间的关系可知，用径向、横向和轨道面法向三个分量表达的形式为

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}r\\0\\0\end{pmatrix},\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}\dot{r}\\r\dot{\theta}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\sin f\ \sqrt{\mu/p}\\(1+e\cos f)\sqrt{\mu/p}\\0\end{pmatrix},\tag{5.187}$$

其中 $p=a(1-e^2)$. 由此可得 A_{PN}的 S,T,W 三分量为

$$\begin{cases}S=\dfrac{\mu^2}{c^2a^3}\left[-3\left(\dfrac{a}{r}\right)^2+10\left(\dfrac{a}{r}\right)^3-4(1-e^2)\left(\dfrac{a}{r}\right)^4\right],\\T=\dfrac{\mu^2}{c^2a^3}\left[4e\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\sin f\right],\\W=0.\end{cases}\tag{5.188}$$

将其代入相应的摄动运动方程即得

$$\dot{\sigma}=f_0(a,e)+f_{\mathrm{PN}}(\sigma,\varepsilon),\tag{5.189}$$

这里的后牛顿项 f_{PN}实为三阶小量，且只有长期部分和短周期部分，即

$$f_{\mathrm{PN}}=f_{\mathrm{C}}(a,e)+f_{\mathrm{S}}(a,e,M).\tag{5.190}$$

由平均根数法，积分后给出摄动解的长期项和短周期项如下[2]：

$$a_C(t-t_0)=0, e_C(t-t_0)=0, i_C(t-t_0)=0, \tag{5.191}$$

$$\Omega_C(t-t_0)=0, \tag{5.192}$$

$$\omega_C(t-t_0)=\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{3}{p}n(t-t_0), \tag{5.193}$$

$$M_C(t-t_0)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{3}{p}(1-e^2)^{-1}\left(3+\frac{7}{2}e^2+e^4\right)n(t-t_0), \tag{5.194}$$

$$a_S(t)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)(1-e^2)^{-2}[(14+6e^2)e\cos f+5e^2\cos 2f], \tag{5.195}$$

$$e_S(t)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{1}{p}\left[(3+7e^2)\cos f+\frac{5}{2}e\cos 2f\right], \tag{5.196}$$

$$i_S(t)=0, \tag{5.197}$$

$$\Omega_S(t)=0, \tag{5.198}$$

$$\omega_S(t)=\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{1}{p}\left[3(f-M)-\left(\frac{3}{e}-e\right)\sin f-\frac{5}{2}\sin 2f\right], \tag{5.199}$$

$$M_S(t)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{1}{p}\sqrt{1-e^2}\left[3e\left(\frac{r}{a}\right)\sin f-\left(\frac{3}{e}+7e\right)\sin f-\frac{5}{2}\sin 2f\right]. \tag{5.200}$$

上述 $\omega_C(t-t_0)$，对水星运动而言就是水星近日点进动项，这是后牛顿效应的一个重要结果. 对于人造卫星的运动，视精度要求而决定取舍.

参 考 文 献

[1] 中国紫金山天文台编. 中国天文年历. 北京：科学出版社
[2] 刘林. 航天器轨道理论. 北京：国防工业出版社. 2000

第6章　航天器轨道设计和星座设计

§6.1　航天器轨道设计的基本内容

航天器轨道设计的目的就是根据飞行任务需求来确定航天器的运行轨道参数以及发射时机，并使得航天器的运行成本最低．轨道设计是一个复杂的优化过程，它涉及到许多参数之间的权衡．通常在航天器执行空间飞行任务的不同时期，往往有不同的飞行轨道，譬如：用来检测和存贮航天器的停泊轨道，用于航天器在不同轨道之间转移的转移轨道，航天器执行正常飞行任务的工作轨道以及航天器任务结束后进入的废弃轨道等．一个完整的轨道设计应包括航天器在不同飞行阶段的各种轨道，但在任务设计早期，可主要着眼于航天器的工作轨道．

轨道设计没有绝对的规则可循，不同的飞行任务，其设计思想、设计方法也不尽相同．这一节主要介绍一些卫星轨道类型、轨道选择以及发射窗口选择等有关人造地球卫星轨道设计的基本知识．有兴趣的读者可进一步阅读文献[1]的第五、六章和文献[2]的第七章内容．

1．轨道类型概述

轨道设计首先是根据任务要求选择的合适的轨道类型．按照轨道高度或者轨道特征可以分为**低地球轨道**(LEO：Low Earth Orbit)、**中地球轨道**(MEO：Medium Earth Orbit)、**地球同步轨道**(GSO：GeoSynchronous Orbit)、**大椭圆轨道**(HEO：Highly Eccentric Orbit)等．

LEO的轨道高度在2000 km以下，周期约在90～120分钟之间，LEO的优点有：卫星和用户设备相对简单，成本较低；由于高度低，因此无线电发射功率可以降低．但是，LEO也有一些明显的缺陷：单颗卫星覆盖范围很小，可视时间短(对周期为105分钟的轨道，可视时间大约为15分钟)．LEO轨道受大气阻力摄动影响明显，在此摄动的影响下轨道将不断变圆、

变低，因此卫星需要额外的燃料来提供补偿轨道衰减所需的能量. 这种轨道常用于资源勘测的资源卫星，用于地区侦察的军用侦察卫星，用于全球气象观测和预报的气象卫星以及空间站、载人航天器等.

MEO 的轨道高度一般在 5000 km 以上，周期为 200 分钟到十几个小时，大气阻力影响可忽略，轨道相对较稳定，便于精密定轨和精密星历预报，目前，GPS、GLONASS 和未来的 GALILEO 等卫星导航系统都选用了这种轨道. MEO 卫星地面覆盖范围较大，可视时间较长，如一颗 GPS 卫星约可覆盖地球 34％左右的面积，最大可视时间达 9 小时以上. 但 MEO 轨道 Doppler 频移缓慢，卫星的发射成本相对 LEO 卫星也要高的多.

GSO 的轨道高度约为 35800 km，包括地球静止轨道卫星(GEO：Geostationary Earth Orbit)和倾斜同步轨道卫星(IGSO：Inclined GeoSynchronous Orbit). GEO 是倾角为 0 的地球同步轨道，相对于地面观测者，卫星好像在赤道上空静止不动，其星下点轨迹是一个点. GEO 卫星可以提供大范围的地面覆盖(约 40％)，在其覆盖区域内任何一点，卫星均 24 小时可见. GEO 已用于通信、电视转播、气象和导航卫星系统的增强(如美国的 WAAS 系统、欧洲的 EGNOS 系统和日本的 MSAS 系统等). 但 GEO 也存在一些缺陷：它不能提供对极区的覆盖，卫星发射费用高，多普勒频移很低，此外 GEO 需要较频繁的定点维持，不利于精密定轨和精密星历的长期预报.

IGSO 是指倾角不为 0 的地球同步轨道，其星下点轨迹是一个跨南北半球的“8”字，其交叉点在赤道上. 这种轨道可对极区可以提供很好的覆盖，其交叉点在赤道上除了有长期漂移外，还存在由田谐项共振引起的长周期漂移，这种共振影响在不同的交叉点位置也会有不同，考虑到与 GEO 卫星的碰撞危险和服务的稳定性，也会需要频繁的轨道维持. 此外，IGSO 卫星发射费用也高，且在国际上应用很少，这在技术上也会存在一些风险.

HEO 为大椭圆轨道，近地点高度约几百千米，远地点高度通常在几万千米以上. 卫星在远地点附近运动较慢，可见时间长，适合对特殊地区的覆盖(如高纬度地区)，前苏联的闪电(Molniya)通信卫星系统就采用这种轨道. HEO 轨道的偏心率大，要解决拱线指向(近地点方向)的长期进动使其保持拱线静止，轨道倾角就必须取临界倾角(63.43°或 116.57°). 还有，对于 HEO，信号空间传输时的损耗在近地点和远地点相差 10 dB 以上，这导致信号跟踪性能的下降，当然，理论上可通过改变卫星天线的增益来改善跟踪性能，但这将导致硬件的复杂性. HEO 的 Doppler 频移变化也很大，这也将导致地面设备的复杂化. 此外，HEO 存在一个严重的缺陷：卫星穿过

Van Allen辐射带(2000～10000 km),这有可能导致卫星机械和电子设备故障.

除了上面这些轨道分类外,还有其它一些以轨道特征来描述的特殊轨道,如回归轨道、太阳同步轨道、冻结轨道等.所谓回归轨道是指卫星的星下点轨迹在卫星运行 n 圈以后重复的轨道.太阳同步轨道和冻结轨道在前面第四章中均有介绍,前者是指卫星轨道面在赤道上的进动速度等于地球公转角速度,这类轨道有一特点,就是卫星同方向通过同一纬度圈时的地方时相同.后者也叫拱线静止轨道,它是指轨道拱线指向在空间保持不变的轨道,这类轨道的特征是轨道偏心率和轨道形状不变,近地点幅角保持在 $90°$,因此,卫星通过同一纬度地区的高度保持不变.这种轨道的实现,通常是通过适当选择轨道周期、倾角和偏心率来达到拱线静止的目的.

2. 轨道选择

轨道选择是指根据任务总体以及各分系统对轨道提出的一些技术要求来确定卫星的有关轨道参数.首先,轨道根数 a,e 表示了轨道的大小与形状,决定了轨道近地点、远地点高度和轨道周期,因此 a,e 的选择其实就是选择轨道周期和近地点高度.

又由 $\sin\varphi_p=\sin i\sin\omega$($\varphi_p$ 为近地点的地心纬度)知近地点幅角 ω 可以由轨道倾角 i 和近地点位置决定.于是近地点幅角的选择可以通过选择近地点位置来代替.

$$\omega=\begin{cases}\sin^{-1}(\sin\varphi_p/\sin i), & \text{近地点位于升轨,}\\ 180°-\sin^{-1}(\sin\varphi_p/\sin i), & \text{近地点位于降轨.}\end{cases} \tag{6.1}$$

升交点赤经 Ω 通常在轨道设计中由发射时间来最后确定,因此,在轨道选择时用升交点经度 Ω_G 来代替 Ω,$\Omega_G=\Omega-S$(S 为卫星发射时刻的格林尼治恒星时).

$$\Omega_G=\begin{cases}\lambda-\sin^{-1}(\tan\varphi/\tan i), & \text{入轨点位于升轨,}\\ 180°+\lambda+\sin^{-1}(\tan\varphi/\tan i), & \text{入轨点位于降轨.}\end{cases} \tag{6.2}$$

这里(λ, φ)为入轨点的地心经纬度.这样,升交点经度 Ω_G 的选择也就由入轨点位置选择来代替.

综上,这六个轨道根数的选择可以用轨道周期、近地点高度、轨道倾角、近地点位置、发射时间和入轨点位置的选择来代替.

下面来讨论这几个参数的选择问题.

(1) 轨道倾角的选择

轨道倾角选择所需考虑的约束因素主要有：

1) 对 LEO 卫星，轨道倾角不应小于被观测区域的最高纬度或最低纬度的绝对值.

2) 对一次入轨的卫星而言，轨道倾角不能小于发射场的地心纬度. 若要发射倾角小于发射场纬度的轨道，则必须经过变轨，且应选择纬度接近轨道倾角的发射场发射，因为变轨道面的轨道调整是最耗能量的. 小倾角轨道卫星一般都从低纬度地区的发射场发射就是这个原因.

3) 倾角的选择必须考虑运载火箭的能力. 轨道倾角越大，消耗运载火箭的能量就越多.

4) 倾角选择必须注意与轨道周期和升交点的配合，使星下点轨迹经过被观测区域的重点目标.

5) 必须注意地面台站的布设，以保证对卫星的跟踪、测量和控制.

6) 必须注意发射方向的限制(瞄准方向及各级火箭落点的安全).

7) 一些特殊轨道(太阳同步轨道、极轨道、临界倾角轨道等)对倾角的要求.

(2) 近地点位置的选择

对侦察或资源卫星，为了提高地面分辨率，一般把近地点位置安排在所需侦察或勘察地区的中部上空较为合适.

对返回式卫星，一般把近地点位置放在制动点后边(飞行方向的前方)，只有这样，才可能使卫星速度方向与当地水平面的夹角是负的，这可以节省制动火箭的能量.

对像 Molniya 这一类 HEO 卫星，近地点位置应放在主要服务区的天底方向. 比如卫星的主要服务区在北半球，则近地点位置应放在南半球上空，以保证卫星对北半球的服务时间.

此外，一些冻结轨道对近地点位置有特殊的要求.

(3) 近地点高度与轨道周期的选择

影响轨道高度选择的约束条件主要有：

1) 高度对地面覆盖的影响. 高度越高，地面覆盖范围就越大.

2) 高度对地面分辨率的影响. 高度越高，地面分辨率就越差.

3) 高度与地面台站的关系. 高度越高，卫星可见时间就越长.

4) 与轨道寿命的关系. 轨道越高，受大气阻力影响越小，寿命就越长. 近地卫星的轨道高度不能过低，轨道寿命必须大于工作寿命.

5) 与测轨精度的关系. 这也与大气阻力有关，高度越高，大气阻尼摄动

影响就越小,测轨精度相应就可能高些.

6）空间电磁辐射环境的影响,特别 Van Allen 辐射带的影响等.

在考虑以上轨道高度选择的因素后,可进一步选择轨道的近地点高度和轨道周期. 近地点高度选择的主要考虑因素有：

1）地面分辨率一般以近地点处的分辨率作参考,所以应对此加以考虑.

2）轨道寿命必须大于工作寿命. 对 LEO 和 HEO 卫星,因大气密度一般以近地点处的大气密度作参考,所以应考虑轨道寿命与近地点高度之间的关系.

3）与测轨精度、预报精度的关系.

4）运载火箭的能力以及有效载荷的质量. 高度越高,所需燃料就越多. 有效载荷的质量越大,要到达同样的轨道高度所需的燃料就越多.

轨道周期选择除了要考虑高度选择的一些约束条件外,还有以下几个约束因素：

1）对返回式卫星,应考虑返回制动点的高度、速度、速度方向与方位等. 还有最后一圈卫星星下点应通过回收区的期望落点.

2）对侦察和资源等一类照相卫星,要考虑摄影的旁向重叠率.

3）要求星下点轨迹重复的回归轨道对应的轨道周期限制.

(4）入轨位置的选择

卫星入轨位置由发射场、运载火箭发射轨道的飞行程序以及对卫星星下点轨迹的安排所确定,它还与入轨航程、主动段、入轨段的测控及火箭各子级落点的散布有关.

3. 发射窗口的选择

发射窗口的选择问题就是确定将卫星发射到所设计的轨道平面的时刻. 由于轨道平面在惯性空间中是不动的(二体条件下),因此发射时刻就是指地面发射点位置旋转通过轨道平面的时刻,这个时刻取决于发射点的经纬度、卫星轨道倾角和升交点赤经. 从理论上讲,每天地面发射点通过轨道面两次,因此,每天都有两次可供发射的时机. 但事实上,并不是任意一天就都能进行发射,具体的可发射时间,即发射窗口还必须根据卫星任务和星上设备的各种要求来确定.

发射窗口选择实际上是根据某些限制条件来选择卫星轨道跟太阳(和月球)的相对位置关系. 影响发射窗口选择的因素很多,这里给出几个约束条件：

（1）卫星运行期间，太阳对地面目标的光照条件.

（2）在卫星运行时，太阳能电池、卫星热控等对太阳照射卫星的方向的要求.

（3）卫星姿态测量精度所要求的地球、卫星、太阳三者之间的几何关系.

（4）卫星处于地影时间长短的要求以及进出地影时卫星在轨位置要求.

（5）卫星运行时，地面站对卫星测控条件的要求（地球、卫星、太阳三者之间的几何关系）.

（6）返回式卫星对回收时间要求.

（7）其他有关条件如交会、卫星组网的要求.

由于发射窗口的约束条件很多，因此这就需要用系统工程的方法去分析各种约束条件的合理性，协调相互矛盾的因素，建立各条件与发射时间之间的数学模型，计算出各约束条件对应发射时间的交集，从而得到发射窗口.

§6.2 星座设计的基本问题

随着卫星应用需求的日益发展，特别是 20 世纪 80 年代以来，越来越多的航天任务仅靠单颗卫星已不可能完成，于是由多颗卫星组成的卫星星座开始引起人们的关注，成为许多航天任务的首选方案. 这一节将介绍星座的有关基本知识.

1. 基本概念

这里介绍星座设计中常采用的几种星座类型和有关的基本概念.

（1）星形星座

星形星座是早期研究的一种星座. 星形星座以各条轨道有一对公共节点，以及相邻同向轨道之间有相等（或近似相等）的相对倾角为特征. 如极轨卫星组成的星座属于星形星座. 星形星座的理论分析比较方便，但覆盖特性很差. 主要表现有以下两大缺点：

1）所有轨道都在两个节点相交，在两个节点附件过于密集，而两节点间的其他区域，卫星比较稀疏，因此覆盖很不均匀.

2）同向相邻轨道之间的卫星，相对位置基本不变，但反向轨道之间的卫星相对相位经常变化，所以其覆盖特性变化比较剧烈，实用价值不大.

（2）Walker-δ 星座

Walker-δ 星座是由一些高度相同的圆轨道卫星构成的一类均匀星座.

它具有如下一些基本特性：

1）每个轨道平面所含卫星数目相同，且卫星在轨道平面内均匀分布；

2）相邻轨道面间卫星的相对相位为一常数；

3）各轨道平面相对某一参考面的夹角相同，该参考面不一定是赤道面；

4）各轨道面和参考面的交点沿参考面均匀分布.

Walker-δ 星座可以用三个参数 $T/P/F$ 来描述其相对几何结构，T 为星座中卫星总数，P 为星座轨道平面个数，F 为相邻轨道间卫星的相对相位的度量参数，表示当一条轨道上的一颗卫星经过升交点时，相邻的东侧轨道上的相应卫星已经过了它的升交点，对应的相位为 $360°F/T$，F 的取值为 0 到 $P-1$ 之间的任意整数. 若给定了 Walker-δ 星座的轨道高度、参考平面、相对参考平面的倾角和某个轨道面相对参考面的升交点位置，则 $T/P/F$ 三个参数就唯一确定了这个星座.

Walker-δ 星座有如下优点：星座中各卫星所受长期摄动影响的主要部分均相同，从而使星座的相对几何结构保持基本不变，便于星座的维持；其次，对全球连续覆盖，Walker-δ 星座的几何结构具有某种“均匀性”和“对称性”，因此在全球范围内的覆盖相对较为均匀.

对以赤道为参考平面，参数为 $T/P/F$ 的 Walker-δ 星座，若令其中任一轨道面为第一轨道面，对应升交点赤经为 Ω_0，令该轨道面上任一颗卫星作为计数的第一颗星，对应的相位为 u_0，则星座中第 i 轨道面上第 j 颗卫星，其升交点赤经 Ω 和相位 u 可用下式确定：

$$\Omega = \Omega_0 + (i-1)\frac{360°}{P}. \tag{6.3}$$

$$u = u_0 + (i-1)F\frac{360°}{T} + (j-1)P\frac{360°}{T}, \tag{6.4}$$

(3) Rosette 星座

Rosette 星座是 δ 星座 $P=T$ 的一种特殊星座，因为这种星座的轨道图形在固定的天球上的投影犹如一朵盛开的玫瑰，故称其为 Rosette 星座.

由 N 颗卫星组成的 Rosette 星座满足以下的关系：

$$\begin{cases} \alpha_i = 2\pi i/N \quad i = 0,1,2,\cdots,N-1, \\ \beta_i = \beta, \\ \gamma_i = m\alpha_i \quad m = 0,1,2,\cdots,N-1. \end{cases} \tag{6.5}$$

其中，α_i 为第 i 颗卫星的升交点赤经，β_i 为第 i 颗卫星的轨道倾角，γ_i 为第 i 颗卫星从升交点起算的初始相位角.

(4) σ 星座

σ 星座是 δ 星座的子星座. 其特点是星座中所有卫星的星下点轨迹只有一条,且卫星等间隔分布. σ 星座通常用两个整数 T 和 M 作参考码,它和 Walker-δ 星座的 $T/P/F$ 参数的关系满足下式:

$$\begin{cases} P = \dfrac{T}{H[M,T]}, \\ F = \left(\dfrac{T}{PM}\right)(KP - M - 1), \end{cases} \tag{6.6}$$

式中 $H[M,T]$表示取 M 和 T 的最大公因子. 由于 F 为 0 到 $P-1$ 间的整数,因此整数 K 可以唯一确定.

(5) 覆盖性能参数[2]

星座的覆盖品质需要一些覆盖性能指标来量化. 最普遍的也最常用的覆盖性能指标有覆盖百分比、最大覆盖间隙、平均覆盖间隙、时间平均间隙和平均响应时间等. 这里给出这些指标的定义:

覆盖百分比(Percent Coverage):地面上任一点的覆盖百分比等于被一颗或多颗卫星覆盖的时间除以总的仿真时间. 覆盖百分比可以直接表示地面某一点或某一地区被覆盖多少次,但它并不提供有关覆盖间隙分布的任何信息.

最大覆盖间隙(Maximum Coverage Gap):等于单独一个点所遇到的最大的覆盖间隙. 当研究多个点的统计特性时,我们可以取其最大覆盖间隙的平均值或其中的最大值,因此全球平均最大间隙是全部个别点的最大间隙的平均值,而全球最大间隙则是某一个别点覆盖间隙的最大值. 这个统计特性可给出某种最坏情况的信息,但由于用一个点或几个点就可确定这一结果,故它不能正确地排定星座覆盖性能地优劣. 因此,最大覆盖间隙是一个不好的性能指标.

平均覆盖间隙(Mean Coverage Gap):是指地面上任意一点的覆盖间隙的总长度除以覆盖间隙的次数. 覆盖间隙次数指在给定的仿真时间段中该点不被卫星覆盖的次数,覆盖间隙总长度是指该点不被卫星覆盖的总时间.

时间平均间隙(Time Average Gap):时间平均间隙是指按时间平均的平均间隙持续时间,也就是说,时间平均间隙就是间隙长度的平均. 该指标在数值上等于各次覆盖间隙长度的平方和除以总的仿真时长.

平均响应时间(Mean Response Time):响应时间是指从我们接收到要观测某点的随机请求开始到可以观测到该点为止的时间长度,最大响应时

间等于最大覆盖间隙.如果一颗卫星在给定的一个时间步长内位于该点的视场中,则该时间步长的响应时间为 0;如果所讨论的点在某个覆盖间隙内,则响应时间就是到覆盖间隙终点的时间长度.平均响应时间就是指在仿真时段内,各个时间步长的响应时间的总和对总的仿真时间的平均.事实上,在计算平均响应时间时,由于对称性,响应时间可以用到覆盖间隙开始时的时间长度来代替,而这并不影响平均响应时间的最后计算结果,且方法更加简单.这个性能指标既考虑了覆盖的统计特性,又考虑了间隙的统计特性,因此可以确定整个系统的响应能力.平均响应时间是评价响应能力的最好的覆盖性能指标.

2. 卫星导航星座的常用性能指标

在卫星导航星座的设计中,还会有一些特殊的性能要求,如共视卫星个数、星座值、导航精度和服务可用性等,下面介绍几个常用的性能指标.

(1) 共视性要求

对同时提供三维定位和定时能力的导航星座而言,共视性要求就是在规定的截止仰角(如 5°)下,在任何时刻,服务区内任意地点同时可见的导航卫星数目应不少于 4 颗.

(2) 精度因子 DOP(Dilution of Precision)

对导航星座而言,系统所提供的定位几何是影响导航精度的一个重要因素.一般导航系统的定位几何可以用 DOP 值来描述,定义为用户等效距离误差 UERE(User Equivalent Range Error)到最终定位误差或定时误差的放大系数,它反映了观测源几何位置对定位误差的影响.常用的有下几种 DOP 参数:几何精度因子 GDOP(Geometry Dilution of Precision)、位置精度因子 PDOP(Position Dilution of Precision),水平精度因子 HDOP(Horizontal Dilution of Precision)、垂直精度因子 VDOP(Vertical Dilution of Precision)和时间精度因子 TDOP(Time Dilution of Precision).

对同时支持用户解算接收机钟差的导航星座而言,各种 DOP 的计算如下:

在用户的本地坐标系(x 轴指向东,y 轴指向北,z 轴指向天顶)中,设矩阵 G 为用户到定位星 $S_i(i=1,2,...,k,k\geqslant 4)$的方向余弦矩阵,即

$$G=\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_k & m_k & n_k & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

其中，l_i, m_i, n_i 分别为用户到定位星 S_i 的方向余弦. 记矩阵 $(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G})^{-1}$ 的主对角线元素为 $\sigma_{ii}(i=1,2,3,4)$，则对零均值等精度的独立观测而言，各种 DOP 分别为

$$\mathrm{GDOP}=\sqrt{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}+\sigma_{44}}, \tag{6.8}$$

$$\mathrm{PDOP}=\sqrt{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}, \tag{6.9}$$

$$\mathrm{HDOP}=\sqrt{\sigma_{11}+\sigma_{22}}, \tag{6.10}$$

$$\mathrm{VDOP}=\sqrt{\sigma_{33}}, \tag{6.11}$$

$$\mathrm{TDOP}=\sqrt{\sigma_{44}}. \tag{6.12}$$

需要注意的是，这些 DOP 的概念都是基于不加权的协方差矩阵得到的，而事实上来自各颗卫星的观测误差是不相同的，因此 DOP 并不能真实地反映系统的导航精度. 尽管如此，在星座设计时，为了撇开其他一些非星座因素的影响，人们还是经常用 DOP 值去衡量星座的导航性能.

(3) 星座值 CV(Constellation Value)

对导航星座，我们常用星座值 CV 来分析星座的导航性能. CV 反映了星座的几何特性和连续可用性，是星座性能的一个重要体现. 其定义为覆盖区内 DOP 值小于某一门限值的区域占整个服务区域的面积百分比在全时段上的平均值. 其计算公式为

$$\mathrm{CV}=\frac{\sum\limits_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}\sum\limits_{i=1}^{L}\mathrm{bool}(\mathrm{DOP}_t,i\leqslant\mathrm{DOP}_{\max})\times\mathrm{area}_i}{\Delta T\times\mathrm{Area}}\times100\%. \tag{6.13}$$

这里，ΔT 为总的仿真时间，L 为网格个数，$\mathrm{bool}(X)$ 为布尔函数，若 X 为真则等于 1，若 X 为假则等于 0. $\mathrm{Area}=\sum\limits_{i=1}^{L}\mathrm{area}_i$ 为服务区域总面积，area_i 为第 i 个网格的面积.

(4) 可用性(Availability)[3]

可用性是指系统能为用户提供可用的导航服务的时间百分比，在卫星星座性能的评估中. 可用性是一个普遍使用的术语，依照对系统不同的性能需求，可定义为各种类型的可用性，如精度可用性，连续可用性等.

一个系统性能的可用性要求可在三个层次上进行计算：瞬间的，局部的，服务区域的. 瞬时可用性(IAL：Instantaneous Availability Level) $\alpha(i,t)$ 定义为在特定地点(i)和特定时刻(t)满足系统性能需求的概率. 最简单的情况下，IAL 等于 0 或 1，而在一般情况下 IAL 为 0 和 1 之间的某个概率值. 因此，可定义一个瞬时可用性指示函数(IAI：Instantaneous Avail-

ability Indicator)$\beta(i, t)$：当 IAL 超过最低 IAL 要求 $\alpha_{\min}$，$\beta(i, t)$的值为 1，反之则为 0. IAL 和 IAI 之间的关系表达式如下：

$$\beta(i, t) = \operatorname{bool}\{\alpha(i, t) \geqslant \alpha_{\min}\}. \tag{6.14}$$

局部可用性(LAL：Local Availability Level)是指对特定地点在某一时间间隔的“平均”可用性. 首先，定义时间平均的局部可用性(TALAL：Time - Averaged Local Availability Level)为对地点 l 在时间间隔$(t_0, t_0 + \Delta T)$内的瞬时可用性的时间平均，即：

$$\bar{\alpha}(i) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}\alpha(i, t), \tag{6.15}$$

这里 ΔT 是所计算的时间间隔.

同样也定义一个局部可用性的时间百分比(LAPOT：Percentage-of-Time Local Availability Level)为一段时间间隔内特定地点的 IAI 的平均，即：

$$\bar{\beta}(i) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}\beta(i, t). \tag{6.16}$$

这两种定义的含义是不同的，如果说“PDOP＜6 的平均概率至少是 0.95”指的是 TALAL；然而如果说“至少在 95％的时间 PDOP＜6 的概率超过 0.999”则指 LAPOT.

服务区可用性(SAL：Service Availability Level)是对整个服务区域内所有地点的局部可用性的平均，同样有基于 IAL 和 IAI 两种可用性：

$$A_{\mathrm{S}} = \frac{1}{\mathrm{Area}}\sum_{i=1}^{L}[\bar{\alpha}(i) \times \mathrm{area}_i] = \frac{1}{\mathrm{Area} \times \Delta T}\sum_{i=1}^{L}\sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}[\alpha(i, t) \times \mathrm{area}_i], \tag{6.17}$$

$$B_{\mathrm{S}} = \frac{1}{\mathrm{Area}}\sum_{i=1}^{L}[\bar{\beta}(i) \times \mathrm{area}_i] = \frac{1}{\mathrm{Area} \times \Delta T}\sum_{i=1}^{L}\sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}[\beta(i, t) \times \mathrm{area}_i]. \tag{6.18}$$

由 CV 值的定义可知，CV 是 A_{S} 对于不考虑卫星故障的理想星座时的一个特例.

根据星座状态的不同，瞬时可用性还可以分为以下几种基本的类型：理想的可用性，降阶的可用性和期望的可用性.

理想的可用性是最早定义的可用性，它是基于没有卫星损坏的理想星座来定义的，可表示如下：

$$\alpha_0(i, t) = \operatorname{bool}\{R(i, t)\}. \tag{6.1}$$

这里,$R(i,t)$表示满足某种导航性能需求的情况.对理想星座,IAL 仅取 0 或 1.例如:若 PDOP<6 是系统的性能需求,则当 PDOP<6 时 IAL=1;反之,当 PDOP≥6 时 IAL=0.此外对理想星座,IAI 的值与 IAL 相同.

降阶的可用性是指星座中有卫星故障发生时的降阶星座所提供的服务可用性.假设星座中有 k 颗卫星故障,则可用性定义为 k 颗卫星损坏的所有组合的可用性平均值:

$$\alpha_k(i,t)=\frac{1}{C_M^k}\sum_{n=1}^{C_M^k}\mathrm{bool}\{R_n(i,t)\},\quad k=0,\cdots,M. \tag{6.20}$$

这里,M 为理想星座的卫星个数,符号 C_M^k 表示星座的 k 卫星损坏的所有组合:

$$C_M^k=\frac{M!}{k!(M-k)!}, \tag{6.21}$$

$R_n(i,t)$表示系统在某 k 颗卫星故障时的满足导航性能需求的情况.这时,降阶星座的 IAL 不再刚好等于 0 或 1,而是 0 与 1 之间的某个值.注意理想星座的 IAL 是(6.20)式在 $k=0$ 时的特例.IAL 在当卫星故障数进一步增加时变得更坏.

期望的可用性是指考虑所有可能的降阶星座的可用性的加权平均值.在 M 颗卫星的星座里,有 $M+1$ 种可能状态,用 $S_k(k=0,1,\cdots,M)$表示.S_0 是没有卫星损坏的状态,S_1 是有一颗卫星损坏的状态,等等.对每种星座状态 S_k,均给定一个概率值 P_k,其中$\sum\limits_{k=0}^{M}P_k=1$.考虑星座各种状态概率的可用性定义如下:

$$\alpha(i,t)=\sum_{k=0}^{M}P_k\alpha_k(i,t)=\sum_{k=0}^{M}P_k\frac{1}{C_M^k}\sum_{n=1}^{C_M^k}\mathrm{bool}\{R_n(i,t)\}. \tag{6.22}$$

理性星座的可用性是(6.22)式的一种特殊情况,此时:

$$P_k=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}$$

K 颗卫星故障的降阶星座的可用性也是(6.22)式的特殊情况,此时:

$$P_k=\begin{cases}1, & k=K,\\ 0, & k\neq K.\end{cases}$$

与期望的可用性相关的一个很重要的问题是怎样对星座卫星的状态概率进行建模或计算.一般而言,卫星状态概率可以通过基于 Markov 链分析卫星的故障和恢复率来得到,文献[3],[4],[5],[6],[7]对此有详细的讨论.

3. 星座覆盖分析方法简介

在星座设计研究过程中，人们提出了各种星座覆盖分析方法，其中较著名的和得以广泛应用的主要有外接圆方法、覆盖带方法和格网方法. 这里给出这些方法的简单介绍，详细的描述请参阅相关文献.

外接圆方法由 Walker 提出[8]，主要是研究全球连续单重覆盖和多重覆盖问题. 它主要针对 Walker-δ 星座，但方法本身并没有对此作出限制. 外接圆方法分析星座和覆盖特性的准则是：保证全球各地在任何时候都能在某个最小仰角以上看到用户要求的卫星数量. 在覆盖分析中用离开卫星星下点最远的一些点(相邻三颗卫星的的星下点组成的球面三角形的外接圆圆心)进行评估. 不断改变星座轨道倾角，就能够找出最坏情况下的最小的外接圆半径，从而得到最佳星座. 外接圆方法是一种基于几何的方法，直观、易于理解和接受. 它主要用于解决全球的单重和多重连续覆盖问题. 但该方法也存在一些问题：首先，随着卫星总数的增长，计算所需时间的增长极为迅速. 也许正因为如此，外接圆方法最近十几年来没有得到发展. Walker 本人也深知此缺陷，但他在公开文献中并没有提出解决办法，而是别转它径，试图用“网格”“正多面体”“半正多面体”的方法来弥补，但效果不佳. 因而，寻找新的算法势在必行. 其次，外接圆方法设计出的星座往往其轨道面数等于卫星总数，即 $T/T/F$. 这样的星座有两个较大的缺陷：第一，性能台阶太高，导致每上一个覆盖性能台阶要花费较多的经费. 第二，导致响应用户要求的应变能力太弱. 最后，外接圆方法无法评估导航星座最为关心的导航精度.

覆盖带方法最初由 Luders 提出[9]，经由 Rider[10],[11]、Adams[12],[13] 和 Hopkins 等人的发展，已用于区域连续覆盖和全球连续覆盖等各种星座的设计. 覆盖带方法一般假设所采用的星座具有如下性质：

(1) 所有轨道为同一高度的圆轨道；

(2) 各轨道的倾角均相同；

(3) 轨道面内卫星均匀分布；

(4) 每一轨道面内的卫星数目大于 3，因为覆盖带方法要求同一轨道面内卫星的有效覆盖区相互重叠，形成一条环带.

覆盖带方法利用这些基本的约定，将覆盖要求转化为一些约束方程，求解这些方程组就可以获得满足覆盖性能的星座，但须注意这星座未必是最优的. 覆盖带方法简洁明了，具有比外接圆方法高得多的计算效率，但也具有因基本约定带来的不足和缺陷，而且它同样也无法评估导航星座的精度

性能.

格网方法最初是由 Morrison 在 1973 年对由圆形轨道和椭圆轨道构成的星座进行多重覆盖研究时所采用[14],他分析了在地球表面构成的格网(10°×10°)的每个点上,在某个最小仰角以上能看到的卫星数目.后来 Bogen 用类似方法研究了星座覆盖[15],但他选用的是矩形网格,格网的纬度间距缩小到 5°,经度间距仍为 10°.格网方法的缺点是:格网间距较大时,计算结果的精度较差.为了提高精度,就要缩小格网的间距,这样又会带来很大的工作量.但格网方法的优点是简单易于实现,便于统计各类覆盖性能指标,且适用于各种用途的星座设计.

4. 星座设计的基本过程和准则

在开始设计星座时,一般我们都是从最简单的星座入手,如从 Walker-δ 星座、单平面赤道轨道或者从具有 1 个、2 个或 3 个轨道平面的极轨道开始工作.有时我们还可以考虑椭圆轨道,或者用它来构成一个完整的星座,或者用它来补充星座以增强其性能.大致来讲,星座设计的基本过程可描述如下:

(1) 确定任务需求,特别是性能需求和指标,以及性能增长和降级台阶的目标;

(2) 进行星座性能的综合评估.如选择星座类型,评估覆盖性能和其他一些性能指标,分析性能增长与台阶以及高度台阶等问题.

(3) 形成设计文件,设计过程反复迭代至得到满足任务需求的最优或近优星座.

在设计过程中,一般我们用下面三个标准来评价每个星座的设计.

(1) 覆盖性能或可用性等其他一些指标.一般不要在只有一个指标时就着手整个星座的设计.

(2) 性能增长和降级.星座的性能增长和降级是实际星座设计中的一个关键问题.对每一种星座,性能增长或降级情况是不同的.在评价增长或降级时,我们假定在轨道平面内重新定相所花的推进剂代价适中,而改变轨道面是不现实的.

(3) 性能台阶.我们应该评价每一个星座,看看是否存在这样的性能台阶,使星座中轨道平面的数目、轨道高度或其他关键的特征参数成为离散的台阶.

在设计时,往往要确定大量的参数,表 6.1 给出了星座设计中的一些待定参数和选择准则.

表 6.1　星座设计中的一些基本因素和选择准则

因　素	影　响	选择准则
主要设计变量		
卫星数目	决定成本和覆盖的主要因素	选择最少的卫星满足覆盖和性能台阶的要求
轨道高度	覆盖、发射和变轨成本	通常是成本和性能之间的系统级权衡
轨道平面数目	灵活性、覆盖性能台阶、发展和降级使用	以最少的轨道平面满足覆盖性能的要求
其他设计变量		
轨道倾角	决定覆盖的纬度分布	纬度覆盖和成本的总和权衡
轨道平面的相位	决定覆盖的均匀性	在各组独立的相位取舍中选择最佳覆盖
偏心率	任务的复杂性、可达的高度和覆盖与成本的关系	一般取 0，除非为满足特别需求才选择其它值

§6.3　星座的相对几何和覆盖重复周期

1. Walker 的工作

在星座设计的早期研究中，Walker 指出[16]，卫星星座中每颗卫星的星下点轨迹在某些条件下完全分离，但是在另外一些条件下却可以部分重合或完全重合. 对星座标记为 $T/P/F$ 的 Walker-δ 星座，如果星座卫星采用 α 天（恒星日，下同）β 圈回归的轨道，Walker 给出了该星座的星下点轨迹条数计算方法：

$$E_{\alpha,\beta} = \frac{T}{K}, \tag{6.23}$$

这里，K 由下式计算：

$$K = H[G, PJ], \tag{6.24}$$

式中

$$G = s\alpha + F\beta, J = H[s, \beta]. \tag{6.25}$$

$s=T/P$ 为每个轨道面上的卫星个数，$H[a,b]$表示取 a 和 b 的最大公因子.

星座的覆盖重复周期是指星座遍历了对覆盖特性而言的所有不同星座构型的一段时间间隔. Walker 也给出了覆盖重复周期（GCRP）的计算

公式：

$$\mathrm{GCRP}=T_{\mathrm{orbit}}\frac{yz}{4T},\tag{6.26}$$

式中，T_{orbit}为卫星的轨道周期，而

$$y=H[F,\ P],\ z=H\left[2,\ \frac{T}{y}\right].\tag{6.27}$$

单就星座的覆盖性能而言，经过一个覆盖重复周期后，星座中的卫星构型就开始重复，因此，在对星座覆盖性能的仿真中，一般只要取一个覆盖重复周期即可.

需要注意，Walker 给出的星下点轨迹的计算公式仅适用于 Walker 星座，而对于在区域星座中经常用到的非 Walker-δ 星座或由 Walker 星座中的部分卫星构成的星座，则不再成立，因此还有必要对星座的卫星相对几何关系进行进一步的分析. 此外，Walker 给出的星座覆盖重复周期的计算利用了球的旋转对称性，忽略了地球自转，因此只对全球覆盖的 Walker-δ 星座有效，而无法用以确定 Walker-δ 星座和其他一些非 Walker-δ 星座对某特定地区和地点的覆盖重复周期（为了和 Walker 给出的覆盖重复周期相区别，就称这种星座对某地区或地点的覆盖重复周期为区域覆盖重复周期）.

2. 星座的相对几何

(1) 星座中任意两颗卫星是否有同一条星下点轨迹的判别法则

对参数为 $T/P/F$ 的 Walker-δ 星座中任一卫星$(i,\ j)$（表示第 i 轨道面第 j 颗卫星，$i=1,2,\cdots,P$；$j=1,2,\cdots,T/P$，下文同），在 t_0 时刻其相位和升交点赤经分别为

$$u_{i,\ j}=u_0+360\left[\frac{F}{T}(i-1)+\frac{P}{T}(j-1)\right],\tag{6.28}$$

$$\Omega_{i,\ j}=\Omega_0+\frac{360}{P}(i-1),\tag{6.29}$$

其中 u_0 为第 1 轨道面第 1 颗星的相位，Ω_0 为第一轨道面的升交点赤经.

定义这颗卫星星下点轨迹在 t_0 时刻前第一次由南向北过赤道时对应点的经度为该星下点轨迹的升交点经度 $\Omega^{\mathrm{G}}_{i,\ j}$，其值为

$$\Omega^{\mathrm{G}}_{i,\ j}=\Omega_{i,\ j}-S_0+\frac{u_{i,\ j}\omega_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{s}}},\tag{6.30}$$

其中 ω_{e} 为地球自转角速度，n_{S} 为卫星平均运动，S_0 对应 t_0 时刻的恒星时.

对 α 天 β 圈回归的回归轨道（在二体问题的情况下）而言，式(6.30)可

改写为

$$\Omega_{i,j}^{G} = \Omega_{i,j} - S_0 + \frac{u_{i,j}\alpha}{\beta}. \tag{6.31}$$

下面对回归轨道讨论星下点轨迹重合的问题(下文若对卫星轨道没有特别说明,均是指回归轨道).对星座中任意的两颗卫星(i, j)和(m, n),若它们在同一条星下点轨迹上,则它们满足

$$\Delta\Omega^{G} = \Omega_{i,j}^{G} - \Omega_{m,n}^{G} = \kappa\frac{360}{\beta}, \tag{6.32}$$

其中 κ 为任意的整数.

把式(6.28),(6.29)和(6.31)代入式(6.32)整理后有

$$\left(\frac{\beta}{P} + \frac{\alpha F}{T}\right)(i - m) + \frac{\alpha P}{T}(j - n) = \kappa. \tag{6.33}$$

上式就是 Walker-δ 星座中卫星的星下点轨迹是否重合的一个判断准则.

(2) 一条星下点轨迹中两颗卫星间的轨迹长度和卫星相对顺序

对于在同一条星下点轨迹上的任意两颗卫星(i, j)和(m, n),它们星下点之间的轨迹长度(时间间隔)$\Delta\lambda$ 可用下式计算:

$$\Delta\lambda = T_{\text{orbit}}\left[\frac{360\ K - (\Delta\Omega_{m,n}^{G} - \Delta\Omega_{i,j}^{G})}{360\ \alpha/\beta}\right]_{\text{int}} + \frac{u_{m,n} - u_{i,j}}{n_{S}}. \tag{6.34}$$

式中方括号的下标 int 表示 K 为 1 到 α 之间惟一确定的整数,它使得方括号的值为 0 和 β 之间的整数,下文出现的 int 下标的含义也是如此;T_{orbit} 为卫星轨道周期.

应用式(6.28)和(6.32),式(6.34)可改写为

$$\Delta\lambda = T_{\text{orbit}}\left[\frac{K\beta - \kappa}{\alpha}\right]_{\text{int}} + T_{\text{orbit}}\left[\frac{F}{T}(i - m) + \frac{P}{T}(j - n)\right]. \tag{6.35}$$

或应用式(6.28),(6.32)和(6.33),式(6.34)亦可写为

$$\Delta\lambda = T_{\text{orbit}}\left[\frac{K\beta}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha P} + \frac{F}{T}\right)(i - m) - \frac{P}{T}(j - n)\right]_{\text{int}} + T_{\text{orbit}}\left[\frac{F}{T}(i - m) + \frac{P}{T}(j - n)\right]. \tag{6.36}$$

下面来讨论 Walker-δ 星座中任一星下点轨迹上各卫星的的相对顺序.令 N 为一条星下点轨迹上的卫星个数,若指定卫星(i, j)为 0 号星,则 $\Delta\lambda$ 与卫星(m, n)相对 0 号星由西向东的顺序编号 l 之间存在以下关系:

$$\Delta\lambda = l\frac{\beta}{N}T_{\text{orbit}}, l = 1, \cdots, N - 1. \tag{6.37}$$

综合式(6.34)和(6.37)不难得到确定卫星顺序编号 l 的关系式

$$\Delta\lambda = T_{\text{orbit}}\left[\frac{360\,K-(\Delta\Omega_{m,n}^{\text{G}}-\Delta\Omega_{i,j}^{\text{G}})}{360\alpha/\beta}\right]_{\text{int}}+\frac{(u_{m,n}-u_{i,j})}{n_{\text{S}}}=T_{\text{orbit}}\frac{\beta}{N}l. \tag{6.38}$$

根据式(6.28)和(6.32),上式也可改写为

$$\left[\frac{K\beta-\kappa}{\alpha}\right]_{\text{int}}+\frac{F}{T}(i-m)+\frac{P}{T}(j-n)=\frac{\beta}{N}l, \tag{6.39}$$

或把式(6.28),(6.32)和(6.33)代入式(6.38)便可得另一形式的表达式:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{K\beta}{\alpha}-\left(\frac{\beta}{\alpha P}+\frac{F}{T}\right)(i-m)-\frac{P}{T}(j-n)\right]_{\text{int}}+\\&\frac{F}{T}(i-m)+\frac{P}{T}(j-n)=\frac{\beta}{N}l.\end{aligned} \tag{6.40}$$

(3) 相邻星下点轨迹间两相邻升交点的经度差

在进行区域星座的优化时,也需要调整卫星的的升交点经度,为了提高优化的效率,需要确定合适的升交点经度的调整范围,因此就需要确定星座相邻两条星下点轨迹之间的两相邻升交点之间的经度差. 对 Walker-δ 星座,这里给出计算升交点经度差的计算公式:

$$\Delta\Omega_{\text{G}}=\frac{360}{\beta E_{\alpha,\beta}}. \tag{6.41}$$

3. 区域覆盖重复周期

Walker 给出了 Walker-δ 星座对全球的覆盖特性重复周期的计算公式,但是它既不适用于对任意指定区域或地点的覆盖重复周期的计算,也不适用于非 Walker-δ 星座的重复周期的计算.

在讨论星座的覆盖重复周期之前,我们先定义星下点重复周期为该条星下点轨迹上卫星星下点的分布出现重复的时间间隔,称其中最小的时间间隔为最小重复周期. 下文若无特别说明,星下点重复周期就是指最小重复周期.

对一个均匀分布的 Walker-δ 星座而言,其每条星下点轨迹上的卫星个数记为 N,卫星轨道周期记为 T_{orbit},则对于由其中任意 M ($M\leqslant N$)颗卫星的星下点重复周期 T_{sub},满足以下规律:

(1) $T_{\text{sub}}=\gamma T_{\text{orbit}}\dfrac{\beta}{N}$,$\gamma$ 为 N 的因子,当 $M=N$ 时,$\gamma=1$;

(2) 若(M, N)互为质数,则 $T_{\text{sub}}=\beta T_{\text{orbit}}$;

(3) 用一个 N 位二进制序列 $S_0(N)=a_1a_2\cdots a_N$(a_i,$i=1,\cdots,N$ 的取值为 0 或 1)来表示 M 颗卫星的分布,0 表示不选取此卫星,1 表示选取此

卫星,对这个二进制序列施以如下移位运算:

$$S_1(N) = \mathrm{shift}(S_0) = a_N a_1 a_2 \cdots a_{N-1}. \tag{6.42}$$

若经过 L(显然,$1 \leqslant L \leqslant N$)次这样的移位运算后得到的一个二进制序列 S_L:

$$S_L = a_{N-L+1} a_{N-L+2} \cdots a_N a_1 a_2 \cdots a_{N-L}.$$

等于初始的二进制序列 S_0,则这 M 颗卫星分布的重复周期为$L T_{\mathrm{orbit}} \beta / N$;

(4) 若在所有 M 颗卫星中相邻两颗星之间的轨迹长度中有一个等于$(N-M) T_{\mathrm{orbit}} \beta / N$,则这 M 颗卫星分布的重复周期 $T_{\mathrm{sub}} = \beta T_{\mathrm{orbit}}$.

我们接着定义:对某一特定区域或地点,我们称其上空的卫星几何构形重复出现的时间间隔为星座对该区域或地点的覆盖重复周期,称其中最小的重复间隔为最小覆盖重复周期(简称区域覆盖重复周期:RCRP).下文若无特别说明,重复周期均指最小重复周期.

假设我们所要讨论的卫星星座有 $E_{\alpha,\beta}$ 条星下点轨迹,记各条星下点轨迹的星下点重复周期为 T_{sub}^{i},$i=1,2,\cdots,E_{\alpha,\beta}$,则该星座对任一地点的覆盖重复周期 RCRP 为:

$$\mathrm{RCRP} = [T_{\mathrm{sub}}^{1}, T_{\mathrm{sub}}^{2}, \cdots, T_{\mathrm{sub}}^{E_{\alpha,\beta}}]. \tag{6.43}$$

这里,式中的方括号表示取 $T_{\mathrm{sub}}^{1}, T_{\mathrm{sub}}^{2}, \cdots, T_{\mathrm{sub}}^{\mathrm{E}_{\alpha,\beta}}$ 的最小公倍数.注意对 GEO 卫星,我们定义其星下点重复周期为 1.

特别的,对 Walker-δ 星座,其对特定地区或地点的区域覆盖重复周期可以由下式计算:

$$\mathrm{RCRP} = \frac{\alpha E_{\alpha,\beta}}{T}. \tag{6.44}$$

对任意指定区域,若星座的星下点轨迹在该区域上的分布不是对称的,则星座对该区域的覆盖重复周期也可以由(6.43)式计算.此外,需要指出的是,对星下点分布对称的区域,用(6.43)式求得的覆盖重复周期不一定是最小重复周期,其最小重复周期与星下点轨迹和该区域本身的对称程度以及卫星的具体分布有关.

§6.4　星座结构演化

根据第四章对卫星运动各种摄动的分析知,地球引力场的扁率摄动是对卫星运动影响最大的一种摄动因素.此外,由于在星座组网时卫星不可能准确进入其设计轨道,实际轨道与设计轨道之间总会存在一个偏差(下文称之为入轨偏差).通常这种入轨偏差在设计指标允许范围之内,但是它仍然

能够引起实际轨道和设计轨道在摄动变化上的不可忽略的差异,而且还存在因轨道半长轴偏差导致的卫星位置在轨道沿迹方向上的长期变化.因此,这一节主要就地球非球形引力场的扁率摄动和入轨偏差的影响来讨论星座的结构演化.

1. 卫星轨道演化

(1)卫星轨道摄动

卫星在地球中心引力和 J_2 项的作用下,其对应运动方程的轨道解包括长期变化项的形式可写为下列形式:

$$\begin{cases} a = a_0, \quad e = e_0, \quad i = i_0, \\ \Omega = \Omega_0 + \Omega_1(t - t_0) + O(J_2^2), \\ \omega = \omega_0 + \omega_1(t - t_0) + O(J_2^2), \\ \lambda = \omega + M = \omega_0 + M_0 + (n + \lambda_1)(t - t_0) + O(J_2^2), \end{cases} \tag{6.45}$$

其中下标"0"表示卫星的初始状态,λ 为卫星的沿迹量.轨道长期变化率由下式表达:

$$\Omega_1 = -\frac{3J_2}{2p^2} n\cos i, \tag{6.46}$$

$$\omega_1 = \frac{3J_2}{2p^2} n\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right), \tag{6.47}$$

$$\lambda_1 = \omega_1 + M_1 = \frac{3J_2}{2p^2} n\left[\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) + \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1 - e^2}\right]. \tag{6.48}$$

这里,$p = a(1 - e^2)$.以上(6.45)~(6.48)式中的轨道根数均为平根数.

从上面几个式子可以看出,对于轨道高度、偏心率和倾角相同的一组卫星,它们在地球扁率摄动作用下的轨道长期变化是相同的.

(2)入轨偏差引起的轨道演化

卫星入轨偏差将导致实际轨道和设计轨道在摄动上的差异,而且还会因轨道半长轴偏差导致卫星位置在轨道沿迹方向上长期变化.下面来分析入轨偏差的影响.

记卫星的入轨偏差为($\delta a_0, \delta e_0, \delta i_0, \delta\Omega_0, \delta w_0, \delta M_0$),则由(6.46)和(6.48)式可得到由入轨偏差引起的轨道长期摄动的变化为

$$\delta\Omega_1 = \frac{7\Omega_1}{2a}\delta a_0 + \frac{4ae\Omega_1}{p}\delta e_0 - \frac{\sin i\,\Omega_1}{\cos i}\delta i_0, \tag{6.49}$$

$$\delta\lambda_1 = -\frac{7\lambda_1}{2a}\delta a_0 + \frac{ae}{p}\left[\frac{3J_2}{2p^2} n\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) + 3\lambda_1\right]\delta e_0 -$$

$$\frac{3J_2}{4p^2}n(5+3\sqrt{1-e^2})\sin 2i\delta i_0. \tag{6.50}$$

另外，半长轴偏差还将引起沿迹方向的长期变化，由(6.45)式中的最后一个方程可知这种变化为

$$\Delta\lambda=\delta n_0(t-t_0)=-\frac{3n}{2a}\delta a_0(t-t_0). \tag{6.51}$$

由于 Ω_1 和 λ_1 都是 $O(J_2 n/a^2)$ 的量级，相对于平运动 n 而言均为小量，因此在一般情况下，轨道半长轴的入轨偏差是决定卫星实际轨道相对设计轨道演化的主要因素. 在考察影响轨道面相对变化时，对小倾角的轨道，倾角的入轨偏差影响小而半长轴和偏心率的误差影响大，当星座采用极轨道时，倾角的入轨偏差影响达到最大而半长轴和偏心率误差的影响最小. 若星座采用小偏心率轨道时，偏心率入轨偏差的影响就可予以忽略.

2. 星座的结构演化

星座的几何结构可以用卫星的绝对位置或(和)卫星间的相对几何关系来确定. 一般卫星相对设计位置的变化反映了星座结构在时空中的绝对变化(称之为时空变化或绝对变化)，而卫星间相对位置变化则反映了星座结构的空间几何的相对变化(称之为空间几何变化或相对变化). 前面讨论的卫星轨道演化结果可以很清楚地描述星座结构时空变化的规律，这里不再重复，下面给出星座结构的相对变化.

(1) 空间几何变化的一般规律

卫星的相对位置关系可以用卫星轨道半长轴、偏心率、倾角以及卫星相位和升交点位置关系等来描述. 从前面的分析得知，地球扁率摄动不会引起卫星轨道半长轴、偏心率和倾角的长期变化，但会导致卫星相位和升交点赤经的长期变化，因此可以用卫星之间的相位和升交点赤经的变化来描述星座结构的空间几何变化.

对于星座中任意的两颗卫星 i 和 j，由式(6.46)和(6.48)可得地球扁率摄动引起的卫星轨道面之差和相位差的长期变化率为

$$\Delta\Omega_1=-\frac{3J_2}{2}\left(\frac{n_i\cos i_i}{p_i^2}-\frac{n_j\cos i_j}{p_j^2}\right), \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_1=\frac{3J_2}{2}\Bigg\{&\frac{n_i}{p_i^2}\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i_i\right)-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i_i\right)\sqrt{1-e_i^2}\right]-\\&\frac{n_j}{p_j^2}\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i_j\right)-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i_j\right)\sqrt{1-e_j^2}\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{6.53}$$

这里，$\Delta\Omega_1$ 为两卫星的轨道面赤经差的长期变化率，$\Delta\lambda_1$ 为两卫星相位差的

长期变化率.式中的下标“i”表示卫星 i 的轨道参数,下标“j”表示卫星 j 的轨道参数.

由上两式可见,对卫星的轨道半长轴、偏心率和倾角均相同的星座,地球扁率摄动不会引起卫星之间的相位差和升交点赤经差的长期变化,这说明地球扁率的长期摄动不会引起这类星座结构的空间几何变化.这个性质是很有意义的,因为尽管星座结构发生了时空变化,但只要星座的空间几何结构保持不变,则通过简单的坐标旋转和时间平移就可以证明星座的全球覆盖性能不会发生变化.

对于卫星的入轨偏差的影响,将两颗卫星各自的入轨偏差引起的轨道变化相减便可得两星之间位置的长期变化率为

$$\delta\Omega = (\delta\Omega_1)_i - (\delta\Omega_1)_j, \tag{6.54}$$

$$\delta\lambda = (\delta\lambda_1 + \Delta\lambda)_i - (\delta\lambda_1 + \Delta\lambda)_j, \tag{6.55}$$

式中的 $\delta\Omega_1$,$\delta\lambda_1$ 和 $\Delta\lambda$ 由(6.49)~(6.51)式分别给出.

对这种变化,即使这两卫星的轨道长期摄动影响相同,但由于两星入轨偏差的影响,两颗卫星之间的相位差和轨道面的位置差也会有缓慢的长期变化,从而引起星座结构的变化.

上面的讨论均是在历元地心天球坐标系这个“惯性”空间中进行的,反映了各种星座结构演化的一般特征.特别是对全球覆盖星座,这些规律已基本描述了它的结构演化特征,但对区域覆盖星座,尚不能反映出它相对服务区域的地域性变化规律.

(2)区域覆盖星座的地域性结构演化

这里所谓的地域性结构演化是指星座的几何结构相对地球上某一地点或地区的演化情形.这种变化显然与地球自转相关,因而无法用上面给出的一般规律来描述,而应选择一些地固系中的参数来进行分析.这里以星座卫星星下点轨迹的变化、同一条星下点轨迹上任意两颗卫星过轨迹上任意一点的时间间隔和相邻星下点轨迹上两颗卫星相继从南向北过赤道的时间间隔的变化为参数来讨论地域性的结构演化.

1)星下点轨迹的变化

对星下点轨迹的变化,可以用卫星过升交点时刻对应的升交点经度 Ω_G 和星下点轨迹的最高纬度相对设计值的变化来描述.星下点轨迹的最高纬度由卫星轨道倾角确定,由于倾角在 J_2 项和入轨偏差的作用下没有长期变化,因此最高纬度是一个常值.

对卫星在 t 时刻过升交点时对应的升交点经度 Ω_G 有

$$\Omega_G = \Omega - S_t = \Omega - S_0 - \mathrm{int}\left(\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{orbit}}}\right)\omega_e T_{\mathrm{orbit}}, \tag{6.56}$$

这里，Ω 为该时刻的升交点赤经，S_t 为该时刻的格林尼治恒星时，S_0 为卫星在 t_0 过升交点时的格林尼治恒星时，ω_e 为地球自转角速度，T_{orbit} 为卫星轨道周期.

上式对时间求导，有

$$\dot{\Omega}_G = \dot{\Omega} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{int}\left(\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{orbit}}}\right)\omega_e T_{\mathrm{orbit}}\right]. \tag{6.57}$$

式中，$\dot{\Omega}$为升交点赤经的长期变率，可用(6.46)和(6.49)式计算. 由于卫星轨道周期没有长期变化，但与设计值存在 $\delta T_{\mathrm{orbit}}$ 的入轨偏差，

$\delta T_{\mathrm{orbit}} = (3T_{\mathrm{orbit}}\delta a)/(2a)$，因此，在 t 时刻 Ω_G 的相对设计值变化为

$$\Delta\Omega_G = \delta\Omega_0 + \Omega_1(t-t_0) + \left[\delta\Omega_1(t-t_0) - \mathrm{int}\left(\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{orbit}}}\right)\omega_e \delta T_{\mathrm{orbit}}\right]. \tag{6.58}$$

由于轨道高度、偏心率和倾角都相同的卫星，由地球扁率摄动引入的 Ω_1 均相同，因此，对由同种轨道类型的卫星构成的星座，Ω_1 带来的升交点赤经长期漂移是星座的一种系统性的整体漂移，这种系统性的整体漂移不会影响全球星座的性能，但对区域星座，将导致其服务区域的漂移. 对式中方括号部分，由于星座中各颗卫星各自入轨偏差不同（对具体星座而言，每颗卫星的入轨偏差虽然是确定的，但它们的分布可认为是随机的），因此，方括号部分的值也各不相同，而且它们的分布也可认为是随机的（虽然对具体的一颗卫星而言，这误差是确定的可预报的），从而使星座原先整齐规则的星下点轨迹排列逐渐变得杂乱无序. 此外，方括号中的 $\delta T_{\mathrm{orbit}}$ 项是破坏星座结构的主项.

2）卫星星下点间隔的变化

定义星下点轨迹在地图上 0 度经线东边的第一个升交点为该轨迹的参考升交点. 按照理想的设计星座，对同一条星下点轨迹上的两颗卫星相继通过轨迹上任一点的时间间隔 ΔT 可写为：

$$\Delta T = (\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})T_{\mathrm{orbit}} + \frac{u^{(1)}}{n} - \frac{u^{(2)}}{n}, \tag{6.59}$$

这里，上标(1)和(2)分别表示卫星 1 和卫星 2，κ 为小于 β（β 为卫星的回归参数，β 圈后轨迹重复）的非负整数，表示从过参考升交点时刻起算的卫星所经过的轨道周期数，u 为卫星相位.

将(6.59)式对时间求导数，有

$$\Delta\dot{T}=(\kappa^{(1)}-\kappa^{(2)})\dot{T}_{\text{orbit}}+\frac{1}{n}\left[\dot{u}^{(1)}-\frac{u^{(1)}}{n}\dot{n}\right]-\frac{1}{n}\left[\dot{u}^{(2)}-\frac{u^{(2)}}{n}\dot{n}\right]. \tag{6.60}$$

由上式可知，ΔT 的变化跟卫星的相位和半长轴的变化相关. 在只考虑 J_2 项作用的情况下，卫星的轨道半长轴没有长期变化，卫星相位的长期变化也相同，因此有：$\Delta\dot{T}=0$，即 ΔT 在这种情形下是不变的. 若同时再考虑卫星的入轨误差，则由(6.50)、(6.51)**和**(6.60)**式可得：**

$$\begin{aligned}\Delta\dot{T}&=\frac{1}{n^{(1)}}\left[\delta\lambda_1^{(1)}-\frac{3n^{(1)}}{2a^{(1)}}\delta a^{(1)}\right]-\frac{1}{n^{(2)}}\left[\delta\lambda_1^{(2)}-\frac{3n^{(2)}}{2a^{(2)}}\delta a^{(2)}\right]\\&\approx\frac{1}{n}\left[\delta\lambda_1^{(1)}-\delta\lambda_1^{(2)}-\frac{3n}{2a}(\delta a^{(1)}-\delta a^{(2)})\right],\end{aligned} \tag{6.61}$$

式中的 $\delta\lambda_1^{(1)}$ 和 $\delta\lambda_1^{(2)}$ 可根据(6.50)**式计算得到. 由上式可得到一段时间内 ΔT 的变化为**

$$\delta(\Delta T)=\frac{1}{n}\left[\delta\lambda_1^{(1)}-\delta\lambda_1^{(2)}-\frac{3n}{2a}(\delta a^{(1)}-\delta a^{(2)})\right](t-t_0)+C. \tag{6.62}$$

这里，$C=\kappa^{(1)}\delta T_{\text{orbit}}^{(1)}-\kappa^{(2)}\delta T_{\text{orbit}}^{(2)}$，$\delta T_{\text{orbit}}^{(1)}$ 和 $\delta T_{\text{orbit}}^{(2)}$ 分别为卫星 1 和卫星 2 的入轨周期偏差，可由半长轴偏差转换得到.

由式(6.50)**和式**(6.62)**可知，地球扁率摄动不会影响两卫星通过星下点轨迹上任一点的时间间隔变化，而导致时间间隔变化的主要因素是半长轴的入轨偏差.**

接下来讨论任意两条星下点轨迹上的两颗星由南向北过赤道的时间间隔的变化. 记 t 时刻轨迹 1 和轨迹 2 上的两颗星的相位分别为 $u^{(1)}$ 和 $u^{(2)}$，则它们下一次通过各自的参考升交点的时间分别为

$$t+L^{(1)}T_{\text{orbit}}^{(1)}+\frac{2\pi-u^{(1)}}{n^{(1)}} \text{ 和 } t+L^{(2)}T_{\text{orbit}}^{(2)}+\frac{2\pi-u^{(2)}}{n^{(2)}},$$

这里，$L^{(1)}$ 和 $L^{(2)}$ 为小于 β 的非负整数. 于是它们通过各自的参考升交点的时间间隔 $\Delta\tau$ 为

$$\Delta\tau=(L^{(1)}T_{\text{orbit}}^{(1)}-L^{(2)}T_{\text{orbit}}^{(2)})+\left(\frac{2\pi-u^{(1)}}{n^{(1)}}-\frac{2\pi-u^{(2)}}{n^{(2)}}\right). \tag{6.63}$$

同样，在考虑 J_2 项和入轨偏差的情形下，$\Delta\tau$ 的变化率为

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\tau}=\frac{\dot{u}^{(2)}}{n^{(2)}}-\frac{\dot{u}^{(1)}}{n^{(1)}}&=\frac{1}{n^{(2)}}\left(\lambda_1^{(2)}+\delta\lambda_1^{(2)}-\frac{3n^{(2)}}{2a^{(2)}}\delta a^{(2)}\right)-\\&\quad\frac{1}{n^{(1)}}\left(\lambda_1^{(1)}+\delta\lambda_1^{(1)}-\frac{3n^{(1)}}{2a^{(1)}}\delta a^{(1)}\right),\end{aligned} \tag{6.64}$$

对上式积分便可得一段时间内 $\Delta\tau$ 的变化为

$$\delta(\Delta\tau)=\left[\frac{1}{n^{(2)}}\left(\lambda_1^{(2)}+\delta\lambda_1^{(2)}-\frac{3n^{(2)}}{2a^{(2)}}\delta a^{(2)}\right)-\right.$$
$$\left.\frac{1}{n^{(1)}}\left(\lambda_1^{(1)}+\delta\lambda_1^{(1)}-\frac{3n^{(1)}}{2a^{(1)}}\delta a^{(1)}\right)\right](t-t_0)+C_1. \tag{6.65}$$

这里，$C_1=L^{(1)}\delta T_{\text{orbit}}^{(1)}-L^{(2)}\delta T_{\text{orbit}}^{(2)}$.

由(6.50)式和(6.65)式可知，导致任意两条星下点轨迹上的两颗星过参考升交点的时间间隔变化的主要因素也是半长轴的入轨偏差，由此可见，卫星轨道半长轴的入轨偏差将决定区域星座几何结构的稳定性.

3. 卫星编队飞行的构形与保持问题

卫星编队是指具有特殊几何构形要求，并且卫星间的相对位置要求保持在一定精度范围内的卫星系统. 这种特殊形式的星座常应用于一些对地观测任务(如空基雷达)，在任务期间需要通过主动和被动技术来控制和维持其编队的几何形状. 对卫星编队，星—星之间虽然相距较近，但各卫星运动对应的轨道力学问题仍是单星运动状态. 因两星质量之小可以认为它们之间没有任何动力学联系，这是考虑卫星编队飞行时共同遵循的一个前提. 在此前提下，星—星之间的特殊几何构形是如何形成的，下面对这一问题作一简单介绍，在第 7 章 §7.5 将有详细的论述.

(1) 卫星编队或伴飞运动的基本方程

目前国内在卫星总体研究(或轨道设计)中，对编队或伴飞问题，都是采用相对运动的模式[17]. 作为一对双星(一颗为中心卫星，一颗为伴星)，它们各自遵循绕地球运动的规律，总体上可以保持一定的空间构形. 当两星相距不大时，为了研究它们之间在空间中的相对几何构形，将各自绕地球运动转化为伴星相对中心卫星的运动. 其坐标原点为中心卫星(确切地说是中心卫星的质心)，XY 坐标面即中心卫星绕地球运行的轨道平面，X 轴方向即中心卫星的径向(由地心指向中心卫星的方向). 在此卫星坐标系中，经简单的坐标转换，即可获得伴星相对中心卫星的运动方程：

$$\begin{cases}\ddot{X}-2\dot{Y}=3X,\\ \ddot{Y}+2\dot{X}=0,\\ \ddot{Z}+Z=0.\end{cases} \tag{6.66}$$

注意，这一卫星坐标系实为一旋转坐标系，给出该方程的过程中，已假

定中心卫星的轨道为圆形(这与星座编队情况基本符合),该圆运动角速度确定了旋转坐标系.不仅如此,上述方程还是线性化的结果,即丢掉了相对坐标量 X,Y,Z(相对卫星的地心距而言看作一阶小量)的高阶小量,此方程由 Clohessy W H 给出,故被称为 C－W 方程.由于该方程的形式类似于月球运动理论中 Hill 问题[18]~[21]的基本方程(即构造月球绕地球运动在太阳摄动下的中间轨道时采用的一种近似力学模型所得到的运动方程),故也有人称它为 Hill 方程.

C－W 方程存在条件周期解,此解即可表明两星之间的相对构形.由于两星之间没有任何的力学联系,而结果是伴星绕着中心卫星作一种椭圆运动,这很难让人理解.下面直接从形式上的相对运动进行简单论述.事实上,伴星相对中心卫星的运动,就是伴星绕一种平衡点的运动[22],它是相应平衡点的一种条件稳定性的反映,这一力学机制将在第 7 章§7.5 中详细论述.

(2) 卫星编队与伴飞运动的特殊构形

方程(6.66)中的 Z 分量可与问题分离,它对应一谐振动,即伴飞卫星相对 XY 平面作上下的小振动,而对 X,Y 两分量,相应的运动解为

$$\begin{cases} X = C_1 + C_2 t + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ \dot{X} = C_2 - C_3 \sin t + C_4 \cos t, \\ Y = \dfrac{3}{2} C_1 t - \dfrac{3}{4} C_2 t^2 - 2C_3 \sin t + 2C_4 \cot t, \\ \dot{Y} = -\dfrac{3}{2} C_1 - \dfrac{3}{2} C_2 t - 2C_3 \cot t - 2C_4 \sin t, \end{cases} \tag{6.67}$$

可选择适当的初始条件,使 $C_1=0, C_2=0$,构成一个条件周期解.具体的初始条件为

$$t = t_0 : X_0, Y_0, \dot{X}_0 = Y_0/2, \dot{Y}_0 = -2X_0, Z_0, \dot{Z}_0. \tag{6.68}$$

此时相对运动的解为如下周期解:

$$\begin{cases} X = X_0 \cos t + (Y_0/2) \sin t, \\ Y = -2X_0 \sin t + Y_0 \cot t, \\ Z = Z_0 \cos t + \dot{Z}_0 \sin t, \\ \dot{X} = -X_0 \sin t + (Y_0/2) \cos t, \\ \dot{Y} = -2X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \\ \dot{Z} = -Z_0 \sin t + \dot{Z}_0 \cos t, \end{cases} \tag{6.69}$$

如果初始条件 $\dot{Z}_0$ 同时也满足下列关系：

$$\dot{Z}_0 = \pm (Y_0/2X_0)Z_0. \tag{6.70}$$

那么它们在 XY 平面、XZ 平面和 YZ 平面上的构形均为一椭圆. 相应的 XY 平面和 YZ 平面上的两个椭圆方程如下：

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1, \frac{Y^2}{C^2} + \frac{Z^2}{D^2} = 1, \tag{6.71}$$

其中

$$\begin{cases} A^2 = X_0^2 + Y_0^2/4, B^2 = 4A^2, \\ C^2 = 4A^2 = B^2, D^2 = (4Z_0^2/X_0^2)A^2. \end{cases} \tag{6.72}$$

上述条件周期运动即卫星编队飞行或伴飞的一种依据，但两星之间地距离不能大，否则方程(6.66)右端略去的高阶项很快就起作用，伴飞的构形会遭破坏. 若要保持，就必须按条件(6.71)进行轨控.

(3) 轨道摄动变化对卫星编队飞行相对构形的影响

上述讨论是在无摄情况下进行的. 事实上，由于各种摄动因素的存在，卫星轨道变化导致的位置偏离远大于上述初值偏离量，那么是否有可能选择适当的轨道配置(由轨道设计提供)，使两星轨道变化的差别尽量接近，从而保持特殊的几何构形？另一个问题是，对于这种真实的受摄运动，前面给出的初值控制条件(6.71)是否仍旧有助于两星空间构形的保持？这些都是卫星编队飞行中保持星—星之间特殊构形的重要问题.

关于摄动的影响，前面已针对卫星星座的空间整体几何结构作了必要的阐述，下面则着重就星—星之间在相距较近的情况下摄动如何影响星间特殊构形展开讨论.

在各种摄动因素的影响下，卫星轨道有 3 种不同性质的变化，即随时间增长的长期项和振幅一定的长、短周期项. 周期项最大振幅的量级是 10^{-3}，而对两星相接近的轨道配置，相互之间的周期变化就很接近，故对卫星编队飞行和伴飞运动而言，主要考虑各自轨道的长期变化，而长期变化项只依赖于 3 个根数 a, e, i，只要两星的轨道配置使两星的这 3 个根数接近，那么两个卫星的轨道变化量之差就会很小(参见公式(6.52)和(6.53))，这种轨道变化量之差相对两星位置差实为高阶小量，与 C-W 方程线性化过程中丢掉的高阶项相当.

事实上，卫星编队飞行或伴飞的空间构形(确切地说是相对构形)主要取决于第(2)段所阐述的伴星相对中心卫星所作的一种条件周期运动. 而在两星轨道根数适当选择的情况下，各种摄动影响导致两星轨道变化的差别

与相对运动方程线性化过程中丢掉的高阶项是相当的. 因此,与无摄情况类似,它们的相对构形在一定时间内同样是可以保持的.

对于编队或伴飞情况,两星之间的距离不会很大,这很关键. 这样两星的轨道根数不可能有太大的差别,特别是 a,e,i 三个根数,对于近圆轨道而言,Ω 与沿迹量($M+\omega$)的差别也不可能很大. 因此,这就决定了两星的轨道是相近的,只要选择轨道半长径 a 基本相同的近圆(即两者 e 亦接近)轨道即可,i,Ω 的差别将由两星的距离来制约,显然亦是较小的.

当然,仅仅作上述选择是不够的,还必须按构形条件(6.68)作轨道校正(实际飞行中的轨控措施),这样才能保持两星在空间的相对构形.

通过对高、中、低轨三种类型的伴飞情况的仿真计算表明,考虑各种摄动影响,只要按照构形条件(6.68)进行轨控,两星之间的相对几何构形仍受前面所阐明的平衡点附近条件周期运动的制约,在较长的时间段内保持不变. 至于具体的定量结果(包括构形变化的范围、保持的时间长度等),则与卫星的初始位置差等各种条件有关,但其基本规律确实受构形条件(6.68)所制约.

参 考 文 献

［1］杨嘉墀,范秦鸿,张云彤等. 航天器轨道力学与控制(上). 北京:宇航出版社,1995

［2］Wertz J. R.,Larson W. J. Space Mission Analysis and Design(3rd Edition),CA:Microcosm Press,1999

［3］Quyen Hua. Availability:What is Availability?Availability of What?Proceedings of the National Technical Meeting, Santa Monica, CA, 1997:14～16

［4］Clifford W. Kelley and Boeing. GPS Constellation State Probabilities Historical & Projected, Proceedings of ION NTM-99, 1999

［5］Durand J. M. and Caseau A., GPS Availability, Part Ⅱ:Evaluation of Probabilities for 21-Satellite and 24-Satellite Constellations, NAVIGATION,1990, 37(3):285～297

［6］Mitch Sams and et al. Availability and Continuity Performance Modeling, Proceedings of The 52nd Annual Meeting,1996:289～298

［7］Rhonda Slattery and et al. New and Improved GPS Satellite Constellation Availability Model. Proceedings of ION GPS-99, 1999

［8］Walker J. G. Circular Orbit Patterns Providing Continuous Whole Earth Coverage, Royal Aircraft Establishment Technical Report 70211,1970

［9］Luders R. D. Satellite Network for Continuous Zonal Coverage，J. ARS，1961，31：179～184

［10］Rider L. Optimized Polar Orbit Constellation for Redundent Earth Coverage，J. Astro. Sci.，1985，33(2)：147～161

［11］Rider L. Analytic Design of Satellite Constellation for Zonal Earth Coverage Using Inclined Circular Orbit，J. Astro. Sci，1986，34(1)：31～64

［12］Adams W. S.，Rider L. Circular Polar Constellation Providing Continuous Single or Multiple Coverage above a Specificial Latitude，J. Astro. Sci.，1987，35(2)：155～192

［13］Adams W. S.，Hopkins R. G. Minimal Arbitrarily Phased Constellation with a Given Inclination Providing Single Global Coverage，AAS Paper 1991～508

［14］Morrison J. J. A System of Sixteen Synchronous Satellite for Worldwide Navigation and Surveilance. Report FAA－RD－73－30，1973

［15］Bogen A. H. Geometric Performance of the Global Positioning System，Aerospace Corp. Report SAMSO－TR－74－169，1974

［16］Walker J. G. Continuous Whole Earth Coverage by Circular Orbit Satellite Patterns. Royal Aircraft Establishment Technical Report 77044，1977

［17］林来兴. 见：微小卫星编队飞行及应用论文集. 北京：国家高技术航天领域专家委员会，2000：1～34

［18］Hill G W. American Journal of Mathematics，1978，1：5～26

［19］Brown E W. Introductory Treatise on Lunar Theory Cambridge University Press，1896

［20］Дубошин Г Н，Небесная Механика，Москва：ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА，1964. 297～336

［21］Szebehly V. Theory of Orbit，New York and London：Academic Press，1967. 602～629

［22］王歆，刘林，张轲. 飞行器测控学报，2001，20(4)：7～10

第 7 章　深空探测器运动的轨道力学基础

深空探测器是指飞离地球引力作用范围的月球和行星际探测器. 卫星型航天器运动的基本动力学模型对应一个受摄二体问题，而深空探测器运动的基本动力学模型则对应一个受摄的限制性三体问题（确切地说是受摄圆型限制性三体问题）. 本章即阐述其基础部分圆型限制性三体问题的有关知识. 尽管探测器飞抵探测目标天体引力作用范围内经变轨转化为绕飞目标天体的卫星，其运动与人造地球卫星类似，亦对应一个受摄二体问题，但由于各目标天体的引力位特征与地球不一定相同或类似，相应的卫星运动有它自身的特殊内容，如月球卫星就是如此，这将在后面第 9 章中另有介绍.

§7.1　限制性问题的提出

一个 N 体系统，$N=n+k$，其中 n 个大天体和 k 个小天体，它们的质量分别记作 $M_i(i=1,2,\cdots n)$ 和 $m_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,k)$，这里所谓的小天体，是指它们的存在并不改变 n 个大天体的运动，即 $m_\alpha \ll M_i(\alpha=1,2,\cdots k, i=1,2,\cdots,,n)$，那么研究 n 个大天体的运动将与 k 个小天体无关，限制性问题就是关于这 N 体系统，在 n 个大天体的运动作为已知的情况下，研究 k 个小天体的运动问题.

在太阳系中，研究小行星的运动就对应一个典型的限制性问题. 其原因很简单，即绝大部分小行星的质量相对太阳和各大行星而言是如此之小，小到由于它们的存在，各大行星相对太阳的运动没有“任何”改变，至少在当今测量精度下还无法使它们的影响体现出来，完全符合采用限制性问题的基本前提. 类似的力学系统在太阳系中还有很多，因此，限制性问题的提出确实具有广泛的天文背景. 深空探测器就是一个典型的人造小天体，其质量相对而言是如此之小，它的存在不会改变太阳系中任何一个自然天体（大、小行星，自然卫星，彗星等）的运动状况，研究它的运动当然是一个限制性问题.

限制性问题中最简单的模型是限制性三体问题，这是一个 $N=(2+1)$ 体系统，该三体系统中有两个大天体和一个小天体，例如月球探测器的运动就涉及地、月两个大天体．由于小天体对两个大天体的运动没有影响，因此两个大天体的运动即对应一个简单的二体问题，其相对运动（或相对该两个大天体质心的运动）的解是一圆锥曲线．既然讨论构成一个系统的问题，当然排除抛物线和双曲线的情况，即只有圆运动和椭圆运动，分别对应圆型和椭圆型限制性三体问题．对这样一类限制性三体问题，就是在两个大天体运动确定的情况下，研究第三个天体——小天体的运动．

太阳系中大多数天体的轨道偏心率都较小，作为第一近似可以看成是圆轨道，例如月球绕地球的运动轨道偏心率是 0.0549，地球绕太阳的运动轨道偏心率是 0.0167．因此，作为深空探测器的运动，其基本动力学模型可以处理成一个圆型限制性三体问题，其中两个大天体在发射阶段和深空探测器进入目标轨道运动阶段可能对应不同的两个大天体．例如发射月球探测器，在发射阶段和运行阶段，两个主要的大天体均是地球和月球；而如果是火星探测器，发射段可能是地球和太阳，而飞往目标天体（火星）附近，两个大天体则变为火星和太阳．

深空探测器的运动除受相关的两个大天体的引力作用外，还受其他大天体的影响等，但相对而言作用较小，故可以将深空探测器的实际运动处理成一个受摄限制性三体问题，而只有圆型限制性三体问题存在一些可引用的基本特征，故确切地说是处理成受摄圆型限制性三体问题．

§7.2　圆型限制性三体问题的基本方程与 Jacobi 积分

1．坐标系的选择与无量纲化

对于限制性三体问题，由于两个大天体 P_1 和 P_2 的运动状况已知，在研究小天体 P 的运动时，根据各种运动状态与需要，往往涉及到下面四种坐标系的选择，即

（1）P_i（$i=1$ 或 2）固定坐标系；

（2）P_i（$i=1$ 或 2）旋转坐标系，亦称固连坐标系；

（3）质心（P_1 与 P_2 二体系统质心 C）惯性坐标系；

（4）质心旋转坐标系，亦称会合坐标系．这四种坐标系的原点分别在 P_i（注意，三个天体 P_1，P_2 和 P 均处理成质点）和质心 C 上，它们的基本平面

(xy 坐标面)和主方向将根据不同的天体系统和不同的问题来选择.

小天体 P 在某一大天体 P_i 附近运动(例如月球探测器从地球上发射后的初始飞行段和到达月球附近的飞行段),往往选取第一种或第二种坐标系,而当小天体 P 在两个大天体之间运动时,则采用后三种坐标系之一,特别是后两种.

为了讨论运动问题和计算上的方便,往往采用无量纲形式,即类似于研究人造地球卫星运动时所采用的计算单位,不仅使各物理量无量纲化,而且使它们的量级“标准化”,便于问题的分析.在这里,若是第一种运动问题,即小天体在大天体 P_i 附近运动,则相应的质量单位$[M]$,长度单位$[L]$和时间单位$[T]$,分别取为

$$\begin{cases}[M]=M_i, & (i=1\text{ 或 }2),\\ [L]=a_e, & (P_i\text{ 的赤道半径}),\\ [T]=(a_e^3/GM_i)^{1/2}.\end{cases}\tag{7.1}$$

此时新系统的引力常数 $G=1$.对于第二种运动问题,由于小天体在两个大天体之间运动,其涉及的运动“尺度”与前者不同,为此,计算单位有下述习惯取法:

$$\begin{cases}[M]=M_1+M_2,\\ [L]=a_{12},\\ [T]=[a_{12}{}^3/G(M_1+M_2)]^{1/2}=1/n.\end{cases}\tag{7.2}$$

同样,新系统的引力常数 $G=1$.上式中 a_{12} 是两个大天体之间的相互距离,n 是它们之间相对运动的角速度.在此计算单位系统中,两个大天体的质量分别为

$$1-\mu=\frac{M_1}{M_1+M_2},\mu=\frac{M_2}{M_1+M_2}.\tag{7.3}$$

它们到质心的距离各为

$$r_1'=\mu,\quad r_2'=1-\mu.\tag{7.4}$$

下面的论述,各物理量均采用无量纲形式,并着重介绍体现限制性三体问题特点的有关内容.至于小天体在大天体附近的运动,则属于卫星型探测器的运动问题,主要内容已在前面各章中作过介绍,需要进一步阐述的内容将安排在后面两章中.

2. 不同坐标系中小天体的运动方程

(1) 质心惯性坐标系中小天体的运动方程

质心惯性坐标系记作 $C-XYZ$,其原点在质心 C 上,XY 坐标面即两个

大天体相对运动平面，X 轴方向的选择，对应初始时刻 $t=t_0$ 时，两个大天体处于该坐标轴上，且指向大天体 P_1. 在此坐标系中，小天体和两个大天体的坐标矢量分别记为 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}_1'$ 和 $\boldsymbol{R}_2'$，于是小天体相对两个大天体的坐标矢量各为

$$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1',\quad \boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2'. \tag{7.5}$$

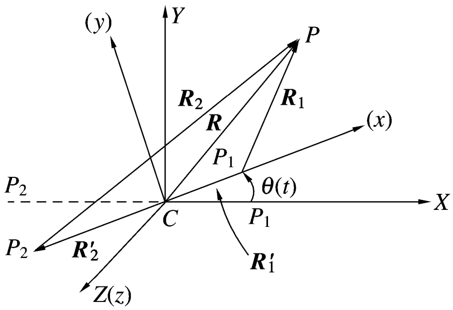

图 7.1　质心惯性系 C－XYZ 与质心旋转系 C－xyz

这些量的几何关系见图 7.1. 两个大天体相对质心 C 的运动为圆运动，其坐标矢量随时间 t 的变化关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}_1'=\begin{pmatrix}\mu\cos t\\ \mu\sin t\\ 0\end{pmatrix},\\[2ex] \boldsymbol{R}_2'=\begin{pmatrix}-(1-\mu)\cos t\\ -(1-\mu)\sin t\\ 0\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{7.6}$$

这里用到

$$t^*=t\cdot[T]=t/n,\quad \theta(t)=nt^*=t, \tag{7.7}$$

t^* 是有量纲时间，t 为无量纲时间，这表示在新计算单位系统中，两个大天体的圆运动角速度 $\dot{\theta}(t)=1$.

在上述坐标系和计算单位的选择下，小天体的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{R}}=\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)^{\mathrm{T}}=-(1-\mu)\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3}-\mu\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2^3}. \tag{7.8}$$

这里 U 为

$$U=U(R_1,R_2)=\frac{1-\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}, \tag{7.9}$$

其中

$$\begin{cases} R_1=|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1'|=[(X-\mu\cos t)^2+(Y-\mu\sin t)^2+Z^2]^{1/2}, \\ R_2=|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2'|=[(X+(1-\mu)\sin t)^2+(Y+(1-\mu\cos t)^2+Z^2]^{1/2}. \end{cases} \tag{7.10}$$

(2)质心旋转坐标系中小天体的运动方程

质心旋转坐标系记作 $C-xyz$,该坐标系的旋转角速度就是两个大天体相对运动的角速度 $\dot{\theta}(t)$,即两个大天体一直处于 x 轴上,见图 7.1. 三个天体的坐标矢量各记为 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1'$和 $\boldsymbol{r}_2'$. 相应地小天体相对两个大天体的坐标矢量各为

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1', \quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2', \tag{7.11}$$

其中

$$\boldsymbol{r}_1'=\begin{pmatrix}\mu\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2'=\begin{pmatrix}-(1-\mu)\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

于是有

$$\begin{cases} r_1=[(x-\mu)^2+y^2+z^2]^{1/2}=R_1, \\ r_2=[(x+1-\mu)^2+y^2+z^2]^{1/2}=R_2. \end{cases} \tag{7.13}$$

$\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的转换关系为

$$\boldsymbol{r}=R_z(t)\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}X\cos t+Y\sin t\\-X\sin t+Y\cos t\\Z\end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

$$\boldsymbol{R}=R_z(-t)\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\cos t-y\sin t\\x\sin t+y\cos t\\z\end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

这里 $R_z(t)$和 $R_z(-t)$是旋转矩阵,定义如下:

$$\begin{cases} R_x(\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}, \\ R_y(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&0&-\sin\theta\\0&1&0\\\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}, \\ R_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{7.16}$$

由(7.15)式可给出

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{R}}=\dot{\boldsymbol{R}}_z(-t)\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}_z(-t)\dot{\boldsymbol{r}},\\ \ddot{\boldsymbol{R}}=\ddot{\boldsymbol{R}}_z(-t)\boldsymbol{r}+2\dot{\boldsymbol{R}}_z(-t)\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{R}_z(-t)\ddot{\boldsymbol{r}},\end{cases}\tag{7.17}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}_z(-t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\\ \dot{\boldsymbol{R}}_z(-t)=\begin{pmatrix}-\sin t & -\cos t & 0\\ \cos t & -\sin t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\ \ddot{\boldsymbol{R}}_z(-t)=\begin{pmatrix}-\cos t & \sin t & 0\\ -\sin t & -\cos t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\end{cases}\tag{7.18}$$

由上述转换关系,并利用旋转矩阵的性质:

$$\boldsymbol{R}_z^{-1}(t)=\boldsymbol{R}_z^{\mathrm{T}}(t)=\boldsymbol{R}_z(-t),\tag{7.19}$$

即可由质心惯性坐标系中的运动方程(7.8)转换为小天体在质心旋转坐标系中的运动方程,即

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+2\begin{pmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\\ 0\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{r}}\right)^{\mathrm{T}}.\tag{7.20}$$

其中

$$\Omega=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+U(r_2,r_2),\tag{7.21}$$

$$U(r_1,r_2)=\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}.\tag{7.22}$$

在限制性问题讨论中,为了某种需要,常将 Ω 表示为下列形式[1]:

$$\Omega=\frac{1}{2}[(x^2+y^2)+\mu(1-\mu)]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2},\tag{7.23}$$

进而可表示为一“对称”形式,即

$$\begin{aligned}\Omega&=\left\{\frac{1}{2}[(x^2+y^2+z^2)+\mu(1-\mu)]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right\}-\frac{1}{2}z^2\\ &=\left\{\frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right\}-\frac{1}{2}z^2.\end{aligned}\tag{7.24}$$

为了与习惯用法相吻合,下面的论述中,如不加说明,Ω 的形式即(7.23)式.

(3) P_1(或 P_2)坐标系中小天体的运动方程

为了对某种问题分析的方便,将坐标原点从质心 C 移至两个大天体之

一,如P_1(或P_2)上.将非旋转坐标系和旋转坐标系分别记为P_1-XYZ和P_1-xyz,XY坐标面仍为两个大天体相对运动的轨道平面,但X轴方向在起始时刻是由P_1指向P_2,在相应的旋转坐标系P_1-xyz中,P_2处于x轴的正方向上,见图7.2.不妨称此坐标系为P_1和P_2固连坐标系.

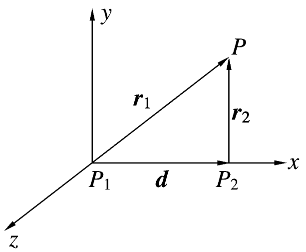

图7.2 P_1-xyz固连坐标系

在P_1-XYZ坐标系中,小天体相对P_1的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_1=-\frac{GM_1}{R_1^3}\boldsymbol{R}_1-GM_2\left(\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2^3}+\frac{\boldsymbol{D}}{D^3}\right),\tag{7.25}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}D\cos\theta\\D\sin\theta\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{D},\tag{7.26}$$

D是P_1到P_2之间的距离,θ是P_2绕P_1运转的角度,有$\dot{\theta}=n$.

在固连坐标系P_1-xyz中,小天体的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1=-\frac{GM_1}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1-GM_2\left(\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}+\frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right)+n^2\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\0\end{pmatrix}+2n\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\-\dot{x}_1\\0\end{pmatrix},\tag{7.27}$$

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}D\\0\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{d},\tag{7.28}$$

若采用前面的无量纲量,则该方程变为下列形式:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1=-\frac{1-\mu}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1-\mu\left(\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}+\frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right)+\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\-\dot{x}_1\\0\end{pmatrix},\tag{7.29}$$

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}x_1-1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}.\tag{7.30}$$

3. Jacobi积分

方程(7.20)与(7.8)的主要差别是$\Omega=\Omega(x,y,z)$不显含t,于是由方程

(7.20)立即可得

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}=\frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\dot{z},$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(v^2)=\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{dt}},\\ v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2.\end{cases}\tag{7.31}$$

由此给出一积分：

$$2\Omega-v^2=C.\tag{7.31}$$

此即质心旋转坐标系中的 Jacobi 积分，这是到目前为止，圆型限制性三体问题中找到的唯一的一个积分.

尽管质心惯性坐标系中，因 U 显含 t，不能由上述途径直接给出一积分，但同是一个圆型限制性三体问题，当然应同样存在一积分，仅给出的途径不同而已，通过两个坐标系之间的坐标转换，即可给出质心旋转坐标系中的 Jacobi 积分在质心惯性坐标系中的相应形式. 需要转换的三个量如下：

$$r_1,r_2;\quad x^2+y^2;\quad v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2.$$

而

$$\begin{cases}r_1=R_1,r_2=R_2,\\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{R}_z(t)\boldsymbol{R})\cdot(\boldsymbol{R}_z(t)\boldsymbol{R}),\end{cases}\tag{7.33}$$

即

$$x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

但 $z=Z$，因此有

$$x^2+y^2=X^2+Y^2.\tag{7.34}$$

最后由(7.14)式给出

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{R}_z(t)\dot{\boldsymbol{R}}+\dot{\boldsymbol{R}}_z(t)\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}(\dot{X}+Y)\cos t+(\dot{Y}-X)\sin t\\ -(\dot{X}+Y)\sin t+(\dot{Y}-X)\cos t\\ \dot{Z}\end{pmatrix}.$$

于是有

$$\begin{cases}v^2=\dot{\boldsymbol{r}}^2=V^2+2(\dot{X}Y-X\dot{Y})+(X^2+Y^2),\\ V^2=\dot{\boldsymbol{R}}^2=\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2,\end{cases}\tag{7.35}$$

将上述关系代入 Jacobi 积分(7.32)，即得该积分在质心惯性坐标系中的表达形式：

$$\begin{cases} 2U-[V^2+2(\dot{X}Y-X\dot{Y})]=C-\mu(1-\mu), \\ U=\dfrac{1-\mu}{R_1}+\dfrac{\mu}{R_2}. \end{cases} \tag{7.36}$$

如果 Ω 采用原形式(7.21),则积分(7.30)右端的 $\mu(1-\mu)$ 将不出现,读者引用时请注意 Ω 采用的形式.

§7.3 圆型限制性三体问题的特解

虽然限制性三体问题解的存在性已有证明[1],但并不表明能将相应的解具体给出.至今,只找到一个 Jacobi 积分,而且在一般情况下又不能归结为受摄二体问题,因此构造小参数幂级数解的方法通常也无法采用.尽管如此,该问题却存在五个特解,习惯上称为平动解,即平衡解,而由这五个平衡解和上一节导出的 Jacobi 积分,可以了解小天体运动的一些规律和特征.这些规律有它的实用价值,例如它可确定深空探测器的发射条件和提供其轨道运动的一些有关信息.

1. 五个特解——平动解(平衡解)

显然,在会合坐标系中讨论问题比较简单,相应的基本方程即(7.20)式.所谓平衡解,即满足下列条件的特解:

$$x(t)\equiv x_0,\quad y(t)\equiv y_0,\quad z(t)\equiv z_0. \tag{7.37}$$

其中 x_0,y_0,z_0 由初始条件给定,相应地有

$$\begin{cases} \dot{x}=0,\quad \dot{y}=0,\quad \dot{z}=0, \\ \ddot{x}=0,\quad \ddot{y}=0,\quad \ddot{z}=0, \end{cases} \tag{7.38}$$

这表明由(7.37)式所确定的空间点是一平衡点(亦称平动点).由方程(7.20)不难看出,在这种平衡点处应满足

$$\Omega_x=0,\quad \Omega_y=0\quad \Omega_z=0. \tag{7.39}$$

这里的 $\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z$ 分别表示 $\Omega(x,y,z)$ 对 x,y,z 的偏导数.条件(7.39)的具体形式为

$$\begin{cases} \Omega_x=x-\dfrac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3}-\dfrac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}=0, \\ \Omega_y=y\left(1-\dfrac{1-\mu}{r_1^3}-\dfrac{\mu}{r_2^3}\right)=0, \\ \Omega_z=-z\left(\dfrac{1-\mu}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}\right)=0, \end{cases} \tag{7.40}$$

因

$$\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\neq 0,$$

故要求

$$z=z_0=0. \tag{7.41}$$

即平衡点在 xy 平面上. 由 $z=0$,条件(7.40)将有下列两种情况:

$$y=0,\quad\begin{cases}x+\dfrac{1-\mu}{(x-\mu)^2}+\dfrac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0,\\x+\dfrac{1-\mu}{(x-\mu)^2}-\dfrac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0,\\x-\dfrac{1-\mu}{(x-\mu)^2}+\dfrac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0,\end{cases} \tag{7.42}$$

$$y\neq 0,\quad\begin{cases}1-\dfrac{1-\mu}{r_1^3}-\dfrac{\mu}{r_2^3}=0,\\x-\dfrac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3}-\dfrac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}=0.\end{cases} \tag{7.43}$$

对于第一种情况,方程(7.42)有三个实解:$x_1(\mu)$,$x_2(\mu)$,$x_3(\mu)$. 相应的三个平衡点在 x 轴上,分别记作 L_2,L_1,L_3,称为共线平衡点(亦称共线平动点),其分布见图 7.3.

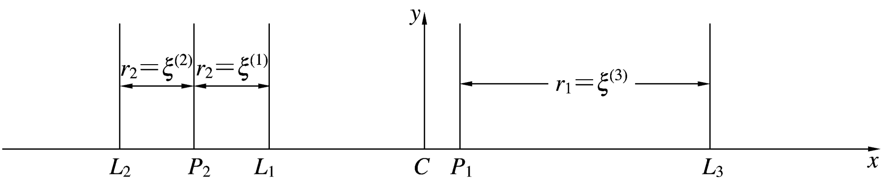

图 7.3　三个共线平衡点 L_1,L_2,L_3 与两个大天体 P_1,P_2 的相对位置

图中 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$ 各为平衡点 L_1 和 L_2 到大天体 P_2 的距离,$\xi^{(3)}$ 是平衡点 L_3 到大天体 P_1 的距离. 它分别由下列三个 μ 的幂级数表达[1]:

$$\xi^{(1)}=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}}+\cdots\right], \tag{7.44}$$

$$\xi^{(2)}=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}}-\cdots\right], \tag{7.45}$$

$$\begin{cases}\xi^{(3)}=1-\nu\left[1+\dfrac{23}{84}\nu^2+\dfrac{23}{84}\nu^3+\dfrac{761}{2352}\nu^4+\dfrac{3163}{7056}\nu^5+\dfrac{30703}{49392}\nu^6\right]+O(\nu^8),\\\nu=\dfrac{7}{12}\mu.\end{cases} \tag{7.46}$$

相应的三个共线平衡解 $x_i(\mu)$ 即

$$x_1(\mu) = -(1-\mu) + \xi^{(1)}, \tag{7.47}$$

$$x_2(\mu) = -(1-\mu) - \xi^{(2)}, \tag{7.48}$$

$$x_3(\mu) = \mu + \xi^{(3)}, \tag{7.49}$$

这三个共线平衡解亦称为共线平动解.

当 $\mu=0$ 时,有

$$\begin{cases} x_1(\mu) = x_2(\mu) = -1, \\ x_3(\mu) = 1, \end{cases} \tag{7.50}$$

而当 $\mu=1/2$ 时,则有

$$\begin{cases} x_1(\mu) = 0, \\ x_2(\mu) = -1.198406, \\ x_3(\mu) = -x_2(\mu), \end{cases} \tag{7.51}$$

三个共线平衡解的位置 $x_i(\mu)$ 以及两个大天体的位置 $x(P_1)$ 和 $x(P_2)$ 在 x 轴上随 μ 值的变化,见图 7.4.

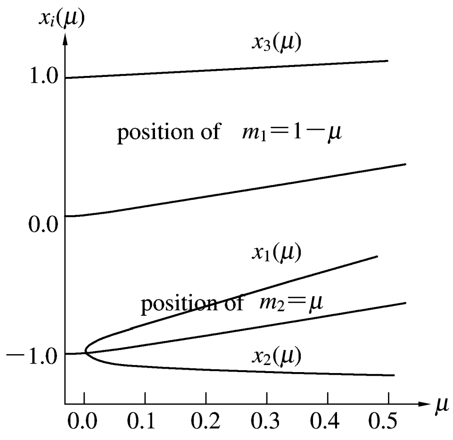

图 7.4 平衡解和大天体的位置随 μ 值的变化

对于后一组方程(7.43),其解为

$$r_1 = r_2 = 1. \tag{7.52}$$

这表示相应平衡点与两个大天体呈等边三角形,故称此平衡解为等边三角形解(亦称三角平动解). 该解有两个对称平衡点 L_4 和 L_5,各对应

$$\begin{cases} x_4 = x_5 = -\dfrac{1}{2} + \mu, \\ y_4 = +\sqrt{3}/2, \quad y_5 = -\sqrt{3}/2. \end{cases} \tag{7.53}$$

2. Jacobi 常数及其五个临界值 $C_i(i=1,2,\cdots,5)$

根据(7.32)式表达的 Jacobi 积分：

$$2\Omega(x,y,z)-v^2=C,$$

可给出五个平衡点 $L_i(i=1,2,\cdots,5)$对应的 $C_i(\mu)$值. 在 L_i 处，有$v^2=0$(注意，这是会合坐标系中的速度)，因此给出平衡点对应的 C 值如下：

$$C_i(\mu)=2\Omega(x_i(\mu),0,0),\quad i=1,2,3; \tag{7.54}$$

$$C_i(\mu)=2\Omega(x_i(\mu),y_i,0,),\quad i=4,5. \tag{7.55}$$

其中 $y_4=\sqrt{3}/2,y_5=-\sqrt{3}/2$. 对 L_1,L_2,L_3 有

$$C_i(\mu)=[x_i^2(\mu)+\mu(1-\mu)]+2\left[\frac{1-\mu}{|x_i(\mu)-\mu|}+\frac{\mu}{|x_i(\mu)+(1-\mu)|}\right], \tag{7.56}$$

对 L_4 和 L_5 有

$$C_4(\mu)\ =C_5(\mu)=3. \tag{7.57}$$

由(7.56)和(7.57)两式和 $x_i(\mu)$与 μ 值的关系可知，五个平衡点处对应的 Jacobi 积分常数值 $C_i(\mu)$有如下关系：

$$3=(C_4,C_5)\leqslant C_3(\mu)\leqslant C_2(\mu)\leqslant C_1(\mu)\leqslant 4.25, \tag{7.58}$$

它们各自随 μ 值的变化见图 7.5.

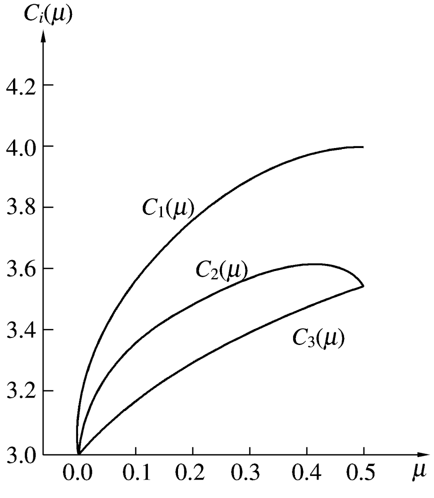

图 7.5　Jacobi 常数随 μ 值的变化

太阳—行星系统和地—月系统对应的圆型限制性三体问题，三个共线平动点的位置 $x_i(\mu)$及其相应的 Jacobi 常数 $C_i(\mu)$，分别列于表 7.1 和 7.2：

表 7.1 共线平动点的位置 $x_i(\mu)$

	μ	x_2	x_1	x_3
太阳—水星	0.00000017	−1.00382039	−0.99618898	1.00000007
—金星	0.00000245	−1.00937503	−0.99067832	1.00000102
—地 月	0.00000304	−1.01007019	−0.98999093	1.00000126
—火 星	0.00000032	−1.00476578	−0.99524867	1.00000013
—木 星	0.00095388	−1.06883052	−0.93236559	1.00039745
—土 星	0.00028550	−1.04605727	−0.95476098	1.00011896
—天王星	0.00004373	−1.02458081	−0.97572949	1.00001822
—海王星	0.00005177	−1.02601130	−0.97433032	1.00002157
—冥王星	0.00000278	−1.00977551	−0.99028227	1.00000116
地—月	0.01215057	−1.15568210	−0.83691521	1.00506264

表 7.2 共线平动点对应的 Jacobi 常数 $C_i(\mu)$

	μ	C_2	C_1	C_3
太阳—水 星	0.00000017	3.00013043	3.00013065	3.00000033
—金 星	0.00000245	3.00077756	3.00078083	3.00000490
—地 月	0.00000304	3.00089604	3.00090009	3.00000607
—火 星	0.00000032	3.00020261	3.00020304	3.00000065
—木 星	0.00095388	3.03844172	3.03971380	3.00190682
—土 星	0.00028550	3.01771636	3.01809709	3.00057092
—天王星	0.00004373	3.00521010	3.00536840	3.00008745
—海王星	0.00005177	3.00582087	3.00588991	3.00010354
—冥王星	0.00000278	3.00084481	3.00084851	3.00000556
地—月	0.01215057	3.18416325	3.20034388	3.02415006

这里说明两点:

(1) 表 7.1 和表 7.2 中的数据是直接引用文献[1]中给出的结果,所用的有关各大行星和月球的基本数据和目前给出的数值可能有微小差别,故这里列出的数据只是为了说明所阐述内容. 读者如有需要,可直接根据前两段给出的方法,利用新的基本数据进行计算,但结果与表 7.1 和表 7.2 的数

据不会有明显差别.

（2）关于三个共线平动点的排列，若按原有习惯[1]，是按三个平动点的 x 坐标进行排列的，而在当今的某些领域，特别是航天界，是按“能量”大小排列的（这种排列有它的特点），将 L_1 和 L_2 的位置互换，即两个大天体之间的平动点称为 L_1，另一个为 L_2，本书的排列就是这样，请读者注意.

3．零速度面与运动可能区域

（1）零速度面及其变化

既然 Jacobi 积分（7.32）是圆型限制性三体问题的一个积分，因此，下列曲面

$$2\Omega(x,y,z)=C, \tag{7.59}$$

即为零速度面，在此曲面上小天体的运动速度为 0，积分常数由初始条件确定，有

$$C=2\Omega(x_0,y_0,z_0)-v_0^2, \tag{7.60}$$

零速度面的几何结构将随 Jacobi 常数 C 值的变化而变化. 为了便于看清这一变化，用零速度面在 xy 平面上的截线（零速度线）来描述，随 C 值的变化见图 7.6～7.9.

（2）运动可能区域

上述四幅图（图 7.6～7.9）中，零速度面将整个空间分为两种区域，阴影部分对应 $v>0$，此即小天体运动的可能区域，而阴影外的另一部分则对应 $v<0$，此即运动的禁区，小天体不可能从 $v>0$ 的阴影区穿过零速度面而进入禁区（因 $v<0$ 是不可能的）. 小天体在运动过程中若达到零速度面，那只可能沿零速度面的法线方向与其相接，而相接后又沿此法向返回原区域.

从上述四幅图的变化可以看出，当 C 值较大时，即图 7.6，零速度面将整个空间分为四个部分，而随着 C 值的减小，分别包围两个大天体 P_1 和 P_2 的零速度面逐渐增大、靠近、相接（在 L_1）、直至连通，即图 7.7；当 C 值再减小时，内部的零速度面扩大，与外部逐渐缩小的零速度面靠近、相接（在 L_2）而连通，即图 7.8；最后通过 L_3 进而变为图 7.9. 注意，由 Jacobi 积分可以看出，积分常数 C 值的减小就意味着在同一位置处速度的增大. 这表明，随着小天体初始速度的增大而使其运动的可能区域增大. 对于第一种情况，C 值大，v_0 小，小天体只能在大天体 P_1 或 P_2 附近的区域运动，而不可能从一个大天体附近运行到另一个大天体附近.

由上述讨论可知，小天体运动可能区域对应的连通性变化都是通过五个平衡点发生的，故将相应的 Jacobi 常数 C_i 称为临界值.

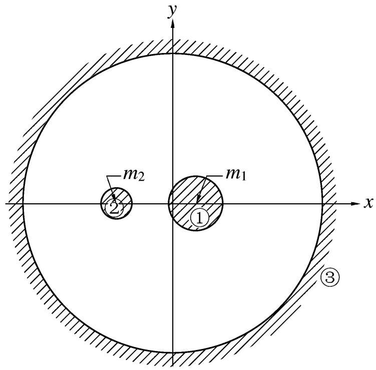

图 7.6　$C>C_1$ 的情况

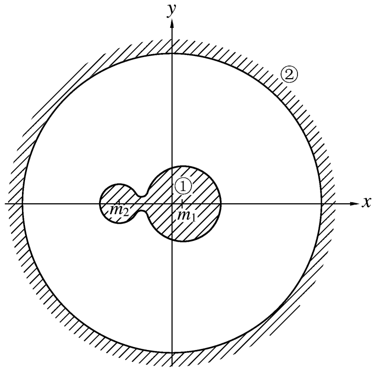

图 7.7　$C_2<C<C_1$ 的情况

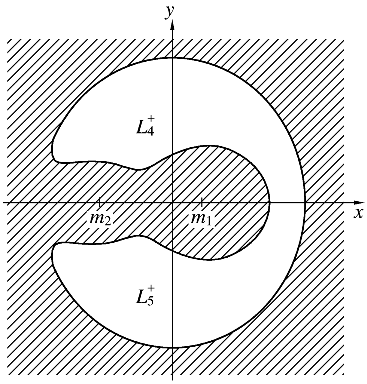

图 7.8　$C_3<C<C_2$ 的情况

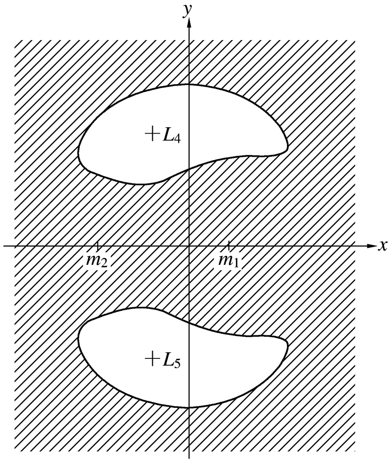

图 7.9　$C_4<C<C_3$ 的情况

4. 发射深空探测器的有关问题

以月球探测器为例，若月球绕地球运行的轨道为圆，那么，要从地球上发射一个月球探测器，在初始停泊轨道上，必须经变轨让其运行速度达到使相应的 C 值满足 $C_2<C<C_1$，它才有可能从地球附近飞向月球. 若探测器的轨道速度大到满足 $C_3<C<C_2$，则它不仅可以飞向月球，而且还可能从月球附近飞离地月系统，变为人造小行星. 下面介绍几个有关问题[2].

(1) 引力范围与作用范围

关于深空探测器 P 的运动，往往是在两个大天体 P_1 和 P_2 共同作用下的运动. 由于探测器 P 在运动过程中可能会接近 P_1，也可能会接近 P_2，通

常不能处理成受摄二体问题，对应的是一个限制性三体问题。但是，由于探测器总是要接近被探测天体（例如 P_2），那么，当探测器 P 进入以 P_2 为中心的某一范围内，P_2 的引力作用将成为探测器运动的主要力源，在此范围内可近似地看成 P 相对 P_2 运动的一个二体问题，而在此范围外，则近似地看成 P 相对 P_1 运动的二体问题，这种近似将有助于对一个复杂问题进行初步分析。关于这一范围，有如下两种定义：

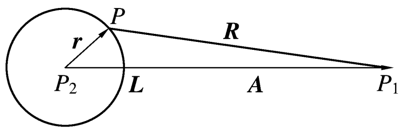

图 7.10　P_2 的引力范围与作用范围

1）引力范围　见图 7.10，在 P_2 的引力范围边界上，P 受到两个大天体 P_1 和 P_2 的引力大小相等。有

$$\frac{GM_2}{r^2}=\frac{GM_1}{R^2}, \tag{7.61}$$

其中 M_1 和 M_2 分别为两个大天体 P_1 和 P_2 的质量。当 M_2/M_1 较小时，根据图 7.10 的几何构形，可将 L 点到 P_2 的距离近似地作为引力范围的半径，记作 r_1。由此根据(7.61)式容易给出

$$r_1=\sqrt{\mu}A, \quad \mu=M_2/M_1, \tag{7.62}$$

其中 $A=|\boldsymbol{A}|$，即两个大天体 P_1 与 P_2 之间的距离。

2）作用范围　引用上述引力范围作简化不太合理，因在考虑 P 相对 P_2（或 P_1）的运动时，另一大天体 P_1（或 P_2）对该系统存在“摄动”作用。P 相对 P_1 和 P_2 的运动方程分别为

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{r}}=-\dfrac{GM_2}{r_2}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+GM_1\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\dfrac{\boldsymbol{A}}{A^3}\right),\\ \ddot{\boldsymbol{R}}=\dfrac{GM_1}{R_2}\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}\right)-GM_2\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\dfrac{\boldsymbol{A}}{A^3}\right).\end{cases} \tag{7.63}$$

考虑两种作用力的平衡，即定义出作用范围，相应的边界由下式确定：

$$GM_1\left|\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\frac{\boldsymbol{A}}{A^3}\right|\left(\frac{GM_2}{r^2}\right)^{-1}=Gm_2\left|\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{A}}{A^3}\right|\left(\frac{GM_1}{R^2}\right)^{-1}. \tag{7.64}$$

同样以图 7.10 中 L 点的位置作为边界，在 M_2/M_1 较小时，给出作用范围的半径 r_2 为

$$r_2=\left(\frac{\mu^2}{2}\right)^{1/5}A \text{ 或}(\mu^2)^{1/5}A, \quad \mu=M_2/M_1. \tag{7.65}$$

这种作用范围（也可以称作引力作用范围）可以用来为深空探测器发射轨道设计提供初始选择，但在此基础上引入的双二体问题的拼接方法在当今计算条件下就没有什么实际意义了。

（2）希耳(Hill)范围

在讨论探测器(例如月球探测器)发射条件时,往往需要给出另一种范围,即必须同时考虑 P_1(地球)和 P_2(月球)的引力作用,才能确切地给出从地球上发射探测器能达到月球附近的最小速度,此即讨论的问题. 当初始条件(P 相对 P_1 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 和速度矢量 $\boldsymbol{v}_0$)确定的 Jacobi 常数 C 值分别为 $C>C_1$ 和 $C_2<C<C_1$ 时,它们各对应图 7.6 和图 7.7. 当 $C>C_1$ 时,探测器只能在地球(P_1)附近,即图 7.6,那么图 7.11 即临界状况. 此时围绕 P_1 和 P_2 的范围(阴影部分)即为希耳范围,L_1 即图 7.3 中给出的排列第二的共线平衡点. 若以 L_1 到 P_2 的距离作为 P_2 的希耳范围大小,记作 r_3,则由(7.45)式给出

$$r_3=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}A,\quad \mu=\frac{M_2}{M_1+M_2}. \tag{7.66}$$

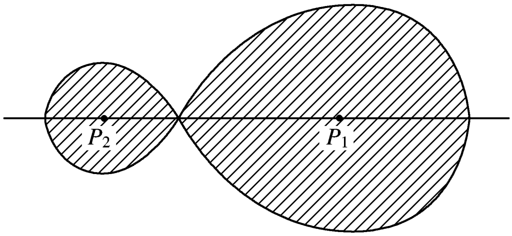

图 7.11 希尔范围

对于地—月系统,日—地系统和日—地月系统,相应的月球、地球和地月系作为各自系统中较小天体 P_2 的上述三个范围的数据列于表 7.3.

表中 A 为 P_1 与 P_2 之间的平均距离. 其他大行星的上述三个范围可分别由(7.62)式,(7.65)式和(7.66)式计算,这里不再具体列出.

表 7.3 三个系统的引力范围、作用范围和希耳范围

系统	引力范围 (10^4 km)	作用范围 (10^4 km)	希耳范围 (10^4 km)	A (10^4 km)
地—月	4.27	5.78	6.14	38.5327374
日—地	25.9	80.5	149.7	14959.7870
日—地月	26.1	80.9	150.3	14959.7870

（3）第二宇宙速度 v_2

v_2 即脱离地球引力场的最小速度,也就是从地面发射探测器相对地球的抛物线($a\to\infty,e=1$)速度,有

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GE}{a_e}} = \sqrt{2}v_1 = 11.1799 \text{ km/s} \tag{7.67}$$

对于从地球上发射星际探测器而言，人们首先关心的是第二宇宙速度 v_2，从地球表面发射和从近地停泊轨道上发射，相应的 v_2 相差不大，例如从地面高度 200 km 处发射，相应的 v_2 为 11.0086 km/s. 但是，如果考虑到月球的引力加速作用，发射速度并不需要这么大，下段给出.

(4) 向月球发射探测器的最小速度

如果按地—月—探测器圆型限制性三体问题来考虑，在近地停泊轨道(假定为地面高度 200 km 的圆轨道)上"发射"探测器，并假定该停泊轨道经轨道调整已使其轨道平面与月球绕地运动的白道面重合. 那么，只要以停泊轨道半径为近地距 $r_p = a_e + 200$ km，发射速度 $v_p = 10.8746$ km/s，即可使相应的 Jacobi 常数 $C = C_1$，亦即发射速度比这一 v_p 值稍大一点，探测器即有可能经月球引力加速飞抵月球附近. 上述轨道的主要根数为

$$a = 135893.7198 \text{ km}, \quad e = 0.9516,$$

相应的轨道周期 $T_S = 5^d.77$. 但是以这种轨道方式飞往月球，需绕地球运行若干圈后才有可能，因此所耗费的时间远比 T_S 长得多. 发射月球探测器通常不会采用这样的最小速度轨道，而实际问题往往使考虑能量消耗小(即最小能量轨道)和运行时间短这两个重要条件，关于这一问题后面第八章中将有论述.

§7.4　平动点附近的运动与晕轨道

就航天应用而言，必须了解平动解的稳定性，稳定或不稳定各具不同的应用价值.

1. 平动解的稳定性

记平动解为

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad z_0 = 0, \tag{7.68}$$

初始扰动记作

$$\Delta x = \xi, \quad \Delta y = \eta, \quad \Delta z = \zeta. \tag{7.69}$$

将 $x = x_0 + \Delta x = a + \xi$, $y = y_0 + \Delta y = b + \eta$ 和 $z = z_0 + \Delta z = \zeta$ 代入运动方程得

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_{xx}^0 \xi + \Omega_{xy}^0 \eta + \Omega_{xz}^0 \zeta + O(2), \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_{yx}^0 \xi + \Omega_{yy}^0 \eta + \Omega_{yz}^0 \zeta + O(2), \\ \ddot{\zeta} = \Omega_{zx}^0 \xi + \Omega_{zy}^0 \eta + \Omega_{zz}^0 \zeta + O(2), \end{cases} \tag{7.70}$$

其中 $O(2)$ 表示 ξ,η 和 ζ 的二阶以上(包括二阶)小量,$\Omega_{xx}^0,\Omega_{xy}^0,\cdots,\Omega_{zz}^0$ 表示 Ω 的两阶偏导数在平衡点上取值,有

$$\begin{cases}\Omega_x^0=0, \quad \Omega_y^0=0, \quad \Omega_z^0=0,\\ \Omega_{xy}^0=\Omega_{yx}^0,\\ \Omega_{xz}^0=\Omega_{zx}^0=\Omega_{yz}^0=\Omega_{zy}^0=0.\end{cases} \tag{7.71}$$

于是方程(7.70)变为

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=\Omega_{xx}^0\xi+\Omega_{xy}^0\eta,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=\Omega_{yy}^0\eta+\Omega_{yx}^0\xi,\\ \ddot{\zeta}=\Omega_{zz}^0\zeta.\end{cases} \tag{7.72}$$

方程(7.72)是常系数线性齐次方程组,ζ 分量可以分离掉,它对应一个简谐振动,即小天体不会远离 xy 平面.下面只需讨论 xy 平面的情况,即方程组(7.72)前面两个关于 ξ,η 的扰动性质.相应的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda^2-\Omega_{xx}^0 & -2\lambda-\Omega_{xy}^0\\ 2\lambda-\Omega_{xy}^0 & \lambda^2-\Omega_{yy}^0\end{vmatrix}=0. \tag{7.73}$$

这是关于特征量 λ 的四次代数方程,即

$$\lambda^4+(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)\lambda^2+(\Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0-\Omega_{xy}^{0\ 2})=0. \tag{7.74}$$

(1) 共线平动解(L_1,L_2,L_3)的情况

对于 $0<\mu<1/2$(任何一个限制性三体问题,除 $M_1=M_2$ 外均符合这一条件),有

$$\begin{cases}\Omega_{xx}^0=1+2C_0>0, \quad \Omega_{yy}^0=1-C_0<0, \quad \Omega_{zz}^0=-C_0<0,\\ C_0=\dfrac{(1-\mu)}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}.\end{cases} \tag{7.75}$$

$$\begin{cases}\Omega_{xy}^0=0, \quad \Omega_{xx}^0>0, \quad \Omega_{yy}^0<0,\\ \Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0-(\Omega_{xy}^0)^2<0.\end{cases} \tag{7.76}$$

其中 C_0 右端出现的 r_1,r_2 分别为三个共线平动点到两个大天体的距离,即 $r_1=|x_i-\mu|,r_2=|x_i+1-\mu|$.于是方程(7.73)的四个特征根分别为

$$\begin{cases}\lambda_{1,2}=\pm S_1^{\ 1/2}\\ \lambda_{3,4}=\pm S_2^{\ 1/2}\end{cases}, \tag{7.77}$$

$$\begin{cases}S_1=\dfrac{1}{2}\{-(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)+[(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)^2-4\Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0]^{1/2}\},\\ S_2=\dfrac{1}{2}\{-(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)-[(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)^2-4\Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0]^{1/2}\}.\end{cases} \tag{7.78}$$

其中 $S_1>0, S_2<0$，故有一正实根，三个共线平动解是不稳定的.

(2) 三角平动解(L_4, L_5)的情况

容易给出

$$\begin{cases}\Omega_{xx}(L_{4,5})=\dfrac{3}{4}, \Omega_{yy}(L_{4,5})=\dfrac{9}{4}, \\ \Omega_{xy}(L_4)=+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\mu-\dfrac{1}{2}\right), \\ \Omega_{xy}(L_5)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\mu-\dfrac{1}{2}\right),\end{cases} \tag{7.79}$$

此时特征方程(7.73)变为

$$\lambda^4+\lambda^2+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0. \tag{7.80}$$

令 $S=\lambda^2$，方程变为

$$S^2+S+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0, \tag{7.81}$$

解为

$$S_{1,2}=\frac{1}{2}\{-1\pm[1-27\mu(1-\mu)]^{1/2}\}. \tag{7.82}$$

相应的特征根 λ 如下：

$$\begin{cases}\lambda_1=+\sqrt{S_1}, \lambda_2=-\sqrt{S_1}, \\ \lambda_3=+\sqrt{S_2}, \lambda_4=-\sqrt{S_2}.\end{cases} \tag{7.83}$$

特征根的性质取决于(7.82)式中的 $d=1-27\mu(1-\mu)$，当

$$0<1-27\mu(1-\mu)<1$$

时，即

$$\mu(1-\mu)<\frac{1}{27} \tag{7.84}$$

时，特征根为两对纯虚根，此时三角平动解有线性稳定性，相应的 μ 的临界值 μ_0 满足

$$\mu_0(1-\mu_0)=\frac{1}{27}. \tag{7.85}$$

注意 $\mu<\dfrac{1}{2}$，故有

$$\mu_0=\frac{1}{2}(1-\sqrt{69}/9)=0.038520896504551\cdots, \tag{7.86}$$

上述线性稳定性条件为

$$0<\mu<\mu_0. \tag{7.87}$$

对太阳系中处理成限制性三体问题的各个系统，如日—木—小行星，日—地—月球，……，相应的 μ 值均满足条件(7.87).

对于 $\mu_0<\mu<\frac{1}{2}$ 的情况，显然是不稳定的. 至于 $\mu=\mu_0$，非线性稳定情况，以及椭圆型限制性三体问题中的三角平动解情况，读者如有兴趣请阅读文献[1]和[3].

2. 平动点附近的运动状况

在上述线性稳定性的讨论中，相应的扰动量构成的线性方程(7.70)，其解就可以描述平衡点附近的运动状况. 关于三角平动解，当条件(7.85)满足时，相应平衡点附近的运动即简单的周期运动，不再讨论. 这里主要讨论三个共线平动解的情况.

前面(7.77)式给出的四个特征根可写成下列形式：

$$\begin{cases}\lambda_{1,2}=\pm d_1, \\ \lambda_{3,4}=\pm d_2 i, \quad i=\sqrt{-1}.\end{cases} \tag{7.88}$$

这里 $d_1>0$，$d_2>0$，具体值为

$$\begin{cases}d_1=\left[\frac{1}{2}(9C_0^2-8C_0)^{1/2}-\left(1-\frac{C_0}{2}\right)\right]^{1/2}, \\ d_2=\left[\frac{1}{2}(9C_0^2-8C_0)^{1/2}+\left(1-\frac{C_0}{2}\right)\right]^{1/2}.\end{cases} \tag{7.89}$$

在线性意义下，三个共线平动解是不稳定的，考虑高阶项后亦如此. 相应平动点附近的运动有如下形式：

$$\begin{cases}\xi=C_1e^{d_1t}+C_2e^{-d_1t}+C_3\cos d_2t+C_4\sin d_2t, \\ \eta=\alpha_1C_1e^{d_1t}-\alpha_1C_2e^{-d_1t}-\alpha_2C_3\sin d_2t+\alpha_2C_4\cos d_2t,\end{cases} \tag{7.90}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_1=\frac{1}{2}(d_1-\Omega_{xx}^0/d_1), \\ \alpha_2=\frac{1}{2}(d_2+\Omega_{xx}^0/d_2).\end{cases} \tag{7.91}$$

上述 C_1，C_2，C_3 和 C_4 在这里是四个积分常数，由初始扰动条件 $t_0=0$，ξ_0，$\dot{\xi}_0$，η_0，$\dot{\eta}_0$ 确定. 这表明，尽管小天体初始运动状态满足共线平动解的条件，但经小扰动后即会远离平动点，远离的快慢取决于 d_1 值的大小. 对于日—(地＋月)—小天体系统，三个共线平动点 L_2，L_1，L_3 处的 d_1 值分别为 2.53265918，2.48431672 和 0.00282501，因此 L_1 和 L_2 点的不稳定性要比

L_3 点的不稳定性强得多，也就是说 L_1 和 L_2 点附近的小天体要比 L_3 点附近的小天体的远离快得多.

虽然共线平动解是不稳定的，但可选取适当的初始扰动，使相应平动点附近的运动仍为周期运动或拟周期运动. 即选取这样的初始扰动 ξ_0，$\dot{\xi}_0$ 和 η_0，$\dot{\eta}_0$ 使 $C_1=0$，$C_2=0$，从而使解(7.90)退化为周期解，相应的运动变为稳定的，这种稳定称为条件稳定.

在会合坐标系中，若小天体偏离 L_j ($j=1,2,3$)，有一初始位置小扰动 ξ_0 和 η_0，那么按下述条件加一速度小扰动 $\dot{\xi}_0$ 和 $\dot{\eta}_0$，即可使小天体在 L_j 附近摆动. 具体条件为

$$\begin{cases}\dot{\xi}_0=\left(\dfrac{d_2^2}{\alpha_2 d_2}\right)\eta_0, \\ \dot{\eta}_0=(-\alpha_2 d_2)\xi_0,\end{cases} \tag{7.92}$$

其中

$$\alpha_2 d_2=\frac{1}{2}(d_2^2+\Omega_{xx}^0). \tag{7.93}$$

在上述选择下，有 $C_1=0$ 和 $C_2=0$，相应的解退化为下列周期解：

$$\begin{cases}\xi=\xi_0\cos d_2 t+(\eta_0/\alpha_2)\sin d_2 t, \\ \eta=(-\alpha_2\xi_0)\sin d_2 t+\eta_0\cos d_2 t,\end{cases} \tag{7.94}$$

小天体在 xy 平面上相对共线平衡点 L_j 的运动状态实为一个椭圆曲线，即

$$\begin{cases}\dfrac{\xi^2}{A^2}+\dfrac{\eta^2}{B^2}=1, \\ A^2=\xi_0^2+(\eta_0/\alpha_2)^2,B^2=\alpha_2^2 A^2.\end{cases} \tag{7.95}$$

尽管上述结果是由线性系统给出的，还是有一定实用意义的. 至于非线性情况，同样可找到相应的条件周期解[1,4].

3. 深空探测器定位在共线平动点附近运动的晕轨道以及有关借力加速问题

深空探测器就是一个人造小天体，如果需要定位在共线平动点附近，只要按照条件(7.92)进行轨控，它就可以被保持在平动点附近而不远离，在一定的工作寿命期间完成探测任务[4]. 不仅在 xy 平面上它是一个周期运动，而且在 z 方向也是一个周期振动，但是由于两个频率因子 d_1 和 d_2 一般不通约，其相对平动点的轨道实为一拟周期轨道，如果通约则为周期轨道. 这常被人们称为 Lissajous Trajectory 或 Halo Orbit(即晕轨道)，对于后者，即从 x 方向(视线方向)去看，在 yz 平面上的轨道投影围绕平动点像一种

晕. 对于线性系统中 d_1 和 d_2 不通约的情况,可以考虑扰动方程(7.70)右端的高阶项,以此来改变相应扰动解的状态,从而获得条件周期轨道,即晕轨道.

上述共线平动点的条件稳定性,可在深空探测中被利用. 而其不稳定性亦可在深空探测器的发射上得到利用,正如§7.3中所阐述的共线平动点 $L_j(j=1,2,3)$ 附近亦是一种节能通道,发射深空探测器通过这些点飞往目标天体需要的能量最小,平动点的这种利用,也是一种借力加速机制.

§7.5 限制性二体问题与航天器编队飞行的动力学机制

我们要讨论的问题是,两个卫星绕地球运动(或两个探测器绕同一探测目标天体运动). 不妨假定地球是 P_1,中心卫星是 P_2,绕地球作圆运动,另一个伴飞卫星即小天体 P. 由于卫星质量之小,相距不太近时(如超过100 m),它们之间的相互引力可略去,因此这对应上述限制性三体问题中的 $\mu=0$. 此时,限制性三体问题退化为限制性二体问题,且会合坐标系的坐标原点移至 P_1(即地心).

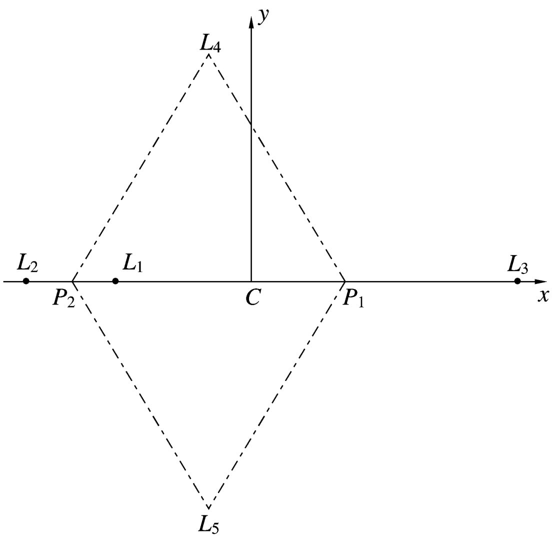

图 7.12　平动点的位置

对于这种限制性二体问题,在地心旋转坐标系(旋转角速度即中心卫星的绕飞角速度)中,伴飞卫星的运动方程变为如下形式:

$$\begin{cases}\ddot{x}-2\dot{y}=U_x=(x-\dfrac{x}{r^3}),\\ \ddot{y}+2\dot{x}=U_y=(y-\dfrac{y}{r_3}),\\ \ddot{z}=U_z=-\dfrac{z}{r^3}.\end{cases}\tag{7.96}$$

原来的五个平衡点 $L_i(i=1,2,3)$ 和 $L_i(i=4,5)$，退化为下列状况：

L_1 和 L_2 合一，位置为　$x=-1$，　$y=0$；

L_3 的位置为　$x=+1$，　$y=0$；

L_4 和 L_5 的位置为　$x=-\dfrac{1}{2}$，　$y=\pm\sqrt{3}/2$.

事实上，从方程(7.96)不难看出 $U_x=0,U_y=0,U_z=0$ 对应

$$z=0,\quad r=1,\tag{7.97}$$

即在 xy 平面上，以地球(P_1)为中心的单位圆(r 即中心卫星的圆轨道半径)上每个点都是平衡点，这一点并不难理解. 回到上述五个相应的平衡点，略去证明，结论是五个平衡点 L_i 和 L_j 均是不稳定的. 关于 L_4 和 L_5 的性质发生变化也是不难理解的，此时另一保持其平衡的力源 P_2 实际上已不存在，因 $\mu=0$.

为了与星上轨道坐标系相吻合，我们仍旧关心的是三个与伴飞有关的共线平衡点. 尽管它们是不稳定的，但在线性意义下，与限制性三体问题一样，其附近小领域内的运动，仍然可以维持一种周期运动，即条件周期运动.

在 $L_i(i=1,2,3)$ 位置上给一小扰动，扰动坐标分量各记作 ξ,η,ζ，代入方程(7.96)得

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=U_{xx}\xi+U_{xy}\eta+U_{xz}\zeta+O(0),\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=U_{yx}\xi+U_{yy}\eta+U_{yz}\zeta+O(2),\\ \ddot{\zeta}=U_{zx}\xi+U_{zy}\eta+U_{zz}\zeta+O(2),\end{cases}\tag{7.98}$$

其中 $O(2)$ 表示高阶小量. 不难算出，在 $L_i(x=\pm1,y=0,z=0)$ 处有

$$\begin{cases}U_{xx}=3,\quad U_{xy}=0,\quad U_{xz}=0,\\ U_{yx}=0,\quad U_{yy}=0,\quad U_{yz}=0,\\ U_{zx}=0,\quad U_{zy}=0,\quad U_{zz}=-1.\end{cases}\tag{7.99}$$

代入方程(9.97)，略去高阶项，即得 L_i 附近小扰动方程线性化的结果如下：

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=3\xi,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=0,\\ \ddot{\zeta}+\ \zeta=0,\end{cases}\tag{7.100}$$

此即前面第 6 章§6.4 中提到的伴飞的 C－W 方程. 因两卫星之间无引力作用，中心卫星可以是虚拟的，是否存在无所谓，只要旋转坐标系按相应虚拟卫星的圆轨道角速度旋转即可. 若把上述平衡点放在单位圆上的$x=0$，$y=\pm 1$处，其附近小扰动运动方程的线性化形式即

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=0,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=3\eta,\\ \ddot{\zeta}+\zeta=0,\end{cases} \tag{7.101}$$

它对应

$$U_{xx}=0,\quad U_{yy}=3,\quad U_{zz}=-1. \tag{7.102}$$

根据上述讨论可知，尽管两卫星之间无任何动力学联系，但是只要它们相距较近，仍然可由限制性二体问题中平衡点附近的运动这一动力学机制来理解它们之间相对构形形成的原因. 无论是方程(7.100)还是(7.101)，ζ分量可与问题分离，对应一谐振动，即伴飞卫星在 xy 平面上下作小振动. 而对 ξ,η 两分量，相应的特征方程为

$$\lambda^4+\lambda^2=0. \tag{7.103}$$

存在一对重根 $\lambda_{1,2}$ 和一对共轭虚根 $\lambda_{3,4}$，即

$$\lambda_{1,2}=0,\quad \lambda_{3,4}=\pm\sqrt{-1}. \tag{7.104}$$

相应的运动解为

$$\begin{cases}\xi=C_1+C_2t+C_3\cos t+C_4\sin t,\\ \dot{\xi}=C_2-C_3\sin t+C_4\cos t,\\ \eta=\dfrac{3}{2}C_1t-\dfrac{3}{4}C_2t^2-2C_3\sin t+2C_4\cos t,\\ \dot{\eta}=-\dfrac{3}{2}C_1-\dfrac{3}{2}C_2t-2C_3\cos t-2C_4\sin t.\end{cases} \tag{7.105}$$

可选择适当的初始条件，使 $C_1=0$，$C_2=0$，构成一个条件周期解，具体的初始条件为

$$t=t_0:\ \xi_0,\eta_0,\dot{\xi}_0=\eta_0/2,\dot{\eta}_0=-2\xi_0,\zeta_0,\dot{\zeta}_0. \tag{7.106}$$

此时小扰动运动的解为如下“拟”周期解：

$$\begin{cases}\xi=\xi_0\cos t+(\eta_0/2)\sin t,\quad \dot{\xi}=-\xi_0\sin t+(\eta_0/2)\cos t,\\ \eta=-2\xi_0\sin t+\eta_0\cos t,\quad \dot{\eta}=-2\xi_0\cos t-\eta_0\sin t,\\ \zeta=\zeta_0\cos t+\dot{\zeta}_0\sin t,\quad \dot{\zeta}=-\zeta_0\sin t+\dot{\zeta}_0\cos t,\end{cases} \tag{7.107}$$

在(x,y)平面上的构形为一椭圆，如果初始扰动 $\dot{\zeta}_0$ 满足下列条件：

$$\dot{\zeta}_0=\pm(\eta_0/2\xi_0)\zeta_0, \tag{7.108}$$

那么在(y,z)平面上的构形亦为一椭圆. 相应的上述两个椭圆方程如下：

$$\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}=1, \tag{7.109}$$

$$\frac{\eta^2}{C^2}+\frac{\zeta^2}{D^2}=1. \tag{7.110}$$

其中

$$A^2=\xi_0^2+\eta_0^2/4,\quad B^2=4A^2, \tag{7.111}$$

$$C^2=4A^2=B^2, D^2=(4\zeta_0^2/\xi_0^2)A^2. \tag{7.112}$$

上述条件周期运动，即卫星编队飞行或伴飞的一种动力学机制，但两星相距不能大，否则方程(7.98)右端略去的高阶项 $O(2)$很快即起作用，若仍按条件(7.108)控制，伴飞的构形会遭破坏，此时必须考虑高阶项，相应的条件(7.108)将会改变. 从上述讨论不难看出，卫星编队构形，实际上就是二体问题对应的运动不稳定性在条件(7.108)约束下的结果，只是直接从二体问题对应的运动不稳定性着手讨论比较麻烦，而从限制性三体问题过渡到退化后的限制性二体问题，从而获得编队构形，显得很自然.

注意，限制性三体问题中共线平动点附近的运动，对应的特征频率 $d_1\neq0$(见前面第二段给出的数据)，而上述卫星编队问题中，$d_1=0$，前者对 t 而言是指数不稳定(或称强不稳定)，而后者则是线性不稳定(或称弱不稳定). 因此，这两种情况所需要的轨控能量有较大差别，对于卫星编队飞行，需要的轨控能量相对而言要小得多[6].

参 考 文 献

[1] Szebehely, V. Theory of Orbits. Academic Press, New York and London, 1967

[2] 刘林. 航天器轨道理论(第十六章). 北京：国防工业出版社，2000

[3] Siegel , C. L. & Moser, J. K.. Lectures on Celestial Mechanics(chapter 3). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York，1971

[4] Gómez, G. etc. Dynamics and Mission Design Near Libration Points, Vol. Ⅲ Adavanced Methods for Collinear Points. World Scientific, Singapore. New Jersey. London. Hong Kong, 2001

[5] 刘林，侯锡云，王建峰，王海红. 关于空间探测器定位在太阳系中特殊点上的有

关问题. 天文学进展, 2005,23(2):

[6] **刘林,王海红,马剑波. 关于星座小卫星的编队飞行问题. 天文学报**, 2004,45(1):57～67

LIU Lin, Wang Haihong, MA Jian-bo. On the Formation Flying of Satllite Constellations. Chin. Astro. Astrophy., 2004,28(2):188～199

第 8 章　轨道机动与轨道过渡

§8.1　脉冲式轨道机动与轨道过渡

轨道机动或轨道过渡有两种方式，其中第一种就是传统的大推力脉冲式的变轨方式. 脉冲式的大推力推进器多采用化学推进剂，推进器的排气速度小、推力大、工作时间短，在轨道计算中通常是将这种脉冲式的推力(实为由推力获得的加速度)处理成瞬间的速度变化 Δv.

1. 脉冲式变轨的基本原理

无论是航天器运行过程中的轨道调整或向目标轨道过渡的轨道转移，都涉及到轨道改变问题，即给一速度增量 Δv，从而获得所需的轨道变化. 因此首先要了解各轨道根数($a,e,\cdots$)与瞬时冲量(或一速度增量 Δv)之间的关系. 前面第二章 §2.6 中已就二体问题简单介绍了各轨道根数随速度(包括大小和方向)变化的状况. 本章将在受摄运动模型下阐述这类问题，包括大推力的脉冲式变轨和小推力持续式变轨，这一节讨论的是脉冲式变轨问题. 第三章 §3.3 和 §3.4 中已分别给出了椭圆运动和双曲线运动的受摄运动方程. 本节具体讨论椭圆轨道的变轨问题，涉及的受摄运动方程有两种形式，即以(S,T,W)表达的(3.73)式，和以(U,N,W)表达的(3.74)式.

对于大推力脉冲式变轨，因作用时间间隔 Δt 很短，可以近似处理成一个瞬时过程，以短暂的间隔 Δt 和相应的根数变化 $\Delta\sigma$ 代替 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\sigma$. 机动力(相当于一种摄动源)提供的加速度可以作为一种摄动加速度，通过间隔 Δt 内的速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 来表达，有

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{v} &= (\Delta v_r, \Delta v_\theta, \Delta v_W) \\ &= (\Delta v_U, \Delta v_N, \Delta v_W)\end{aligned} \tag{8.1}$$

和

$$\begin{cases}\Delta v_r = S\Delta t, \quad \Delta v_\theta = T\Delta t, \quad \Delta v_W = W\Delta t, \\ \Delta v_U = U\Delta t, \quad \Delta v_N = N\Delta t, \quad \Delta v_W = W\Delta t.\end{cases} \tag{8.2}$$

其中速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的切向(即速度方向)分量是 Δv_U 常记作 Δv,与前面第 2 章 §2.8 中的表达一致,以下就将 Δv_U 记作 Δv,注意,它区别于 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的模 $|\Delta \boldsymbol{v}|$. 在上述处理下,即可由受摄运动方程(3.73)和(3.74)给出在脉冲式变轨中轨道根数 σ 的变化 $\Delta\sigma$ 与速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 之间的关系,即

$$\begin{cases}\Delta a = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[e\sin f\Delta v_r + (1+e\cos f)\Delta v_\theta], \\ \Delta e = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}[\sin f\Delta v_r + (\cos f + \cos E)\Delta v_\theta], \\ \Delta i = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\Delta v_W, \\ \Delta\Omega = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\Delta v_W, \\ \Delta\omega = -\cos i\Delta\Omega + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-\cos f\Delta v_r + \left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\Delta v_\theta\right], \\ \Delta M = -\dfrac{1-e^2}{nae}\left[-\left(\cos f - 2e\dfrac{r}{p}\right)\Delta v_r + \left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\ \Delta v_\theta\right],\end{cases} \tag{8.3}$$

和

$$\begin{cases}\Delta a = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\Delta v, \\ \Delta e = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2(\cos f+e)\Delta v - \\ \qquad \sqrt{1-e^2}\sin E\Delta v_N], \\ \Delta i = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\Delta v_W, \\ \Delta\Omega = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\Delta v_W, \\ \Delta\omega = -\cos i\Delta\Omega + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\times \\ \qquad [2\sin f\Delta v + (\cos E+e)\Delta v_N], \\ \Delta M = -\dfrac{1-e^2}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[\left(2\sin f + \dfrac{2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)\Delta v + \right. \\ \qquad \left.(\cos E - e)\Delta v_N\right].\end{cases} \tag{8.4}$$

上述受摄运动方程中的 $u=f+\omega$. 注意,原受摄运动方程 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ 的右端有 n 这一项,对于瞬间获得速度增量的变轨方式,因无“过程”,右端 n 项与脉冲式变轨无关,后面 §8.2 中阐述的小推力持续式变轨中将涉及到该项.

按上述处理,即可根据速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 得知轨道根数的变化 $\Delta\sigma(\Delta a,\Delta e,\cdots,\Delta M)$. 若给一特殊的速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$:

$$\Delta\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\Delta v_U\\ \Delta v_N\\ \Delta v_W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta v\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\tag{8.5}$$

那么根据方程(8.4)和瞬时椭圆的相应关系很容易给出 a,e 的变化 Δa 和 Δe,即

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(v\Delta v),\tag{8.6}$$

$$\Delta e=\left[\frac{2}{ve}\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{rv^2}{\mu}-1\right)\right]\Delta v,\tag{8.7}$$

这与前面第 2 章 §2.8 中直接在二体问题意义下导出的关系式(2.205)和(2.206)是一致的. 推导(8.6)和(8.7)式利用到下列瞬时椭圆关系式:

$$\begin{cases}v^2=\mu\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{\mu}{p}(1+2e\cos f+e^2),\\[2mm] \dfrac{rv^2}{\mu}-1=1-\dfrac{r}{a},\\[2mm] \cos f+e=\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{p}{r}\right)\left(1-\dfrac{r}{a}\right).\end{cases}\tag{8.8}$$

事实上,无论是轨道调整,还是作为由初始轨道向目标轨道过渡的转移过程,主要涉及如何由脉冲能量(归结为速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$)去改变轨道的大小和形状(a 和 e),轨道面的空间定向(i 和 Ω)以及拱线的指向(ω). 因此,上述关系式(8.3)和(8.4),还有(8.6)式,就轨道而言,它们都是脉冲式变轨的理论基础. 从(8.6)式不难看出,在近地点处(此处速度 v 极大)变轨,所需能量(即 Δv)极小. 从(8.3)或(8.4)式中的 Δi 和 $\Delta\Omega$ 的表达式可以看出,对于轨道平面的改变,只依赖速度增量的轨道面法向分量 Δv_W,而且在 $u=0$ 或 $180°$时(即处于升交点或降交点处),改变倾角 i 最节省能量,对轨道面的进动($\Delta\Omega$)而言,在 $u=90°$或 $270°$处变轨最节省能量.

前面的讨论尽管是对椭圆轨道所作的,但对双曲线轨道亦有类似的结果,讨论方法相同,只要将受摄运动方程(3.73)和(3.74)改为双曲线运动的受摄运动方程(3.82)和相应的以(U,N,W)表达的形式即可,同样可以获得与椭圆轨道类似的轨道机动遵循的关系式. 但必须说明一点,上述结果的获

得，不管是(8.3)和(8.4)式，还是(8.6)和(8.7)式，只是定性准确地表明了轨道根数的变化与瞬时脉冲(以 Δv 体现)之间的关系，而从定量上来看，这些结果只是一个近似，它仅适用于 $\Delta\sigma$ 为小量的情况，即无论是简单的轨道调整还是轨道过渡，只有变轨前后的轨道相差较小时，才能引用这些结果.如果轨道相差(即 $\Delta\sigma$)较大时，只能根据变轨处对应两个不同轨道速度给出冲量(Δv)要求，下一段将会讨论这一问题.

2. 霍曼(W. Hohmann)转移轨道

航天器从初始轨道(或停泊轨道)向目标轨道的过渡，就是一种轨道转移，它由轨道机动来完成，即变轨.轨道转移有多种形式，按变轨(由脉冲式轨道机动实现)次数分为一次、两次或多次变轨实现，最终完成过渡.只有在初始轨道和目标轨道相交时，才有可能用一次变轨完成转移.初始轨道和目标轨道可以分别为圆轨道、椭圆轨道，甚至是双曲线轨道，它们两者之间可以是共面的，也可以是不共面的、相交的或不相交的.转移轨道可以是椭圆，为了节省时间也可以是双曲线.在轨道过渡中，如何选择适当的转移轨道，往往是寻求能量最省的过渡形式，但这是一个理论问题，在具体的航天任务中，需要综合考虑能量消耗大小、飞行时间长短、制导精度要求高低以及测量和控制是否方便等条件，从中选择一种可以实现的最佳过渡方式.这里就变轨原理阐述轨道过渡中的转移过程，并以一种节能的霍曼转移轨道为例来介绍轨道过渡的实现.

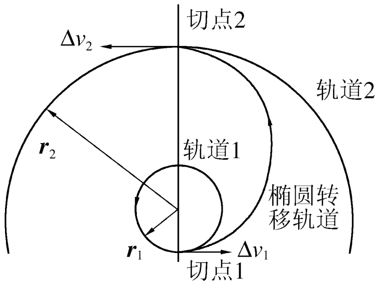

图 8.1 霍曼转移轨道

考虑一种较简单的轨道过渡：初始轨道和目标轨道为两个共面的同心(中心天体的质心)圆轨道，见图 8.1.图中轨道 1 和轨道 2 各为低圆轨道和高圆轨道，无论是从低圆轨道过渡到高圆轨道，还是从高圆轨道过渡到低圆轨道，在限定只用两次脉冲推力的情况下，采用与两个圆轨道相切的椭圆轨道(见图 8.1 中通过切点 1 和切点 2 的转移轨道)过渡，耗费能量最小，这是霍曼在 1925 年首先提出的，人们称其为霍曼过渡，相应的轨道即称为霍曼转移轨道.

事实上，上述过渡就是两次改变轨道半长径的转移过程.两个圆轨道的半长径各为 r_1 和 r_2，如果从低圆轨道(作为初始轨道)向高圆轨道(作为目标轨道)过渡，则霍曼转移轨道的半长径 a_1 应变为

$$a_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \tag{8.9}$$

相应的半长径改变量为

$$\Delta a_1 = a_1 - r_1 = \frac{1}{2}(r_2 - r_1). \tag{8.10}$$

由此在切点 1 处点火脉冲，取得相应的速度增量 Δv_1 即可. 如果根据(8.6)式，有

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\right], \tag{8.11}$$

而准确的 Δv_1 值应由切点 1 处对应的变轨前后的速度差给出，即

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= \sqrt{\mu}\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_1}\right)^{1/2} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left[\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}\right)^{1/2} - 1\right].\end{aligned} \tag{8.12}$$

两种结果之差为

$$\sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left\{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\right] - \left[\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}\right)^{1/2} - 1\right]\right\},$$

这种差别还是明显的，当 $r_2 = 2r_1$ 时，括号"{　}"内的差别达 $0.095 \approx 10\%$. 而只有当 r_2 与 r_1 相差较小时，两种结果才可能在一定精度意义下相符. 例如，一个 $a = 7000$ km 的低圆轨道若在轨道机动过程中，半长径调高 70 km，即 $r_2 = 1.01 r_1$，则上述括号{　}内的差别只有 1.6×10^{-5}. 不难看出，上一段给出的结果(8.6)式，不仅有定性的意义，而且在轨道调整中亦有定量应用的价值.

上述霍曼过渡的第二次变轨是在切点 2 处点火脉冲，取得相应的速度增量 Δv_2，使其变为半径为 r_2 的目标圆轨道. 根据切点 2 处变轨前后的速度差给出

$$\begin{aligned}\Delta v_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\mu}\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_1}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\left[1 - \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2}\right)^{1/2}\right].\end{aligned} \tag{8.13}$$

根据同样的原理，若要从高轨向低轨过渡，则需两次减速，是上述过程的逆向转移. 这种霍曼转移轨道虽然节能，但飞行时间和飞行路线较长，因此过渡的最佳选择应根据具体问题作综合考虑.

如果初始轨道和目标轨道均为椭圆，则还涉及到拱线(ω)的改变问题. 如果两轨道不共面，则还需考虑轨道面(i, Ω)的改变问题，但脉冲(包括推

力的大小和方向)的基本依据仍然是上一段的结果(8.3)和(8.4),这里不再一一具体阐明.

§8.2 小推力持续式变轨

近年来随着小推力发动机制造技术的成熟,越来越多的航天任务特别是深空探测任务采用不同于大推力脉冲式的小推力持续式变轨,2003 年 9 月欧空局发射的月球探测器 SMART-1 就是一个成功的例子. 脉冲式的大推力可使航天器在较短时间内获得较高的速度(加速度大),但所需要的推进剂多,从而减少了有效载荷. 小推力推进器则克服了上述缺点,推进器排气速度大,推力小(加速度小),可长时间连续工作几十天甚至几年. 航天器的加速过程虽然缓慢,但发动装置小,并可将更多的有效载荷送入轨道,而且通过长期的连续加速,航天器仍然可以获得很高的速度. 经过足够长的时间,可以获得比脉冲式变轨更高的速度. 这些特点都更加适合目前深空探测的需要. 对于行星际飞行(尤其是木星以远),相比脉冲式的轨道过渡可以大大缩短飞行时间.

小推力持续式变轨过程可以看成是一个连续过程,即使小推力的过程也有间隙,但只要是均匀喷气,仍可处理成一个平均化的连续过程,而且可以将小推力看成一种机动力的摄动作用,具体摄动量级将视不同的变轨过程和小推力的大小而定. 相应的分析解可以提供小推力变轨过程中航天器轨道变化的一些规律. 尽管这种小推力摄动分析解仅在持续时间不长的情况下是适用的,而对于星际飞行这样的长时间过程和具体的力学背景(已不是简单的受摄二体问题),分析解并不完全适用,但对于持续时间不太长的卫星轨道机动过程,了解其轨道变化规律,还是有必要给出相应的分析解. 至于长时间的小推力轨道过渡的有关问题,将视具体的动力学模型而采用相应的分析.

考虑均匀加速过程,并分两种情况给出均匀喷气过程中轨道的变化规律:一是径向、横向和轨道面法向均有加速过程,另一种是仅在卫星运动方向上有加速过程. 前者有

$$S = \text{const}, \quad T = \text{const}, \quad W = \text{const} \tag{8.14}$$

而后者只有 U 分量(即切向分量),且

$$U = \text{const}, \tag{8.15}$$

两种形式的受摄运动方程即第三章给出的(3.73)和(3.74)式. (S, T, W)型的形式如下:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[Se\sin f + T(1+e\cos f)], \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}[S\sin f + T(\cos f + \cos E)], \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\dfrac{1}{\sin i}W, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right], \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \dfrac{1-e^2}{nae}\left[-S\left(\cos f - 2e\dfrac{r}{p}\right) + T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right].
\end{cases}
\tag{8.16}
$$

(U,N,W)型的形式为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}U, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2(\cos f+e)U - \sqrt{1-e^2}\sin EN], \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\dfrac{1}{\sin i}W, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{dt} + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\times \\
\qquad [2\sin fU + (\cos E+e)N], \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \dfrac{1-e^2}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[\left(2\sin f + \dfrac{2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)U + \right. \\
\qquad \left.(\cos E - e)N\right].
\end{cases}
\tag{8.17}
$$

1. 喷气加速度(S,T,W)三分量导致的卫星轨道变化

当 S,T,W 三分量均为常数时，上述方程(8.16)的右函数 $f(\sigma,t;\varepsilon)$用求平均值的方法即可将其分解成 f_C，f_L 和 f_S 三个部分，显然，i 和 Ω 的右函数无长期部分，即

$$(f_i)_C = 0, \quad (f_\Omega)_C = 0.$$

因此，这种轨道机动过程中，轨道平面无长期变化.

由于相应的$(f_i)_L$，$(f_\Omega)_L$，$(f_\omega)_L$ 不为 0，有积分降阶问题(除非小推力摄动比中心天体扁率摄动小得多)，不能采用平均根数法，只能采用拟平均根数法，即解的构造形式应为

$$\sigma(t)=\bar{\sigma}+\sigma_S(t),\tag{8.18}$$

$$\begin{cases}\bar{\sigma}(t)=\bar{\sigma}_0+(\delta\bar{n}+\sigma_C)(t-t_0)+\Delta\sigma_L(t),\\ \Delta\sigma_L(t)=\sigma_L(t)-\sigma_L(t_0),\end{cases}\tag{8.19}$$

$$\bar{\sigma}_0=\sigma(t_0)-[\sigma_S(t_0)],\tag{8.20}$$

(8.19)式中的 $\delta\bar{n}$ 在第 4 章中已有说明，即对应平近点角 M 的 0 阶长期项.

长期项 $\sigma_C(t-t_0)$的变率 σ_C 的表达式如下：

$$a_C=2\sqrt{1-e^2}(T/n),\tag{8.21}$$

$$e_C=-\frac{3\sqrt{1-e^2}}{2a}e(T/n),\tag{8.22}$$

$$i_C=0,\tag{8.23}$$

$$\Omega_C=0,\tag{8.24}$$

$$\omega_C=\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}(S/n),\tag{8.25}$$

$$M_C=-\left(\frac{3}{a}\right)(S/n)-\frac{3n}{4a}a_C(t-t_0).\tag{8.26}$$

右端出现的根数 a,e,i 及 n 均为 $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$ 和 $\bar{n}_0=\sqrt{\mu}\,\bar{a}_0^{(-3/2)}$.

长周期变化项 $\Delta\sigma_L(t)$的表达式为

$$\Delta a_L(t)=0,\tag{8.27}$$

$$\Delta e_L(t)=0,\tag{8.28}$$

$$\Delta i_L(t)=-\frac{3}{2a\sqrt{1-e^2}}e\cos\bar{\omega}_0(W/n)(t-t_0),\tag{8.29}$$

$$\Delta\Omega_L(t)=-\frac{3}{2a\sqrt{1-e^2}\sin i}e\sin\bar{\omega}_0(W/n)(t-t_0),\tag{8.30}$$

$$\Delta\omega_L(t)=-\cos i\Delta\Omega_L(t),\tag{8.31}$$

$$\Delta M_L(t)=0.\tag{8.32}$$

各式右端出现的根数 a,e,i 和 n，其定义同前.

短周期项 $\sigma_S(t)$如下：

$$a_S=\frac{2}{n^2}\left[-S_e\left(\cos E+\frac{e}{2}\right)+T\sqrt{1-e^2}e\sin E\right],\tag{8.33}$$

$$e_S = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 a}\left\{-S\sqrt{1-e^2}\left(\cos E+\frac{e}{2}\right)+\right.$$

$$\left.T\left[\left(2-\frac{3}{2}e^2\right)\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E\right]\right\},\tag{8.34}$$

$$i_S = \frac{W}{n^2 a\sqrt{1-e^2}}\left\{\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E\right]\cos\omega+\right.$$

$$\left.\sqrt{1-e^2}\left[\cos E-\frac{e}{4}\cos 2E\right]\sin\omega\right\},\tag{8.35}$$

$$\Omega_S = \frac{W}{n^2 a\sqrt{1-e^2}\sin i}\left\{\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E\right]\sin\omega-\right.$$

$$\left.\sqrt{1-e^2}\left[\cos E-\frac{e}{4}\cos 2E\right]\cos\omega\right\},\tag{8.36}$$

$$\omega_S(t) = -\cos i\,\Omega_S(t)-\frac{1}{n^2 ae}\{S(1-e^2)^{3/2}\sin E+$$

$$T[(2-e^2)\cos E-\frac{e}{4}\cos 2E]\},\tag{8.37}$$

$$M_S(t) = \frac{1}{n^2 ae}\left\{S\left[\left(1+3e^2-\frac{3}{2}e^4\right)\sin E-\frac{5}{4}e^3\sin 2E\right]+\right.$$

$$\left.T\sqrt{1-e^2}\left[2(1+e^2)\cos E-\frac{e}{4}(1+3e^2)\cos 2E\right]\right\}.\tag{8.38}$$

各式右端出现的根数 σ 均为拟平均根数 $\bar{\sigma}$，E 是偏近点角.

2. 喷气加速度 U 分量导致的卫星轨道变化

对于这一加速分量，$\dot{\sigma}$ 的右函数中出现 $(1+2e\cos f+e^2)^{\pm 1/2}$ 的因子，求解时就会涉及相应的级数展开问题，无法构造对 e 封闭形式的摄动解，既然如此，就将右函数展成平近点角 M 的三角级数，取到 e^2 项的结果如下：

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{n}U\left[\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)+e\cos M+\frac{3}{4}e^2\cos 2M\right],\tag{8.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{na}U\left[-\frac{1}{2}e+(1-e^2)\cos M+\frac{e}{2}\cos 2M+\frac{e^2}{2}\cos 3M\right],\tag{8.40}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0,\tag{8.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = 0,\tag{8.42}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{nae}U\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin M+\frac{e}{2}\sin 2M+\frac{e^2}{2}\sin 3M\right],\tag{8.43}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n-\frac{2}{nae}U\left[\sin M+\frac{e}{2}\sin 2M+\frac{e^2}{2}\sin 3M\right]. \tag{8.44}$$

不难看出，与 S,T 分量的影响有所不同，相应摄动运动方程 $\dot{\sigma}=f(\sigma,t;\varepsilon)$ 的右函数对六个根数都只包含 f_C 和 f_S 两部分，$f_L=0$. 可用完整的平均根数法构造摄动分析解的长期项和短周期项.

长期项 $\sigma_C(t-t_0)$ 的变率为

$$a_C=2\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)(U/n), \tag{8.45}$$

$$e_C=-\frac{e}{a}(U/n), \tag{8.46}$$

$$i_C=0, \tag{8.47}$$

$$\Omega_C=0, \tag{8.48}$$

$$\omega_C=0, \tag{8.49}$$

$$M_C=-\frac{3}{2a}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)U(t-t_0). \tag{8.50}$$

短周期项 $\sigma_S(t)$ 为

$$a_S(t)=\frac{2}{n^2}\left[e\sin M+\frac{3}{8}e^2\sin 2M\right]U, \tag{8.51}$$

$$e_S(t)=\frac{2}{n^2a}\left[(1-e^2)\sin M+\frac{e}{4}\sin 2M+\frac{e^2}{6}\sin 3M\right]U, \tag{8.52}$$

$$i_S(t)=0, \tag{8.53}$$

$$\Omega_S(t)=0, \tag{8.54}$$

$$\omega_S(t)=-\frac{2}{n^2ae}\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\cos M+\frac{e}{4}\cos 2M+\frac{e^2}{6}\cos 3M\right]U, \tag{8.55}$$

$$\begin{aligned}M_S(t)=&\frac{2}{n^2ae}\left[\cos M+\frac{e}{4}\cos 2M+\frac{e^2}{6}\cos 3M\right]U+\\&\left(\frac{3}{2a}\right)\frac{2}{n^2}\left[e\cos M+\frac{3}{16}e^2\cos 2M\right]U.\end{aligned} \tag{8.56}$$

上述各式右端出现的 a,e 及 n 均为平均根数 $\bar{a}_0,\bar{e}_0$ 和 $\bar{n}_0=\sqrt{\mu}\,\bar{a}^{\left(-\frac{3}{2}\right)}$.

这里必须说明一点，对于大偏心率情况(如接近或超过 Laplace 极限值 0.6627)，上述展成 M 的三角级数的方法不再适用，但正如本节开始所提到的，这里主要针对持续时间不太长的卫星轨道机动中的小推力变轨过程，或变轨量不大的轨道过渡问题，所涉及到的初始轨道和目标轨道的偏心率都不大. 而对于深空探测中涉及大偏心率的轨道过渡的全过程，已不是受摄二体问题，当然不会再采用上述处理方法. 不过，即使偏心率较大，不宜采用展

成 M 的三角级数的方法，可改为直接对 f 或 E 的积分方法，只是将方程(8.17)中的$(1+2e\cos f+e^2)^{\pm 1/2}$等项按二项式展开即可，同样可构造摄动分析解. 保留到 $O(e^2)$ 的长期项变率和短周期项公式如下：

$$a_C = \frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)U, \tag{8.57}$$

$$e_C = -\frac{1}{na}eU, \tag{8.58}$$

$$M_C = -\frac{3}{2a}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)U(t-t_0), \tag{8.59}$$

$$a_S = \frac{2}{n}(e\sin E)U, \tag{8.60}$$

$$e_S = -\frac{1}{n^2 a}\left(2\sin E+\frac{e}{2}\sin 2E\right)U, \tag{8.61}$$

$$\lambda_C = \frac{4}{n^2 a}(e\cos E)U, \tag{8.62}$$

这里 $\lambda=M+\omega$. 从结果可看出，保留到 $O(e^2)$ 项，解的具体形式与前面的结果仍旧是类似的.

由上述分析解，可以了解小推力变轨的一些重要特征，对于不同的变轨要求，可采用相应的变轨方式(即 S,T,W 或 U,N,W 的选择)和变轨时机(即轨道状态，它由轨道根数来反映).

§ 8.3　轨道过渡中的光压加速机制

除短时间过程的小推力轨道机动技术外，长时间的小推力轨道过渡技术也已实现，而无论是大推力过渡还是小推力过渡，还可以借助其他力因素加速，其中光压就是一个很好的力源. 关于光压作用，对于太阳系自然天体的运动几乎无影响，但对于航天器的运动而言就完全不同了，其原因之一是光压作用的性质不同于引力，它与承受客体的有效面质比有关，这在前面第 5 章 § 5.3 中讨论人造地球卫星的运动时有过介绍，对于一个典型大小的卫星而言，其面质比是地球面质比的 10^8 倍，光压作用大，但这一原因远不足以说明问题，因光压是一个有心斥力，通常是不会对卫星型或行星型的探测器运动起到加速或减速作用的，之所以对卫星运动有显著影响还有另一个重要原因，即地影间断，这将导致光压作用区别于一般的中心力(如引力)作用，它会使卫星轨道半长径和偏心率出现周期长、变幅大的长周期变化，在一定的长时间间隔内，卫星会得到加速作用. 尽管深空探测器在向目标轨道

过渡中不会遇到地影作用，但可利用航天器太阳能帆板的特殊定向，使其在过渡轨道上得到光压力的加速，这就可以使光压力作为轨道过渡（特别是小推力过渡）中的一种辅助能源．如果帆的面积足够大，甚至可以使航天器像一个太空帆，在无其他动力的情况下向目标轨道过渡，这就是一种光压加速机制．

1．动力模型与加速机制

以月球探测器的发射为例，在地—月—探测器限制性三体问题基础上进一步考虑太阳引力和太阳光压的摄动影响，即处理成一个受摄的限制性三体问题．可不必拘泥于限制性三体问题的坐标系取法[1]，采用地心坐标系 $O\text{-}xyz$ 较为方便，基本平面（xy 坐标面）就取月球绕地球运动的轨道面，在此假定日、月运动可采用平均轨道（甚至不变椭圆）来体现，这不影响实质问题，于是相应的作为小天体的月球探测器相对地球的运动方程可写成下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon, \tag{8.63}$$

$$\boldsymbol{F}_0 = -GM\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{8.64}$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3. \tag{8.65}$$

即形式上写成受摄二体问题，F_0 是地球的中心引力加速度，F_ε 是月球引力、太阳引力和太阳光压摄动加速度．当探测器飞近月球时，其运动性质会发生变化，但这并不影响上述动力模型数学表达的正确性．摄动加速度的具体形式如下：

$$\boldsymbol{F}_1 = -GM_1\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_1}{\Delta_1^3} + \frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}\right), \tag{8.66}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -GM_2\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_2}{\Delta_2^3} + \frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right). \tag{8.67}$$

上述各式中的 M, M_1 和 M_2 分别为地球、月球和太阳的质量，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 各为探测器、月球和太阳的地心位置矢量，相应地有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}_1 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2 \end{cases}. \tag{8.68}$$

关于光压摄动加速度 F_3，其具体表达形式与探测器（包括探测器的帆板）的姿态有关，这里不作细节性的讨论，而是以一有效面质比 S/m 代替，m 是探测器的质量，S 是相应的有效截面积（主要取决于较大帆板本身的面积）．如果该有效截面对应的法线指向太阳方向，则有

第 9 章　月球卫星运动的轨道力学

要达到对太阳系中各种天体探测的目的，必然要近距离接近目标天体，更有效的手段是在探测器接近目标天体后，再次机动变轨使其转化为环绕目标天体的轨道器，此即目标天体的人造卫星. 尽管这种卫星的运动与人造地球卫星的运动属于同一类，其动力学模型都是对应一个受摄二体问题，但由于各目标天体之间的各种差异，不能完全照搬研究人造地球卫星运动的方法和结果. 深空探测的首选目标——月球，就是另一种典型，它是太阳系中的一个慢自转天体（自转周期与绕地球运行的公转周期相同），其引力位与地球引力位有明显差异，而中心天体非球形引力又是绕其运行的卫星轨道变化的主要摄动源，因此，本书选择月球卫星的运动作为深空探测器轨道力学的一个重要内容很有必要，它可以使读者对卫星型探测器的运动及其轨道变化特征有更广泛的了解.

§9.1　月球非球形引力位的主要特征

在第 4 章 §4.2 中已对太阳系天体非球形引力位作过介绍，其一般表达式即(4.63)式：

$$V=\frac{GM}{R}\left[1+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{R}\right)^l P_{lm}(\mu)(C_{lm}\cos m\lambda_G+S_{lm}\sin m\lambda_G)\right],\quad(9.1)$$

在这里，(9.1)式中的 GM 是月心引力常数，a_e 是月球参考椭球体赤道半径，R，λ_G，φ 是月固坐标系中的球坐标分量，即月心距、经度和纬度. 同样非归一化的缔合勒让德球函数 $P_{lm}(\sin\varphi)$ 和相应的谐系数 C_{lm}，S_{lm} 与归一化的 $\overline{P}_{lm}(\sin\varphi)$ 和 $\overline{C}_{lm}$，$\overline{S}_{lm}$ 有如下关系

$$\begin{cases}\overline{P}_{lm}(\mu)=P_{lm}(\mu)/N_{lm},\\ \overline{C}_{lm}=C_{lm}N_{lm},\overline{S}_{lm}=S_{lm}N_{lm},\end{cases}\quad(9.2)$$

$$
\begin{cases}
N_{lm}=\left[\dfrac{1}{(1+\delta)}\dfrac{(l+m)\,!}{(2l+1)(l-m)\,!}\right]^{1/2}, \\
\delta=\begin{cases}0, & m=0, \\ 1, & m\neq 0.\end{cases}
\end{cases}
\tag{9.3}
$$

为了进一步了解月球引力位的特征,本书附录三中列出了地球和月球引力场模型的部分球谐项系数,其中美国 JPL 的 LP75G 和 LP165 两种模型是目前公认较好的月球引力场模型. 尽管对月球的探测还仍未达到对地球探测的程度,由于各种原因,月球引力场模型的精度还不够理想,但还是可从这两种引力场模型得到一些重要的信息. 从引力场模型球谐系数值可以看出,除月球由于自转较慢,动力学扁率 $J_2=-C_{2,0}$ 较小(10^{-4})外,对轨道偏心率影响较大的奇次带谐项系数$\overline{C}_{2l-1,0}(l\geqslant 2)$与$\overline{C}_{2,0}$之比$|\overline{C}_{2l-1,0}/\overline{C}_{2,0}|$的量级接近($10^{-1}$),而地球引力场相应系数之比的量级只有 10^{-3},这将导致环月运行探测器的轨道(特别是偏心率 e)出现振幅较大的长周期变化,从而导致一些人造地球卫星不会出现的现象.

月球自转慢,除动力学扁率系数 $C_{2,0}$ 的值与其他球谐系数的值不像地球中相差那么大(几乎是 10^3 倍)以外,还将使非球形引力位中田谐项对月球卫星轨道的影响也明显地不同于地球对其卫星轨道的影响. 所有这些,都将在后面 §9.4 和 §9.5 中进行详尽的介绍.

§9.2 月球物理天平动简介与参考系问题

月球天平动可以分为两类,即视天平动和物理天平动. 视天平动是由于运动的原因而使地球上的观测者看到的不仅是月球对着地球的“半面”,而是超过“半面”,这仅是视觉效果而没有力学效应;而物理天平动是月球也象陀螺一样在空间呈现真实的摆动(即赤道面的摆动),它导致了月球引力场在空间的变化,从而影响月球卫星的轨道运动.

1. 物理天平动的两种表达形式

根据月球自转理论,给出了天平动三个参数(σ,ρ,τ)的分析表达式[1~5],但类似于地球章动理论给出的章动序列,(σ,ρ,τ)的分析表达式亦包含几百项. 因此,对月球物理天平动的分析解和数值解均有必要作一介绍. 但在某些问题中,可以采用简化的分析表达式. 关于物理天平动的分析解有多种形式,也在不断的改进. 作为一例,下面列出 Hayn 结果中(σ,ρ,τ)的主要项(前三项)[2]:

$$
\begin{cases}
\tau = 0^\circ.0163888\sin l_s - 0^\circ.003333\sin l_m + 0^\circ.005\sin 2\omega_m, \\
\rho = -0^\circ.0297222\cos l_m + 0^\circ.0102777\cos(l_m + 2\omega_m) - \\
\qquad 0^\circ.0030556\cos(2l_m + 2\omega_m), \\
\sin I\sigma \approx I\sigma = -0^\circ.0302777\sin l_m + 0^\circ.0102777\sin(l_m + 2\omega_m) - \\
\qquad\qquad 0^\circ.0030556\sin(2l_m + 2\omega_m).
\end{cases}
\tag{9.4}
$$

该式中 l_s 和 l_m 分别为太阳和月球的平近点角，ω_m 是月球近地点幅角．至于三个天平动参数（σ,ρ,τ）的几何意义，将在下面介绍参考系时具体表明．

物理天平动的另一种表达为数值形式，JPL 的 DE405 数值列表中就直接给出了表达天平动的三个欧拉角（Ω', i_s, Λ）每天的具体数值．这三个欧拉角与分析表达形式中的三个参数有不同的几何意义，它们将在建立不同的赤道坐标系中分别有相应的应用．

2．月心赤道坐标系和月固坐标系

与研究人造地球卫星的运动类似，由于有物理天平动现象，研究月球卫星的运动，同样也涉及到历元（取 J2000.0）月心平赤道坐标系和真赤道坐标系以及月固坐标系．

对于月球平赤道，根据 Cassini 定律，月球轨道，黄道与月球平赤道交于一点 N，见图 9.1．有

$$
\begin{cases}
\psi = \Omega_m, \\
I = I_m, \\
\varphi = \theta_m + \pi = L_m - \Omega_m + \pi,
\end{cases}
\tag{9.5}
$$

其中 Ω_m, I_m, L_m 表示月球轨道的平根数，分别为月球轨道升交点平黄经，平倾角和月球平黄经．

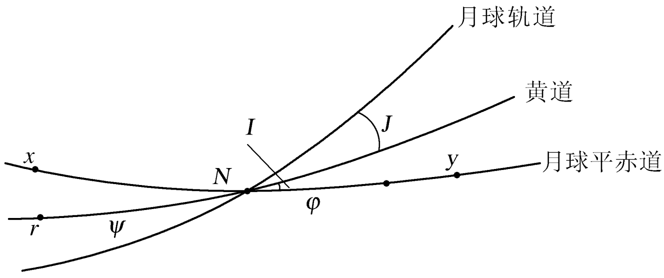

图 9.1　月球轨道、黄道与月球平赤道之间的几何关系

对于月球真赤道，它与平赤道的关系见图 9.2，有

$$\begin{cases} \psi' = \Omega_m + \sigma, \\ I' = I_m + \rho, \\ \varphi' = \theta_m + \pi + (\tau - \sigma), \end{cases} \tag{9.6}$$

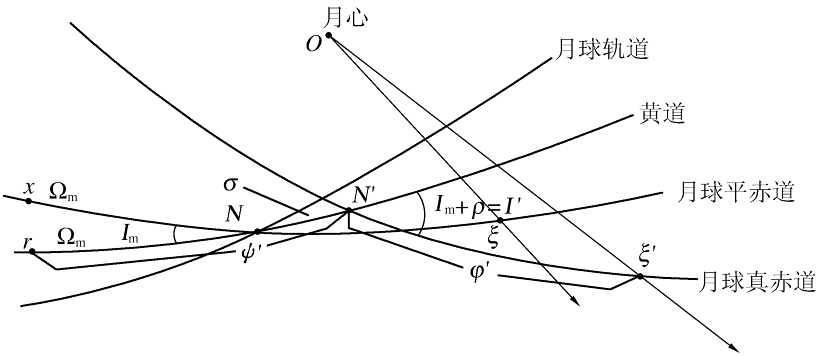

图 9.2　月球真赤道与月球平赤道之间的关系

这里以三个天平动参数(σ,ρ,τ)表明了平赤道与真赤道之间的几何关系. 图 9.2 中,通过真赤道也描述了月固坐标系,$O\xi'$方向即过月面上 Sinus Medii 的子午线的方向(亦即月球指向地球的那一惯性主轴方向).

DE405 数值历表中直接给出的另三个欧拉角(Ω', i_s, Λ)表明了月心地球平赤道坐标系与月固坐标系之间的关系,见图 9.3.

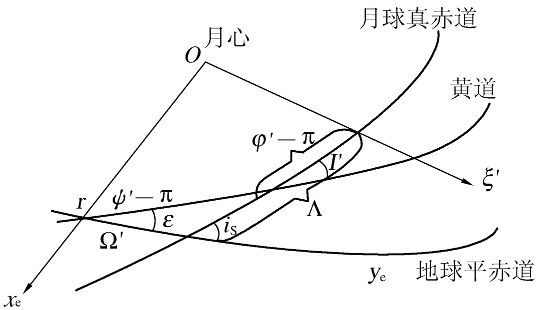

图 9.3　月心地球平赤道坐标系与月固坐标系的关系

图中 $O-x_e y_e z_e$ 即月心地球平赤道坐标系,ξ'是月固坐标系的 X 轴指向,三个欧拉角(Ω', i_s, Λ)在图中已表明清楚,不必再加注明,ε 是黄赤交角.

两种物理天平动参数的表达形式(σ,ρ,τ)和(Ω', i_s, Λ),分别用两种方式描述了月球真赤道面的摆动,同时也分别定义了不同的月心坐标系,即月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$,月心地球平赤道坐标系 $O-x_e y_e z_e$(以下称月心天球坐标系)和月心月球平赤道坐标系 $O-xyz$(以下称月心赤道坐标系). 它们之

间的转换关系在研究月球卫星的运动和表达月球卫星在月面上的星下点位置时必然要涉及到.

若记月心天球坐标系 $O-x_e y_e z_e$ 中的卫星位置矢量为 r_e，它与月固坐标系中卫星相应的位置矢量 R 之间的关系如下：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{r}_e=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{r}_e, \tag{9.7}$$

这里两个转换矩阵 M_1 和 M_2 各由上述两种物理天平动参数的表达形式给出. 根据图 9.3 表明的几何关系不难给出转换矩阵 M_1 和 M_2 的表达式如下：

$$\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{R}_z(\Lambda)\boldsymbol{R}_x(i_s)\boldsymbol{R}_z(\Omega'), \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2&=\boldsymbol{R}_z(\varphi'-\pi)\boldsymbol{R}_x(I')\boldsymbol{R}_z(\psi'-\pi)\boldsymbol{R}_x(\varepsilon)\\&=\boldsymbol{R}_z(\psi')\boldsymbol{R}_x(-I')\boldsymbol{R}_z(\psi')\boldsymbol{R}_x(\varepsilon).\end{aligned} \tag{9.9}$$

(9.9)式第一行是按图 9.3 给出的，而第二行是按图 9.2 给出的，两者实为同一转换关系. 上述两种转换关系之间的差别取决于(σ,ρ,τ)的取项多少，若取前面(9.4)式给出一例的前三项，分别计算 2003 年 11 月 1 日 0 时和 2004 年 6 月 15 日 0 时月球表面“上空”一点的空间坐标转换到月固坐标系中的位置，两种转换结果之差为公里级，相应的转换矩阵元素的最大差别达到 7.6×10^{-4}. 如果采用 Eckhardt 等人结果中(σ,ρ,τ)的前四项[3~5]（量级与 Hayn 结果中的前三项相当），亦同样有上述差别.

根据上述比较可知，直接采用物理天平动分析解的简化表达式，在某些问题中是不能满足精度要求的. 但同时告诉我们，仅取 σ,ρ,τ 主项的简化表达式与 DE405 数值历表的差别小于 10^{-3}，这种差别在考虑物理天平动对月球卫星轨道的影响时，在一定精度要求的前提下，则无妨. 定轨或预报中涉及轨道外推弧段为 10^2 时（对低轨卫星为 1～2 天的间隔），要保证 10 米级甚至米级精度是可以达到的.

鉴于上述比较的结果，加上要建立月球卫星轨道理论，了解轨道变化的规律，或直接反映月球卫星相对月心坐标系的几何状况，又必须采用月心赤道坐标系，而不是月心地球赤道坐标系，那么就要由(σ,ρ,τ)来建立月心赤道坐标系 $O-xyz$（对应所选取的历元，如目前惯用的 J2000.0）与月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$ 之间的关系. 而若要通过历元月心赤道坐标系 $O-xyz$ 与月心天球坐标系 $O-x_e y_e z_e$ 之间的转换关系（即利用高精度的 Ω', i_s, Λ 值）来计算月球卫星在月固坐标系中的精确位置 R 也很简单，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{r}_e, \quad \boldsymbol{r}_e=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r},\\ \boldsymbol{N}=\boldsymbol{R}_z(-\Omega_m)\boldsymbol{R}_x(-I_m)\boldsymbol{R}_z(\Omega_m)\boldsymbol{R}_x(\varepsilon),\end{cases} \tag{9.10}$$

$\boldsymbol{r}$ 是通过定轨或预报给出的月心赤道坐标系中的月球卫星位置矢量. 这里

变换矩阵(N)并不涉及到物理天平动的表达形式,转换的精度只取决于月球卫星定轨或预报的精度.

§9.3 月球卫星运动的受力分析

研究月球卫星(特别是低轨卫星)的空间运动与研究人造地球卫星的运动一样,显然采用历元(J2000.0)月心赤道坐标系 $O-xyz$ 为宜,考虑月球非球形引力摄动时,将涉及到月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$.这两种坐标系之间的几何关系在前面的图 9.2 中已清楚地表明.若记两种坐标系中卫星位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$,则有

$$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{A})\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{R}=(\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}. \tag{9.11}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为两种坐标系之间的转换矩阵,不难给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{R}_z(-\Omega_{\mathrm{m}})\boldsymbol{R}_x(-I_{\mathrm{m}})\boldsymbol{R}_z(-\sigma)\boldsymbol{R}_x(I')\boldsymbol{R}_z(-\varphi') \\ &=\boldsymbol{R}_z(-\Omega_{\mathrm{m}})\boldsymbol{R}_x(-I_{\mathrm{m}})\boldsymbol{R}_z(-\sigma)\boldsymbol{R}_x(I_{\mathrm{m}}+\rho)\boldsymbol{R}_z(-(\varphi+\tau-\sigma)),\end{aligned} \tag{9.12}$$

$$\varphi=L_{\mathrm{m}}-\Omega_{\mathrm{m}}+\pi, \tag{9.13}$$

$$I_{\mathrm{m}}=1^\circ 32'32''.7. \tag{9.14}$$

L_{m} 和 Ω 的含义前面已有说明.

在历元月心赤道坐标系 $O-xyz$ 中,月球卫星的运动方程如下:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon), \tag{9.15}$$

其中 $\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 分别为月球中心引力加速度(对应无摄运动)和各种摄动加速度,有

$$\boldsymbol{F}_0=-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{9.16}$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon). \tag{9.17}$$

为了便于问题的分析和计算上的某种需要,同样采用类似研究人造地球卫星运动时所采用的标准计算单位,即长度、质量和时间单位分别为

$$\begin{cases}[L]=a_{\mathrm{e}}=1738.0\ \mathrm{km}, \\ [M]=M,\qquad M\ \text{是月球质量,对应月心引力常数}\ \mu=GM, \\ [T]=(a_{\mathrm{e}}^3/GM)^{1/2}\approx 17^{\mathrm{m}}.2465\cdots,\end{cases} \tag{9.18}$$

在此标准单位系统中,$\mu=GM=1$,$G=1$,$[L]$,$[M]$和$[T]$的准确值取决于所采用的月球引力场模型.

在上述坐标系和标准单位系统中,各种物理量归结为无量纲形式.在历元月心赤道坐标系中,相应的 $\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon)$涉及下列 10 种摄动源:

月球非球形引力摄动(C_{lm}, S_{lm})　　$\boldsymbol{F}_1(J_l, J_{lm})$，

地球引力摄动(m'_1)　$\boldsymbol{F}_2(m'_1)$，

太阳引力摄动(m'_2)　$\boldsymbol{F}_3(m'_2)$，

月球固体潮摄动$(\kappa_2 J_2)$　$\boldsymbol{F}_4(\kappa_2 J_2)$，

月球物理天平动(σ, ρ, τ)　$\boldsymbol{F}_5(\sigma, \rho, \tau)$，

太阳光压摄动 $\boldsymbol{F}_6(\rho_s)$，

月球扁率间接摄动 $\boldsymbol{F}_7(m'_1 J_2)$，

地球扁率摄动 $\boldsymbol{F}_8(J'_2 m'_1)$，

大行星(金星，木星)引力摄动 $\boldsymbol{F}_9(m'_3)$，

月球引力后牛顿效应 $\boldsymbol{F}_{10}(v^2/c^2)$.

对于低轨月球卫星$(\bar{h}=100\sim300\ \mathrm{km})$，上述各摄动源对应的摄动量级 $\varepsilon_j(j=1, \cdots, 10)$分别为

$\varepsilon_1(J_2)=O(10^{-4})$，$\varepsilon_1(J_{2,2})=O(10^{-5})$，$\varepsilon_1(C_{lm}, S_{lm}, l\geqslant3)=O(10^{-6}-10^{-5})$，

$\varepsilon_2=O(10^{-5})$，

$\varepsilon_3=O(10^{-7})$，

$\varepsilon_4=O(10^{-7})$，

$\varepsilon_5=O(10^{-7})$，

$\varepsilon_6=O(10^{-9})$，对应一般面质比$(S/M)=10^8$ 的卫星，

$\varepsilon_7=O(10^{-11})$，

$\varepsilon_8=O(10^{-12})$，

$\varepsilon_9=O(10^{-12})$，

$\varepsilon_{10}=O(10^{-11})$.

根据以上对各项摄动源的量级分析可知，一般情况下只需考虑前面 5 种摄动源，即月球非球形引力摄动，地球和太阳引力摄动，月球固体潮摄动和月球物理天平动的影响. 而最主要的是月球非球形引力摄动和地球引力摄动.

§9.4　月球卫星轨道变化的主要特征

研究月球卫星轨道的变化规律是月球卫星轨道力学的核心内容，而只有构造月球卫星轨道变化的分析解才能给出其变化规律. 但由于月球卫星的受力状况(尤其是月球非球形引力位的影响)不同于地球卫星，故必须针对月球卫星的受力特点构造相应的摄动分析解. 文[6～9]先后给

出相应的分析解，但正由于月球卫星的受力状况不同于地球卫星，文[6～8]给出的是半分析解，而文[9]也只能采用拟平均根数法[10,11]给出相应的分析解.

由于月球非球形引力位中的动力学扁率项(J_2)与其他球谐项(C_{lm}, S_{lm})以及地球引力摄动项相差不大，将导致长周期项中出现降阶问题，这种小分母的出现，不能采用完整的平均根数法按 $\varepsilon=O(J_2)$ 来构造相应的小参数幂级数解，而只能采用人为的小参数 $\varepsilon=10^{-2}$，按拟平均根数法来构造相应的幂级数解，这正是文[9]所做的工作.

真正导致月球卫星轨道变化(包括解的表达式)不同于地球卫星的主要摄动源是月球非球形引力摄动以及与其有差别的月球物理天平动引起的坐标系附加摄动. 本节将针对这一人们关心的焦点，给出月球卫星轨道的相应变化特征，为有关研究工作和环月探测器的轨道设计等提供必要的轨道信息.

1. 月球非球形引力摄动解

根据上一节对月球卫星运动受力分析可知，在小参数 ε 确定为 10^{-2} 的前提下，若以 σ 表示六个 Kepler 根数(a,e,i,Ω,ω,M)，运动方程可以写成下列形式：

$$\begin{cases}\dot{\sigma}=f_0(a)+f_2(J_2)+f_3(C_{lm},S_{lm}),\\ f_2=f_{2\mathrm{C}}+f_{2\mathrm{L}},\\ f_3=f_{3\mathrm{C}}+f_{3\mathrm{L}}+f_{3\mathrm{S}},\end{cases}\tag{9.19}$$

右函数 f_2 和 f_3 由(9.1)式给出的非球形引力位部分 $\Delta V=V-\left(\dfrac{GM}{R}\right)$构成，其中 $J_2=-C_{2,0}$，物理天平动引起的坐标系附加摄动后面另行讨论.

非球形引力摄动对应的小参数幂级数解有如下形式：

$$\begin{cases}\sigma(t)=\bar{\sigma}(t_0)+(\delta\bar{n}_0+\sigma_{2\mathrm{C}}+\sigma_{3\mathrm{C}})(t-t_0)+\Delta\sigma_{\mathrm{L}}{}^{(1)}(t)+\sigma_{\mathrm{S}}{}^{(2)}(t),\\ \Delta\sigma_{\mathrm{L}}{}^{(1)}(t)=\sigma_{\mathrm{L}}{}^{(1)}(t)-\sigma_{\mathrm{L}}{}^{(1)}(t_0),\\ \bar{\sigma}(t_0)=\sigma_0-\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t_0),\end{cases}\tag{9.20}$$

其中 $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$是由除 J_2 项外所有非球形引力位的球谐项(C_{lm}, S_{lm})摄动导致的长周期变化项，对应方程(9.19)右函数中的 $f_{3\mathrm{L}}(C_{lm},S_{lm})$部分，积分降阶后给出. 这里只给到三阶长期项及与其相当的一阶长周期变化项和二阶短周期项，而对于沿迹量平近点角应同时给出 a 的三阶短周期项$a_{\mathrm{S}}^{(3)}(t)$. 所有这些项与摄动源的关系如下：

$$\begin{cases}\sigma_{2C}=\sigma_{2C}(J_2),\\ \sigma_{3C}=\sigma_{3C}(J_l,l(2)\geqslant 4).\end{cases} \tag{9.21}$$

$$\Delta\sigma_L^{(1)}(t)=\Delta\sigma_L(t;J_l,l\geqslant 3;C_{lm},S_{lm},l\geqslant 2), \tag{9.22}$$

$$\begin{cases}\sigma_S^{(2)}(t)=\sigma_S^{(2)}(t;J_2),\\ a_S^{(3)}(t)=a_S^{(3)}(t;J_l,l\geqslant 3;C_{lm},S_{lm,l},l\geqslant 2).\end{cases} \tag{9.23}$$

由于 $\sigma_{1C}=0$，**故计算** σ_{2C}，σ_{3C} **和** $\Delta\sigma_L^{(1)}$ **时，需要用到的**$\bar{\sigma}(t)$**均可用**$\bar{\sigma}_0=\bar{\sigma}(t_0)$，**于是各根数的具体表达形式如下：**

$$\begin{cases}a(t)=\bar{a}_0+a_S^{(2)}(t)+a_S^{(3)}(t)\\ e(t)=\bar{e}_0+\Delta e_L^{(1)}(t)+e_S^{(2)}(t)\\ i(t)=\bar{i}_0+\Delta i_L^{(1)}(t)+i_S^{(2)}(t)\\ \Omega(t)=\bar{\Omega}_0+(\Omega_{2C}+\Omega_{3C})(t-t_0)+\Delta\Omega_L^{(1)}(t)+\Omega_S^{(2)}(t)\\ \omega(t)=\bar{\omega}_0+(\omega_{2C}+\omega_{3C})(t-t_0)+\Delta\omega_L^{(1)}(t)+\omega_S^{(2)}(t)\\ M(t)=\bar{M}_0+(\bar{n}_0+M_{2C}+M_{3C})(t-t_0)+\Delta M_L^{(1)}(t)+M_S^{(2)}(t)\end{cases}. \tag{9.24}$$

其中 $\bar{n}_0=\bar{a}_0^{\ -3/2}$，**这里的** $\bar{a}_0=a_0-[a_S^{(2)}(t_0)+a_S^{(3)}(t_0)]$.

(1) 长期项系数 $\boldsymbol{\sigma}_C$

$$\Omega_{2C}=-\frac{3J_2}{2p^2}n\ \cos i, \tag{9.25}$$

$$\omega_{2C}=\frac{3J_2}{2p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right), \tag{9.26}$$

$$M_{2C}=\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\,n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right), \tag{9.27}$$

$$\Omega_{3C}=-n\cos i\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_2(i)K_1(e), \tag{9.28}$$

$$\omega_{3C}=-\cos i\Omega_{3C}-n\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_1(i)[(2l-1)K_1(e)+(1-e^2)K_2(e)], \tag{9.29}$$

$$\begin{aligned}M_{3C}=&-\sqrt{1-e^2}(\omega_{3c}+\cos i\Omega_{3C})-\\ &n\sqrt{1-e^2}\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_1(i)[2(l+1)K_1(e)].\end{aligned} \tag{9.30}$$

其中 $p_0=a(1-e^2)$，a,e,i **均取** $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$ **值**. $F_1(i),\cdots,K_1(e),\cdots$**的表达式如下：**

$$\begin{cases} F_1(i) = \sum_{q=0}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)} C_{lq}(\sin i)^{2q} \\ F_2(i) = \sum_{q=1}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)} C_{lq}\,2q(\sin i)^{2q-2} \\ C_{lq} = \binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q} = \dfrac{(l+2q)\,!}{(q\,!)^2\left(\frac{l}{2}-q\right)!\left(\frac{l}{2}+q\right)!} \end{cases} \tag{9.31}$$

$$\begin{cases} K_1(e) = \sum_{\alpha(2)=0}^{l-2} C_{l\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha} \\ K_2(e) = \sum_{\alpha(2)=2}^{l-2} C_{l\alpha}\,\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha-2} \\ C_{l\alpha} = \binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha/2} = \dfrac{(l-1)\,!}{(l-1-\alpha)\,!\left(\frac{\alpha}{2}\,!\right)^2} \end{cases} \tag{9.32}$$

上述各式中，求和时 $l(2)\geqslant 4$，$\alpha(2)\geqslant 2$ **表示按** $l=4,6,\cdots$，$\alpha=2,4\cdots$**取值.**

(2) 一阶长周期变化项 $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)-\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)$

对于月球非球形引力摄动，长周期项可严格积分给出，由于相应的周期较长，亦可按长期项处理，即下面给出的表达式(9.33)～(9.38). **若要给出** $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ **的形式，也很简单，只要将表达式**(9.34)～(9.38)**中的** $I(\omega)n(t-t_0)$，$\Phi_{lmp}n(t-t_0)$，$\cdots$**改为下述积分：**

$$\int^t I(w)n\mathrm{d}t,\ \int^t \Phi_{lmp}n\,\mathrm{d}t,\cdots$$

即可. 下面给出的 $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ **相当于**$[\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)/\mathrm{d}t](t-t_0)$，**括号内的表达式正是下一节讨论月球卫星轨道变化所确定的某些特征时要引用的.**

$$\Delta a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = 0, \tag{9.33}$$

$$\begin{aligned}\Delta e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = {} & (1-e^2)\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(l-2p)F_3(i)\left(\frac{1}{e}K_3(e)\right) \\ & I(\omega)n(t-t_0) - (1-e^2)\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(l-2p) \\ & F_{lmp}(i)\left(\frac{1}{e}K_3(e)\right)\Phi_{lmp}n(t-t_0),\end{aligned} \tag{9.34}$$

$$\begin{aligned}\Delta i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = {} & -\cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(l-2p)(F_3(i)/\sin i)K_3(e)I(\omega)n(t- \\ & t_0) + \sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}[(l-2p)\cos i \\ & -m](F_{lmp}(i)/\sin i)K_3(e)\Phi_{lmp}n(t-t_0),\end{aligned} \tag{9.35}$$

$$\Delta\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(F_4(i)/\sin^2 i)K_3(e)H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(F'_{lmp}(i)/\sin i)K_3(e)\psi_{lmp}n(t-t_0),\tag{9.36}$$

$$\Delta\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\cos i\Delta\ \Omega_{\mathrm{l}}^{(1)}(t)-\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}F_3(i)[(2l-1)K_3(e)+$$
$$(1-e^2)K_4(e)]H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}F_{lmp}(i)[(2l-1)K_3(e)+$$
$$(1-e^2)K_4(e)]\psi_{lmp}n(t-t_0),\tag{9.37}$$

$$\Delta\ M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\sqrt{1-e^2}\left[\ \Delta\omega_l^{(9.1)}(t)+\cos i\Delta\Omega_l^{(9.1)}(t)\ \right]-$$
$$\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}2(l+1)F_3(i)k_3(e)H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}2(l+1)F_{lmp}(i)K_3(e)\psi_{lmp}n(t-$$
$$t_0).\tag{9.38}$$

上述各式中的 p_0 即 $a(1-e^2)$，为了区别求和取值符号 p，用了 p_0 这一符号. 同样上述各式中出现的 a,e,i 和 Ω,ω 均用 $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0,\overline{\Omega}_0,\bar{\omega}_0$. $F_3(i)$，… 各表达式如下：

$$\begin{cases}F_3(i)=\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}C_{lpq}(\sin i)^{(l-2p+2q)},\\ F_4(i)=\sum_{q=0}^{p}(l-2p+2q)(-1)^{(l+2q-\delta)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}\cdot\\ \qquad C_{lpg}(\sin i)^{(l-2p+2q)},\\ C_{lpq}=\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}\\ \quad=\frac{(2l-2p+2q)!}{q!(p-q)!(l-p+q)!(l-2p+q)!},\end{cases}\tag{9.39}$$

$$\delta_p=\begin{cases}0,\quad l-2p=0,\\ 1,\quad l-2p\neq 0,\end{cases}\tag{9.40}$$

$$
\begin{cases}
K_3(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=|l-2p|}^{l-2} C_{lp\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha}, \\
K_4(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=|l-2p|}^{l-2} C_{lp\alpha}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha-2}, \\
C_{lp\alpha} = \dbinom{l-1}{\alpha}\dbinom{\alpha}{\frac{1}{2}(\alpha-|l-2p|)} \\
\qquad = \dfrac{(l-1)!}{(l-1-\alpha)!\left[\frac{1}{2}(\alpha-|l-2p|)\right]!\left[\frac{1}{2}(\alpha+|l-2p|)\right]!},
\end{cases}
\tag{9.41}
$$

$$
\begin{cases}
I(\omega) = -(1-\delta)\sin(l-2p)\omega + \delta\cos(l-2p)\omega, \\
H(\omega) = (1-\delta)\cos(l-2p)\omega + \delta\sin(l-2p)\omega, \\
\delta = \dfrac{1}{2}[1-(-1)^l].
\end{cases}
\tag{9.42}
$$

还有倾角函数 $F_{lmp}(i)$ **及其导数** $F'_{lmp}(i)$**，在前面第四章中出现过，见**(4.262)～(4.264)**式.**

(3) 短周期项 $\boldsymbol{\sigma}_S^{(2)}(t)$

$\sigma_S^{(2)}(t)$**除** $a_S^{(2)}(t)$**外，只需给出** J_2 **项，而** $a_S^{(2)}(t)+a_S^{(3)}(t)$**可由下式给出：**

$$
a_S^{(2)}(t)+a_S^{(3)}(t) = 2a^2 R_S(J_2; J_l, l\geqslant 3; C_{lm}, S_{lm})
\tag{9.43}
$$

其中

$$
\begin{cases}
R_S(J_2) = \dfrac{3J_2}{2a^3}\left\{\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\dfrac{a}{r}\right)^3 - (1-e^2)^{-3/2}\right] + \right. \\
\qquad\qquad \left. \dfrac{1}{2}\sin^2 i\left(\dfrac{a}{r}\right)^3 \cos 2u\right\}, \\
u = f + \omega,
\end{cases}
\tag{9.44}
$$

$$
R_S(J_l) = R(J_l) - R(J_l)_{C,L},
\tag{9.45}
$$

$$
R(J_l) = \sum_{l\geqslant 3}\frac{(-J_l)}{a^{l+1}}\sum_{p=0}^{\frac{1}{2}(l-\delta)} F_3(i)\left[(1-\delta)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)u + \right.
$$

$$
\left.\delta\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\sin(l-2p)u\right],
\tag{9.46}
$$

$$
R(J_l)_{C,L} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\sum_{l\geqslant 3}\frac{(-J_l)}{p_0^l}\sum_{p=1}^{(l-\delta)/2} F_3(i)K_3(e)H(\omega),
\tag{9.47}
$$

$$
R_S(C_{lm}, S_{lm}) = R(C_{lm}, S_{lm}) - R_l(C_{lm}, S_{lm}),
\tag{9.48}
$$

$$
R(C_{lm}, S_{lm}) = \sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{a^{l+1}}\sum_{p=0}^{l} F_{lmp}(i)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times
$$

$$\{[(1-\delta_m)C_{lm}-\delta_m S_{lm}]\cos((l-2p)u+m\Omega_G)+$$
$$[(1-\delta_m)S_{lm}+\delta_m C_{lm}]\sin((l-2p)u+m\Omega_G)\},$$
$$(9.49)$$

$$\delta_m=\frac{1}{2}[1-(-1)^{l-m}],$$

$$R_L(C_{lm},S_{lm})=\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{p_0^l}\sum_{p=1}^{l-1}F_{lmp}(i)K_3(e)\Psi_{lmp},\quad(9.50)$$

$$e_S^{(2)}(t)=\frac{3J_2}{2a^2}\left(\frac{1-e^2}{e}\right)\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.$$
$$\frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)-\frac{\sin^2 i}{2(1-e^2)^2}[e\cos(f+2\omega)+$$
$$\left.\cos 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)]\right\}-$$
$$\frac{3J_2}{2p^2}\sin^2 i\left(\frac{1-e^2}{6e}\right)\overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\quad(9.51)$$

$$i_S^{(2)}(t)=\frac{3J_2}{8p^2}\sin 2i\left[e\cos(f+2\omega)+\cos 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right]+$$
$$\frac{3J_2}{24p^2}\sin 2i\ \overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\quad(9.52)$$

$$\Omega_S^{(2)}(t)=-\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\left\{(f-M+e\sin f)-\frac{1}{2}\left[e\sin(f+2\omega)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\sin 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right]\right\}+$$
$$\frac{3J_2}{12p^2}\cos i\ \overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\quad(9.53)$$

$$\omega_S^{(2)}=\frac{3J_2}{2p^2}\left\{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)(f-M+e\sin f)+\right.$$
$$\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]-$$
$$\left[\frac{1}{4e}\sin^2 i+\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 i\right)e\right]\sin(f+2\omega)-$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin 2(f+\omega)+$$
$$\left[\frac{7}{12e}\sin^2 i-\left(\frac{1}{6}-\frac{19}{48}\sin^2 i\right)e\right]\sin(3f+2\omega)+$$
$$\frac{3}{8}\sin^2 i\sin(4f+2\omega)+$$

$$\frac{e}{16}\sin^2 i[\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega)]\Big\}-$$
$$\frac{3J_2}{2p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1-e^2}{6e^2}\overline{\cos 2f}\right)+\frac{1}{6}\cos^2 i\,\overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega,\quad(9.54)$$

$$\begin{aligned}M_S^{(2)}(t)=&\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\Big\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\right.\\&\left.\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)-\right.\\&\left(\frac{7}{12e}-\frac{e}{48}\right)\sin(3f+2\omega)-\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)-\\&\left.\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)-\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\right]\Big\}+\\&\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1+e^2/2}{6e^2}\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega.\end{aligned}\quad(9.55)$$

上述各式中出现的$\left(\frac{a}{r}\right)$和真近点角 f 等量与根数 e,M 的关系在前面讨论人造地球卫星的运动时已出现过,即相应的二体问题基本关系式. $\overline{\cos 2f}$是由下式表达的平均值:

$$\overline{\cos 2f}=\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2.\quad(9.56)$$

从上述月球非球形引力摄动解的具体形式不难看出动力学扁率 J_2 与奇次带谐项系数 J_{2l-1} $(l\geqslant 2)$相对大小(J_{2l-1}/J_2)的重要性,慢自转中心天体非球形引力位中田谐项对应的摄动解是以长周期项的形式出现,不像地球卫星那样,田谐项摄动解是以短周期项的形式出现,而又必须通过展成平近点角 M 的三角级数才能构造相应的短周期项,导致对大偏心率情况不适用的结果. 另外,关于卫星轨道变化的某些重要特征,对于地球卫星往往由 J_2 与 J_3,J_4 几项即可给出相应的可靠结果,而对于月球卫星而言,由于月球非球形引力位中 J_2 与 J_{2l-1} $(l\geqslant 2)$和所有田谐项系数(C_{lm},S_{lm})相差不大的原因,若要获得月球卫星轨道变化特征的可靠信息,还得审查众多的非球形引力项. 故前面必须给出相应的 J_l 和(C_{lm},S_{lm})项摄动解的完整结果,这才能保证在此基础上对有关问题分析所得结果的有效性.

2. 月球物理天平动引起的坐标系附加摄动

月球物理天平动与地球的岁差章动类似,都是引起赤道面在空间的摆动,导致在月心(或地心)平赤道坐标系中构造相应卫星轨道的摄动分析解时,均要考虑由于赤道面摆动导致的引力位的变化所带来的坐标系附加摄

动. 但月球物理天平动与地球岁差章动的表达形式与结果不一样，因此不能照搬地球卫星运动中相应的摄动解部分[10,11]. 这里给出不同于参考文献[10,11]中采用的方法，而采用与建立月球赤道坐标系与月固坐标系之间的坐标转换关系相一致的表达形式，见(9.11)式，构造月心赤道坐标系 $O-xyz$ 中的由物理天平动引起的坐标系附加摄动解.

(1) 月心赤道坐标系中的附加引力位 ΔV

尽管物理天平动可以改变非球形引力位中的每一部分，但这里只讨论 $C_{2,0}$ 和 $C_{2,2}$ 两项的附加位，一是该两项是最主要的，另一原因是这两项分别为带谐项和田谐项的代表，仅就对这两项的讨论即可了解物理天平动对卫星轨道影响的全貌.

由于物理天平动的摄动量级即使对低轨卫星，也只有 10^{-7}，故天平动参数可引用 简化的分析表达形式，这里就直接采用前面给出的简化公式(9.4). 为了表达简洁，记

$$\begin{cases}\tau = \tau_1 \sin l_s + \tau_2 \sin l_m + \tau_3 \sin 2\omega_m, \\ \rho = \rho_1 \cos l_m + \rho_2 \cos(l_m + 2\omega_m) + \rho_3 \cos(2l_m + 2\omega_m), \\ \sin I\sigma = \sigma_1 \sin l_m + \sigma_2 \sin(l_m + 2\omega_m) + \sigma_3 \sin(2l_m + 2\omega_m),\end{cases} \tag{9.57}$$

考虑到 $\rho_1 - \sigma_1 = 2''$，$(\rho_1 - \sigma_1)/\sigma_1 \approx 10^{-2}$，在一定精度下为了表达简明，可做近似处理，即 $\rho_i = \sigma_i (i=1,2,3)$，如果不作此近似处理亦不会影响讨论的结果. (9.57)式中 τ_1 等量的数值如下：

$$\begin{cases}\tau_1 = 59''.0 = 2.9 \times 10^{-4}(\text{rad}), \\ \tau_2 = -12''.0 = -0.58 \times 10^{-4}(\text{rad}), \\ \tau_3 = 18''.0 = 0.87 \times 10^{-4}(\text{rad}),\end{cases} \tag{9.58}$$

$$\begin{cases}\sigma_1 = -109''.0 = -5.18 \times 10^{-4}(\text{rad}), \\ \sigma_2 = 37''.0 = 1.8 \times 10^{-4}(\text{rad}), \\ \sigma_3 = -11''.0 = -0.53 \times 10^{-4}(\text{rad}),\end{cases} \tag{9.59}$$

$$\begin{cases}\sigma_{11} = \sigma_1 - \sigma_2 = -146''.0, \\ \sigma_{12} = \sigma_1 + \sigma_2 = -72''.0,\end{cases} \tag{9.60}$$

仅保留 ρ,σ,τ 的一阶量，可给出(9.12)式中月心赤道坐标系 $O-xyx$ 与月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$之间的坐标转换矩阵($\boldsymbol{A}$)的简化形式如下：

其中($\boldsymbol{A}$) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{9.61}$$

$$a_{11} = \cos(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}) - (\tau - \sigma + \sigma \cos I)\sin(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}),$$
$$a_{21} = \sin(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}) + (\tau - \sigma + \sigma \cos I) \cos(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}),$$
$$a_{31} = \sigma \sin I \cos \varphi - \rho \sin\varphi,$$

$$a_{12} = - \sin(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}) - ((\tau - \sigma + \sigma \cos I)) \cos(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}),$$
$$a_{22} = \cos(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}) - (\tau - \sigma + \sigma \cos I)\sin(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}),$$
$$a_{32} = - \sigma \sin I \sin\varphi - \rho \cos \varphi,$$

$$a_{13} = - \sigma \sin I \cos \Omega_{\mathrm{m}} - \rho \sin\Omega_{\mathrm{m}},$$
$$a_{23} = - \sigma \sin I \sin\Omega_{\mathrm{m}} + \rho \cos \Omega_{\mathrm{m}},$$
$$a_{33} = 1.$$

其中天平动参数 σ,ρ,τ **由**(9.57)**式表达**.

由于

$$\begin{cases} I=1^{\circ}32'32''.7=1^{\circ}.542417=0.026920, \\ \sin I=0.0269, \quad \cos I=0.9996, \\ 1-\cos I=0.000362, \end{cases} \tag{9.62}$$

还可以作如下简化:

$$\tau - \sigma (1 - \cos I) = \tau + O(6 \times 10^{-6}), \tag{9.63}$$
$$\sigma \sin I \cos \varphi - \rho \sin\varphi = (\sigma_1 - \sigma_2)\sin\omega_{\mathrm{m}} - \sigma_3 \sin(l_{\mathrm{m}} + \omega_{\mathrm{m}}), \tag{9.64}$$
$$- \sigma \sin I \sin\varphi - \rho \cos \varphi = (\sigma_1 + \sigma_2) \cos \omega_{\mathrm{m}} + \sigma_3 \cos(l_{\mathrm{m}} + \omega_{\mathrm{m}}). \tag{9.65}$$

采用以上简化,转换矩阵($\boldsymbol{A}$)**变为如下形式**:

其中($\boldsymbol{A}$) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (9.66)

$$a_{11} = - \cos L_{\mathrm{m}} + \tau \sin L_{\mathrm{m}},$$
$$a_{21} = - \sin L_{\mathrm{m}} - \tau \cos L_{\mathrm{m}},$$
$$a_{31} = \sigma_{11} \sin\omega_{\mathrm{m}} - \sigma_3 \sin(L_{\mathrm{m}} + \omega_{\mathrm{m}}),$$

$$a_{21} = \sin L_{\mathrm{m}} + \tau \cos L_{\mathrm{m}},$$
$$a_{22} = - \cos L_{\mathrm{m}} + \tau \cos L_{\mathrm{m}},$$
$$a_{32} = \sigma_{12} \cos \omega_{\mathrm{m}} + \sigma_3 \cos(L_{\mathrm{m}} + \omega_{\mathrm{m}}),$$

$$a_{13} = -\sigma_1 \sin(L_m - \omega_m) - \sigma_2 \sin(L_m + \omega_m) - \sigma_3 \sin(2L_m - \Omega_m),$$

$$a_{23} = \sigma_1 \cos(L_m - \omega_m) + \sigma_2 \cos(L_m + \omega_m) + \sigma_3 \cos(2L_m - \Omega_m),$$ 由于

$$a_{33} = 1.$$

$$C_{2,0} = 2 \times 10^{-4}, \quad C_{2,2} = 0.25 \times 10^{-4},$$

对于外推月球低轨卫星 10^2 弧段的位置精度要求达到米级时，$C_{2,0}$ 的附加位必须考虑天平动中 τ_1, τ_2, τ_3 和 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的全部，而 $C_{2,2}$ 的附加位，只需考虑 τ_1 和 σ_{11}, σ_{12} 部分. 略去推导过程，直接给出 $C_{2,0}$ 项对应的附加位如下：

$$\begin{aligned} V_2(C_{2,0}) &= (-J_2/a^3)(a/r)^3[(3/2)(z/r)^2 - (1/2)] \\ &= (-J_2/a^3)(a/r)^3\{[(3/2)(z/r)^2 - (1/2)] - \\ &\quad 3\sigma_1(z/r)[(x/r)\sin(L_m - \omega_m) - (y/r)\cos(L_m - \omega_m)] - \\ &\quad 3\sigma_2(z/r)[(x/r)\sin(L_m + \omega_m) - (y/r)\cos(L_m + \omega_m)] - \\ &\quad 3\sigma_3(z/r)[(x/r)\sin(2L_m - \Omega_m) - (y/r)\cos(2L_m - \Omega_m)]\}. \end{aligned} \tag{9.67}$$

这里 $J_2 = -C_{2,0}$，相应的以轨道根数表达的形式为

$$\begin{aligned} \Delta V_2 = &(3J_2/4a^3)(a/r)^3\{-\sin 2i(1-\cos 2u) \times [\sigma_1 \cos(L_m - \omega_m - \\ &\Omega) + \sigma_2 \cos(L_m + \omega_m - \Omega) + \sigma_3 \cos(2L_m - \Omega_m - \Omega)] + \\ &2\sin i(\sin 2u)[\sigma_1 \sin(L_m - \omega_m - \Omega) + \sigma_2 \sin(L_m + \omega_m - \Omega) + \\ &\sigma_3 \sin(2L_m - \Omega_m - \Omega)]. \end{aligned} \tag{9.68}$$

其中 $u = f + \omega$，用求平均值的方法，可将 ΔV_2 分解成如下两部分：

$$\begin{aligned} \Delta V_{2L} &= \overline{\Delta V_2} \\ &= -(3J_2/4a^3)\sin 2i(1-e^2)^{-3/2} \times [\sigma_1 \cos(L_m - \omega_m - \Omega) + \\ &\quad \sigma_2 \cos(L_m + \omega_m - \Omega) + \sigma_3 \cos(2L_m - \Omega_m - \Omega)], \end{aligned} \tag{9.69}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{2S} = &\Delta V_2 - \overline{\Delta V_2} = (3J_2/4a^3)\{-\sin 2i[(a/r)^3 - (1-e^2)^{-(3/2)} - \\ &(a/r)^3\cos 2u] \times [\sigma_1 \cos(L_m - \omega_m - \Omega) + \sigma_2 \cos(L_m + \omega_m - \Omega) + \\ &\sigma_3 \cos(2L_m - \Omega_m - \Omega)] + 2\sin i(a/r)^3 \sin 2u[\sigma_1 \sin(L_m - \omega_m \\ &- \Omega) + \sigma_2 \sin(L_m + \omega_m - \Omega) + \sigma_3 \sin(2L_m - \Omega_m - \Omega)]\}, \end{aligned} \tag{9.70}$$

ΔV_{2L} 和 ΔV_{2S} 分别为附加位的长周期和短周期两个部分.

同样给出 $C_{2,2}$ 项的附加位如下：

$$\begin{aligned} V(C_{2,2}) &= (3C_{2,2}/a^3)(a/r)^3((x^2 - y^2)/r^2) \\ &= (3C_{2,2}/a^3)(a/r)\{[(1/r^2)(x^2 - y^2)\cos 2L_m + \\ &\quad (2xy)\sin 2L_m] - 2\tau[(1/r^2)(x^2 - y^2)\sin 2L_m - \\ &\quad 2(xy/r^2)\cos 2L_m] - 2\sigma_1(z/r)[(x/r)\sin(L_m + \omega_m) - \end{aligned}$$

$$(y/r)\cos(L_m+\omega_m)] - 2\sigma_2(z/r)[(x/r)\sin(L_m-\omega_m) - (y/r)\cos(L_m-\omega_m)]\}. \tag{9.71}$$

相应的轨道根数形式为

$$\Delta V_2(C_{2,2}) = -(3C_{2,2}/a^3)(a/r)^3\{\tau[\sin(2L_m-2\Omega)(2\cos 2u+\sin^2(1-\cos 2u)) - \cos(2L_m-2\Omega)(2\cos i\sin 2u)] + \sigma_1\sin i[\sin(L_m+\omega_m-\Omega)\sin 2u - \cos i\cos(L_m+\omega_m-\Omega)(1-\cos 2u)] + \sigma_2\sin i[\sin(L_m-\omega_m-\Omega)\sin 2u - \cos i\cos(L_m-\omega_m-\Omega)(1-\cos 2u)]\}, \tag{9.72}$$

$$(\Delta V_{2,2})_L = -(3C_{2,2}/a^3)\sin i(1-e^2)^{-3/2}\{\tau\sin i[\sin(2L_m-2\Omega)] - \sigma_1\cos i[\cos(L_m+\omega_m-\Omega)] - \sigma_2\cos i[\cos(L_m-\omega_m-\Omega)]\}, \tag{9.73}$$

$$(\Delta V_{2,2})_S = -(3C_{2,2}/a^3)\{\sin i[\tau\sin i\sin(2L_m-2\Omega) - \sigma_1\cos i\cos(L_m+\omega_m-\Omega) - \sigma_2\cos i\cos(L_m-\omega_m-\Omega)][(a/r)^3-(1-e^2)^{-3/2}] + \tau[(2-\sin^2 i)\sin(2L_m-2\Omega)(a/r)^3\cos 2u - (2\cos i)\cos(2L_m-2\Omega)(a/r)^3\sin 2u] + \sigma_1\sin i[\sin(L_m+\omega_m-\Omega)(a/r)^3\sin 2u + \cos i\cos(L_m+\omega_m-\Omega)(a/r)^3\cos 2u] + \sigma_2\sin i[\sin(L_m-\omega_m-\Omega)(a/r)^3\sin 2u + \cos i\cos(L_m-\omega_m-\Omega)(a/r)^3\cos 2u\}. \tag{9.74}$$

(2）天平动引起的坐标系附加摄动解

根据天平动引起的附加摄动位 $\Delta V(C_{2,0})$和 $\Delta V(C_{2,2})$可知，对月球卫星轨道只有长、短周期影响. 在米级精度要求下，只要给出长周期变化项即可，至于短周期项，只有轨道半长径 a 需要考虑，这是由于沿迹根数 M 的精度要求所致.

采用与前面相同的拟平均根数法，很容易建立相应的摄动解，相应的长周期变化项为

$$\Delta\sigma_L(t) = \sigma_L(t) - \sigma_L(t_0), \tag{9.75}$$

对于 $C_{2,0}$ 的附加部分 $\sigma_L(t)$的具体形式如下：

$$a_L(t) = 0, \tag{9.76}$$

$$e_L(t) = 0, \tag{9.77}$$

$$i_L(t) = -(3J_2/2p^2)\cos i\times\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\cos(L_m-\omega_m-\Omega) + \frac{\sigma_2}{\alpha_2}\cos(L_m+\omega_m-\Omega) + \frac{\sigma_3}{\alpha_3}\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)\right], \tag{9.78}$$

$$\Omega_L(t) = -(3J_2/2p^2)\frac{\cos 2i}{\sin i}\times\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\sin(L_m-\omega_m-\Omega) + \frac{\sigma_2}{\alpha_2}\sin(L_m+\right.$$

$$\omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_3}{\alpha_3}\ \sin(2L_m - \Omega_m - \Omega)\Big], \tag{9.79}$$

$$\omega_L(t) = (3J_2/2p^2)\ \frac{\cos i}{\sin i}(1 - 5\sin^2 i) \times \Big[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\ \sin(L_m - \omega_m - \Omega) +$$

$$\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\ \sin(L_m + \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_3}{\alpha_3}\ \sin(2L_m - \Omega_m - \Omega)\Big], \tag{9.80}$$

$$M_L(t) = -(9J_2/4p^2)\ \sqrt{1-e^2}\ \sin 2i \times \Big[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\ \sin(L_m - \omega_m - \Omega) +$$

$$\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\ \sin(L_m + \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_3}{\alpha_3}\ \sin(2L_m - \Omega_m - \Omega)\Big], \tag{9.81}$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{n}(\dot{L}_m - \dot{\omega}_m - \dot{\Omega}) = O(10^{-3}), \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{n}(\dot{L}_m + \dot{\omega}_m - \dot{\Omega}) = O(10^{-3}), \\ \alpha_3 = \dfrac{1}{n}(2\dot{L}_m - \dot{\Omega}_m - \dot{\Omega}) = O(10^{-3}). \end{cases} \tag{9.82}$$

对于 $C_{2,2}$ 的附加项部分，相应的结果如下：

$$a_L(t) = 0, \tag{9.83}$$

$$e_L(t) = 0, \tag{9.84}$$

$$i_L(t) = -(3C_{2,2}/p^2) \times \Big[\frac{2\tau}{\alpha 4}\ \sin i\ \sin(2L_m - 2\Omega) - \frac{\sigma_1}{\alpha_2}\ \cos i\ \cos(L_m +$$

$$\omega_m - \Omega) - \frac{\sigma_2}{\alpha_1}\ \cos i\ \cos(L_m - \omega_m - \Omega)\Big], \tag{9.85}$$

$$\Omega_L(t) = (3C_{2,2}/p^2) \times \Big[\frac{2\tau}{\alpha_4}\ \cos i\ \cos(2L_m - 2\Omega) + \frac{\sigma_1}{\alpha_2}\ \frac{\cos 2i}{\sin i}\ \sin(L_m + \omega_m$$

$$- \Omega) + \frac{\sigma_2}{\alpha_1}\ \frac{\cos 2i}{\sin i}\ \sin(L_m - \omega_m - \Omega)\Big], \tag{9.86}$$

$$\omega_L(t) = -(3C_{2,2}/p^2) \times \Big[\frac{\tau}{\alpha 4}(2 - 5\sin^2 i)\ \cos(2L_m - 2\Omega) +$$

$$\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\ \frac{\cos i}{\sin i}\ (1 - 5\sin^2 i)\ \sin(L_m + \omega_m - \Omega) +$$

$$\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\ \frac{\cos i}{\sin i}\ (1 - 5\sin^2 i)\ \sin(L_m - \omega_m - \Omega)\Big], \tag{9.87}$$

$$M_L(t) = (9C_{2,2}/p^2)\ \sqrt{1-e^2} \times \Big[\frac{\tau}{\alpha 4}\ \sin^2 i\ \cos(2L_m - 2\Omega) +$$

$$\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\ \sin i\ \cos i\ \sin(L_m + \omega_m - \Omega) +$$

$$\left.\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\sin i\ \cos i\ \sin(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right], \tag{9.88}$$

其中

$$\alpha_4=\frac{1}{n}(2\dot{L}_{\mathrm{m}}-2\dot{\Omega})=O(10^{-3}). \tag{9.89}$$

为了使平近点角 M 达到同样的精度要求，如有需要，应考虑轨道半长径 a 的短周期项，上述两部分（$C_{2,0}$ 和 $C_{2,2}$）附加摄动引起的 a 的短周期项为

$$a_{\mathrm{S}}(t)=2a^2[(\Delta V_2)_{\mathrm{s}}+(\Delta V_{2,2})_{\mathrm{s}}]. \tag{9.90}$$

经数值验证表明，这里给出的月球物理天平动对月球卫星轨道影响的摄动分析解是正确的，其中 $C_{2,2}$ 项的影响要比 $C_{2,0}$ 项的影响小一个量级.

§9.5 月球卫星运动的轨道寿命与冻结轨道问题

众所周知，大气耗散作用是决定卫星轨道寿命的重要因素，就像人造地球卫星那样，特别是低轨卫星，由于大气耗散作用，轨道不断变小变圆，最终落入地球稠密大气层被烧毁而结束其轨道寿命. 但对于卫星轨道寿命问题，还有另一种动力学机制，即存在一种摄动作用，会使其轨道偏心率 e 增大（实为变幅较大的长周期项），导致其近星距 $r_{\mathrm{p}}=a(1-e)\leqslant a_{\mathrm{e}}$（中心天体赤道半径）而与中心天体相撞，结束其轨道寿命. 在这种动力学机制中，中心天体的动力学扁率 J_2 的大小起着决定性作用，相应的表现对于高轨卫星和低轨卫星有所不同.

1. 高轨卫星情况

无论是有或无大气的中心天体，对于它们的高轨卫星，耗散作用已不重要. 对于非耗散效应，如中心天体的扁率（J_2）和第三体质点引力，这两种重要的摄动源均为保守力摄动，相应的卫星轨道半长径 a 仅有微小的周期变化，而高轨卫星轨道偏心率 e 变化的幅度将是影响其轨道寿命的关键因素. 在保守力摄动下，尽管偏心率 e 没有长期变化，但可能有因小分母引起的变幅较大的长周期变化. 根据第四章和第五章分别给出的 J_2 项摄动和第三体引力摄动的摄动解，e 的长周期摄动项可分别写成如下形式：

$$\begin{aligned}[e_{\mathrm{L}}(t)]_1=&\mu a_{\mathrm{e}}^2\left(\frac{3J_2}{2a^2}\right)\sin^2 i\left[\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i\right)^{-1}+\right.\\&\left.\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{6(1+\sqrt{1-e^2})^2}\right]\left(\frac{e}{1-e^2}\right)\cos 2\omega,\end{aligned} \tag{9.91}$$

$$[e_{\mathrm{L}}(t)]_2 = -\frac{15}{16}\left(\frac{\mu' a^3}{\mu a'^3}\right)(1-e'^2)^{-3/2}\sin^2 i(e\sqrt{1-e^2})\times \left(\frac{n}{\dot{\omega}}\right)[\cos 2\omega + O(\sin i')]. \tag{9.92}$$

其中 μ 和 μ' 分别为中心天体和摄动天体的质心引力常数，$\dot{\omega}$ 是卫星轨道拱线的进动速率，即摄动长期项的系数 $(\omega_1+\omega_2)$，有

$$\left(\frac{\dot{\omega}}{n}\right) = \left[\left(\frac{3J_2 a_{\mathrm{e}}^2}{2a^2}\right) + \left(\frac{3}{4}\frac{\mu' a^3}{a'^3}\right)\right]\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right) + O(e^2, e'^2, \sin^2 i')\right]. \tag{9.93}$$

(9.92)式和(9.93)式右端的 $O(\sin i')$ 等项无需具体写出，因为摄动天体的 e' 和 i' 一般都较小，对讨论的问题无实质性影响.(9.91)～(9.93)式就是讨论高轨卫星轨道寿命的主要理论依据.

卫星近星距 r_{p} 的变化，关键在于 e 的变幅. 从(9.91)式可看出，对于扁率摄动，e 的变化幅度主要取决于因子 J_2/a^2，对一特定的中心天体(J_2 值确定)，轨道越高，e 的变化幅度越小. 而第三体摄动效应却不同，从(9.92)式可看出，e 的变化幅度在很大程度上依赖于由(9.93)式表达的 $\dot{\omega}$ 的大小. 对于低轨卫星，$\dot{\omega}$ 的大小取决于月球扁率 J_2，其值一般不太小. 对于高轨卫星，扁率摄动项减小，第三体引力摄动项增大，其临界值(亦即 $\dot{\omega}$ 的最小值，相应 e 的变化出现小分母)对应上述两项摄动量级相等的情况，有

$$\frac{3J_2 a_{\mathrm{e}}^2}{2a^2} = \frac{3}{4}\frac{\mu' a^3}{a'^3}. \tag{9.94}$$

由此可知，相应的卫星轨道半长径的临界值 a_{c} 为

$$a_{\mathrm{c}} = \left[2\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)\left(\frac{a'}{a_{\mathrm{e}}}\right)^3 J_2\right]^{1/5} a_{\mathrm{e}}, \tag{9.95}$$

这里 a' 是第三体“相对”中心天体的轨道半长径.

对于地球—卫星—月球系统，$a_{\mathrm{c}}=8.2a_{\mathrm{e}}$(地球赤道半径)，而对于月球—卫星—地球系统，由于月球的 J_2 值小，$a_{\mathrm{c}}=2.2a_{\mathrm{e}}$(月球赤道半径). 当高轨卫星的轨道半长径 a 接近 a_{c} 时，e 的变幅会增大，有可能大到使卫星近星距 r_{p} 减小到等于 a_{e} 的状态，从而与地球或月球相撞. 文[13～15]中均有算例，像月球轨道器 $a_0=4.0a_{\mathrm{e}}$，$e_0=0.20$，$i_0=85°$，运行不到 6 个恒星月，就因 e 增大，使 $r_{\mathrm{p}}=a_{\mathrm{e}}$，从而落到月球上. 这种动力学机制相当于起着“保护”作用的中心天体的动力学扁率较小，卫星轨道还是被第三体质点引力效应周期性地拉扁，扁到一定程度即出现上述卫星与中心天体相撞的现象.

2. 月球低轨卫星的轨道寿命

尽管月球无大气，但在非球形引力作用下，低轨卫星的近月距 $r_p = a(1-e)$ 也会减小，当 $r_p = a_e$ 时，卫星将与月球相撞. 轨道半长径 a 在非球形引力作用下，只有振幅较小的短周期变化，主要源于月球动力学扁率 J_2 项摄动，变化量级只有 10^{-4}，不会导致 r_p 的明显变化. 显然，r_p 有明显减小趋势的原因是轨道偏心率 e 有振幅较大的长周期变化 Δe_L. 文[16]有过简单计算结果，文[17]讨论过简单的动力学机制，这里将进一步深入地讨论该问题.

在月球非球形引力和地球引力两种主要摄动源的作用下，消除短周期变化后，e 的长周期变化满足下列方程：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e_L}{\mathrm{d}t} = {} & n(1-e^2)\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(-1)^{(l-\delta)/2}(l-2p)F(i)\left[\frac{1}{e}K(e)\right]I(\omega) - \\ & n(1-e^2)\sum_{l=2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(l-2p)\,F_{lmp}(i)\left[\frac{1}{e}K(e)\right]\Phi_{lmp}(\omega,\theta) + \\ & O(em'). \end{aligned} \tag{9.96}$$

此方程的原始形式在前面§9.4中曾给出过，为了探讨月球低轨卫星的轨道寿命问题，这里又作了一些必要的改变. (9.96)式右端第一和第二大项分别为带谐项($J_l = -C_{l,0}$)和田谐项摄动，第三大项为地球引力摄动，含有 e 因子. 方程中的 $n = a^{-3/2}$，采用符号 p_0 是为了与式中求和取值 p 区分开. 有关表达式改变后的形式如下：

$$\delta = \frac{1}{2}[1-(-1)^l] = \begin{cases}1, l\text{ 奇},\\ 0, l\text{ 偶},\end{cases} \tag{9.97}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{e}K(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=(l-2p)}^{l-2} C_{lp\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha} = \begin{cases}O(e^0), l\text{ 奇},\\ O(e), \ l\text{ 偶},\end{cases}\\[2ex] C_{lp\alpha} = \dbinom{l-1}{\alpha}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ \frac{1}{2}(\alpha-(l-2p))\end{array}\right), \dbinom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(m-n)!},\end{cases} \tag{9.98}$$

$$\begin{cases}F(i) = -\displaystyle\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)} C_{lpq}(\sin i)^{(l-2p+2q)},\\[2ex] \delta_p = \begin{cases}0, l-2p=0,\\ 1, l-2p\neq 0,\end{cases}\\[2ex] C_{lpq} = \dbinom{l}{p-q}\dbinom{2l-2p+2q}{l}\left(\dfrac{l-2p+2q}{q}\right)\end{cases} \tag{9.99}$$

$$I(\omega) = -1(1-\delta)\sin(l-2p)\omega + \delta\cos(l-2p)\omega. \tag{9.100}$$

田谐项摄动中的 $\Phi(\omega,\theta)$涉及的 $\theta=\Omega-S(t)$，$S(t)$是月固坐标系中 X 轴（即 ξ'轴）方向的经度，随月球自转而变化. $\Phi(\omega,\theta)$的表达式和一般的倾角函数 $F_{lmp}(i)$以及地球引力摄动项 $O(em')$，不再具体给出，因下面的讨论表明，可略去相应的两类摄动影响.

对(9.96)式作进一步分析，l 为奇数时，右函数中含有 $O(e^0)$因子，即以 $e^0\cos\omega$ 形式出现，l 为偶数时却含有 $O(e)$因子，是以 $e\sin 2\Omega$ 形式出现. 而考虑月球低轨卫星寿命时，相应的 e 肯定是小量，有 $e<0.1$. 事实上，对于平均高度为 100 km 的低轨卫星，只要 e 达到 0.05～0.06，即可使 r_{p} 接近 a_{e} 值，若 e 增大将会立即撞上月球. 因此，(9.96)式中只有对应 l 为奇数的摄动项值得考虑，但与奇次带谐项相比，田谐项影响要小一个量级. 故对于理论分析而言，只要保留(9.96)式中的奇次带谐摄动部分即可. 舍去的各种摄动项的影响，可在后面对相应的完整力模型进行模拟计算中考察，实际计算结果将会证实上述简化的合理性. 在(9.96)式中只保留奇次带谐项摄动部分，但仅取其 $O(e^0)$项，对应求和中 $l-2p=1$ 的取值，从而简化成下列形式：

$$\frac{\mathrm{d}e_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}=\sin i\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)(l-1)(J_1/P_0^l)F^*(i)(n\cos\omega),\tag{9.101}$$

其中

$$\begin{cases}F^*(i)=\displaystyle\sum_{q=0}^{(l-1)/2}(-1)^q\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}C_{lpq}^*(\sin^2 i)^q,\\[2ex] C_{lpq}^*=\begin{pmatrix}l\\(l-1)/2-q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l+2q+1\\l\end{pmatrix}\left(\dfrac{2q+1}{q}\right),\end{cases}\tag{9.102}$$

(9.101)式求和中 $l(2)$表示取值“步长”为 2，即 $l(2)=3,5,\cdots$. $\omega=\bar{\omega}(t)=\bar{\omega}_0+\omega_{\mathrm{C}}(t-t_0)$，$\omega_{\mathrm{C}}$ 是$\bar{\omega}(t)$的长期变率，如果仅取其由 J_2 项给出的一阶变率 ω_1，有

$$\omega_{\mathrm{C}}=\omega_1=\frac{3J_2}{2p_0^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right).\tag{9.103}$$

积分(9.101)式给出 e 的长周期变化 Δe_{L} 的表达式如下：

$$\begin{aligned}\Delta e_{\mathrm{L}}&=e_{\mathrm{L}}(t)-e_{\mathrm{L}}(t_0)=\sin i\left\{\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\frac{(l-1)}{3p_0^l}\left(\frac{J_l}{J_2}\right)F^*(i)\right\}\cdot\\&\quad[\sin\bar{\omega}(t)-\sin\bar{\omega}(t_0)]\Big/\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right).\end{aligned}\tag{9.104}$$

由此可以看出，e 的变幅主要取决于奇次带谐项系数 $J_{2l-1}(J\geqslant 2)$与 J_2 的相对大小以及倾角函数 $F^*(i)$的性质，有

$$|\Delta e_L| \sim O(J_{2l-1}/J_2)\cdot F^*(i). \tag{9.105}$$

对于地球卫星,由于

$$O(J_{2l-1}/J_2) = 10^{-3}, \tag{9.106}$$

相应的轨道偏心率的变幅很小,而月球卫星则不同,由于

$$O(J_{2l-1}/J_2) = 10^{-1}. \tag{9.107}$$

故完全有可能使月球低轨卫星的轨道偏心率 e 增大到使 $r_p = a_e$ 的状态. 当然,这还要取决于 $(J_{2l-1}/J_2)F^*(i)$ 值的变化状况.

由于月球非球形引力位的特征,谐系数 J_{2l-1} 随阶 l 的升高并无明显地减小,由函数 $(J_{2l-1}/J_2)F^*(i)$ 的特征,长周期变化 Δe_L 的模 $|\Delta e_L|$ 随着不同的 i 值 $(0°< i\leqslant 90°)$ 将出现多个极小与极大值,相应的 r_p 值将不会达到 a_e 或必然会达到 a_e 值,亦即月球低轨卫星的轨道寿命既取决于奇次带谐项的摄动影响,又与轨道的空间定向有关. 由于 $\sin i$ 的特征,$90°\leqslant i<180°$ 的情况与 $0°< i\leqslant 90°$ 的情况类似.

因有关低轨月球卫星的轨道寿命与冻结轨道有某种联系,下面首先作一理论分析,然后再作相应的数值验证.

3. 关于冻结轨道

与地球卫星类似,在月球非球形引力作用下,相应的平均系统(即消除轨道变化的短周期部分)可能存在一种特解(详见第 4 章 § 4.7):

$$\bar{a}(t) = a_0,\quad \bar{e}(t) = e_0,\quad \bar{i}(t) = i_0, \bar{\omega}(t) = \omega_0 = 90° \text{ 或 } 270°. \tag{9.108}$$

拱线不动,此即冻结轨道,此解对 i_0 无任何限制,对应不同的 i_0 有相应的 e_0 存在. 那么根据(9.104)式给出的 Δe_l,对于平均高度为 100 km 的低轨卫星,是否存在某些轨道配置,通过冻结轨道的选择保持 $r_p>a_e$ 使其不会与月球相撞呢?

首先考查冻结轨道的存在情况,同样由于月球引力场的特征,与地球卫星的冻结轨道状况亦有差别. 对于地球卫星,基本上由 J_2 和 J_3 两项即可确定冻结轨道解,而对月球卫星则不然,文[18]有过简单讨论,这里将进一步深入讨论. 对于平均轨道根数,仍记作 a,e,i,ω,略去推导过程,下面将直接给出相应的冻结轨道解. 当 a 值给定的情况下,对于任一 i 值,冻结轨道对应的 e 值满足下列条件:

$$e = \pm \sin i \sum_{l(2)\geqslant 3} (-1)^{(l-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)(l-1)\left(\frac{J_l}{J_2}\right) F^*(i)\left(\frac{n}{\omega_C}\right), \tag{9.109}$$

其中 ω_C 是 ω 的长期变率.与上一段讨论 e 的长周期变化对应，若只取由 J_2 给出的一阶变率 ω_1，则(9.109)式简化为下列形式：

$$e=\pm\sin i\left\{\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\frac{(l-1)}{3p_0^l}\left(\frac{J_l}{J_l}\right)F^*(i)\right\}\Big/\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right). \tag{9.110}$$

式中“＋”号对应冻结轨道解 $\omega\equiv\omega_0=90°$，“－”号对应 $\omega_0=270°$，即前者对应(9.110)式右端值(除前面的±外)为正，而后者则对应右端值为负.这一结果与地球卫星情况有差别，地球卫星的冻结轨道主要取决于 J_3 项，且总有 $\omega\equiv\omega_0=90°$，由类似的(9.110)式给出的偏心率 e 对不同的 i 值均很小，即 $e_0=O(10^{-3})$，而对于月球低轨卫星则不同，对不同的 i 值，冻结轨道解有两种可能，即 $\omega\equiv\omega_0=90°$或 $270°$，且相应的 e_0 值可能较大.

从(9.110)式和上一段给出的(9.104)式可以看出，在考虑主要摄动因素的前提下，冻结轨道解的 e 值与 e 的长周期变化幅度 $|\Delta e_L|$ 是相同的，而这一解是在平均系统中给出的，且仅在 i 变化的小邻域内才能保持，对于月球卫星，由于月球非球形引力位的特征，实际状况是 $\omega(t)$ 有明显的变化幅度.由此可知，当 $|\Delta e_L|$ 对应某些 i 值为极小时，即使冻结轨道不能保持(即 $\omega(t)$ 有大范围变化)，也不会出现 e 有明显增大的可能，r_p 不会降至 a_e 值；相反，当 $|\Delta e_L|$ 对应某些 i 值为极大时，即使冻结轨道(此时对应解的 e 值较大)能基本保持(即 $\omega(t)$ 的变化范围不大)，e 的变化也有可能使 r_p 降至 a_e 大小，结束其轨道寿命.也就是说，月球低轨卫星的轨道寿命并不依赖冻结轨道的选择(即轨道偏心率 e 和倾角 i 按条件(9.110)的选择)，而主要取决于(9.104)式中所确定的 Δe_L 的模，这归结为月球非球形引力场的基本特征和卫星轨道倾角 i 的选择.我们将在下一段给出相应的模拟计算来证实月球低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系.

4. 模拟计算——理论分析的数值验证

为了验证理论分析的正确性，对低轨卫星(平均高度 100 km)，可通过下列三种情况的计算来证实，即

(1) 根据分析解(9.104)，扫描似地从 $i=0°.5$ 到 $179°.5$，间隔 $1°$，计算了对应的 $|\Delta e_L|$ 值，看极小与极大的分布状况.

(2) 根据分析解(9.110)式，同样对 $i=0°.5\sim179°.5$，间隔 $1°$求出相应的冻结轨道解：e_0 和对应的 ω_0 值.

(3) 考虑主要摄动因素(月球非球形引力，地球引力和太阳引力)，对完整的运动方程计算低轨卫星(取平均高度$\bar{h}=100$ km，$e_0=0.001$)随倾角 i_0

的不同,相应近月点高度 h_p 的变化情况,即轨道寿命与倾角 i 的关系.

上述第(3)部分的计算正是为了证实第(1)和第(2)两部分由分析解给出的结果的正确性,从而确定月球低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系,同时也进一步证实这种结果主要是由月球非球形引力场特征所决定的.

计算中,月球引力场模型采用了美国 JPL 的 LP75G 模型,前两部分对引力场球谐展开式阶次 l 取 30～45,无实质性差别,第(3)部分是取完整的力模型,即 l 取到 75,m 取 $0\sim l$.

关于$|\Delta e_L|$,对应极小值有如下几个"稳定区"(即$|\Delta e_L|$值很小):

$$i=0°,\quad 27°,\quad 50°,\quad 77°,\quad 85°.$$

根据 $\sin i$ 的性质,在 90°～180°间有对应的"稳定区",即 95°,103°,….

关于冻结轨道,与上述$|\Delta e_L|$的情况对应,对应"稳定区"的倾角 i_0,相应的冻结轨道解 e_0 的值均较小,而对应"不稳定区"的倾角 i_0,则相应的解 e_0 值均较大. 表 9.1 列出了部分结果,对应 l 取 40.

根据上述结果,考虑完整力模型后,第(3)部分的计算应有如下预期结果,即在上述"稳定区"(即取 $i_0=0°,27°,\cdots$),低轨卫星的轨道寿命应很长,而相反,则轨道寿命应很短. 为了节省篇幅表 9.2 列出了对 i 取值有一定间隔的结果. 表中 $\min h_p=0.0$ 或接近 0.0,即表明与月球相撞,T_c 即为对应的轨道寿命值. 对所有 i_0 值计算间隔均为 10 年,当在较短间隔内 $h_p=0.0$ 时计算结束. 而在"稳定区",如 $i_0=85°$和 95°,即使卫星运行 10 年近月点高度 h_p 也不会明显降低,极小值仍有 60 多公里高. 图 9.4～图 9.7,分别为 $i_0=40°,90°$和 85°,95°时 h_p 随时间的变化状态,前者分别为 48 天和 172 天与月球相撞,后者 10 年期间的极小值还分别有 60 km 和 68 km 高.

上述数值结果一方面验证了理论分析的正确性,同时也给出了低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系. 但这些保持不与月球相撞的所谓"稳定区"的范围(对轨道倾角 i_0 值而言)都较小,考虑到各种因素(包括发射误差的影响),即使允许选择适当的倾角,也还要注意运行过程中的轨道控制(耗费较小能量的轨道机动).

最后说明两点:

(1) 低轨卫星的轨道寿命与轨道升交点 Ω 的初值无关,这一点从非球形引力位带谐项的性质不难看出,实际计算结果也证实了这一点,在上述第(3)种情况的计算中,改变 Ω 的不同初值,对计算结果 h_p 的变化无实质性影响.

(2) 月球卫星的冻结轨道难以保持,即使是那种特殊的冻结轨道,即临界倾角情况,$i=i_c=63°26'$,在采用实际力模型对应的第(3)种计算中,ω 仍

在大范围内变化，未保持“冻结”.

表 9.1　冻结轨道解

i(deg)	ω(deg)	e	i(deg)	ω(deg)	e
0.5	90.0	0.002831	5.0	90.0	0.025923
1.0	90.0	0.005647	10.0	90.0	0.040836
27.0	90.0	0.005333	20.0	90.0	0.021863
28.0	270.0	0.002481	35.0	270.0	0.060784
49.5	270.0	0.007062	40.0	270.0	0.047442
50.0	90.0	0.000870	45.0	270.0	0.046151
75.0	270.0	0.009016	55.0	90.0	0.140493
76.0	270.0	0.002874	60.0	270.0	0.253887
77.0	270.0	0.005638	63.0	270.0	0.188417
85.0	270.0	0.001753	80.0	90.0	0.026043
95.0	270.0	0.001728	90.0	270.0	0.043215

表 9.2　月球低轨卫星轨道寿命的状况

i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)	i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)
1.0	2723.1	0.0362	33.9	60.0	88.2	0.0548	0.0
2.0	549.0	0.0414	24.6	61.0	88.1	0.0547	0.0
3.0	1852.7	0.0479	13.0	63.43	85.9	0.0545	0.0
4.0	273.2	0.0550	0.0	65.0	88.0	0.0546	0.0
5.0	49.5	0.0548	0.0	67.0	115.5	0.0547	0.0
7.5	42.9	0.0545	0.0	69.0	224.1	0.0523	3.9
10.0	42.5	0.0545	0.0	70.0	3347.5	0.0464	14.9
12.5	43.9	0.0547	0.0	71.0	3407.0	0.0406	25.5
15.0	43.9	0.0547	0.0	72.0	2453.3	0.0348	36.2
17.5	46.3	0.0548	0.0	73.0	1469.4	0.0333	39.0
20.0	77.0	0.0547	0.0	74.0	1498.4	0.0339	37.8
22.0	80.7	0.0532	3.2	75.0	1500.5	0.0340	37.8
24.0	80.0	0.0525	4.4	76.0	1449.0	0.0336	38.5
26.0	2543.1	0.0515	6.0	77.0	3383.8	0.0381	30.4
27.0	2219.9	0.0419	23.6	79.0	401.1	0.0544	0.0
28.0	2599.4	0.0264	52.1	80.0	320.6	0.0545	0.0
29.0	1404.4	0.0251	54.4	81.0	294.0	0.0545	0.0
30.0	2084.1	0.0453	17.3	82.0	294.7	0.0547	0.0

续　表

i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)	i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)
31.0	91.6	0.0547	0.0	83.0	403.2	0.0544	0.0
33.0	46.2	0.0547	0.0	84.0	2941.4	0.0419	23.0
35.0	44.5	0.0546	0.0	85.0	1711.7	0.0220	59.6
37.0	45.2	0.0546	0.0	86.0	3401.8	0.0414	23.6
39.0	47.4	0.0548	0.0	87.0	308.8	0.0523	4.0
40.0	47.9	0.0547	0.0	88.0	174.6	0.0542	0.3
41.0	48.4	0.0546	0.0	89.0	171.3	0.0545	0.0
43.0	48.3	0.0548	0.0	90.0	172.0	0.0545	0.0
45.0	49.7	0.0544	0.7	91.0	193.0	0.0546	0.0
47.0	72.7	0.0545	0.0	92.0	226.7	0.0546	0.0
49.0	177.9	0.0546	0.0	93.0	309.9	0.0546	0.0
50.0	2522.0	0.0545	0.0	94.0	1133.9	0.0392	28.1
51.0	1908.1	0.0337	38.5	95.0	1102.0	0.0172	68.3
52.0	211.9	0.0547	0.0	96.0	1557.2	0.0253	53.6
54.0	88.9	0.0546	0.0	97.0	1118.8	0.0464	14.5
56.0	83.1	0.0547	0.0	98.0	236.2	0.0546	0.0
58.0	84.6	0.0546	0.0				

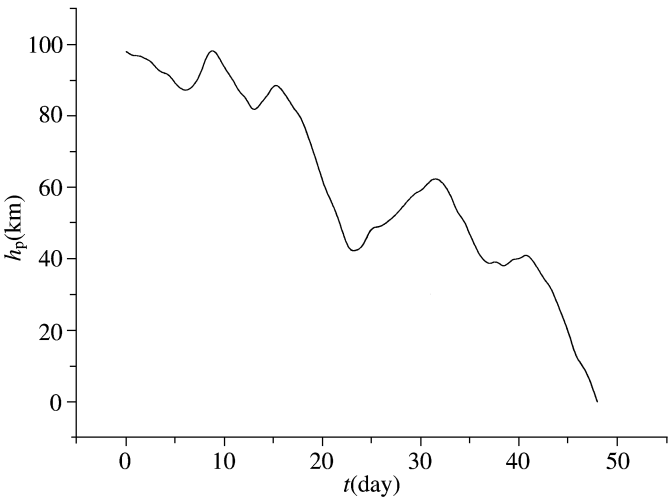

图 9.4　初始轨道倾角 $i_0=40°$的月球低轨卫星轨道寿命

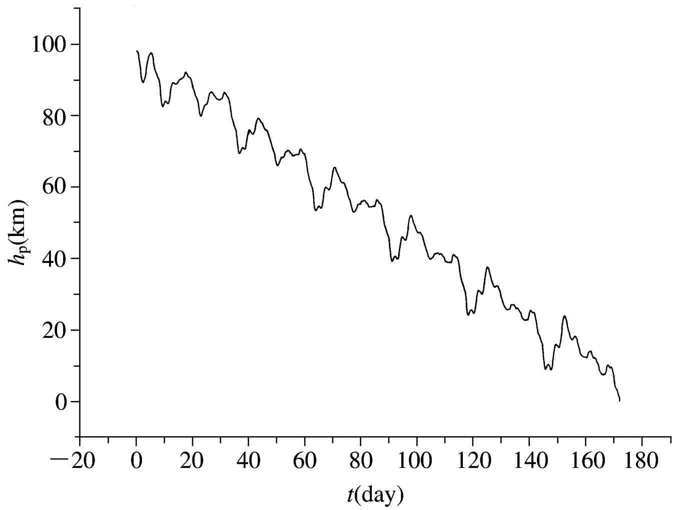

图 9.5　初始轨道倾角 $i_0=90°$的月球低轨卫星轨道寿命

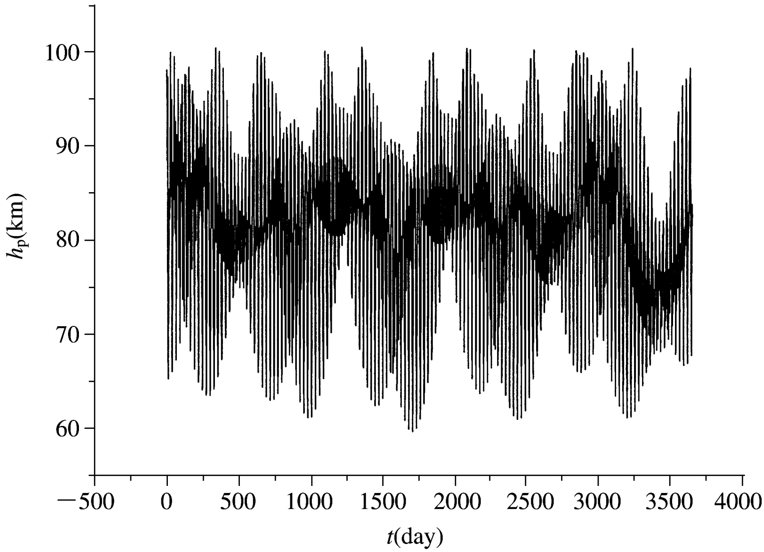

图 9.6　初始轨道倾角 $i_0=85°$的月球低轨卫星轨道寿命

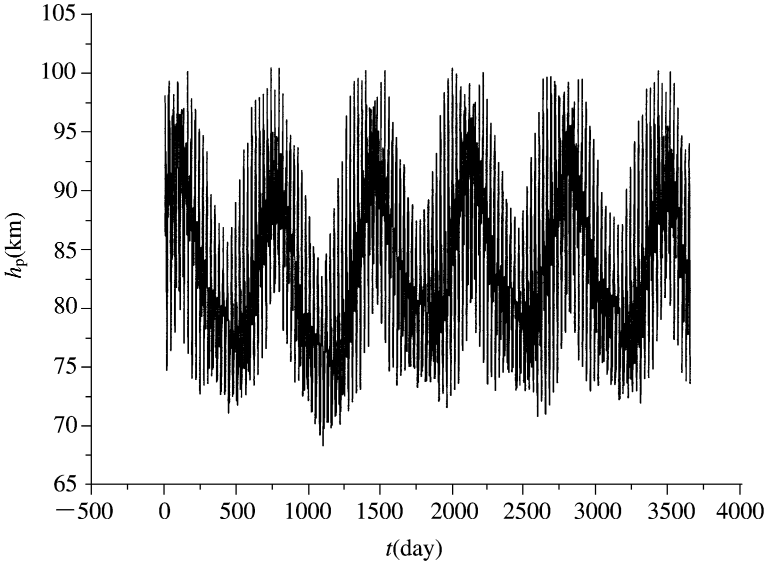

图 9.7　初始轨道倾角 $i_0 = 95°$的月球低轨卫星轨道寿命

参 考 文 献

［1］Koziel K. Physics and Astronomy of the Moon. Ed. by Kopal Z. New York: Academic Press,1962

［2］Gappellari J O. Velez C E & Fuchs A J. Mathematical Theory of Goddard Trajectory Determination System. Goddard Space Flight Center, Greenbeit, Maryland. 1976, N76－24291－24302: 3－31～ 3－32

［3］Eckhardt D H. Theory of the Libration of the Moon. The Moon and the Planets, 1981,25: 3～ 49

［4］Moons M. Physical Libration of the Moon. Celest. Mech. 1982,26(2) 131～142

［5］Newhall X. X. Estimation of the Lunar Physical Libration. Celest. Mech. 1997,66(1)21～30

［6］Oesterwinter C. The Motion of a Lunar Satellite. Celest. Mech. 1970, 1(3): 368～436

［7］Giacaglia G E O. Murphy J P. and Felsentreger T L. A Semi-Analytic Theory for the Motion of a Lunar Satellite. Celest. Mech. 1970, 3(1): 3～66

［8］Brumberg V A. Evdokimova L S. and Kochina N G. Analytical Methods for the Orbits of Artificial Satellites of the Moon. 1971, 3(2): 197～221

[9] Liu Lin and Wang Jia-song. An Analytic Solution of the Orbital of Lunar Satellites. Chin. Astron. Astrophys. 1998, 22(3): 328～351

[10] **刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京: 高等教育出版社**, 1992

[11] **刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社**. 2000

[12] **张巍, 刘林. 月球物理天平动对环月轨道器运动的影响. 天文学报**, 2005, 46(2): 196～206

[13] Marchal C. L. The Restricted Three-Body Problem Resisited. IAF - 99 - A. 7.01, 50th International Astronautical Congress, 4～8 Oct 1999, Amsterdam, The Netherlands

[14] **王歆, 刘林. 目标天体极轨卫星的轨道寿命. 宇航学报**. 2001, 22(5): 62～65

[15] Wang Xin, Liu Lin, Another Mechanism of Restricting the Lifetime of Orbiting Satellites. Chin. Astron. Astrophys. 2002, 26(4): 489～496

[16] Meyer K W, Buglia J J, Desai P N. LifeTimes of Lunar Satellite Orbits. NASA Technical Paper 3394, 1994

[17] Wang Xin, Liu Lin. Another Mechanism of Restricting the Lifetime of Orbiting Satellites (Continued). Chin. Astron. Astrophys. 2003, 27(1): 107～113

[18] **刘林, 刘世元, 王彦荣. 关于大行星(或月球)轨道器的冻结轨道. 飞行器测控学报**, 2003, 22(2): 19～24

第 10 章　航天器姿态动力学简介

§10.1　航天器姿态与姿态控制概述

航天器的轨道描述了航天器的质心运动，而航天器的姿态则是描述航天器绕其质心的运动，它们都是航天器状态的不同体现. 研究航天器状态(或相应的状态参数)的变化规律就是航天动力学的主要研究领域，研究质心的运动即航天器轨道力学，这正是前面各有关章节的内容，而研究航天器各部分相对其质心的运动，则称为航天器姿态动力学.

在空间运动的物体(可以是刚体、准刚体、弹性体、刚体与挠性体的混合系统等)，不论是自然天体还是人造航天器，它们的运动都可分解为两个部分，作为一个等效质点的平运动和该物体各个部分在外力矩作用下绕其质心的转动运动. 对于航天器的运动而言，即轨道运动和姿态运动. 所谓姿态就是航天器各部分(以具体的固连坐标系来体现)相对某空间参考系(或观测者)的方位或指向的统称. 早在人造地球卫星上天之前，天体力学家就曾对最熟悉的两个自然天体(地球和月球)的姿态运动进行了深入的研究，分别建立了地球自转轴在空间指向变化的岁差章动理论和月球自转轴在空间摆动的物理天平动理论. 人造天体上天后，为了充分利用各种航天器执行特定的航天任务，对其姿态运动提出了许多新要求、新理论，促使航天器姿态与控制的研究工作蓬勃发展，研究内容已不是一个简单的刚体定点转动了.

航天器执行航天任务时通常对其定向都有预定的要求. 例如对地观测卫星要把星上的遥感仪器(照相机镜头等)对准地面，通信卫星的定向通信天线也应指向地面，各种空间望远镜(包括太阳探测仪和巡天探测仪)都应使相应的探测镜头对准预定的天体或天区，卫星进行变轨机动时，星体推力方向也应有预定的方向等等. 多数航天器上的观测仪器及推力器等相对星体指向是固定的，这就要求航天器对某参考物体(地球、被探测天体，或相应的参考系)有给定的方位和指向，即一定的姿态. 而且由于受到外力矩的影

响,姿态将会发生变化,为了保证航天器所承担的特定的探测任务,必须对姿态进行控制,使其保持姿态稳定.

航天器的姿态确定不仅是执行特定航天任务的要求,它与轨道确定亦有密切联系.对于轨道变化中的非引力摄动效应,就与姿态有关,更确切地说,它需要了解有效截面 S 的变化规律 $S=S(t)$.要保证达到高精度的定轨和预报要求(也是轨控的需要),必须提供相应的姿态信息,否则在定轨中只能将相应的航天器有效面质比 (S/m) 当作待估参数去处理,而简单的处理又不能达到高精度的要求.

§10.2 描述航天器姿态的几种坐标系

姿态通常是用两坐标系之间的相对转动关系来描述,因此有必要介绍描述姿态的几种坐标系,而且同一坐标系在不同领域中可能有不用的名称,我们尽量使其统一.

1. 地心惯性坐标系 $O-xyz$

这一坐标系就是本书前面各章在轨道力学中引用的历元地心天球坐标系,即历元平赤道地心系,目前采用的历元即 J2000.这已为读者所熟知,不再介绍.

2. 航天器轨道坐标系 $S-x_o y_o z_o$

这里的轨道坐标系并不是轨道力学中所引用的那种混合坐标系(即坐标原点为地心,xy 平面为瞬时真赤道面,Ox 轴方向即历元平春分点方向),而是一种对航天器而言的"当地"坐标系.坐标原点为航天器的质心 S,Sz_o 轴指向地心,即轨道力学中的反径向,Sx_o 轴在轨道面内垂直 Sz_o,指向运动方向,即轨道力学中所说的横向,Sy_o 轴与 Sz_o,Sx_o 轴构成右手正交坐标系统,Sy_o 轴方向就是轨道力学中轨道面法向的反向.这种坐标系随着航天器的质心运动(即轨道运动)在空间是旋转的.上述对地定向的三轴稳定卫星(如遥感卫星、通信卫星)的姿态就定义在这种坐标系中,常把 Sx_o,Sy_o 和 Sz_o 三轴分别称为滚动轴,俯仰轴和偏航轴.

对于这种坐标系,三个坐标轴方向的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{x}}_o$,$\hat{\boldsymbol{y}}_o$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}_o$ 可由航天器的轨道运动量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$(即地心位置矢量和速度矢量)来定义:

$$\begin{cases} \hat{z}_o = -\boldsymbol{r}/r = -\hat{\boldsymbol{r}}, \\ \hat{\boldsymbol{y}}_o = \dfrac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}|} = -\hat{w}, \\ \hat{\boldsymbol{x}}_o = \hat{\boldsymbol{y}}_o \times \hat{z}_o = \hat{t}(\text{or}\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}). \end{cases} \tag{10.1}$$

这里 $\hat{r}$,$\hat{t}$(or　$\hat{\boldsymbol{\theta}}$)和 $\hat{w}$,即前各章常用到的径向、横向和轨道面法向单位矢量.

3. 航天器本体(自旋)坐标系 $S-x_by_bz_b$

坐标原点为航天器质心,Sx_b 轴为沿航天器纵轴方向指向航天器的前部,即航天器自旋转方向,Sy_b 轴在航天器纵对称面内,垂直于纵轴指向某特征点方向,Sz_b 轴即与 Sx_b,Sy_b 轴构成右手正交坐标系统.

4. 航天器惯性主轴坐标系 $S-x_ly_lz_l$

坐标原点仍为航天器质心,Sx_l,Sy_l,Sz_l 三个坐标轴方向即分别沿航天器三个惯性主轴方向.航天器姿态动力学研究中常用这一坐标系.

§10.3　航天器姿态参数

描述航天器的轨道参数即六个轨道根数,而描述航天器的姿态参数即通常所说的一组欧拉角,亦称姿态角.在航天器测控中,姿态角通常有两种定义:一种是航天器本体坐标系 $S-x_by_bz_b$ 相对于某一基准坐标系的一组欧拉角,这一定义常用于运载火箭发射段姿态角及载人飞船返回飞行时姿态角的描述;另一种是航天器本体坐标系相对于航天器轨道坐标系 $S-x_oy_oz_o$ 的一组欧拉角,这一定义常用于航天器在轨运行段姿态角的描述.

1. 第一类姿态角(φ,ψ,γ)及姿态矩阵的表达

如图 10.1 所示,由某一基准坐标系 $S-x_ty_tz_t$(以下记作 S_t),至本体坐标系 $S-x_by_bz_b$(以下记作 S_b)的转换依次为下面三次旋转:

(1) 绕 Oz_t 轴逆时针转一俯仰角 φ;

(2) 绕 Oy' 轴逆时针转一偏航角 ψ;

(3) 绕 Ox_b 轴逆时针转一滚动角 γ.

若分别记这两种坐标系 S_t 和 S_b 中的坐标矢量为 $\boldsymbol{R}_t$ 和 $\boldsymbol{R}_b$,则两者之间

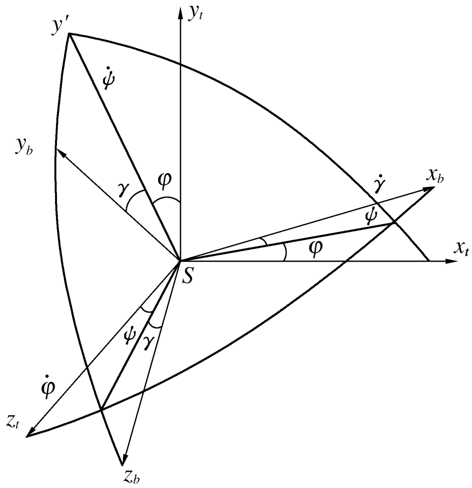

图 10.1　第一类姿态角的定义

的转换关系(即坐标旋转关系)为

$$\boldsymbol{R}_b = (\boldsymbol{A}_{bt})\boldsymbol{R}_t, \tag{10.2}$$

$$\boldsymbol{R}_t = (\boldsymbol{A}_{bt})^{-1}\boldsymbol{R}_b = (\boldsymbol{A}_{bt})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_b. \tag{10.3}$$

其中转换矩阵$(\boldsymbol{A}_{bt})$即这种定义下的姿态矩阵,有

$$(\boldsymbol{A}_{bt}) = \boldsymbol{R}_x(\gamma)\boldsymbol{R}_y(\psi)\boldsymbol{R}_z(\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi \\ -\cos\gamma\sin\varphi+\sin\gamma\sin\psi\cos\varphi & \cos\gamma\cos\varphi+\sin\gamma\sin\psi\sin\varphi & \sin\gamma\cos\psi \\ \sin\gamma\sin\varphi+\cos\gamma\sin\psi\cos\varphi & -\sin\gamma\cos\varphi+\cos\gamma\sin\psi\sin\varphi & \cos\gamma\cos\psi \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

当φ,ψ,γ均为小角度时,保留到一阶量,姿态矩阵$(\boldsymbol{A}_{bt})$的简化形式为

$$(\boldsymbol{A}_{bt}) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi & -\psi \\ -\varphi & 1 & \gamma \\ \psi & -\gamma & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.5}$$

2. 第二类姿态角(φ,φ,θ)及姿态矩阵的表达

如图 10.2 所示,由航天器轨道坐标系S_o至本体坐标系S_b的转换依次为下面三次旋转:

(1) 绕Sz_o轴逆时针转一偏航角ψ;

(2) 绕Sx'_o轴逆时针转一滚动角φ;

(3) 绕Sy_b轴逆时针转一俯仰角θ.

若分别记这两种坐标系 S_o 和 S_b 中的坐标矢量为 $\boldsymbol{R}_o$ 和 $\boldsymbol{R}_b$，则有

$$\boldsymbol{R}_b = (\boldsymbol{A}_{bo})\boldsymbol{R}_o, \tag{10.6}$$

$$\boldsymbol{R}_o = (\boldsymbol{A}_{bo})^{-1}\boldsymbol{R}_b = (\boldsymbol{A}_{bo})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_b. \tag{10.7}$$

这里的转换矩阵$(\boldsymbol{A}_{bo})$即第二类姿态角定义对应的姿态矩阵，有

$$(\boldsymbol{A}_{bo}) = \boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\varphi)\boldsymbol{R}_z(\psi)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\theta\sin\psi + \sin\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\theta\cos\varphi \\ -\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi \\ \sin\theta\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{10.8}$$

当 ψ,φ,θ 均为小角度时，保留到一阶量，姿态矩阵$(\boldsymbol{A}_{bo})$有如下简化形式：

$$(\boldsymbol{A}_{b\,t}) = \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.9}$$

上述姿态角即对应坐标轴的转动角，就称为欧拉角. 姿态参数还有另一种表示方法，即欧拉四元素表示法，下面介绍.

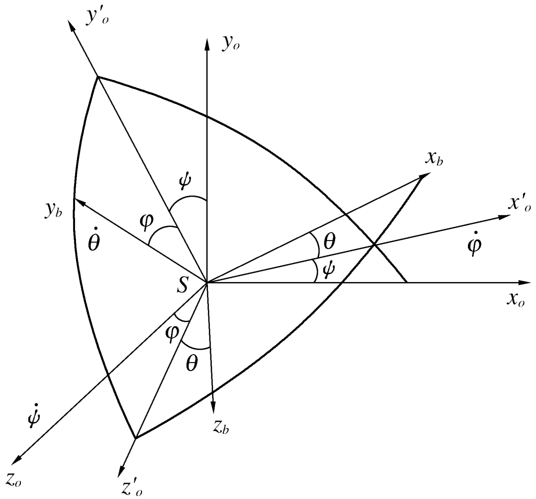

图 10.2　第二类姿态角的定义

3. 欧拉轴/角姿态参数——欧拉四元素

刚体绕固定点的任一位移（即由一坐标系到另一坐标系的旋转变换），可由绕通过此定点的某一轴（记为 e 轴）转动一个角度（记为 Φ）而得到，这

从前面的两种姿态角的定义过程中亦可看出. 转轴 e 称为欧拉轴，转角 Φ 称为欧拉角.

转轴 e 的单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 在参考坐标系中的三个方向余弦（即三个分量）e_x, e_y, e_z 和转角 Φ 即称为欧拉轴/角姿态参数. 引进 $\tilde{q}$：

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \sin \dfrac{\Phi}{2} \\ e_y \sin \dfrac{\Phi}{2} \\ e_z \sin \dfrac{\Phi}{2} \\ \cos \dfrac{\Phi}{2} \end{pmatrix}, \tag{10.10}$$

此即欧拉四元素. 这种姿态参数的表示在姿态动力学中也常会用到，有关细节不再介绍.

§10.4 姿态运动方程与姿态动力学

1. 姿态运动方程

在上一节姿态角的定义中，即通过刚体定点转动引入了欧拉角，绕一固定轴 e 的转动，亦可分解为先后绕一个参考坐标系的三个轴来实现. 转动角速度矢量记作 $\boldsymbol{\omega}$，有

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \tag{10.11}$$

相应的角速度记作 $\dot{\omega}$，有

$$\dot{\omega} = \mathrm{d}\,\Phi/\mathrm{d}t = \dot{\Phi}. \tag{10.12}$$

常把欧拉角的变率（即对时间 t 的导数 $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\gamma}$ 或 $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}$）与转动角速度 $\boldsymbol{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 的这种运动关系称为姿态运动方程. 下面分别就上一节前两种姿态角 (φ, ψ, γ) 和 (ψ, φ, θ) 的定义给出相应的姿态运动方程.

（1）定点转动的第一种体现——对基准坐标系 S_t 旋转的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在本体坐标系 S_b 中的表达记作

$$(\boldsymbol{\omega})_b = \begin{pmatrix} \omega_{xb} \\ \omega_{yb} \\ \omega_{zb} \end{pmatrix}, \tag{10.13}$$

上述转动是分解成三次转动完成的，相应的转动角速度为$\dot{\varphi},\dot{\psi},\dot{\gamma}$，根据图 10.1 不难给出

$$\begin{pmatrix}\omega_{xb}\\ \omega_{yb}\\ \omega_{zb}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+(\boldsymbol{A}_{b\ t})\begin{pmatrix}-\dot{\psi}\sin\varphi\\ \dot{\psi}\cos\varphi\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix},\tag{10.14}$$

利用矩阵$(\boldsymbol{A}_{b\ t})$的表达式(10.4)，即可得

$$\begin{cases}\omega_{xb}=\dot{\gamma}-\dot{\varphi}\sin\psi,\\ \omega_{yb}=\dot{\psi}\cos\gamma+\dot{\varphi}\sin\gamma\cos\psi,\\ \omega_{zb}=-\dot{\psi}\sin\gamma+\dot{\varphi}\cos\gamma\cos\psi.\end{cases}\tag{10.15}$$

由此亦可解出$\dot{\varphi},\dot{\psi},\dot{\gamma}$，有

$$\begin{cases}\dot{\varphi}=(\omega_{y\ b}\sin\gamma+\omega_{zb}\cos\gamma)/\cos\psi,\\ \dot{\psi}=\omega_{yb}\cos\gamma-\omega_{zb}\sin\gamma,\\ \dot{\gamma}=\omega_{xb}+(\omega_{y\ b}\sin\gamma+\omega_{zb}\cos\gamma)\tan\psi.\end{cases}\tag{10.16}$$

(2) 定点转动的第二种体现——本体坐标系 S_b 绕轨道坐标系 S_o 旋转的角速度矢量记为$\boldsymbol{\omega}_{bo}$，因 S_o 不是惯性坐标系，因此$\boldsymbol{\omega}_{bo}$是相对角速度矢量，在 S_b 坐标系中由下列形式表达：

$$(\boldsymbol{\omega}_{bo})_b=\begin{pmatrix}\omega_{xr}\\ \omega_{yr}\\ \omega_{zr}\end{pmatrix}.\tag{10.17}$$

根据图 10.2 不难看出

$$\begin{pmatrix}\omega_{xr}\\ \omega_{yr}\\ \omega_{zr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}+(\boldsymbol{A}_{bo})\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\cos\psi\\ \dot{\varphi}\sin\psi\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}.\tag{10.18}$$

利用矩阵$(\boldsymbol{A}_{bo})$的表达式(10.8)即可得

$$\begin{cases}\omega_{xr}=\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi,\\ \omega_{yr}=\dot{\theta}+\dot{\psi}\sin\varphi,\\ \omega_{zr}=\dot{\varphi}\sin\theta+\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi,\end{cases}\tag{10.19}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\omega_{yr}+(\omega_{xr}\sin\theta-\omega_{zr}\cos\theta)\tan\varphi,\\ \dot{\psi}=(-\omega_{xr}\sin\theta+\omega_{zr}\cos\theta)/\cos\varphi,\\ \dot{\varphi}=\omega_{xr}\cos\theta+\omega_{zr}\sin\theta,\end{cases}\tag{10.20}$$

记 S_b 绕惯性坐标系 S_t 旋转的绝对角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}_{bt}$，则有

$$\boldsymbol{\omega}_{bt}=\boldsymbol{\omega}_{bo}+\boldsymbol{\omega}_{ot},\tag{10.21}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{ot}$ 为 S_o 绕 S_t 旋转的角速度矢量，若记

$$(\boldsymbol{\omega}_{bt})_b=\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix},\tag{10.22}$$

通常它就是装在航天器上的陀螺仪的输出量. S_t 即对应前面 §10.2 中定义的地心惯性坐标系，因此有

$$(\boldsymbol{\omega}_{ot})_o=\begin{pmatrix}0\\ -\omega_0\\ 0\end{pmatrix}.\tag{10.23}$$

这里的 ω_0 即航天器的轨道角速度，严格而言，应有

$$\omega_0=\dot{f}+\dot{\omega}+\cos i\,\dot{\Omega}.\tag{10.24}$$

其中 $\dot{f}$，$\dot{\omega}$ 和 $\dot{\Omega}$ 即前面几章轨道力学给出的包括摄动效应的航天器质心运动的角变率.

$$(\boldsymbol{\omega}_{bt})_b=(\boldsymbol{\omega})_{bo}+(A_{bo})(\boldsymbol{\omega}_o t)_o.\tag{10.25}$$

由此可给出

$$\boldsymbol{\omega}_{bt}=\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\omega_0(\cos\theta\sin\psi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi)\\ \dot{\theta}+\dot{\psi}\sin\varphi-\omega_0\cos\varphi\cos\psi\\ \dot{\varphi}\sin\theta+\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi-\omega_0(\sin\theta\sin\psi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi)\end{pmatrix},\tag{10.26}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\omega_y+(\omega_x\sin\theta-\omega_z\cos\theta)\tan\varphi+\omega_0\cos\psi/\cos\varphi,\\ \dot{\psi}=(\omega_z\cos\theta-\omega_x\sin\theta-\omega_0\sin\varphi\cos\psi)/\cos\varphi,\\ \dot{\varphi}=\omega_x\cos\theta+\omega_z\sin\theta+\omega_0\sin\psi,\end{cases}\tag{10.27}$$

对小姿态角有

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_y + \omega_0\,, \\ \dot{\psi} = \omega_z - \omega_0 \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega_x + \omega_0 \psi. \end{cases} \tag{10.28}$$

2. 姿态动力学

姿态动力学即研究航天器(作为刚体或刚体与绕性体的混合系统等)姿态角在外力矩的作用下的变化规律. 对应轨道力学中的$\ddot{\boldsymbol{r}}$ 即 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$. $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(\psi,\varphi,\theta;\dot{\psi},\dot{\varphi},\dot{\theta})$或 $\boldsymbol{\omega}(\varphi,\psi,\gamma;\dot{\varphi},\dot{\psi},\dot{\gamma})$. 这是航天器姿态动力学的主要内容, 本书将不再深入阐明这类问题,作为基础内容可参阅该领域的相关书籍或教材[1~4].

参 考 文 献

[1] Wertz J R. Spacecraft Attitude Determination and Control. Holland: D. Reidel Publishing Company, 1978

[2] 刘延柱. 航天器姿态动力学. 北京: 国防工业出版社,1995

[3] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制. 北京: 北京航空航天大学出版社,1998

[4] 屠善澄(主编). 卫星姿态动力学与控制(1). 北京: 宇航出版社,1999

附录一　常用公式

球面三角公式

1. **正弦公式**：

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

2. **正弦公式**：

$$\cos a = \cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

$$\cos A =-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$$

3. **五元素公式**：

$$\sin a\cos B = \cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A$$

$$\sin A\cos b = \cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a$$

$$\sin A\cos B = \cos b\sin C-\sin B\cos c\cos A$$

公式中的 A,B,C **是球面三角形的三个角**，a,b,c **是相应的三个边**.

贝赛耳函数 $J_n(ne)$

$$J_1(e)=\frac{1}{2}e\left(1-\frac{1}{8}e^2+\frac{1}{192}e^4-\frac{1}{9216}e^6+\cdots\right)$$

$$J_2(2e)=\frac{1}{2}e^2\left(1-\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{24}e^4-\frac{1}{360}e^6+\cdots\right)$$

$$J_3(3e)=\frac{9}{16}e^3\left(1-\frac{9}{16}e^2+\frac{81}{640}e^4-\cdots\right)$$

$$J_4(4e)=\frac{2}{3}e^4\left(1-\frac{4}{5}e^2+\frac{4}{15}e^4-\cdots\right)$$

$$J_5(5e)=\frac{625}{768}e^5\left(1-\frac{25}{24}e^2+\cdots\right)$$

$$J_6(6e) = \frac{81}{80}e^6\left(1 - \frac{9}{7}e^2 + \cdots\right)$$

勒让德多项式 $P_l(\mu)$

$$P_0(\mu) = 1$$
$$P_1(\mu) = \mu$$
$$P_2(\mu) = \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}$$
$$P_3(\mu) = \frac{5}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu$$
$$P_4(\mu) = \frac{35}{8}\mu^4 - \frac{15}{4}\mu^2 + \frac{3}{8}$$
$$P_5(\mu) = \frac{63}{8}\mu^5 - \frac{35}{4}\mu^3 + \frac{15}{8}\mu$$
$$P_6(\mu) = \frac{231}{16}\mu^6 - \frac{315}{16}\mu^4 + \frac{105}{16}\mu^2 - \frac{5}{16}$$

缔合勒让德多项式 $P_{lm}(\mu)$

$$P_{1,1}(\mu) = (1-\mu^2)^{1/2}$$
$$P_{2,1}(\mu) = 3\mu(1-\mu^2)^{1/2}$$
$$P_{2,2}(\mu) = 3(1-\mu^2)$$
$$P_{3,1}(\mu) = \left(\frac{15}{2}\mu^2 - \frac{3}{2}\right)(1-\mu^2)^{1/2}$$
$$P_{3,2}(\mu) = 15\mu(1-\mu^2)$$
$$P_{3,3}(\mu) = 15(1-\mu^2)^{3/2}$$
$$P_{4,1}(\mu) = \left(\frac{35}{2}\mu^3 - \frac{15}{2}\mu\right)(1-\mu^2)^{1/2}$$
$$P_{4,2}(\mu) = \left(\frac{105}{2}\mu^2 - \frac{15}{2}\right)(1-\mu^2)$$
$$P_{4,3}(\mu) = 105\mu(1-\mu^2)^{3/2}$$
$$P_{4,4}(\mu) = 105(1-\mu^2)^2$$

一些函数的平均值

1. $\overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)} = 1$

2. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf} = 0 \quad (p,q = 0,1,2,\cdots)$

3. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf} = 0 \quad (p \geqslant 2, q \geqslant p-1)$

4. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf} = (1-e^2)^{-(p-3/2)} \sum_{n(2)=q}^{(p-2)-\delta} \binom{p-2}{n} \binom{n}{\frac{1}{2}(n-q)} \left(\frac{e}{2}\right)^n$

$$\delta = \frac{1}{2}[1-(-1)^{p-q}], (p \geqslant 2, q < p-1)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2} = (1-e^2)^{-1/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 1)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} = (1-e^2)^{-3/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos f} = \frac{1}{2}e(1-e^2)^{-3/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 2)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4} = \left(1+\frac{1}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos f} = e(1-e^2)^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos 2f} = \frac{1}{4}e^2(1-e^2)^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 3)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5} = \left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos f} = \frac{3}{2}e\left(1+\frac{1}{4}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 2f} = \frac{3}{4}e^2(1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 3f} = \frac{1}{8}e^3(1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 4)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6} = \left(1+3e^2+\frac{3}{8}e^4\right)(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos f} = 2e\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos 2f} = \frac{3}{2}e^2\left(1+\frac{1}{6}e^2\right)(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos 3f} = \frac{1}{2}e^3(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos 4f} = \frac{1}{16}e^4(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 5)$$

5. $$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)\cos qf} = \left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q (q=0,1,2,\cdots)$$

6. $$\overline{\cos qf} = \left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q(1+q\sqrt{1-e^2}) \quad (q=0,1,2,\cdots)$$

$$\overline{\cos f} = -e$$

$$\overline{\cos 2f} = \frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2$$

$$\overline{\cos 3f} = -\frac{4}{e}\overline{\cos 2f}+3e$$

$$\overline{\cos 4f} = \frac{2}{e^2}(6-e^2)\overline{\cos 2f}-9$$

$$\overline{\cos 5f} = -\frac{4}{e^3}(8-3e^2)\overline{\cos 2f}+\frac{1}{e}(24-5e^2)$$

$$\overline{\cos 6f} = \frac{1}{e^4}(80-48e^2+3e^4)\overline{\cos 2f}-\frac{2}{e^2}(30-13e^2)$$

7. $$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p(f-M)\cos qf} = 0 \quad (p,q=0,1,2,\cdots)$$

8. $$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2(f-M)\sin qf} = -\frac{1}{q}\left(\frac{\overline{\cos 2f}}{\sqrt{1-e^2}}\right) \quad (q \geqslant 1)$$

9. $$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p(f-M)\sin qf} = (1-e^2)^{-(p-3/2)}\sum_{n=0}^{p-2}\sum_{m=0}^{n}\binom{p-2}{n}\binom{n}{m}\left(\frac{e}{2}\right)^n \times \overline{\left\{-\frac{\cos(q+n-2m)f}{q+n-2m}\right\}}_{2m\neq q+n} \quad (p\geqslant 3, q\geqslant 1)$$

10. $\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^p\cos qf}$：

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)} = 1+\frac{1}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)\cos f} = -\frac{3}{2}e$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)\cos 2f} = \frac{3}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos f} = -2e\left(1 + \frac{1}{4}e^2\right)$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f} = \frac{5}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 3f} = -\frac{5}{2}e^3$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^3} = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^4} = 1 + 5e^2 + \frac{15}{8}e^4$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^5} = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^6} = 1 + \frac{21}{2}e^2 + \frac{105}{8}e^4 + \frac{35}{16}e^6$$

汉森系数 $X_p^{n,m}(e)(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, m = 0, 1, 2, \cdots)$

$$X_0^{n,0} = 1 + \frac{1}{4}n(n+1)e^2 + \frac{1}{64}n(n-2)(n^2-1)e^4 + \cdots$$

$$X_1^{n,0} = -\frac{1}{2}ne - \frac{1}{16}n(n^2-n-3)e^3 + \cdots$$

$$X_2^{n,0} = \frac{1}{8}n(n-3)e^2 + \frac{1}{96}n(n^3-6n^2-n+22)e^4 + \cdots$$

$$X_3^{n,0} = -\frac{1}{48}n(n^2-9n+17)e^3 + \cdots$$

$$X_4^{n,0} = \frac{1}{384}n(n^3-18n^2+95n-142)e^4 + \cdots$$

$$X_{-3}^{n,1} = \frac{1}{384}(n^4-10n^3+17n^2+28n-27)e^4 + \cdots$$

$$X_{-2}^{n,1} = -\frac{1}{48}(n^3-3n^2-4n+4)e^3 + \cdots$$

$$X_{-1}^{n,1} = \frac{1}{8}(n^2+n-1) + \frac{1}{96}(n^4-2n^3-4n^2+7n+2)e^4 + \cdots$$

$$X_0^{n,1}=-\frac{1}{2}(n+2)e-\frac{1}{16}n(n-1)(n+2)e^3+\cdots$$

$$X_1^{n,1}=1+\frac{1}{4}(n^2+n-4)e^2+\frac{1}{64}(n^4-2n^3-9n^2+2n+7)e^4+\cdots$$

$$X_2^{n,1}=-\frac{1}{2}(n-2)e-\frac{1}{16}(n^3-3n^2-12n+20)e^3+\cdots$$

$$X_3^{n,1}=\frac{1}{8}(n^2-7n+9)e^2+\frac{1}{96}(n^4-10n^3+2n^2+133n-162)e^4+\cdots$$

$$X_4^{n,1}=-\frac{1}{48}(n^3-15n^2+62n-64)e^3+\cdots$$

$$X_5^{n,1}=\frac{1}{384}(n^4-26n^3+221n^2-696n+625)e^4+\cdots$$

$$X_{-2}^{n,2}=\frac{1}{384}(n^4-2n^3-13n^2+6n+16)e^4+\cdots$$

$$X_{-1}^{n,2}=-\frac{1}{48}(n^3+3n^2-n-4)e^3+\cdots$$

$$X_0^{n,2}=\frac{1}{8}(n+2)(n+3)e^2+\frac{1}{96}(n-1)(n-2)(n+2)(n+3)e^4+\cdots$$

$$X_1^{n,2}=-\frac{1}{2}(n+4)e-\frac{1}{16}(n^3+3n^2-9n-28)e^3+\cdots$$

$$X_2^{n,2}=1+\frac{1}{4}(n^2+n-16)e^2+\frac{1}{64}(n^4-2n^3-33n^2+2n+220)e^4+\cdots$$

$$X_3^{n,2}=-\frac{1}{2}(n-4)e-\frac{1}{16}(n^3-5n^2-29n+108)e^3+\cdots$$

$$X_4^{n,2}=\frac{1}{8}(n^2-11n+26)e^2+\frac{1}{96}(n^4-14n^3+5n^2+436n-1036)e^4+\cdots$$

$$X_5^{n,2}=-\frac{1}{48}(n^3-21n^2+131n-236)e^3+\cdots$$

$$X_6^{n,2}=\frac{1}{384}(n^4-34n^3+395n^2-1826n+2760)e^4+\cdots$$

附录二 天文常数

IAU(1976)天文常数系统

单位:**米**(m)、**千克**(kg)**和秒**(s)**分别为国际单位系统**(SI)**中的长度、质量和时间单位**.

定义常数(defining constants)

1. **高斯引力常数**(Gaussian Gravitational Constant)

$k=0.01720209895$

2. **光速**(speed of light) $c=299792458\mathrm{ms}^{-1}$

初始常数(primary constants)

3. **一天文单位的光行时间**(light-time for unit distance)

$\tau_A=499.004782\mathrm{s}$

4. **地球赤道半径**(equatorial radius for earth) $a_e=6378140\mathrm{m}$

5. **地球形状力学因子**(dynamical form-factor for earth)

$J_2=0.00108263$

6. **地心引力常数**(geocentric gravitational constant)

$\mathrm{GE}=3.986005\times10^{14}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}$

7. **引力常数**(constant of gravitation) $G=6.672\times10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$

8. **月球与地球质量比**(ratio of mass of moon to that of earth)

$\mu=0.01230002$

9. **黄经总岁差**(general precession in longitude, per Julian century, at standard epoch 2000) $\rho=5029''.0966$

10. **黄赤交角**(obliquity of the ecliptic, at standard epoch 2000)

$\varepsilon = 23°26'21''.448$

推导常数(derived constants)

11. **章动常数**(constant of nutation, at standard epoch 2000)

$N = 9''.2025$

12. **一天文单位的长度**(unit distance)　$c\tau_A = 1.49597870 \times 10^{11}$ m

13. **太阳视差**(solar parallax)　$\arcsin(\alpha_c / A) = \pi_\odot = 8''.794148$

14. **光行差常数**(constant of aberration, for standard epoch 2000)

$\kappa = 20''.49552$

15. **地球扁率**(flattening factor for the earth)

$f = 0.00335281 = 1/298.257$

16. **日心引力常数**(heliocentric gravitational constant)

$A^3 k^2 / D^2 = GS = 1.32712438 \times 10^{20}\ \mathrm{m^3\,s^{-2}}$

17. **太阳与地球质量比**(ratio of mass of Sun to that of the earth)

$(GS)/(GE) = S/E = 332946.0$

18. **太阳与地月系质量比**(ratio of mass of sun to that of the earth+moon)

$(S/E)/(1+\mu) = 328900.5$

19. **太阳质量**(mass of the sun)　$(GS)/G = S = 1.9891 \times 10^{30}$ kg

20. **行星质量系统**(system of planetary masses)　(**太阳质量**=1)

Mercury	6023600	Jupiter	1047.355
Venus	408523.5	Saturn	3498.5
Earth+Moon	328900.5	Uranus	22869
Mars	3098710	Neptune	19314
		Pluto	3000000

附录三　地球和月球引力场模型

通常一个地球引力场模型包括如下内容：

GE——地心引力常数，a_e——地球参考椭球体赤道半径，

$\bar{C}_{lm}$，$\bar{S}_{lm}$——地球引力位球谐展开式的归一化谐系数，

当引用某一地球引力场模型时，严格而言，地固坐标系中的测站坐标 R_e 应与该引力场模型所对应的地球参考椭球体相吻合，这在精密定轨中（特别是定轨精度要求较高的问题）应加以考虑，因为它涉及到地心坐标系的严格定义. 同样对于月球引力场亦如此，相应地有月心引力常数 GM，月球参考椭球体赤道半径 a_e 和引力位球谐展开式的归一化系数 $\bar{C}_{lm}$，$\bar{S}_{lm}$.

为了实际应用的需要，这里介绍被广泛引用的 JGM－3 和 WGS84 两种地球引力场模型以及 LP75G 和当今认为精度较高的 LP165 两种月球引力场模型，供读者参考. 原 JGM－3 模型为 70×70 阶次，WGS84 模型为 180×180 阶次，LP165 模型为 165×165 阶次，LP75G 模型为 75×75 阶次，这里分别只给到 20×20 阶次，如有需要，读者可以在相关网站上调用完整模型.

JGM－3　GE＝398600.44150 km^3/s^2　a_e＝6378.13630 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	－.48416954845647D－03	.00000000000000D＋00
3	0	.95717059088800D－06	.00000000000000D＋00
4	0	.53977706835730D－06	.00000000000000D＋00
5	0	.68658987986543D－07	.00000000000000D＋00
6	0	－.14967156178604D－06	.00000000000000D＋00
7	0	.90722941643232D－07	.00000000000000D＋00
8	0	.49118003174734D－07	.00000000000000D＋00
9	0	.27385060950085D－07	.00000000000000D＋00
10	0	.54130445738812D－07	.00000000000000D＋00

11	0	−.50161314595688D−07	.00000000000000D+00
12	0	.36382340623690D−07	.00000000000000D+00
13	0	.39946428731683D−07	.00000000000000D+00
14	0	−.21803861547203D−07	.00000000000000D+00
15	0	.31659510926189D−08	.00000000000000D+00
16	0	−.54302320884432D−08	.00000000000000D+00
17	0	.18108375059805D−07	.00000000000000D+00
18	0	.72691846007246D−08	.00000000000000D+00
19	0	−.35185503098098D−08	.00000000000000D+00
20	0	.18789986549777D−07	.00000000000000D+00
2	1	−.18698764000000D−09	.11952801000000D−08
3	1	.20301372055530D−05	.24813079825561D−06
4	1	−.53624355429851D−06	−.47377237061597D−06
5	1	−.62727369697705D−07	−.94194632134383D−07
6	1	−.76103580407274D−07	.26899818932629D−07
7	1	.28028652203689D−06	.94777317813313D−07
8	1	.23333751687204D−07	.58499274939368D−07
9	1	.14223025892714D−06	.21909618349376D−07
10	1	.83758832332671D−07	−.13155406539843D−06
11	1	.16107077738720D−07	−.27892152840701D−07
12	1	−.54191701336309D−07	−.42011775767675D−07
13	1	−.52966868261361D−07	.39876816447422D−07
14	1	−.19023751941501D−07	.27471826062722D−07
15	1	.12019048467803D−07	.81732671079927D−08
16	1	.27533499349817D−07	.33708199043727D−07
17	1	−.26388862396409D−07	−.29852855753504D−07
18	1	.42100167037216D−08	−.39075893145582D−07
19	1	−.69675014448630D−08	.15804850737353D−09
20	1	.83477675011261D−08	.62445294169285D−08
2	2	.24392607486563D−05	−.14002663975880D−05
3	2	.90470634127291D−06	−.61892284647849D−06
4	2	.35067015645938D−06	.66257134594268D−06
5	2	.65245910276353D−06	−.32333435244435D−06
6	2	.48327472124892D−07	−.37381591944355D−06
7	2	.32976022742410D−06	.93193696831045D−07
8	2	.80070663931587D−07	.65518559097464D−07
9	2	.22620642355843D−07	−.32174984962166D−07
10	2	−.93557925682843D−07	−.51415890584901D−07
11	2	.18429795461053D−07	−.98452117204370D−07

12	2	.13985738460573D—07	.31047769644313D—07
13	2	.56039125275397D—07	—.62699341300935D—07
14	2	—.36978966062445D—07	—.29891074898391D—08
15	2	—.21746272853228D—07	—.31733039621956D—07
16	2	—.22395294006315D—07	.26206613354644D—07
17	2	—.17378596994668D—07	.91967492974033D—08
18	2	.12828248866347D—07	.13586359979031D—07
19	2	.31435051572210D—07	—.43295479774308D—08
20	2	.20030448029487D—07	.14884470088576D—07
3	3	.72114493982309D—06	.14142039847354D—05
4	3	.99086890577441D—06	—.20098735484731D—06
5	3	—.45183704808780D—06	—.21495419346421D—06
6	3	.57020965757974D—07	.88894738008251D—08
7	3	.25050152675038D—06	—.21732010845254D—06
8	3	—.19251764331400D—07	—.86285836534248D—07
9	3	—.16106427897243D—06	—.74545464061438D—07
10	3	—.71967367073644D—08	—.15417988118535D—06
11	3	—.30560698007455D—07	—.14880309051227D—06
12	3	.38978520777770D—07	.24576580959940D—07
13	3	—.21817131948590D—07	.98208999077455D—07
14	3	.36809435839364D—07	.20313404379978D—07
15	3	.52403064668802D—07	.15159862310361D—07
16	3	—.35100789004467D—07	—.23241519967982D—07
17	3	.74225615337830D—08	.81946523724251D—08
18	3	—.37596675909359D—08	—.31090562993624D—08
19	3	—.98999933204207D—08	—.98821208438535D—09
20	3	—.59349949066768D—08	.35571151171055D—07
4	4	—.18848136742527D—06	.30884803690355D—06
5	4	—.29512339302196D—06	.49741427230934D—07
6	4	—.86228032619800D—07	—.47140511232148D—06
7	4	—.27554096307403D—06	—.12414151248516D—06
8	4	—.24435806439297D—06	.69857074850431D—07
9	4	—.82017366877872D—08	.20068093286841D—07
10	4	—.84335352395338D—07	—.78485346171790D—07
11	4	—.40024107782339D—07	—.63596530213449D—07
12	4	—.68419698187080D—07	.29543256059344D—08
13	4	—.14709372441845D—08	—.12613848786464D—07
14	4	.17120660369001D—08	—.20688044000643D—07
15	4	—.42162691446070D—07	.78270996909884D—08

16	4	.41218976739860D−07	.46056696976601D−07
17	4	.75202561280798D−08	.23381994870984D−07
18	4	.53092291040775D−07	.14596998830727D−08
19	4	.15826786807335D−07	−.56619376893577D−08
20	4	.54571747234651D−08	−.22410101198270D−07
5	5	.17483157769990D−06	−.66939293724911D−06
6	5	−.26711227171966D−06	−.53641016466390D−06
7	5	.16440038146411D−08	.18075335233506D−07
8	5	−.25498410010257D−07	.89090297494640D−07
9	5	−.16325061515924D−07	−.54271473247992D−07
10	5	−.49519740818054D−07	−.50292693577921D−07
11	5	.37435874567708D−07	.49828631680041D−07
12	5	.31107075527266D−07	.76387883124312D−08
13	5	.58253125415417D−07	.65845648968111D−07
14	5	.29899462450133D−07	−.16857910838411D−07
15	5	.13450895846697D−07	.89823349629886D−08
16	5	−.13495263575727D−07	−.16788507060889D−08
17	5	−.17058052594159D−07	.53532065621805D−08
18	5	.73144220359351D−08	.24650351136750D−07
19	5	.12058223792869D−07	.27204444064611D−07
20	5	−.11452318388930D−07	−.69350775864877D−08
6	6	.95016518338557D−08	−.23726147889522D−06
7	6	−.35884263307918D−06	.15177808443426D−06
8	6	−.65859353864388D−07	.30892064157956D−06
9	6	.62833186922410D−07	.22267731094919D−06
10	6	−.37418833736693D−07	−.79464218274958D−07
11	6	−.14607814055515D−08	.34173161230373D−07
12	6	.33244194680361D−08	.39368833484484D−07
13	6	−.35311988740442D−07	−.60583315297552D−08
14	6	−.19400981730092D−07	.24129594129965D−08
15	6	.33463386220823D−07	−.37752532132562D−07
16	6	.14321054650520D−07	−.34445359251626D−07
17	6	−.13466610011002D−07	−.28274837436151D−07
18	6	.13377839989187D−07	−.15660996065894D−07
19	6	−.23850062007699D−08	.17951659591478D−07
20	6	.11565401097341D−07	−.42341732002092D−09
7	7	.13795170564076D−08	.24128594080773D−07
8	7	.67262701848734D−07	.74813196768710D−07
9	7	−.11815885217629D−06	−.96899385839989D−07

10	7	.82084062520783D−08	−.31491358401092D−08
11	7	.47061824740183D−08	−.89777235057051D−07
12	7	−.18603106541747D−07	.35570829249166D−07
13	7	.27063649200290D−08	−.77110578914500D−08
14	7	.36851132631493D−07	−.42223645889740D−08
15	7	.59912701354866D−07	.60561923271514D−08
16	7	−.78129662206869D−08	−.85101432520645D−08
17	7	.24011119637881D−07	−.58835543868363D−08
18	7	.65285877114871D−08	.62802630165493D−08
19	7	.73677859122170D−08	−.86648481719498D−08
20	7	−.20301510228149D−07	−.12995889226393D−09
8	8	−.12397061395498D−06	.12044100668766D−06
9	8	.18798426954722D−06	−.30154440657902D−08
10	8	.40467841871077D−07	−.91916682734371D−07
11	8	−.61406031069251D−08	.24572254505200D−07
12	8	−.25702477402668D−07	.16666794464624D−07
13	8	−.98871787586478D−08	−.97289371617499D−08
14	8	−.34866852918353D−07	−.14888414788683D−07
15	8	−.31989552416364D−07	.22270913883120D−07
16	8	−.21537842269728D−07	.52475750400288D−08
17	8	.37624561866834D−07	.37609560359427D−08
18	8	.31066116434825D−07	.24701340656902D−08
19	8	.31052189073581D−07	−.10462608847168D−07
20	8	.49222031305630D−08	.40671618436594D−08
9	9	−.47724821923178D−07	.96585577630797D−07
10	9	.12540250252277D−06	−.37736477753688D−07
11	9	−.31455516227675D−07	.42040713688155D−07
12	9	.41793077711655D−07	.25324579908954D−07
13	9	.24753630054781D−07	.45359257720667D−07
14	9	.32376638778215D−07	.28698212550741D−07
15	9	.13026722024257D−07	.37876413704166D−07
16	9	−.22776715289243D−07	−.38923887453334D−07
17	9	.32904899760425D−08	−.28585766401852D−07
18	9	−.19183123559344D−07	.36144387200323D−07
19	9	.30304661637596D−08	.64515566536913D−08
20	9	.18043912553397D−07	−.58648713867232D−08
10	10	.10038233131398D−06	−.23809404447193D−07
11	10	−.52129308588537D−07	−.18302278002235D−07
12	10	−.61693847120949D−08	.30986262918955D−07

13	10	.40892147458611D−07	−.37098943421354D−07
14	10	.38838489462067D−07	−.14646502936917D−08
15	10	.10311330752350D−07	.14956329195217D−07
16	10	−.12128710021123D−07	.12064635993103D−07
17	10	−.43040778296981D−08	.18038443987682D−07
18	10	.55661560255618D−08	−.45953868313856D−08
19	10	−.33377489589393D−07	−.70901793078301D−08
20	10	−.32549034672400D−07	−.57601831992074D−08
11	11	.46226945974065D−07	−.69592513786019D−07
12	11	.11320827288384D−07	−.63442255448454D−08
13	11	−.44739074565513D−07	−.48328920607274D−08
14	11	.15356539462914D−07	−.39038503109732D−07
15	11	−.95174491849600D−09	.18716336667474D−07
16	11	.19265835183290D−07	−.29747575202741D−08
17	11	−.15725519114554D−07	.11020868227887D−07
18	11	−.76424753587140D−08	.21171513660315D−08
19	11	.16080720197723D−07	.11000317328808D−07
20	11	.14562762720820D−07	−.18929751298295D−07
12	12	−.23492752269341D−08	−.10959426553406D−07
13	12	−.31410021346477D−07	.88106349374406D−07
14	12	.85046646166088D−08	−.30921727740280D−07
15	12	−.32728991604536D−07	.15719776528914D−07
16	12	.19697742559399D−07	.69145092797783D−08
17	12	.28689128789402D−07	.20744069700771D−07
18	12	−.29603019974536D−07	−.16192464661794D−07
19	12	−.29886557263191D−08	.93096798788415D−08
20	12	−.64092154083751D−08	.18154220942612D−07
13	13	−.61211341074230D−07	.68408785690868D−07
14	13	.32166747135071D−07	.45200081199389D−07
15	13	−.28288960926564D−07	−.42943958526004D−08
16	13	.13837330189163D−07	.99393104764339D−09
17	13	.16603066738893D−07	.20304808678395D−07
18	13	−.63799330347466D−08	−.34979730312351D−07
19	13	−.74465515090790D−08	−.28398303854051D−07
20	13	.27323490539213D−07	.70325129662091D−08
14	14	−.51783436366944D−07	−.50135706089731D−08
15	14	.53044811279796D−08	−.24442484622690D−07
16	14	−.19125929084628D−07	−.38860160731499D−07
17	14	−.14060794103232D−07	.11375705343040D−07

18	14	−.80028321553151D−08	−.13078375035713D−07
19	14	−.45294320737346D−08	−.13113452689000D−07
20	14	.11894377026580D−07	−.14472233857738D−07
15	15	−.19227532557760D−07	−.47043717740296D−08
16	15	−.14460511250623D−07	−.32699102984228D−07
17	15	.53318558273089D−08	.53871007251714D−08
18	15	−.40535566922307D−07	−.20249426822391D−07
19	15	−.17838458615368D−07	−.14105916172496D−07
20	15	−.25832737678316D−07	−.76580241490690D−09
16	16	−.37529424659874D−07	.35911038341162D−08
17	16	−.30061016811586D−07	.37240886096084D−08
18	16	.10670913840544D−07	.69654369110866D−08
19	16	−.21421212413032D−07	−.69574508679338D−08
20	16	−.12063704641516D−07	.33001883992357D−09
17	17	−.34064108542158D−07	−.19733214905988D−07
18	17	.36003191941618D−08	.45103760547938D−08
19	17	.29105753067619D−07	−.15152537147995D−07
20	17	.44347248372820D−08	−.13703405459961D−07
18	18	.26206060973410D−08	−.10810058406326D−07
19	18	.34714340290441D−07	−.94385774554964D−08
20	18	.14916632182652D−07	−.98369291535446D−09
19	19	−.23708581999978D−08	.47796091478955D−08
20	19	−.29626245297233D−08	.10959649647533D−07
20	20	.40445840955309D−08	−.12346618337924D−07

WGS84 GE＝398600.4418 km^3/s^2 a_e＝6378.1370 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	−0.48416685D−03	0.00000000D+00
3	0	0.95706390D−06	0.00000000D+00
4	0	0.53699587D−06	0.00000000D+00
5	0	0.71092048D−07	0.00000000D+00
6	0	−0.15064821D−06	0.00000000D+00
7	0	0.85819217D−07	0.00000000D+00
8	0	0.42979835D−07	0.00000000D+00
9	0	0.33173231D−07	0.00000000D+00
10	0	0.50931575D−07	0.00000000D+00
11	0	−0.58114696D−07	0.00000000D+00
12	0	0.34073235D−07	0.00000000D+00

13	0	0.48159534D−07	0.00000000D+00
14	0	−0.25559279D−07	0.00000000D+00
15	0	−0.55534001D−08	0.00000000D+00
16	0	0.96352958D−08	0.00000000D+00
17	0	0.27418160D−07	0.00000000D+00
18	0	0.10196218D−07	0.00000000D+00
19	0	−0.11009860D−07	0.00000000D+00
20	0	0.25008019D−07	0.00000000D+00
2	1	0.00000000D+00	0.00000000D+00
2	2	0.24395796D−05	−0.13979548D−05
3	1	0.20318729D−05	0.25085759D−06
3	2	0.90666113D−06	−0.62102428D−06
3	3	0.71770352D−06	0.14152388D−05
4	1	−0.53548044D−06	−0.47420394D−06
4	2	0.34797519D−06	0.65579158D−06
4	3	0.99172321D−06	−0.19912491D−06
4	4	−0.18686124D−06	0.30953114D−06
5	1	−0.64185265D−07	−0.92492959D−07
5	2	0.65184984D−06	−0.32007416D−06
5	3	−0.44903639D−06	−0.21328272D−06
5	4	−0.29719055D−06	0.53213480D−07
5	5	0.17523221D−06	−0.67059456D−06
6	1	−0.74180259D−07	0.32780040D−07
6	2	0.51824409D−07	−0.35866634D−06
6	3	0.53370577D−07	0.61334720D−08
6	4	−0.88694856D−07	−0.47260945D−06
6	5	−0.26818820D−06	−0.53491073D−06
6	6	0.10237832D−07	−0.23741002D−06
7	1	0.27905196D−06	0.94231346D−07
7	2	0.32873832D−06	0.88835092D−07
7	3	0.24940240D−06	−0.21223369D−06
7	4	−0.27123034D−06	−0.12696607D−06
7	5	0.10246290D−08	0.17321672D−07
7	6	−0.35843745D−06	0.15202633D−06
7	7	−0.20991457D−08	0.22805664D−07
8	1	0.18889342D−07	0.47856967D−07
8	2	0.73553952D−07	0.47867693D−07
8	3	−0.12132459D−07	−0.83461853D−07
8	4	−0.24208264D−06	0.71603924D−07

8	5	−0.24966587D−07	0.87751047D−07
8	6	−0.65093424D−07	0.30904202D−06
8	7	0.66323292D−07	0.74661766D−07
8	8	−0.12372281D−06	0.12210258D−06
9	1	0.14747969D−06	0.23894354D−07
9	2	0.22052093D−07	−0.26876665D−07
9	3	−0.16256047D−06	−0.85928431D−07
9	4	−0.17193827D−07	0.26077030D−07
9	5	−0.16902791D−07	−0.50337365D−07
9	6	0.65717910D−07	0.22275858D−06
9	7	−0.11648016D−06	−0.97298769D−07
9	8	0.18896045D−06	−0.31026222D−08
9	9	−0.48275744D−07	0.96381072D−07
10	1	0.88706517D−07	−0.12536457D−06
10	2	−0.82375203D−07	−0.38280049D−07
10	3	−0.13137371D−07	−0.15553732D−06
10	4	−0.87424319D−07	−0.79215732D−07
10	5	−0.53980821D−07	−0.46294947D−07
10	6	−0.42371448D−07	−0.79680607D−07
10	7	0.83736045D−08	−0.25636582D−08
10	8	0.41239589D−07	−0.92269095D−07
10	9	0.12539514D−06	−0.37687117D−07
10	10	0.10124370D−06	−0.24874984D−07
11	1	0.95375839D−08	−0.22094828D−07
11	2	0.21716225D−07	−0.10224810D−06
11	3	−0.30023695D−07	−0.13422019D−06
11	4	−0.30407161D−07	−0.69823333D−07
11	5	0.35104609D−07	0.49175170D−07
11	6	−0.37911105D−08	0.36848522D−07
11	7	0.25774039D−08	−0.88658395D−07
11	8	−0.71396627D−08	0.23243077D−07
11	9	−0.30246313D−07	0.41776400D−07
11	10	−0.53424279D−07	−0.18716766D−07
11	11	0.47514858D−07	−0.70415796D−07
12	1	−0.60609926D−07	−0.38189082D−07
12	2	0.74200188D−08	0.24640620D−07
12	3	0.42149817D−07	0.32189594D−07
12	4	−0.64346831D−07	−0.25364931D−08
12	5	0.33126200D−07	−0.40658586D−09

12	6	0.86981502D−08	0.36711094D−07
12	7	−0.16598048D−07	0.34475954D−07
12	8	−0.26843700D−07	0.17838309D−07
12	9	0.42293015D−07	0.27107811D−07
12	10	−0.44237357D−08	0.30823394D−07
12	11	0.96462514D−08	−0.60711291D−08
12	12	−0.30878714D−08	−0.10932316D−07
13	1	−0.47921675D−07	0.34957177D−07
13	2	0.48705121D−07	−0.63933232D−07
13	3	−0.17219549D−07	0.82465794D−07
13	4	−0.92616056D−08	−0.98249479D−09
13	5	0.58545255D−07	0.66075856D−07
13	6	−0.28548757D−07	−0.13018250D−07
13	7	0.10048687D−07	−0.12672050D−07
13	8	−0.12236037D−07	−0.11680475D−07
13	9	0.25798630D−07	0.46771958D−07
13	10	0.42112066D−07	−0.35203559D−07
13	11	−0.44423472D−07	−0.63137559D−08
13	12	−0.31610688D−07	0.86378230D−07
13	13	−0.61019573D−07	0.68712423D−07
14	1	−0.10581256D−07	0.22739082D−07
14	2	−0.32588467D−07	−0.45984585D−08
14	3	0.33411750D−07	0.72271094D−08
14	4	0.34163340D−08	−0.23062568D−07
14	5	0.21777499D−07	−0.44340974D−08
14	6	−0.23022045D−07	0.79137357D−08
14	7	0.39355808D−07	−0.52187212D−08
14	8	−0.31866053D−07	−0.16609601D−07
14	9	0.30182993D−07	0.23942248D−07
14	10	0.36008306D−07	−0.43924872D−09
14	11	0.16006347D−07	−0.40475033D−07
14	12	0.79810549D−08	−0.31068551D−07
14	13	0.33446421D−07	0.44622344D−07
14	14	−0.52174166D−07	−0.48789452D−08
15	1	0.77027909D−08	0.12667983D−07
15	2	−0.13310361D−07	−0.25570239D−07
15	3	0.53469109D−07	0.21540830D−07
15	4	−0.35485140D−07	−0.38325971D−08
15	5	0.80670670D−08	0.95367405D−08

15	6	0.28835774D−07	−0.29584853D−07
15	7	0.55297561D−07	0.12688881D−07
15	8	−0.26866012D−07	0.28508669D−07
15	9	0.15229368D−07	0.40242957D−07
15	10	0.78226264D−08	0.16482104D−07
15	11	−0.45323941D−08	0.16379211D−07
15	12	−0.34310516D−07	0.13248557D−07
15	13	−0.27865470D−07	−0.51124016D−08
15	14	0.58007239D−08	−0.24830947D−07
15	15	−0.18756974D−07	−0.53745848D−08
16	1	0.16657011D−07	0.32088971D−07
16	2	−0.22051986D−07	0.26286204D−07
16	3	−0.29514849D−07	−0.95827659D−08
16	4	0.37621131D−07	0.55477548D−07
16	5	−0.10479239D−07	−0.27382338D−08
16	6	0.97407454D−08	−0.43087957D−07
16	7	−0.12168169D−07	−0.56636996D−08
16	8	−0.25034024D−07	0.22895737D−08
16	9	−0.17908785D−07	−0.29938908D−07
16	10	−0.10129689D−07	0.12404473D−07
16	11	0.19053980D−07	−0.17354590D−08
16	12	0.18888013D−07	0.46949615D−08
16	13	0.15158142D−07	−0.17410596D−09
16	14	−0.19416172D−07	−0.38724225D−07
16	15	−0.14400649D−07	−0.33151819D−07
16	16	−0.40920912D−07	0.23449430D−08
17	1	−0.17492372D−07	−0.29004434D−07
17	2	−0.24972136D−07	0.52345300D−08
17	3	0.75958226D−08	0.13161951D−07
17	4	−0.35567936D−08	0.29108859D−07
17	5	−0.16440517D−07	0.15666155D−07
17	6	−0.29053420D−08	−0.41239945D−07
17	7	0.30327591D−07	−0.54652615D−08
17	8	0.26828952D−07	−0.69634040D−08
17	9	−0.74685923D−09	−0.31300568D−07
17	10	−0.10536220D−08	0.18628074D−07
17	11	−0.13049234D−07	0.13662390D−07
17	12	0.32820228D−07	0.17654374D−07
17	13	0.17049873D−07	0.19279770D−07

17	14	−0.14027974D−07	0.11214602D−07
17	15	0.56624501D−08	0.56527252D−08
17	16	−0.32153542D−07	0.33341657D−08
17	17	−0.37961677D−07	−0.17192537D−07
18	1	0.85717760D−08	−0.32887288D−07
18	2	0.11021506D−07	0.96877203D−08
18	3	−0.78128408D−08	−0.16263649D−07
18	4	0.50107239D−07	−0.35094534D−08
18	5	−0.35408518D−08	0.26790491D−07
18	6	0.12489735D−07	−0.12526195D−07
18	7	0.14813821D−07	−0.18829836D−08
18	8	0.35285229D−07	0.13368789D−08
18	9	−0.24544444D−07	0.25745394D−07
18	10	0.84106552D−09	−0.44929528D−08
18	11	−0.92784417D−08	0.11278314D−08
18	12	−0.29997564D−07	−0.13762992D−07
18	13	−0.61616779D−08	−0.34022737D−07
18	14	−0.77166667D−08	−0.13392253D−07
18	15	−0.38973604D−07	−0.20668220D−07
18	16	0.10273437D−07	0.69198054D−08
18	17	0.33491685D−08	0.54056479D−08
18	18	0.11121796D−08	−0.94806182D−08
19	1	−0.78038897D−08	−0.10955201D−07
19	2	0.32332353D−07	0.42071678D−08
19	3	−0.91228010D−08	−0.55932845D−08
19	4	0.19091610D−07	−0.12713298D−07
19	5	0.14937350D−07	0.13014332D−07
19	6	−0.80825838D−08	0.24601857D−07
19	7	0.93869167D−08	−0.65383900D−08
19	8	0.31905603D−07	−0.62494067D−08
19	9	0.54433641D−08	0.64645032D−08
19	10	−0.34557189D−07	−0.72672139D−08
19	11	0.92637732D−08	0.73094973D−08
19	12	−0.10667096D−07	0.12169099D−07
19	13	−0.81139968D−08	−0.30216212D−07
19	14	−0.54501014D−08	−0.13327961D−07
19	15	−0.18328337D−07	−0.13873813D−07
19	16	−0.23275873D−07	−0.66988140D−08
19	17	0.30387596D−07	−0.15039250D−07

19	18	0.34106265D−07	−0.76175619D−08
19	19	−0.17274425D−08	0.25989338D−08
20	1	0.59665339D−08	−0.79800572D−08
20	2	0.14911085D−07	0.16645861D−07
20	3	−0.16271296D−09	0.33562815D−07
20	4	0.94176628D−08	−0.23750287D−07
20	5	−0.11339236D−07	−0.14341921D−07
20	6	0.14119805D−07	−0.28530016D−08
20	7	−0.27298042D−07	−0.37844129D−08
20	8	0.38489401D−08	0.54767756D−08
20	9	0.20478593D−07	0.52391740D−10
20	10	−0.25203296D−07	−0.73475808D−09
20	11	0.18615023D−07	−0.20030349D−07
20	12	−0.47849719D−08	0.13733707D−07
20	13	0.26975872D−07	0.44620950D−08
20	14	0.10796764D−07	−0.12763697D−07
20	15	−0.26288771D−07	0.52729036D−09
20	16	−0.99274819D−08	−0.36128778D−09
20	17	0.43953910D−08	−0.11345533D−07
20	18	0.15890733D−07	−0.30863268D−08
20	19	−0.36173742D−08	0.10165417D−07
20	20	0.55214181D−08	−0.13903843D−07

LP165 GM＝4902.801056 km^3/s^2 a_e＝1738.0 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	−.9089018075060000E−04	.0000000000000000E+00
3	0	−.3203591400300000E−05	.0000000000000000E+00
4	0	.3197309571720000E−05	.0000000000000000E+00
5	0	−.2157038206820000E−06	.0000000000000000E+00
6	0	.3765780618660000E−05	.0000000000000000E+00
7	0	.5622211787280000E−05	.0000000000000000E+00
8	0	.2346499680120000E−05	.0000000000000000E+00
9	0	−.3555033829560000E−05	.0000000000000000E+00
10	0	−.9311407332660000E−06	.0000000000000000E+00
11	0	−.9753318167379999E−06	.0000000000000000E+00
12	0	−.1937398344200000E−05	.0000000000000000E+00
13	0	.2721141561420000E−06	.0000000000000000E+00
14	0	.3240726700950000E−06	.0000000000000000E+00

15	0	－.5300068616220000E－07	.0000000000000000E＋00
16	0	.4091171538200000E－06	.0000000000000000E＋00
17	0	－.1054609176910000E－05	.0000000000000000E＋00
18	0	－.3845560724660000E－06	.0000000000000000E＋00
19	0	－.1966435801860000E－07	.0000000000000000E＋00
20	0	.5287156625770000E－06	.0000000000000000E＋00
2	1	－.2722032361590000E－08	－.7575182920830000E－09
2	2	.3463549937220000E－04	.1672949053830000E－07
3	1	.2632744012180000E－04	.5464363089820000E－05
3	2	.1418817932940000E－04	.4892036500480000E－05
3	3	.1228605894470000E－04	－.1785448081640000E－05
4	1	－.5996601830150000E－05	.1661934519470000E－05
4	2	－.7081806926970000E－05	－.6783627172690000E－05
4	3	－.1362298338130000E－05	－.1344347228710000E－04
4	4	－.6025778735830000E－05	.3939637195380000E－05
5	1	－.1019195653760000E－05	－.4109254150730000E－05
5	2	.4376608114970000E－05	.1084099769880000E－05
5	3	.4497767875950000E－06	.8700841208620000E－05
5	4	.2783424136030000E－05	.5938802393300000E－07
5	5	.3119625893770000E－05	－.2760966271960000E－05
6	1	.1531984393890000E－05	－.2576600639760000E－05
6	2	－.4352218123230000E－05	－.2187448015220000E－05
6	3	－.3270051634600000E－05	－.3469143028430000E－05
6	4	.3697821857860000E－06	－.4068810656300000E－05
6	5	.1404474618350000E－05	－.1033170188970000E－04
6	6	－.4704301085460000E－05	.7236008813510000E－05
7	1	.7552259234450000E－05	－.1296522202330000E－06
7	2	－.6631948361600000E－06	.2384789067160000E－05
7	3	.5826787994770001E－06	.2355772260700000E－05
7	4	－.9266265301300000E－06	.7915736546610000E－06
7	5	－.2719477973700000E－06	.1126877878840000E－05
7	6	－.9928857241339999E－06	.1107954866840000E－05
7	7	－.1788466088650000E－05	－.1616507107160000E－05
8	1	－.6088981217920000E－07	.1112544861480000E－05
8	2	.2994777877990000E－05	.1925832475840000E－05
8	3	－.1880012181150000E－05	.9535825505100000E－06
8	4	.3373519721590000E－05	－.4560565395690000E－06
8	5	－.1125272717320000E－05	.2925714953190000E－05
8	6	－.1543301441280000E－05	－.2248184271110000E－05

8	7	−.1591465180010000E−05	.3222090972550000E−05
8	8	−.2530697259120000E−05	.2140620023560000E−05
9	1	.1980425673460000E−05	.7896372030830000E−07
9	2	.1991028324820000E−05	−.1449221144130000E−05
9	3	−.2018621239890000E−05	.2234057350360000E−05
9	4	−.1895934358830000E−05	−.1385064502050000E−05
9	5	−.1484569053750000E−05	−.3699324303180000E−05
9	6	−.2278199888880000E−05	−.3071527334340000E−05
9	7	−.4066701007940000E−05	.1112438015330000E−06
9	8	−.1241792211950000E−05	−.2128975363780000E−05
9	9	−.8972926651360000E−06	.2457973274100000E−05
10	1	.8160652991070000E−06	−.9872542654059999E−06
10	2	.2411616832230000E−06	−.2693731057550000E−06
10	3	.3965613950090000E−06	.7644820480930000E−06
10	4	−.3571289581480000E−05	.1545132947240000E−05
10	5	.7258951500910000E−06	−.3686516029930000E−06
10	6	−.1959496357290000E−06	−.1819040410420000E−05
10	7	−.3838466073530000E−05	−.8052902373150000E−06
10	8	−.3411017972900000E−05	.2582534198110000E−05
10	9	−.4785783138070000E−05	−.1225243946800000E−06
10	10	.9238929016380000E−06	−.1702128574050000E−05
11	1	−.1203799652080000E−06	.6173266667270000E−06
11	2	.7426226109460000E−06	−.1942686167330000E−05
11	3	.4257220709970000E−06	.7909629921760000E−06
11	4	−.9539676434430001E−06	.2130971124690000E−05
11	5	.1524913492910000E−06	.2561492060700000E−05
11	6	.4865214681670000E−06	−.1359116333550000E−05
11	7	−.7139970510720001E−07	−.3162700313200000E−05
11	8	−.2233134538440000E−05	−.4713142784160000E−06
11	9	−.2435260078030000E−05	.4904209545970000E−06
11	10	−.4706932854420000E−05	−.1473099267880000E−06
11	11	−.2889982063860000E−05	−.1740752542340000E−05
12	1	−.5840281328970000E−06	.1600803415350000E−05
12	2	−.1559756907250000E−06	.1507492473180000E−05
12	3	.8176232978290000E−06	−.4016586322740000E−05
12	4	.9200105654750000E−06	−.5116840362370000E−06
12	5	−.1613291576740000E−06	.8527110768970000E−06
12	6	.8663826957830000E−06	.6962375776900000E−06
12	7	.2177719876460000E−05	−.8594204978010000E−06

12	8	.4644822522870000E−06	−.1931266868990000E−05
12	9	−.1275699709060000E−05	.1099264569920000E−05
12	10	−.3051832609090000E−05	−.1407867333810000E−05
12	11	−.8820185953780000E−06	−.2938683597320000E−06
12	12	.3241211015000000E−06	.1220662771710000E−05
13	1	.1124374627630000E−05	−.1052120815490000E−06
13	2	−.3525023069470000E−05	.5102794043790000E−06
13	3	−.3150182721000000E−06	−.1479723660330000E−05
13	4	.8326676975230000E−06	−.6892403004050000E−06
13	5	−.1337547583460000E−05	.1314298665750000E−05
13	6	.1326377626870000E−06	.1552649198560000E−05
13	7	.1355060596540000E−06	−.9776914266179999E−06
13	8	−.3350336778860000E−06	−.1485146656430000E−05
13	9	−.2907586170900000E−06	.3899815898970000E−06
13	10	−.6121863430540000E−06	.5600355713980000E−06
13	11	−.1258454356380000E−05	.4401012500280000E−06
13	12	−.7419750516520000E−06	−.1598312733260000E−05
13	13	.2473266154300000E−05	−.2645625441230000E−05
14	1	.6605886153930000E−06	−.6102080115560000E−06
14	2	.5237129141790000E−06	.3893599535420000E−06
14	3	.6761555983020000E−06	.2699002370410000E−07
14	4	−.4055805840340000E−06	−.2587974145560000E−05
14	5	−.8820159199920000E−06	−.1152684066890000E−06
14	6	−.5168935258780000E−06	.1493864899430000E−05
14	7	−.6698062571250000E−06	.8749406071470000E−06
14	8	.2056416633160000E−07	.8920163207590000E−06
14	9	.1741653826860000E−06	−.1213280253010000E−05
14	10	−.6611552322000000E−06	.5558230274330000E−06
14	11	−.2180453219110000E−05	.1765626024610000E−05
14	12	−.1528712322610000E−05	−.4686885744510000E−06
14	13	−.1161871319260000E−06	−.9512518551550000E−06
14	14	−.5993342422150000E−06	.1085405659060000E−05
15	1	−.7720237886770000E−06	.3416825217100000E−06
15	2	−.1734087692300000E−06	.7107531875800000E−06
15	3	−.1328024730080000E−05	−.7072224883850000E−06
15	4	−.1122880254730000E−05	−.1287530690790000E−05
15	5	−.1578202291340000E−06	−.7717380981580000E−06
15	6	.5016702309120000E−07	−.3322975407980000E−06
15	7	.1155400728180000E−05	.1852235408190000E−05

15	8	.1495030529990000E−05	.2243594932260000E−05
15	9	.1020601945100000E−06	−.1551459288920000E−05
15	10	−.2733730968390000E−06	−.5146112634660000E−07
15	11	−.1470527070930000E−05	−.1347845965970000E−05
15	12	−.1315958044460000E−05	−.3397817428330000E−06
15	13	−.3415724782220000E−06	.3040255512600000E−06
15	14	.6412529709410000E−06	.5481518253720000E−06
15	15	.5484614417000000E−06	.7010126995500000E−06
16	1	−.9730736334240000E−07	.8760174976920000E−06
16	2	.1649803094150000E−05	.3447923814940000E−07
16	3	−.1028543757360000E−06	.4279054459510000E−06
16	4	.4759886265690000E−06	.4784594724110000E−06
16	5	.9327815906229999E−06	−.5278125821530000E−06
16	6	.1038815565900000E−05	−.1023391217820000E−05
16	7	−.3509818646270000E−06	−.7329585679150000E−06
16	8	−.1209647724210000E−06	.3061781356220000E−07
16	9	−.1024878692720000E−05	−.1175313551420000E−05
16	10	.2041068982310000E−06	.5738832768160000E−06
16	11	.4353588214120000E−07	.1142697506150000E−05
16	12	−.1370427536750000E−05	.7981123576490000E−06
16	13	−.7515455438780000E−06	−.1582987773040000E−06
16	14	−.6985530034730000E−06	−.3951607972970000E−07
16	15	−.2725916962020000E−06	−.1055944928880000E−05
16	16	−.9090919669600000E−06	−.7862566594060000E−06
17	1	.8001655103230000E−06	.8782566135379999E−07
17	2	−.1712007938030000E−06	−.1044625395330000E−05
17	3	−.2171003772770000E−06	−.5318728899250000E−06
17	4	.1160294301800000E−05	.2208046994200000E−05
17	5	.3987135221710000E−06	−.8546560303970000E−06
17	6	.6100249367180000E−06	−.1495046622310000E−05
17	7	−.1625341936850000E−05	−.1107516297980000E−05
17	8	−.2118351672660000E−06	−.1518974822660000E−06
17	9	.5294629225970000E−06	.1560931339170000E−05
17	10	.7207737799020000E−06	.8858944398520000E−06
17	11	.9778883897600000E−06	−.6317056739230000E−06
17	12	.4578423147650000E−06	.5004761917360000E−07
17	13	.1526580059470000E−06	−.3422108737150000E−06
17	14	.9390029879520000E−06	.1431458214660000E−06
17	15	−.7398523706930000E−07	.1442972353860000E−07

17	16	−.2779658584330000E−06	−.2124792147220000E−06
17	17	−.4026973925480000E−06	.1352327272470000E−05
18	1	.1926985450180000E−06	−.5716667989280000E−07
18	2	−.4151803997590000E−06	−.7264058323630000E−06
18	3	.8788234066590000E−06	.5810458034470000E−06
18	4	−.8002493519270000E−06	.1146864632710000E−05
18	5	−.3246103503840000E−06	−.2858696150670000E−07
18	6	−.1762576111470000E−05	.9779780361339999E−06
18	7	−.1428877959440000E−06	−.8132546628140000E−06
18	8	.6678620054120000E−06	−.2270994680460000E−06
18	9	.5781241734200000E−06	−.1086143171510000E−05
18	10	.1626016781020000E−06	−.6413377613150000E−06
18	11	.1190190743410000E−06	−.1444990699210000E−05
18	12	.1162238473580000E−05	.4620652564480000E−06
18	13	−.7025354729210000E−06	−.2565078450200000E−06
18	14	−.1817876603890000E−06	−.6252496023590000E−06
18	15	−.8722606631480000E−07	−.8552186526090001E−06
18	16	.8724747507420000E−06	−.9751565128220000E−06
18	17	.1081594958580000E−05	−.4332237965390000E−06
18	18	−.1373957205930000E−06	−.1686674948910000E−06
19	1	−.4962928104700000E−06	.1917539727470000E−06
19	2	.3651286187540000E−06	−.3673868976850000E−06
19	3	−.8249886032800000E−06	.9885468299320000E−06
19	4	−.8331456066520000E−06	−.1037532326060000E−05
19	5	−.3714267370040000E−07	.1324756958540000E−05
19	6	−.3679863543070000E−07	.3340065002820000E−06
19	7	.1112462470960000E−05	.3538153590430000E−06
19	8	.5104515087760000E−06	.5192526970870000E−06
19	9	−.1241929032180000E−06	.6804512884750001E−07
19	10	−.7518310037950000E−06	.2782982975350000E−06
19	11	.1576977903700000E−06	−.1512294300270000E−06
19	12	.1010532037040000E−06	−.2539218556640000E−06
19	13	.3236778837630000E−06	.2241057468460000E−05
19	14	−.5106295327520000E−06	.9103019298270000E−06
19	15	.2707786692730000E−06	−.8208149539350000E−06
19	16	−.9938800617160001E−08	.5428874480650000E−06
19	17	−.9249821463870000E−06	−.1061551211170000E−05
19	18	.1295087300260000E−05	−.1808490986950000E−06
19	19	.4720716663120000E−06	.3193301283800000E−06

20	1	.3894448791540000E−07	−.4924662151670000E−06
20	2	.5320781393890000E−06	−.9724343925050000E−07
20	3	.4795674989210000E−06	−.1013862739060000E−06
20	4	.7911426889650000E−06	−.5826422488420000E−06
20	5	.1032475949640000E−06	−.4802322718710000E−06
20	6	−.4967702461450000E−06	.6156993178970000E−06
20	7	−.5917336942650000E−06	−.5440186106280000E−06
20	8	.4394005454530000E−06	.7440623649730000E−07
20	9	−.8740155543430000E−07	.4561833749100000E−06
20	10	.2363632395670000E−06	−.3577749840430000E−06
20	11	.1078498413240000E−06	.6724504086650000E−06
20	12	.4238152938270000E−07	−.9979542738770000E−06
20	13	.7649646933020000E−06	.6510063091450000E−06
20	14	.2532428383590000E−06	−.1196064334020000E−06
20	15	−.1514037158300000E−06	−.3487143338680000E−06
20	16	.8958333299660000E−06	.5275250186460000E−06
20	17	.9625883397650000E−06	−.1247076248830000E−05
20	18	.5334360431180000E−06	−.6462366596580000E−06
20	19	−.2960788071070000E−06	.5625790924100000E−06
20	20	.2891714060370000E−07	−.3845058951180000E−06

LP75G　GM＝4902.800269 km^3/s^2　a_e＝1738.0 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	−9.097597054210000E−005	0.000000000000000E+000
3	0	−3.183542106800000E−006	0.000000000000000E+000
4	0	3.178911477220000E−006	0.000000000000000E+000
5	0	−2.598128665700000E−007	0.000000000000000E+000
6	0	3.862362237690000E−006	0.000000000000000E+000
7	0	5.673730303420000E−006	0.000000000000000E+000
8	0	2.350818244330000E−006	0.000000000000000E+000
9	0	−3.459677611820000E−006	0.000000000000000E+000
10	0	−1.162187595170000E−006	0.000000000000000E+000
11	0	−1.122060225360000E−006	0.000000000000000E+000
12	0	−1.993940508440000E−006	0.000000000000000E+000
13	0	5.335673682490000E−008	0.000000000000000E+000
14	0	6.529893913960000E−007	0.000000000000000E+000
15	0	1.379472017340000E−007	0.000000000000000E+000
16	0	6.140345051670000E−007	0.000000000000000E+000

17	0	−7.316768211000000E−007	0.000000000000000E+000
18	0	−7.963555191070000E−007	0.000000000000000E+000
19	0	−1.708184071290000E−007	0.000000000000000E+000
20	0	1.889746863020000E−007	0.000000000000000E+000
2	1	−2.787424863160000E−008	1.346500394100000E−008
2	2	3.469384675580000E−005	3.874557098790000E−009
3	1	2.640550219430000E−005	5.433798078170000E−006
3	2	1.425486482600000E−005	4.873210144190000E−006
3	3	1.231660825460000E−005	−1.762221618120000E−006
4	1	−5.957953926760000E−006	1.580416408210000E−006
4	2	−7.126854293940000E−006	−6.703750167050000E−006
4	3	−1.426159152840000E−006	−1.341306955010000E−005
4	4	−6.058053501810000E−006	3.932360886960000E−006
5	1	−9.706725251770001E−007	−4.092759279110000E−006
5	2	4.327085115670000E−006	1.180489184620000E−006
5	3	4.704928178100000E−007	8.581592621140000E−006
5	4	2.867118598810000E−006	5.436530651620000E−009
5	5	3.153796293720000E−006	−2.732379244810000E−006
6	1	1.606770785950000E−006	−2.609838782330000E−006
6	2	−4.428366933000000E−006	−2.224562307790000E−006
6	3	−3.181276672490000E−006	−3.597443010970000E−006
6	4	3.385214865400000E−007	−3.877510759460000E−006
6	5	1.320671642850000E−006	−1.026635800450000E−005
6	6	−4.724599832850000E−006	7.158528514860000E−006
7	1	7.402394498450000E−006	−7.391355640760000E−008
7	2	−7.886758626890000E−007	2.463355780280000E−006
7	3	6.313586687910000E−007	2.402631664010000E−006
7	4	−1.041115234040000E−006	9.433175866000000E−007
7	5	−1.904117763140000E−007	7.744473376149999E−007
7	6	−9.410796162420000E−007	9.627107226450000E−007
7	7	−1.798733612810000E−006	−1.499673891900000E−006
8	1	−1.263665574520000E−007	1.224588885430000E−006
8	2	3.080413650600000E−006	1.795771324480000E−006
8	3	−1.716144309890000E−006	8.710748131120000E−007
8	4	3.378218792540000E−006	−6.488694738840000E−007
8	5	−1.028981501020000E−006	2.693995119970000E−006
8	6	−1.715973337390000E−006	−1.666664637720000E−006
8	7	−1.567877284290000E−006	3.461847890700000E−006
8	8	−2.495616144060000E−006	1.959047270730000E−006

9	1	1.827344344790000E−006	−6.868306544890000E−009
9	2	2.047258759110000E−006	−1.574281578320000E−006
9	3	−2.045366543490000E−006	2.385501163000000E−006
9	4	−2.095433476750000E−006	−1.326347834400000E−006
9	5	−1.576167343320000E−006	−3.263541895340000E−006
9	6	−2.293056533220000E−006	−2.709252928600000E−006
9	7	−3.811433323860000E−006	−7.721245997770000E−007
9	8	−1.322550367020000E−006	−2.489325281490000E−006
9	9	−9.265323286480000E−007	2.680076538770000E−006
10	1	6.116292813110000E−007	−8.630213931860000E−007
10	2	4.703876511630000E−007	−1.997850659170000E−007
10	3	3.463288315010000E−007	8.825761251030000E−007
10	4	−3.554771394730000E−006	1.366165394590000E−006
10	5	9.927541901910001E−007	−4.208394352740000E−007
10	6	−1.831950698460000E−008	−2.581898846260000E−006
10	7	−3.943633160490000E−006	−1.370087446170000E−006
10	8	−3.702174394320000E−006	3.727484309750000E−006
10	9	−4.643303532260000E−006	3.117782321540000E−007
10	10	9.348219821670000E−007	−1.930224356780000E−006
11	1	8.946547434720000E−008	5.371169857310000E−007
11	2	1.025667863810000E−006	−2.131111244030000E−006
11	3	2.427240922300000E−007	7.111486883020000E−007
11	4	−8.752650228640000E−007	1.985331681500000E−006
11	5	9.732230132490000E−008	2.801003812590000E−006
11	6	1.176616474500000E−007	−1.293291028030000E−006
11	7	−3.011692192540000E−007	−2.092922413220000E−006
11	8	−1.949052474150000E−006	2.788973351950000E−007
11	9	−2.206214561910000E−006	−7.977445728960000E−007
11	10	−4.855748008210000E−006	−5.486507891650000E−007
11	11	−2.896682159260000E−006	−1.547569525170000E−006
12	1	−5.501398554130000E−007	1.535800205670000E−006
12	2	−1.715770107430000E−007	1.719478809850000E−006
12	3	5.246725904510000E−007	−3.821881117670000E−006
12	4	9.542920939870000E−007	−3.007893532040000E−007
12	5	−2.450273448510000E−007	1.123098819770000E−006
12	6	9.829088190369999E−007	2.941920930520000E−007
12	7	2.699319958030000E−006	−9.854500468790000E−007
12	8	6.782920624260000E−007	−3.205489384850000E−006
12	9	−1.696618819270000E−006	2.570470446200000E−007

12	10	−3.125085022600000E−006	−1.686092977550000E−007
12	11	−7.784133460800000E−007	−9.871814240119999E−009
12	12	3.106689225440000E−007	1.103716129670000E−006
13	1	1.477359737450000E−006	5.766168565050000E−008
13	2	−3.451114376760000E−006	5.365380488970000E−007
13	3	−4.619521847910000E−007	−1.738600624270000E−006
13	4	1.187601134430000E−006	−8.504962826020000E−007
13	5	−1.241052452730000E−006	8.318507177180000E−007
13	6	2.290357668000000E−007	1.085895206310000E−006
13	7	−4.682825496200000E−008	−3.480665940930000E−007
13	8	−9.926979393150000E−007	−1.306760208750000E−006
13	9	−4.114971456270000E−007	1.678111585610000E−006
13	10	−1.520296417610000E−007	1.390932173800000E−006
13	11	−1.394024383430000E−006	−5.447817921810000E−007
13	12	−7.196726900810000E−007	−1.701517968470000E−006
13	13	2.433631425560000E−006	−2.592383720590000E−006
14	1	1.063949855330000E−006	−6.742021381690000E−007
14	2	1.559510526380000E−007	2.207155062590000E−007
14	3	6.027377909510000E−007	6.413136072350000E−008
14	4	−2.487079324090000E−007	−2.358910619360000E−006
14	5	−1.325704609190000E−006	3.248680973010000E−009
14	6	−7.442441847439999E−007	2.267092652960000E−006
14	7	−7.292098010560000E−007	1.523152513680000E−006
14	8	2.041927938460000E−007	3.026388320070000E−008
14	9	9.029774379850000E−007	−1.381225572410000E−006
14	10	−6.981579446990000E−007	−5.496705374189999E−007
14	11	−2.455109480300000E−006	1.083393371820000E−006
14	12	−1.230737639500000E−006	1.434183631130000E−007
14	13	−3.270665412180000E−007	−1.032520774770000E−006
14	14	−4.763166024390000E−007	1.086977920810000E−006
15	1	−9.713279025940000E−007	4.644258822240000E−007
15	2	−4.674531429950000E−007	8.707120384330000E−007
15	3	−1.164582241810000E−006	−6.088006166490000E−007
15	4	−1.014253496160000E−006	−1.349478331290000E−006
15	5	−2.422389629580000E−007	−1.061034856260000E−006
15	6	6.345010679490000E−007	−4.989180134420000E−007
15	7	1.427662298150000E−006	8.557585022180000E−007
15	8	1.484821403180000E−006	1.544412821940000E−006
15	9	2.410633974770000E−008	−5.474118368990000E−007

15	10	−9.459274331500000E−007	−4.984830869090000E−008
15	11	−1.216697224930000E−006	−5.684071832849999E−007
15	12	−1.415292711500000E−006	1.170851358090000E−007
15	13	−6.750529508580000E−007	6.000369232800000E−008
15	14	1.039464251220000E−006	7.507875241750000E−007
15	15	3.217120901060000E−007	6.905878057970000E−007
16	1	−2.966737905840000E−008	1.017332644500000E−006
16	2	1.522319779360000E−006	−3.181030630430000E−007
16	3	1.653645873710000E−007	2.635500419510000E−007
16	4	5.744319590950000E−007	3.300713522970000E−007
16	5	8.245193183690000E−007	−6.033196517710000E−007
16	6	1.019209768250000E−006	−5.503186120820000E−007
16	7	−1.082386641560000E−006	−4.495745603280000E−007
16	8	−3.529278174590000E−007	1.068382023240000E−006
16	9	−9.268755534280000E−007	−6.175857389340000E−007
16	10	1.178507322640000E−007	−3.881971183090000E−007
16	11	5.546113088210000E−007	1.455075442250000E−006
16	12	−1.834005752320000E−006	3.274964935070000E−007
16	13	−1.988747933720000E−007	−3.296652824070000E−007
16	14	−4.965531737870000E−007	−3.712659845400000E−008
16	15	−7.883382608060000E−007	−1.326760250960000E−006
16	16	−5.938689575020000E−007	−7.858535195810000E−007
17	1	2.116559218210000E−007	−1.190591471390000E−007
17	2	−3.549486846610000E−007	−1.115635275870000E−006
17	3	5.197204163200000E−008	−1.210909303430000E−007
17	4	8.836361551490000E−007	2.240086563630000E−006
17	5	1.055900798740000E−007	−5.195236097080000E−007
17	6	7.363185473490000E−007	−1.251820263630000E−006
17	7	−1.520746883900000E−006	−1.813716175420000E−006
17	8	6.284613401890000E−007	−6.051678014250000E−007
17	9	6.356542902110000E−007	6.626604176420000E−007
17	10	6.195314272340000E−007	6.260186836820000E−007
17	11	1.253099734610000E−006	4.939021677260000E−008
17	12	9.979679578560000E−008	−6.041320066530000E−007
17	13	7.849882868210000E−007	−4.913399499440000E−008
17	14	4.774119119030000E−008	1.316907252090000E−011
17	15	−6.179483059800000E−009	6.673786720910000E−008
17	16	2.139917003930000E−007	6.985513243050000E−008
17	17	−7.340569301230000E−007	1.351921622940000E−006

18	1	−2.939232877460000E−007	−1.791992442250000E−008
18	2	3.681712787890000E−009	−5.929323923170000E−007
18	3	1.084604643740000E−006	4.663708035090000E−007
18	4	−1.006311344380000E−006	8.155933224190000E−007
18	5	1.717142658860000E−008	5.559148378050000E−008
18	6	−1.408664071770000E−006	4.946770506740000E−007
18	7	−2.757287337310000E−007	−1.114277332090000E−006
18	8	5.462196177760000E−007	6.098271645140000E−007
18	9	−2.034141170980000E−007	−5.046815098170000E−007
18	10	1.672836017330000E−007	−7.622638600300000E−008
18	11	4.350337243880000E−008	−1.526119695270000E−006
18	12	7.774209116990000E−007	2.408929716530000E−007
18	13	−4.026890051440000E−007	6.004928791050000E−007
18	14	−8.713336036350000E−007	−9.151280313240000E−007
18	15	8.739223611600000E−007	−4.021844559160000E−007
18	16	5.145610403190000E−007	−9.775415631200001E−007
18	17	7.122549200460000E−007	−7.375357702700000E−007
18	18	1.364298238910000E−007	−1.478974106020000E−007
19	1	−4.265413225510000E−007	−2.041403943800000E−008
19	2	7.010992519180000E−007	−5.580989492460000E−007
19	3	−8.761222234600000E−007	1.048198452360000E−006
19	4	−9.989769320870001E−007	−8.972057276190000E−007
19	5	−3.292151518360000E−008	1.636334136940000E−006
19	6	−4.011072109200000E−007	2.950857546570000E−007
19	7	7.738210212440000E−007	8.309818024120000E−007
19	8	7.184985595650000E−007	7.480782315700000E−007
19	9	−9.134694145010000E−008	−7.571692502990000E−007
19	10	−1.891924925940000E−007	−2.718354981470000E−007
19	11	8.044955022190001E−008	−3.113635924590000E−007
19	12	5.075880835970000E−007	7.163969571360000E−008
19	13	7.090964086380000E−007	1.973524917850000E−006
19	14	−8.946883113090000E−007	6.690756371569999E−008
19	15	8.930503522890000E−007	−4.410896054100000E−007
19	16	−7.607906575750000E−007	−1.596182288620000E−007
19	17	−3.563976685460000E−007	−1.121314888990000E−006
19	18	1.518471790690000E−006	1.315961885150000E−007
19	19	3.178441090500000E−007	2.401289733060000E−007
20	1	−1.596363355050000E−007	−6.205105103550000E−007
20	2	8.877093528550000E−007	4.117266397190000E−007

20	3	2.781341386780000E−007	5.538790777980000E−010
20	4	5.385796471500000E−007	−6.530311998320000E−007
20	5	2.962904638650000E−007	−5.250884408670000E−007
20	6	−3.660316802120000E−007	2.181956908420000E−007
20	7	−1.871961196030000E−007	−6.580656007390000E−007
20	8	6.823427686450000E−007	−2.353013521360000E−007
20	9	−4.058612997790000E−007	3.971438264710000E−007
20	10	3.884981434910000E−007	3.129934747400000E−007
20	11	−1.439095038700000E−007	1.078642232210000E−006
20	12	1.589228718740000E−007	−1.186388378930000E−006
20	13	2.484273599290000E−008	2.480106254130000E−007
20	14	−4.385086058210000E−008	4.421067147560000E−007
20	15	3.503010708860000E−007	2.635021152700000E−007
20	16	4.665475637160000E−007	9.217077117479999E−008
20	17	1.335401996820000E−006	−4.573369436020000E−007
20	18	−6.938845157080000E−008	−6.261993566860000E−007
20	19	−4.652085498200000E−007	2.595654913560000E−007
20	20	5.409545735560000E−008	−2.122709255110000E−007

§4.4 中心天体非球形引力摄动(Ⅱ)——主要田谐项摄动

主要带谐项(J_2 项)反映天体的扁球形(两极扁,赤道隆起),而主要田谐项($J_{2,2}$项)则反映天体赤道是椭圆状,该项对 24^{h}地球同步卫星轨道的影响非常显著.

1. $J_{2,2}$项摄动函数

在标准单位系统中,仅考虑 $l=m=2$ 这一项,由(4.69)式给出相应的摄动函数为

$$R_{2,2} = \frac{J_{2,2}}{r^3} P_{2,2}(\sin\varphi)\cos 2\bar{\lambda}, \tag{4.193}$$

有

$$\begin{cases} J_{2,2} = (C_{2,2}^2 + S_{2,2}^2)^{1/2} \\ \bar{\lambda} = \lambda_G - \lambda_{2,2} \\ \tan 2\lambda_{2,2} = S_{2,2}/C_{2,2} \end{cases}. \tag{4.194}$$

注意,这里 $J_{2,2}$的符号与我们过去的有关工作中采用的 $J_{2,2}$正好相反. 显然,由(4.193)式表达的摄动函数对$\bar{\lambda}$而言是对称的,即

$$R_{2,2}(+\bar{\lambda}) = R_{2,2}(-\bar{\lambda}).$$

这里$\bar{\lambda}$是从 $\lambda=\lambda_{2,2}$ 的赤道"对称轴"(即赤道长轴)方向起量的经度. 根据 $P(\mu)$的定义,$R_{2,2}$可写成下列形式:

$$R_{2,2} = \frac{3J_{2,2}}{r^3}\cos^2\varphi\cos 2\bar{\lambda}. \tag{4.195}$$

现在将 $R_{2,2}$ 表示为轨道根数的形式. 这将涉及到地固坐标系与历元平赤道地心系(或轨道坐标系)之间的转换问题(见第一章 §1.1),但对于一般问题可不考虑赤道的变化. 在这种情况下,可由图 4.1 来表示两坐标系之间的关系. 图中$\bar{x}$是"对称轴"方向,因此有

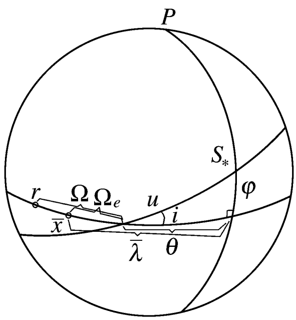

图 4.1 两种坐标系之间的关系

$$\begin{cases}\bar{\lambda}=\Omega_e+\theta\\ \Omega_e=(\Omega-S_{2,2})-n_e(t-t_0)\end{cases},$$

$$(4.196)$$

其中 $S_{2,2}$ 是历元 t_0 时“对称轴”方向的地方恒星时，n_e 是地球自转角速度. 由球面三角公式

$$\cos\varphi\cos\theta=\cos u,\cos\varphi\sin\theta=\sin u\cos i,$$

$$\sin\varphi=\sin u\sin i$$

得出

$$\begin{aligned}\cos^2\varphi\cos2\bar{\lambda}&=\cos^2\varphi(\cos2\theta\cos2\Omega_e-\sin2\theta\sin2\Omega_e)\\&=\frac{1}{4}(1+\cos i)^2\cos(2u+2\Omega_e)+\\&\quad\frac{1}{4}(1-\cos i)^2\cos(2u-2\Omega_e)+\frac{1}{2}\sin^2 i\cos2\Omega_e,\end{aligned}$$

其中 $u=f+\omega$. 将此式代入(4.195)式得

$$\begin{aligned}R_{2,2}=\frac{3J_{2,2}}{4a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3[&(1+\cos i)^2\cos(2u+2\Omega_e)+\\&(1-\cos i)^2\cos(2u-2\Omega_e)+2\sin^2 i\cos2\Omega_e].\end{aligned}$$

$$(4.197)$$

这就是主要田谐项摄动函数的根数形式，它与带谐项摄动函数有显著差别，即显含时间 t，这在 §4.2 中已提过.

由于摄动函数显含 t，又与真近点角 f 分不开，这给积分造成了困难，必须将 $\left(\frac{a}{r}\right)$ 和 f 等量展成平近点角 M 的三角级数，相应的摄动解对偏心率 e 将是不“封闭”的. 利用第二章 §2.2 中给出的结果 $R_{2,2}$ 中出现的 $\left(\frac{a}{r}\right)^3$，$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos2f$ 和 $\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin2f$ 展成 M 的三角级数，取到 e^2 项的形式为

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3=\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)+3e\cos M+\frac{9}{2}e^2\cos2M+\cdots, \quad (4.198)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos2f=&-\frac{e}{2}\cos M+\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\cos2M+\frac{7}{2}e\cos3M+\\&\frac{17}{2}e^2\cos4M+\cdots,\end{aligned}\quad (4.199)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin2f=&-\frac{e}{2}\sin M+\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\sin2M+\frac{7}{2}e\sin3M+\\&\frac{17}{2}e^2\sin4M+\cdots,\end{aligned}\quad (4.200)$$

将此式代入(4.197)式得

$$R_{2,2}=\frac{3J_{2,2}}{4a^3}\{(1+\cos i)^2\Big[\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-$$

$$e\left(\frac{1}{2}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{2}\cos(3M+2\omega+2\Omega_e)\right)-$$

$$e^2\left(\frac{5}{2}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{17}{2}\cos(4M+2\omega+2\Omega_e)\right)\Big]+$$

$$(1-\cos i)^2\Big[\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-$$

$$e\left(\frac{1}{2}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{2}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)\right)-$$

$$e^2\left(\frac{5}{2}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{17}{2}\cos(4M+2\omega-2\Omega_e)\right)\Big]+$$

$$2\sin^2 i\Big[\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\cos 2\Omega_e+$$

$$\frac{3}{2}e\left(\cos(M+2\Omega_e)+\cos(M-2\Omega_e)\right)+$$

$$\frac{9}{4}e^2\left(\cos(2M+2\Omega_e)+\cos(2M-2\Omega_e)\right)\Big]\Big\}+O(e^3J_{2,2}). \tag{4.201}$$

不难看出，$R_{2,2}$包含的全是短周期项，只有一项的周期稍长些，即 $\cos 2\Omega_e$，其周期为半天. 因此，$J_{2,2}$项对卫星轨道的影响基本上具有短周期性质，将$R_{2,2}$代入摄动运动方程(3.75)式即得右函数 f_{2s}.

2. $J_{2,2}$项的摄动解

仅 $J_{2,2}$一项产生的摄动解应为

$$\sigma_S^{(2)}(t)=\int^t\left[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_S^{(2)}+f_{2S}\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{dt},$$

考虑到实际情况和分析问题时的需要，解保留到 $O(e)$项就够了. 积分后得

$$a_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{2a}\Big\{(1+\cos i)^2\Big[\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-$$

$$\frac{e}{2}\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{1-2\alpha/3}\cos(3M+2\omega+$$

$$2\Omega_e)\Big)\Big]+(1-\cos i)^2\Big[\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega e)-$$

$$\frac{e}{2}\Big(\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{1-2\alpha/3}\cos(3M+2\omega-$$

$$2\Omega_e)\Big)\Big]+2\sin^2 i\left(\frac{3e}{2}\right)\Big[\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e)\Big]\Big\},\tag{4.202}$$

$$\begin{aligned}e_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\Big\{&(1+\cos i)^2\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)+\\&\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega+2\Omega_e)\Big)+\\&\frac{e}{2}\Big(-\frac{e}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)+\\&\frac{17}{2(1-\alpha/2)}\cos(4M+2\omega+2\Omega_e)\Big)\Big]+\\&(1-\cos i)^2\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)+\\&\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)\Big)+\\&\frac{e}{2}\Big(-\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)+\\&\frac{17}{2(1+\alpha/2)}\cos(4M+2\omega-2\Omega_e)\Big)\Big]+\\&2\sin^2 i\Big[\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e)\Big)+\\&\frac{9}{4}e\Big(\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M-2\Omega_e)\Big)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{4.203}$$

$$\begin{aligned}i_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\sin i\Big\{&-(1+\cos i)\Big[\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)-\\&e\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega+\\&2\Omega_e)\Big)\Big]+(1-\cos i)\Big[\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)-\\&e\Big(\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-\\&\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)\Big)\Big]+2\Big[\frac{1}{\alpha}\cos(2\Omega_e)-\\&3e\Big(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)-\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e)\Big)\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{4.204}$$

$$\Omega_S^{(2)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\Big\{-(1+\cos i)\Big[\frac{1}{1-\alpha}\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)-$$

$$e\left(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega+2\Omega_e)\right)\Bigg]+(1-\cos i)\left[\frac{1}{1+\alpha}\sin(2M+2\omega-2\Omega_e)-e\left(\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega-2\Omega_e)\right)\right]-2\cos i\left[\frac{1}{\alpha}\sin(2\Omega_e)-3e\left(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M-2\Omega_e)\right)\right]\Bigg\}. \quad (4.205)$$

$$\omega_S^{(2)}(t)=[\omega_s^{(2)}(t)]_1+[\omega_S^{(2)}(t)]_2. \quad (4.206)$$

其中

$$[\omega_S^{(2)}(t)]_1=-\cos\Omega_S^{(2)}(t),$$

$$[\Omega_S^{(2)}(t)]_2=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\left(\frac{1}{e}\right)\Bigg\{-(1+\cos i)^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega+2\Omega_e)\right)+e\left(\frac{5}{2(1-\alpha)}\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{17}{4(1-\alpha/2)}\sin(4M+2\omega+2\Omega_e)\right)\right]-(1-\cos i)^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega-2\Omega_e)\right)+e\left(\frac{5}{2(1+\alpha)}\sin(2M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{17}{4(1+\alpha/2)}\sin(4M+2\omega-2\Omega_e)\right)\right]+2\sin^2 i\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M-2\Omega_e)\right)+\frac{9}{4}e\left(-\frac{2}{3}a\sin 2\Omega_e+\frac{1}{1-\alpha}\sin(2M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+\alpha}\sin(2M-2\Omega_e)\right)\right]\Bigg\},$$

$$M_S^{(2)}(t)=-[\omega_S^{(2)}(t)]_2+\frac{9(J_{2,2})}{4a^2}\Bigg\{(1+\cos i)^2\left[\frac{1}{1-\alpha}(1-\right.$$

$$\frac{1}{2(1-\alpha)}\Big)\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)-$$

$$e\left(\frac{1}{1-2\alpha}\left(1-\frac{1}{2(1-2\alpha)}\right)\sin(M+2\omega+2\Omega_e)-\right.$$

$$\left.\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\left(1-\frac{1}{2(1-2\alpha/3)}\right)\sin(3M+2\omega+2\Omega_e)\right)\Big]+$$

$$(1-\cos i)^2\left[\frac{1}{1+\alpha}\left(1-\frac{1}{2(1+\alpha)}\right)\sin(2M+2\omega-2\Omega_e)-\right.$$

$$e\left(\frac{1}{1+2\alpha}\left(1-\frac{1}{2(1+2\alpha)}\right)\sin(M+2\omega-2\Omega_e)-\right.$$

$$\left.\left.\frac{7}{3(1+2\alpha/3)}\left(1-\frac{1}{2(1+2\alpha/3)}\right)\sin(3M+2\omega-2\Omega_{2,2})\right)\right]+$$

$$2\sin^2 i\left[-\frac{1}{\alpha}\sin(2\Omega_e)+\right.$$

$$3e\left(\frac{1}{1-2\alpha}\left(1-\frac{1}{2(1-2\alpha)}\right)\sin(M+2\Omega_e)+\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{1+2\alpha}\left(1-\frac{1}{1+2\alpha}\right)\sin(M-2\Omega_e)\right)\right]\Big\}. \tag{4.207}$$

以上各式中的 α **为"速度"比:**

$$\alpha=n_e/\bar{n}, \tag{4.208}$$

即地球自转角速度 n_e **与卫星平运动角速度** $\bar{n}$ **之比. 各式中出现的根数应为平均根数.**

从积分结果(4.202)~(4.207)**式可以看出,对于低轨卫星,** $J_{2,2}$ **项摄动只是二阶短周期的,但有一项** $\frac{1}{\alpha}\sin 2\Omega_e$**(或** $\frac{1}{\alpha}\cos 2\Omega_e$**)例外. 因** $\alpha\approx 0.1$**,该项要比二阶小量大一个量级,且周期稍长些,在某些人造卫星工作中还是应该考虑这一项的. 对于高轨卫星,特别是** 24^h **地球同步卫星,** $J_{2,2}$ **项的摄动影响将是显著的,下面予以讨论.**

3. 通约问题和 24^h 卫星

从上述 $\sigma_s^{(2)}(t)$ **的表达式可以看出,当** $1-2\alpha, 1-\alpha, 1-2\alpha/3, 1-\alpha/2$ **四个因子中有一个为零,解就不能用,相应地有** $\frac{\bar{n}}{n_e}=2,1,2/3,1/2$**,这对应于** $12^h, 24^h, 36^h, 48^h$ **卫星,它们的平运动角速度与地球自转角速度成简单整数比,此即通约问题. 与** §4.3 **中的** $i=i_c$**(临界倾角)问题类似,也是一种奇点(通约奇点). 当** $\bar{n}/n_e$ **接近** $2,1,2/3,1/2$ **时,** $1-2\alpha, 1-\alpha, 1-2\alpha/3, 1-\alpha/2$ **的**

量级可达到 10^{-3}（即 J_2 的量级），出现小分母，二阶短周期项 $\sigma_S^{(2)}(t)$ 的表达式(4.202)～(4.207)式中相应的项（即通约项）将转化为一阶长周期项 $\sigma_l^{(1)}(t)$. 因此，$J_{2,2}$ 对 12^h，24^h，36^h，48^h 卫星轨道的影响就比较显著，特别是 24^h 卫星，因其通约项前面无 e 因子. 下面具体给出 $J_{2,2}$ 项对这种卫星轨道的长周期摄动解.

考虑 $\alpha = n_e/\bar{n} = 1$ 的通约项，由(4.201)式立即可得 24^h 卫星通约项对应的摄动函数：

$$R_{2,2} = \frac{3(J_{2,2})}{4a^3}\left\{(1+\cos i)^2\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)+\right.$$
$$\left. 2\sin^2 i\left(\frac{9}{4}e^2\right)\cos(2M+2\Omega_e)\right\} \tag{4.209}$$

将这一 $R_{2,2}$ 带入摄动运动方程(3.75)式，即得相应的右函数 $f_{2l}(J_{2,2})$. 由(4.38)式得出

$$\sigma_l^{(1)}(t) = \int^t \left[\delta\left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)a_l^{(2)} + \sum_j \frac{\partial f_{1c}}{\partial \sigma_j}(\sigma_l^{(1)})_j + f_{21}(J_{2,2})\right]_{\bar{\sigma}}^{\mathrm{dt}}. \tag{4.210}$$

另外，由于 $a_l^{(1)}(t) \neq 0$，因此对 M 还应有一项，即

$$\int^t \left[\frac{\partial n}{\partial a}a_l^{(1)}\right]_{\bar{\sigma}}^{\mathrm{dt}},$$

该项积分后变成零阶长周期项，方法失效. 因此，对于通约问题，与带谐项摄动中的临界角问题一样，不能简单地采用平均根数法，必须加以改进. 如拟平均根数法[3,4]，上述各间接部分

$$\frac{\partial n}{\partial a}(a_l^{(1)}+a_l^{(2)}),\ \sum_j \frac{\partial f_{1c}}{\partial \sigma_j}(\sigma_l^{(1)})_j$$

都不出现. 故这里对六个根数只计算直接部分，即

$$\sigma_l^{(1)}(t) = \int^t [f_{21}(J_{2,2})]_{\bar{\sigma}}^{\mathrm{dt}}. \tag{4.211}$$

对于 24^h 卫星，通常是近圆轨道 $e \approx 0$. 因此，即使是一阶长周期项，也只要保留到 $O(e)$ 项就够了，由此积分后得

$$a_l^{(1)}(t) = \frac{3(J_{2,2})}{2a}\bar{n}\left[(1+\cos i)^2\frac{\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)}{(\bar{n}-n_e)+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right], \tag{4.212}$$

$$e_l^{(1)}(t) = \frac{3(J_{2,2})}{8a^2}\bar{n}e\left[-(1+\cos i)^2\frac{\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)}{(\bar{n}-n_e)+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}+\right.$$
$$\left. 9\sin^2 i\frac{\cos(2M+2\Omega_e)}{(\bar{n}-n_e)+(\Omega_1+M_1)}\right], \tag{4.213}$$

$$i_1^{(1)}(t)=\frac{3(-J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\sin i\left[-(1+\cos i)\frac{\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)}{(\bar{n}-n_e)+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right],\tag{4.214}$$

$$\Omega_1^{(1)}(t)=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\left[-(1+\cos i)\frac{\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)}{(\bar{n}-n_e)+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right],\tag{4.215}$$

$$\omega_1^{(1)}(t)=[\omega_1^{(1)}(t)]_1+[\omega_1^{(1)}(t)]_2.\tag{4.216}$$

其中

$$[\omega_1^{(1)}(t)]_1=-\cos i\ \Omega_1^{(1)}(t),$$

$$[\omega_1^{(1)}(t)]_2=\frac{3(J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\left[-\frac{5}{2}(1+\cos i)^2\frac{\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)}{(\bar{n}-n_e)+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}+\right.$$
$$\left.\frac{9}{2}\sin^2 i\frac{\sin(2M+2\Omega_e)}{(\bar{n}-n_e)+(\Omega_1+M_1)}\right],$$

$$M_1^{(1)}(t)=\frac{9(J_{2,2})}{4a^2}\bar{n}\left[(1+\cos i)^2\frac{\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)}{(\bar{n}-n_e)+(\Omega_1+\omega_1+M_1)}\right]-$$
$$[\omega_1^{(1)}(t)]_2.\tag{4.217}$$

上述各式右端出现的根数均为平均根数$\bar{\sigma}$,有$\bar{\sigma}(t)=\bar{\sigma}_0+\sigma_1(t-t_0)$,其中$\Omega_1,\omega_1$和$M_1$的计算公式已在§4.3中给出,见(4.117)～(4.119)式.

4. 一点注解

上述结果是针对地球卫星的,地球自转较快,(4.208)式定义的速度比α不是太小.但对于慢自转天体,如金星与月球,相应的α值很小,中心天体自转项$n_e t$将以慢变量出现在田谐项摄动函数$R_{2,2}$(或一般项$R_{l,m}$)中,与卫星运动的慢变量Ω,ω相当.那么,在构造摄动解时,就不需要将摄动函数展成平近点角M的三角级数,相应的摄动解对偏心率e仍是封闭的.关于如何构造金星轨道器和环月卫星的摄动分析解,请见参考文献[8]和[9].

§4.5　带谐项($J_l,l\geqslant3$)摄动解的一般形式

在标准单位系统中,由(4.68)式给出一般带谐项($J_l,l\geqslant3$)摄动函数的轨道根数表达形式如下[5]:

$$R_l=\sum_{l\geqslant3}\frac{(-J_l)}{a^{l+1}}\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_2)}\times\right.$$
$$\left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times$$

$$\left[(1-\delta_1)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)u+\delta_1\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\sin(l-2p)u\right].$$

(4.218)

式中 $u=f+\omega$，符号 δ_1 和 δ_2 的定义如下：

$$\delta_1=\frac{1}{2}[1-(-1)^l]=\begin{cases}1, & l\text{ 奇}\\0, & l\text{ 偶}\end{cases}, \tag{4.219}$$

$$\delta_2=\begin{cases}0, & 1-2p=0\\0, & l-2p\neq 0\end{cases}. \tag{4.220}$$

用求平均值的方法即可将 R_l 分解成长期、长周期和短周期三个部分，即

$$(R_l)_c=\sum_{l(2)\geqslant 4}\frac{(-J_l)}{a^{l+1}}\left[\sum_{q=0}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{l+2q}\times\right.$$
$$\left.\binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q}(\sin i)^{2q}\right]K_{l+1}(e), \tag{4.221}$$

$$(R_l)_l=\sum_{l\geqslant 3}\frac{(-J_l)}{a^{l+1}}$$
$$\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)(2l-2p+2q-1)\times\right.$$
$$\left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times$$
$$K_{l+1}^p(e)[(1-\delta_1)\cos(l-2p)\omega+\delta_1\sin(l-2p)\omega],$$

(4.222)

$$(R_l)_S=R_l-[(R_l)_c+(R_l)_l]. \tag{4.223}$$

其中

$$\begin{cases}K_{l+1}=\overline{\left(\frac{a}{r}\right)l+1}\\[2ex] K_{l+1}^p(e)=\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)f}\end{cases} \tag{4.224}$$

这两个平均值的具体形式将在下面给出.

按平均根数法即可导出带谐项摄动的二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$，一阶长周期项 $\sigma_l^{(1)}(t)$和轨道半长径 a 的二阶短周期项 $a_S^{(2)}(t)$，下面分别给出.

1. $\boldsymbol{\sigma_2}$

$$a_2=0,e_2=0,i_2=0, \tag{4.225}$$

$$\Omega_2 = n\cos i \sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{q=1}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}\times$$

$$2q\binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q}(\sin i)^{(2q-2)}K_1(e) \tag{4.226}$$

$$\omega_2 = -\cos i\ \Omega_2 +$$

$$n\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{q=0}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}\times$$

$$\binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q}(\sin i)^{2q}\times$$

$$[(2l-1)K_1(e)+(1-e^2)K_2(e)], \tag{4.227}$$

$$M_2 = -\sqrt{1-e^2}(\omega_2+\cos i\Omega_2)+$$

$$n\sqrt{1-e^2}\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{q=0}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}2(l+1)\times$$

$$\binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q}(\sin i)^{2q}K_1(e). \tag{4.228}$$

其中

$$\begin{cases} K_1(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=0}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha} \\ K_2(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=2}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha/2}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha-2} \end{cases} \tag{4.229}$$

上述各式中出现的根数 a,e,i **及** n,p_0 **均为**$\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$ **和**$\bar{n}=\bar{a}_0^{-3/2},\bar{p}_0=\bar{a}_0(1-\bar{e}_0^2)$.

2. $\boldsymbol{\sigma}_1^{(1)}(t)$

直接部分如下:

$$a_1^{(1)}(t)=0, \tag{4.230}$$

$$e_1^{(1)}(t) = -\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right)i_1^{(1)}(t)\times$$

$$= -(1-e^2)\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)$$

$$\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right.$$

$$\left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]$$

$$\frac{1}{e}K_3(e)I(\omega), \tag{4.231}$$

$$i_1^{(1)}(t) = \cos i \sum_{l \geqslant 3} \left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^{p} (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)} \times \binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q-1)}\right] \times K_3(e) I(\omega), \tag{4.232}$$

$$\Omega_1^{(1)}(t) = \cos i \sum_{l \geqslant 3} \left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^{p} (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)} (l-2p+2q) \times \binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q-2)}\right] K_3(e) H(\omega), \tag{4.233}$$

$$\omega_1^{(1)}(t) = -\cos i\ \Omega_1^{(1)}(t) + \sum_{l \geqslant 3} \left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^{p} (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)} \times \binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q)}\right] \times \left[(2l-1)K_3(e) + (1-e^2)K_4(e)\right] H(\omega), \tag{4.234}$$

$$M_l^{(1)}(t) = -\sqrt{1-e^2}\left[\omega_l^{(1)}(t) + \cos i\ \Omega_l^{(1)}(t)\right] + \sqrt{1-e^2} \sum_{l \geqslant 3} \left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^{p} (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)} 2(l+1) \times \binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q)}\right] K_3(e) H(\omega). \tag{4.235}$$

对 Ω, ω, M **还有间接部分，公式如下：**

$$\Omega_1^{(1)} = \frac{5\cos i}{(2-5\sin^2 i/2)} \sum_{l \geqslant 3} \left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^{p} (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)} \times \binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q)}\right] \times$$

$$K_3(e)H(\omega), \tag{4.237}$$

$$\Omega_l^{(1)} = \frac{(13-15\sin^2 i)}{(2-5\sin^2 i/2)} \sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\times$$

$$\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right.$$

$$\left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times$$

$$K_3(e)H(\omega), \tag{4.237}$$

$$M_l^{(1)} = -3\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{-J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)}$$

$$\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta_1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-1)}\times\right.$$

$$\left.\binom{l}{p-q}\binom{2l-2p+2q}{l}\binom{l-2p+2q}{q}(\sin i)^{(l-2p+2q)}\right]\times$$

$$K_3(e)H(\omega). \tag{4.238}$$

上述各式中有关量由下列各式表达：

$$\begin{cases} K_3(e)=\sum\limits_{\alpha(2)=l-2p}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{(\alpha-l+2p)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha} \\ K_4(e)=\sum\limits_{\alpha(2)=l-2p}^{l-2}\binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{(\alpha-l+2p)/2}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha-2} \end{cases} \tag{4.239}$$

$$\begin{cases} I(\omega)=\left(\frac{n}{\omega_1}\right)[(1-\delta_1)\cos(l-2p)\omega+\delta_1\sin(l-2p)\omega] \\ H(\omega)=\left(\frac{n}{\omega_1}\right)\left[(1-\delta_1)\frac{1}{l-2p}\sin(l-2p)\omega-\delta_1\frac{1}{(l-2p)}\cos(l-2p)\omega\right]. \end{cases} \tag{4.240}$$

上述各式中出现的根数除 a,e,i 及 n,p_0 与 σ_2 中相同外，ω 亦为平均根数 $\bar{\omega}(t)$，相应的 ω_1 是其一阶长期项的变率，见(4.118)式.

3. $a_s^{(2)}(t)$中的 J_l部分

由摄动运动方程 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ 的表达式和$(R_l)_s$ 的特征，不难给出 $a_s^{(t)}$，如下：

$$a_S^{(2)}(t)=\frac{2}{n^2 a}R_{2s}=2a^2(R_l)_s. \tag{4.241}$$

$(R_l)_s$ 的表达式前面已给出，见(4.223)式，涉及到的两个平均值 $K_{l+1}(e)$和 $K_{l+1}^p(e)$由下式表达：

$$\begin{cases} K_{l+1}(e) = (1-e^2)^{-\left(l-\frac{1}{2}\right)} K_1(e) \\ K_{l+1}^{p}(e) = \delta_3 (1-e^2)^{-\left(l-\frac{1}{2}\right)} K_3(e), \end{cases} \tag{4.242}$$

其中

$$\delta_3 = \begin{cases} 0, & p=0 \\ 1, & p\neq 0 \end{cases} \tag{4.243}$$

§ 4.6　田谐项($J_{l,m}, l\geqslant 2, m=1\sim l$)摄动解的一般形式

利用线性变换的方法,可将球谐函数 $P_{lm}(\sin\varphi)\cos\lambda_G$ 和 $P_{lm}(\sin\varphi)\sin\lambda_G$ 表示成轨道根数 $u=f+\omega$ 和 Ω 的三角函数的线性组合[10],从而将(4.66)式给出的田谐项摄动函数 ΔV_2 写成下列形式:

$$\begin{aligned} R_{lm} = {} & \frac{GM}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l} \left(\frac{a_e}{a}\right)^l F_{lmp}(i) \left(\frac{a}{r}\right)^{(l+1)} \\ & \{[(1-\delta_m)C_{lm} - \delta_m S_{lm}] \cos((1-2p)u + m(\Omega - S_G)) + \\ & [(1-\delta_m)S_{lm} + \delta_m C_{lm}] \sin((l-2p)u + m(\Omega - S_G))\}. \end{aligned} \tag{4.244}$$

其中倾角函数 $F_{lmp}(i)$后面将具体给出,而符号 δ_m 定义如下:

$$\delta_m = \frac{1}{2}[1-(-1)^{l-m}]. \tag{4.245}$$

进一步将其中的 $\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)u$ 和 $\left(\frac{a}{r}\right)\sin(l-2p)u$ 展成平近点角 M 的三角级数,最终将 R_{lm} 的形式表达如下:

$$R_{lm} = \frac{GM}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{l} \sum_{p=0}^{l} \left(\frac{a_e}{a}\right)^l F_{lmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) S_{lmpq}(M, \omega, \Omega; S_G). \tag{4.246}$$

其中

$$\begin{aligned} S_{lmpq} = {} & [(1-\delta_{lm})C_{lm} - \delta_{lm} S_{lm}] \cos\psi_{lmpq} + \\ & [(1-\delta_{lm})S_{lm} + \delta_{lm} C_{lm}] \sin\psi_{lmpq}, \end{aligned} \tag{4.247}$$

$$\psi_{lmpq} = (l-2p+q)M + (l-2p)\omega + m(\Omega - S_G), \tag{4.248}$$

$$G_{lpq}(e) = X_{(l-2p+q)}^{-(l+1),(l-2p)}(e). \tag{4.249}$$

(4.249)式右端即第二章 § 2.2 中给出的汉森系数.

与 $J_{2,2}$ 一样,对于地球卫星,田谐项摄动均为短周期效应,包括地球自转效应. 相应的短周期项记为 $\sigma_s^{(2)}(t)$,有

$$\begin{cases} \sigma_s^{(2)}(t) = \sum\limits_{L \geqslant 2} \sum\limits_{m=1}^{l} \sum\limits_{p=0}^{l} \sum\limits_{q=-\infty}^{\infty} \Delta\sigma_{lmpq} \\ \Delta\sigma_{lmpq} = \begin{cases} C_{lmpq}^{\sigma} S_{lmpq}, & \text{对 } a, e, i \\ C_{lmpq}^{\sigma} S_{lmpq}^{*}, & \text{对 } \Omega, \omega, M \end{cases} \end{cases}, \tag{4.250}$$

$$\begin{aligned} S_{lmpq}^{*} = {} & [(1-\delta_{lm})C_{lm} - \delta_{lm} S_{lm}] \sin \psi_{lmpq} - \\ & [(1-\delta_{lm})S_{lm} + \delta_{lm} C_{lm}] \cos \psi_{lmpq}. \end{aligned} \tag{4.251}$$

C_{lmpq}^{σ} **的具体形式如下：**

$$C_{lmpq}^{a} = 2a\left(\frac{a_e}{a}\right)^{l}(l-2p+q)F_{lmp}(i)G_{lpq}(e)\left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right), \tag{4.252}$$

$$\begin{aligned} C_{lmpq}^{e} = {} & \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[(l-2p+q)\sqrt{1-e^2} - (l-2p) \right] F_{lmp}(i) \times \\ & G_{lpq}(e) \left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right), \end{aligned} \tag{4.253}$$

$$C_{lmpq}^{i} = \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}\,\sin i} [(l-2p)\cos i - m]\, F_{lmp}(i)\, G_{lpq}(e) \left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right), \tag{4.254}$$

$$C_{lmpq}^{\Omega} = \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}\,\sin i} F'_{\mathrm{lmp}}(i) G_{lpq}(e) \left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right), \tag{4.255}$$

$$C_{lmpq}^{\omega} = -\cos i\, C_{lmpq}^{\Omega} + \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} F_{lmp}(i)\, G'_{lpq}(e) \left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right), \tag{4.256}$$

$$\begin{aligned} C_{lmpq}^{M} = {} & -\sqrt{1-e^2}\,(C_{lmpq}^{\omega} + \cos i\, C_{lmpq}^{\Omega}) + \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} \Big[2(l+1) - \\ & 3(l-2p+q)\left(\frac{n}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right) \Big] F_{lmp}(i)\, G_{lpq}(e) \left(\frac{\bar{n}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right). \end{aligned} \tag{4.257}$$

其中$\dot{\psi}_{lmpq}$**可按下式取近似值：**

$$\begin{cases} \dot{\psi}_{lmpq} = (l-2p+q)\dot{\bar{M}} + (l-2p)\dot{\bar{\omega}} + m(\dot{\bar{\Omega}} - n_e) \\ \qquad\quad \approx (l-2p+q)\bar{n} - m n_e = \bar{n}[(l-2p+q) - m\alpha]. \\ \alpha = n_e / \bar{n}, \qquad \bar{n} = \bar{a}^{-3/2} \end{cases} \tag{4.258}$$

n_e**是地球自转角速度，即恒星时变率，在历元地心平赤道系和轨道坐标系中均可采用下列数值：**

$$n_e = 360^{\circ}.985647365/d. \tag{4.259}$$

相应的上述坐标系中的格林尼治恒星时 S_G **可用平恒星时**$\bar{S}_G$**，计算公式如下：**

$$\overline{S}_G = 280°.460619 + 360°.985647365d, \quad (4.260)$$

$$d = \mathrm{JD}(t) - \mathrm{JD}(\mathrm{J}2000.0), \quad (4.261)$$

其中 d **为** J2000.0 **起算的儒略日.**

倾角函数 $F_{lmp}(i)$**和汉森系数** $G_{lpq}(e)$**以及它们的导数分别由下列各式表达:**

$$F_{lmp}(i) = \frac{(l+m)!}{2^l p!(l-p)!} \sum_{k=k_1}^{k_2} (-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2} \binom{2l-2p}{k} \binom{2p}{l-m-k} \times \left(\sin\frac{i}{2}\right)^{-(l-m-2p-2k)} \left(\cos\frac{i}{2}\right)^{(3l-m-2p-2k)}$$

$$= \frac{(l+m)!}{2^{2l} p!(l-p)!} \sum_{k=k_1}^{k_2} (-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2} \binom{2l-2p}{k} \binom{2p}{l-m-k} \times (\sin i)^{-(l-m-2p-2k)} (1+\cos i)^{(2l-m-2p-2k)}, \quad (4.262)$$

$$k_1 = \max(0, l-m-2p), \quad k_2 = \min(l-m, 2l-2p), \quad (4.263)$$

$$F'_{\mathrm{lmp}}(i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i} F_{lmp}(i)$$

$$= \frac{(l+m)!}{2^l p!(l-p)!} \left(\frac{1}{\sin i}\right) \sum_{k=k_1}^{k_2} (-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2} \times \binom{2l-2p}{k} \binom{2p}{l-m-k} \times \left[-2l\sin^2\frac{i}{2} - (l-m-2p-2k)\right] \left(\sin\frac{i}{2}\right)^{-(l-m-2p-2k)} \times \left(\cos\frac{i}{2}\right)^{(3l-m-2p-2k)}. \quad (4.264)$$

精确到 $O(e^2)$**项有**

$$X_p^{l,p}(e) = 1 + \frac{1}{4}(l^2 + l - 4p^2)e^2, \quad (4.265)$$

$$\begin{cases} X_{p+1}^{l,p}(e) = -\frac{1}{2}(l-2p)e \\ X_{p-1}^{l,p}(e) = -\frac{1}{2}(l+2p)e \end{cases}, \quad (4.266)$$

$$\begin{cases} X_{p+2}^{l,p}(e) = \frac{1}{8}[l^2 - (4p+3)l + p(4p+5)]e^2 \\ X_{p-2}^{l,p}(e) = \frac{1}{8}[l^2 + (4p-3)l + p(4p-5)]e^2 \end{cases}. \quad (4.267)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_p^{l,p}(e)) = \frac{1}{2}(l^2 + l - 4p^2)e, \quad (4.268)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p+1}^{l,p}(e)) = -\dfrac{1}{2}(l-2p) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p-1}^{l,p}(e)) = -\dfrac{1}{2}(l+2p) \end{cases}, \tag{4.269}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p+2}^{l,p}(e)) = \dfrac{1}{4}[l^2-(4p+3)]l+p(4p+5)]e \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}(X_{p-2}^{l,p}(e)) = \dfrac{1}{4}[l^2+(4p-3)l+p(4p-5)]e. \end{cases} \tag{4.270}$$

上述(4.244)～(4.257)式中出现的地球参考椭球体赤道半径 a_e和地心引力常数 GM,在前面采用的标准单位中均有 $a_e=1$,$GM=1$,在下述公式中不再出现.

除计算单位外,为了简便,采用前面§4.4 中的表达式,将田谐项的两个谐系数 C_{lm}和 S_{lm}改用下列形式表达:

$$\begin{cases} C_{lm} = J_{lm} \cos m\lambda_{lm}, \qquad S_{lm} = J_{lm} \sin m\lambda_{lm} \\ J_{lm} = (C_{lm}^2 + S_{lm}^2)^{1/2} \\ m\lambda_{lm} = \tan^{-1}(S_{lm}/C_{lm}) \end{cases}. \tag{4.271}$$

由此,S_{lmpq}和 S_{lmpq}^*的表达式(4.247)和(4.251)以及相应的 ψ_{lmpq}变为下列形式:

$$S_{lmpq} = J_{lm}[(1-\delta_{lm})\cos\psi_{lmpq}^* + \delta_{lm}\sin\psi_{lmpq}^*], \tag{4.272}$$

$$S_{lmpq}^* = J_{lm}[(1-\delta_{lm})\sin\psi_{lmpq}^* - \delta_{lm}\cos\psi_{lmpq}^*], \tag{4.273}$$

$$\begin{aligned} \psi_{lmpq}^* &= \psi_{lmpq} - m\lambda_{lm} \\ &= (l-2p+q)M + (l-2p)\omega + m\Omega_{lm}, \end{aligned} \tag{4.274}$$

$$\Omega_{lm} = \Omega - (S_G + \lambda_{lm}). \tag{4.275}$$

由 R_{lm}的表达式(4.246)或 $\sigma_s^{(2)}(t)$的表达式(4.252)～(4.257)式可以看出,当

$$n-2p+q=m\alpha,$$

即

$$\frac{\bar{n}}{n_e} = \frac{m}{n-2p+q} \tag{4.276}$$

时,卫星平运动角速度与地球自转角速度成简单整数比,上述摄动解无意义,这就是前面讨论 $J_{2,2}$项时所说的通约问题,(4.276)式即通约问题的判别准则.显然,$(n-2p+q)$要取正值,即

$$n-2p+q=1,2,\cdots.$$

因此,对于任何一个卫星,几乎都存在通约问题.特别是 24^h卫星,所有田谐项都引起通约问题.对于 2^h近地卫星,有$\bar{n}/n_e=12$,相应地 $m=12,24,\cdots$,即

$J_{12,12}$, $J_{13,12}$, …; $J_{24,24}$, $J_{25,24}$, …都会引起通约问题，只不过这些通约项含有因子 $1/r^{13}$, …, $1/r^{25}$, …，通约现象不显著.

当接近通约时，摄动解 $\sigma_s^{(2)}(t)$中有些项相应地转化为长周期项，这与前面 $J_{2,2}$项类似，不再论述.

§4.7 几类特殊卫星轨道

1. 太阳同步卫星与极轨道卫星

太阳同步卫星，即其轨道升交点（经度为 Ω）的进动速度Ω与地球绕日公转的平运动速度 n_s 相等的卫星，也就是说，该卫星轨道平面在空间的移动与太阳向东运动（从地球上看）同步. 这是一种常见的应用卫星，如我国的第一代气象卫星风云 1 号等. 极轨卫星是指轨道倾角 $i=90°$的卫星，其轨道平面几乎不变，即$\Omega=0$.

这两种卫星轨道能否实现，可从地球非球形引力摄动导致的卫星轨道变化规律中找到答案. 根据 §4.3 中得到的结果，在主要带谐项（J_2）的影响下，轨道升交点经度变化的一阶长期项系数（即变率）为

$$\Omega_1=-\frac{3J_2}{2p^2}n\cos i.$$

由此可知，当 $i=90°$时，轨道平面不动；又根据 $\Omega_1=n_s$ 的条件，在给定 a 和 e 两个根数的前提下，可以确定倾角 i，使轨道平面的运动与太阳同步. 但这些都仅仅是根据一阶长期摄动项（当然，也是最主要的摄动项）的结果而得出的结论，若完整地考虑各种摄动源的影响，上述结论是否还能保持，本节将对此作进一步的阐明.

(1) 卫星轨道变化的有关规律

上述两种卫星都涉及到轨道平面的定向问题，前者是进动速度保持定值问题，而后者则是轨道平面保持不变的问题. 关于轨道平面的两个定向根数（i, ω），在受摄情况下，所满足的微分方程如下

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\cos i]\dfrac{\partial R}{\partial\omega}-\dfrac{\partial R}{\partial\Omega}\right)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial R}{\partial i}\end{cases}\tag{4.277}$$

或

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\cos(f+\omega)}{na^2\sqrt{1-e^2}}W \\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r\sin(f+\omega)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W \end{cases} \tag{4.278}$$

其中 R 是摄动函数,W 是摄动加速度的轨道平面法向分量,其它各量 a,e 等皆为常用的符号,不再说明.

根据前面几节的结果,我们已了解到如下几点:

1)对于地球非球形引力位的带谐项 J_l(即 $C_{l,0}$,$l=1,2,\cdots$)部分,相应的摄动函数 $R(J_l)$与 Ω 无关,而且含有因子 $\sin i$(奇次带谐项)或 $\sin^2 i$(偶次带谐项). 因此,相应的方程(4.277)有如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \cos i\,\Phi_1(J_l;a,e,i,\omega,M) \\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -\cos i\,\Phi_2(J_l;a,e,i,\omega,M) \end{cases}, \tag{4.279}$$

显然,该方程有一特解

$$\begin{cases} a=a(t),e=e(t),\omega=\omega(t),M=M(t) \\ i=90^\circ \\ \Omega=\Omega_0 \end{cases}, \tag{4.280}$$

其中 Ω_0 为$[0,2\pi)$上的任意实数.

2)对于田谐项 J_{lm}($l=1,2,\cdots,m=1,2,\cdots,l$)部分,相应的摄动函数 $R(J_{lm})$不再有上述特征,既与 Ω 有关,又不再含有公共因子 $\sin i$(或 $\sin^2 i$),故对 i 和 Ω 的变化而言,不再满足类似(4.279)的方程、但是,田谐项 J_{lm} 对卫星轨道的影响(除高轨卫星会因通约小分母的出现引起共振项外)仅有较小的短周期效应,即相应于解(4.280)致使 i 在 90°附近摆动,Ω 在 Ω_0 附近摆动.

3)对于地球非球形引力摄动,消除角变量(包括快变量 M 和慢变量 Ω 和 ω)后,即得到平均根数$\bar{i}$和$\bar{\Omega}$所满足的微分方程,有

$$\frac{\mathrm{d}\,\bar{i}}{\mathrm{d}t}=0,\quad \bar{i}=\bar{i}_0, \tag{4.281}$$

$$\frac{d\,\bar{\Omega}}{\mathrm{d}t} =-\cos \bar{i}\left[\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)n+O(J_2^2,J_{2l})\,\bar{\psi}(\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0)\right]. \tag{4.282}$$

其中 J_{2l}($l=2,\cdots$)对应偶次带谐项,$p=a(1-e^2)=\bar{a}_0(1-\bar{e}_0^2)$,$n=\bar{n}_0=\bar{a}_0^{-3/2}$. 这里顺便提一句,即使考虑日、月摄动,$\bar{\Omega}$的变化亦含有共同因子 $\cos i$,后面第五章中将要介绍.

(2) 太阳同步卫星轨道的参数选择

根据上述特征(4.282)式和太阳同步轨道的要求$\Omega=n_s$,可得

$$
\begin{aligned}
n_s = & -\cos i\left(\frac{3J_2}{2p^2}n\right)\left\{1+\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}\right)\right.\right. \\
& -\sin^2 i\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\right) \\
& \left.\left.-\frac{35}{18}\left(\frac{J_4}{J_2^2}\right)\left(\frac{6}{7}+\frac{9}{7}e^2-\sin^2 i\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}e^2\right)\right)+O\left(\frac{J_{2l}}{J_2^2}\right)_{l\geqslant 3}\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.283}
$$

当给定a,e后即可确定相应的倾角$i=i(n_s;a,e)$.严格地说,这里的i和a,e均为$\bar{i}$和$\bar{a},\bar{e}$.但在进行轨道设计选择参数时,就可当作瞬时根数,而无需像精密定轨那样严格要求.如果同时考虑日、月摄动,仅在(4.282)式右端增加相应的项,除像24^{h}地球同步卫星那样的高轨卫星外,所增加的项与J_2^2项相当.

关于太阳同步卫星轨道设计中主要参数a,e,i的选择问题,通常采用近圆轨道,剩下的问题是a的选择,当a,e确定后即可由(4.283)式确定i值.按(4.283)式由a,e确定i时,是否同时考虑一阶项(J_2)和二阶项(J_2^2,J_{2l})比只考虑一阶项好？事实上,无法真正严格地确定i值,即使同时考虑J_2^2,J_{2l}和日、月等摄动项,也只能包含长期项,而且还有一些摄动因素无法按(4.283)式考虑,那么,按前者选择就不一定比后者好.既然如此,还是仅考虑一阶项既简单又实用,即

$$
\cos i=-n_s\Big/\left(\frac{3J_2}{2p^2}n\right) \tag{4.284}
$$

(3) 极轨道的保持问题

根据前面第1段的阐述,在地球非球形引力位带谐项(J_l)的影响下,极轨道是存在的,即

$$
i=i_0=90^\circ,\Omega=\Omega_0.
$$

而同时考虑日、月摄动的长期的长期效应时亦有上述结论,对于静止(非旋转)大气,亦不影响上述结论.因此,极轨道基本上能实现的,在周期摄动影响下,真实的轨道平面将作相应的摆动.为此,下面给出算例,使读者了解这一摆动的幅度.

以2^{h}卫星为背景,取初值

$$
i_0=90^\circ,\Omega=45^\circ,
$$

对完整的摄动运动方程积分10^4圈(这一弧段已相当长),以显示极轨道保

持的状况,计算结果列与表 4.1

表 4.1 中四种类型分别为:

Ⅰ型:只考虑 J_2, J_3, J_4 的摄动影响;

Ⅱ型:同时考虑 J_2, J_3, J_4 和 $J_{2,2}$ 的摄动影响;

Ⅲ型:同时考虑 J_2, J_3, J_4 和日、月引力的摄动影响;

Ⅳ型:同时考虑 $J_2, J_3, J_4, J_{2,2}$,日、月引力,太阳光压和大气阻力摄动的影响. 取光压和大气阻力摄动量级各为 10^{-7} 和 10^{-8},且不考虑地影和大气旋转,故这两种摄动对轨道平面的影响不大,关于这一点,下一章会仔细介绍.

表 4.1　极轨道的保持与变化范围

类型	i/度	Ω/度
Ⅰ	90.0(不变)	45.0(不变)
Ⅱ	89.993～90.0017	44.9999～45.0310
Ⅲ	89.9966～90.0376	44.9785～45.9359
Ⅳ	89.9975～90.0395	44.9900～46.0597

对于较高轨道(如 Lageos 卫星)的计算,所得结果的特征与 2^h 卫星基本相同. 由结果可以看出,前面的分析是正确的,极轨道是可以保持的,即使在各种摄动力的影响下,运行时间足够长时,轨道平面的摆动范围仍然较小.

2. 拱线静止轨道及其稳定性

拱线静止轨道即轨道半长轴指向不变的轨道,也就是说近地点幅角 ω 不变的轨道. 这是另一类型的应用卫星,如美国 1985 年 3 月 12 日发射的一颗海洋测高卫星 Geosat,就设计成这样的轨道. 拱线静止轨道是靠相应的小偏心率 e 来维持的. 确定的 e 和 ω 值可以保持卫星地面高度在同一地区几乎不变,这种轨道也称为冻结轨道(frozen orbit). 文献[11]曾在仅考虑地球非球形引力位 J_2 和 J_3 项摄动时,给出了这种轨道存在的条件,这里将对其作较深入的分析与讨论.

(1) 讨论拱线静止轨道存在的基本方程

根据前几节的讨论,考虑地球非球形引力摄动时,在历元地心平赤道系中,略去岁差章动和极移的影响,卫星轨道变化满足下列方程

$$\dot{\sigma} = f(\sigma, t, \beta). \tag{4.285}$$

这里 σ 即六个轨道向量

$$\sigma=(a\quad e\quad i\quad \Omega\quad \Omega\quad M)^{\mathrm{T}},\tag{4.286}$$

T 表示转置.(4.285)式右端向量函数 f 中的 β 则表示地球非球形引力场参数,f 显含 t,是地球自转(通过田谐项)的反映. 显然,这一非自治系统(4.285)不存在 $\dot{\omega}=0$ 的特解,因此严格的拱线静止轨道是不存在的.

如果消除方程组(4.285)中的快变量(即分离出变化特征取决于平近点角 M 的短周期项,包括地球自转项),而对于非高轨卫星,田谐项部分又不会产生摄动效应明显增强的共振项,那么方程组(4.285)就退化为下列 4 维自治系统

$$\begin{cases}\dot{X}=f(X;J_l)\\X=(a\quad e\quad i\quad \omega)^{\mathrm{T}}\end{cases}.\tag{4.287}$$

这里的 X 实为仅消除短周期项的拟平均根数 $\bar{\sigma}$,其变化只包含长期项和长周期项,为了书写方便,仍记作 a,e,i,ω. 方程组(4.287)的右函数不仅不显含 t,亦与轨道升交点经度 Ω 无关,故 Ω 和 M 可与 a,e,i,ω 分离开. 这就是上述方程组(4.285)在分离出短周期项后退化为 4 维自治系统(4.287)的原因. 方程组(4.287)正是讨论拱线静止轨道存在性的基本方程,即在一定条件下,该方程组存在对应 $\dot{\omega}=0$ 的特解.

将方程组(4.287)中的右函数 f 记为

$$f=\begin{pmatrix}(f_a)\\(f_e)\\(f_i)\\(f_\omega)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\end{pmatrix},\tag{4.288}$$

则四个分量 f_1,f_2,f_3,f_4 分别为 a,e,i,ω 四个根数各自对应的右函数. 若记

$$\begin{cases}f_j=\sum\limits_{k=1}^{N}f_j^{(k)}=f_j^{(1)}+f_j^{(2)}+\cdots+f_j^{(N)}\\f_j^{(k)}=O(\varepsilon^k)\quad j=1,2,3,4\end{cases}\tag{4.289}$$

其中 $\varepsilon=J_2=O(10^{-3})$,$f_j$ 各有如下特点

$$f_1=f_1^{(3)}+f_1^{(4)}+\cdots,\tag{4.290}$$

$$\begin{cases}f_1^{(3)}=f_1^{(3)}(J_2^3)\\f_1{}^{(4)}=f_1^{(4)}(J_2^4,\cdots)\end{cases},\tag{4.291}$$

$$f_j=f_j^{(2)}+f_j^{(3)}+f_j^{(4)}+\cdots,\quad j=2,3,\tag{4.292}$$

$$\begin{cases}f_j^{(2)}=f_j^{(2)}(J_2^2,J_3,J_4,\cdots)\\f_j^{(3)}=f_j^{(3)}(J_2^3,J_2J_3,J_2J_4,\cdots)\\f_j^{(4)}=f_j^{(4)}(J_2^4,J_2^2J_3,J_2^2J_4,\cdots,J_3^2,J_4^2,\cdots,J_{lm}^2)\end{cases},\tag{4.293}$$

$$f_4 = f_4^{(1)} + f_4^{(2)} + f_4^{(3)} + f_4^{(4)} + \cdots, \tag{4.294}$$

$$\begin{cases} f_4^{(1)} = f_4^{(1)}(J_2) \\ f_4^{(2)} = f_j^{(2)}(J_2^2, J_3, J_4, \cdots) \\ f_4^{(3)} = f_j^{(3)}(J_2^3, J_2 J_3, J_2 J_4, \cdots) \\ f_4^{(4)} = f_j^{(4)}(J_2^4, J_2^2 J_3, J_2^2 J_4, \cdots, J_3^2, J_4^2, \cdots, J_{lm}^2) \end{cases}. \tag{4.295}$$

不失一般性，右函数 f 只取到 3 阶项（J_{lm}^2 项将不再出现），并以 J_3 和 J_4 分别代表二阶奇次带谐项 J_{2l-1} 和偶次带谐项 J_{2l}，$l=1,2,3,\cdots$，因为右函数中的这两部分能反映与讨论拱线静止轨道直接有关的“特征”，包括 $\frac{1}{e}$ 因子以及含有幅角 $\omega, 3\omega, \cdots, 2\omega, 4\omega, \cdots$ 的三角函数的状况. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = f_1 = f_1^{(3)}, \tag{4.296}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = f_2 = -\left(\frac{1-e^2}{e}\tan i\right) f_3, \tag{4.297}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = f_3 = f_3^{(2)} + f_3^{(3)}, \tag{4.298}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = f_4 = f_4^{(1)} + f_4^{(2)} + f_4^{(3)}. \tag{4.299}$$

其中

$$\begin{aligned} f_1^{(3)} = {} & \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^3 n \left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) a\sqrt{1-e^2} \\ & \left\{\left[\frac{1}{3}\sin^2 i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right) cf - \right.\right. \\ & \left. \sin^2 i\left(\frac{17}{12} - \frac{19}{8}\sin^2 i\right) - \frac{e^2}{1-e^2}\left(\frac{7}{3}\sin^2 i\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right] \times \\ & \left. 2e^2\sin 2\omega - \frac{1}{1-e^2}\left[\frac{1}{32}\sin^4 i\right] 4e^2 \sin 4\omega\right\}, \end{aligned} \tag{4.300}$$

$$\begin{aligned} f_3^{(2)} = {} & \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n \sin 2i\left[\left(\frac{7}{24} - \frac{5}{16}\sin^2 i\right) + \frac{1}{6}\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) cf\right] e^2 \times \\ & \sin 2\omega + \left(\frac{35 J_4}{8p^4}\right) n \sin 2i\left[\frac{9}{28} - \frac{3}{8}\sin^2 i\right] e^2 \sin 2\omega + \\ & \left(\frac{3J_3}{4p^3}\right) n \cos i\left[2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right] e\cos\omega, \end{aligned} \tag{4.301}$$

$$\begin{aligned} f_3^{(3)} = {} & I_1(J_2^3; a, e, i) e^2 \sin 2\omega + \left[I_{22(J_2 J_4; a,e,i)} e^2 \sin 2\omega + \right. \\ & \left. I_{24(J_2 J_4; a,e,i)} e^4 \sin 4\omega\right] + \left[I_{31}(J_2 J_3; a, e, i) e\cos\omega + \right. \\ & \left. I_{33}(J_2 J_3; a, e, i) e^3 \cos 3\omega\right], \end{aligned} \tag{4.302}$$

$$f_4^{(1)} = \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right) n \left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right), \tag{4.303}$$

$$f_4^{(2)} = f_{4c}^{(2)} + f_{4l}^{(2)}, \tag{4.304}$$

$$\begin{aligned} f_{4c}^{(2)} = & \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n \left[\left(4 - \frac{103}{12}\sin^2 i + \frac{215}{48}\sin^4 i\right) + \right. \\ & e^2\left(\frac{7}{12} - \frac{3}{8}\sin^2 i - \frac{15}{32}\sin^4 i\right) + \\ & \left.\sqrt{1-e^2}\left(2 - \frac{11}{2}\sin^2 i + \frac{15}{4}\sin^4 i\right)\right] - \\ & \left(\frac{35J_4}{8p^4}\right) n \left[\left(\frac{12}{7} - \frac{93}{14}\sin^2 i + \frac{21}{4}\sin^4 i\right) + \right. \\ & \left. e^2\left(\frac{27}{14} - \frac{27}{4}\sin^2 i + \frac{81}{16}\sin^4 i\right)\right], \end{aligned} \tag{4.305}$$

$$\begin{aligned} f_{4l}^{(2)} = & \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n \left[\sin^2 i\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1-e^2}{3}cf\right) + \right. \\ & e^2\left(\frac{2}{3} - \frac{11}{3}\sin^2 i + \frac{10}{3}\sin^4 i\right) cf - \\ & \left.\sin^2 i\left(\frac{25}{12} - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) + e^2\left(\frac{7}{12} - \frac{79}{24}\sin^2 i + \frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega + \\ & \left(\frac{35J_4}{8p^4}\right) n \left[-\sin^2 i\left(\frac{9}{14} - \frac{3}{4}\sin^2 i\right) + e^2\left(\frac{9}{14} - \frac{15}{4}\sin^2 i + \right.\right. \\ & \left.\left.\frac{27}{8}\sin^4 i\right)\right]\cos 2\omega + \left(\frac{3J_3}{4p^3}\right) n \frac{1}{e}\left[\sin i\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) - \right. \\ & \left.\frac{e^2}{\sin i}\left(2 - \frac{35}{2}\sin^2 i + \frac{35}{2}\sin^4 i\right)\right]\sin\omega, \end{aligned} \tag{4.306}$$

$$f_4^{(3)} = f_{4c}^{(3)} + f_{4l}^{(3)}, \tag{4.307}$$

$$f_{4c}^{(3)} = \omega_c(J_2^3, J_2J_4; a, e, i), \tag{4.308}$$

$$\begin{aligned} f_{4l}^{(3)} = & \omega_1(J_2^3; a, e, i)\cos 2\omega + \omega_{22}(J_2J_4; a, e, i)\cos 2\omega + \omega_{24}(J_2J_4; a, e, i)e^2 \\ & \cos 4\omega + \omega_{31}(J_2J_3; a, e, i)\frac{1}{e}\sin\omega + \omega_{33}(J_2J_3; a, e, i)e\sin 3\omega. \end{aligned} \tag{4.309}$$

上述各式中的有关量为

$$n = a^{-3/2}, \quad p = a(1-e^2), \tag{4.310}$$

$$cf = \frac{1}{e^2}\overline{\cos 2f} = \frac{1 + 2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2} = \frac{3}{4} + O(e^2). \tag{4.311}$$

尽管 $f_3^{(3)}$ 和 $f_4^{(3)}$ 并未完全将具体形式写出，即 $I_1(J_2^3; a, e, i), \cdots, \omega_{33}(J_2J_3; a, e, i)$，**但已清楚地表明了相应函数的具体特征，即奇次和偶次带谐**

项以及它们的联合项中分别包含 $\sin\omega,\cos\omega,\cdots,\sin 2\omega,\cos 2\omega,\cdots$ **的区别，特别是有关这些项中** e**（或** $\frac{1}{e}$**）因子出现的不同形式；还有** a,e,i **和** ω **相应右函数中出现上述各项的差异. 这些正是讨论拱线静止轨道存在性所必须了解的特征.**

（2）拱线静止轨道——方程组（4. 296）～（4. 299）的特解

首先根据上一段给出的右函数特征之一，即对于 a,e,i，**右函数中出现的是** $\sin 2\omega,\sin 4\omega,\cdots,\cos\omega,\cos 3\omega,\cdots$，**当** $\omega=90^\circ$ **和** $\omega=270^\circ$ **时，显然有**

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0.$$

再看右函数的特征之二，即对于 ω，**右函数中出现的是** $\cos 2\omega,\cos 4\omega,\cdots,\sin\omega,\sin 3\omega,\cdots$，**当** $\omega=90^\circ$ **和** $\omega=270^\circ$ **时，分别有**

$$\cos 2\omega=-1,\quad \cos 4\omega=1,\cdots$$
$$\sin\omega=\pm 1,\quad \sin 3\omega=\mp 1,\cdots$$

这里 $\pm$ **或** $\mp$ **号依次分别对应** $\omega=90^\circ$ **和** $\omega=270^\circ$. **将** ω **值带入**（4. 299）**式后即可给出** a,e,i **所满足的一个关系式，从而获得** $e=e(a,i)$，**只要该关系合理即可. 然而根据** $J_2>0,J_3<0$，**以** $\omega=270^\circ$ **代入方程**（4. 299）**后，在一般条件下，给出的结果** $e<0$. **因此，方程组**（4. 296）～（4. 299）**有如下特解**

$$a\equiv a_0,e\equiv e_0,i\equiv i_0,\omega\equiv\omega_0=90^\circ. \tag{4.312}$$

a_0,e_0,i_0 **所满足的关系如下**

$$\begin{aligned}
e_0=&\left\{\frac{3(-J_3)}{4p}\sin i\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)-\frac{e^2}{\sin^2 i}\left(2-\frac{35}{2}\sin^2 i+\frac{35}{2}\sin^4 i\right)\right]+\right.\\
&\left.O\left(\frac{J_5}{p^3},\cdots\right)\right\}\times\left\{\frac{3J_2}{2}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+\left(\frac{3J_2}{2p}\right)^2\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\times\right.\right.\\
&\left(3-\frac{79}{24}\sin^2 i\right)-e^2\left(\frac{5}{12}-\frac{19}{8}\sin^2+\frac{75}{32}\sin^4 i\right)+O(e^4)\Big]+\\
&\frac{35(-J_4)}{8p^2}\left[\left(\frac{12}{7}-\frac{93}{14}\sin^2 i+\frac{21}{4}\sin^4 i\right)+e^2\left(\frac{27}{14}-\frac{27}{4}\sin^2 i\right)\times\right.\\
&\left.\left(\frac{81}{16}\sin^4 i\right)\right]+O(J_2^3,J_2J_4,\cdots)_c-\left(\frac{3J_2}{2p}\right)^2\left[\sin^2 i\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\times\right.\\
&\left(\frac{1}{4}+\frac{1-e^2}{3}cf\right)+e^2\left(\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\sin^2 i+\frac{10}{3}\sin^4 i\right)cf-\\
&\left.\sin^2 i\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{79}{24}\sin^2 i+\frac{45}{16}\sin^4 i\right)\right]-\\
&\frac{35(-J_4)}{8p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{9}{14}-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)-e^2\left(\frac{9}{14}-\frac{15}{4}\sin^2 i+\right.\right.
\end{aligned}$$

$$\frac{27}{8}\sin^4 i\Big)\Big]+O(J_2^3, J_2J_4, J_2J_3, \cdots)_1\}^{-1}. \tag{4.313}$$

该式右端出现的 a, e, i 皆为 $a_0, e_0, i_0, p=1_0(1-e_0^2)$，而 $O(\cdots)_c$ 和$O(\cdots)_1$则表示相应的长期和长周期部分对应的项. 若 i_0 不十分接近临界角 $i_c=63°26'$，即当$\left|2-\frac{5}{2}\sin^2 i_0\right|>10^{-3}$时，上式的主要部分为

$$e_0=\left(\frac{-J_3}{J_2}\right)\frac{1}{2a_0}\sin i_0[1+O(e_0^2)]=O(10^{-3}), \tag{4.314}$$

这表明拱线静止轨道是以近圆轨道实现的. 当 $i_0 \to i_c$ 进入临界角范围，则将出现相应的轨道共振问题，见参考文献[12].

(4.312)式和(4.313)式即拱线静止轨道解及相应轨道根数之间的关系，给定 a_0, i_0 后就可确定相应的 e_0 值，而 $\omega_0 \equiv 90°$，近地点指向不变. 至于根数 Ω 的变化(东进或西退)对该轨道特征无影响.

根据右函数中表现出的规律，除 J_2和 J_3 项外，同时考虑 J_{2l-1}项，J_{2l}项($l=2,3,\cdots$)和田谐项 J_{lm}，也不会改变上述结论(指平均系统). 但这仅仅是地球卫星的情况，对于不同的中心天体将有不同的结论. 从上述特解可以看出，奇次带谐项 J_{2l-1}将起着重要作用，只是地球非球形引力位的 $J_5, J_7, \cdots$相对 J_3 而言较小，不改变前面的结论，而对月球则不然，相应的 J_5, J_7, J_9项相对 J_3 项而言，对低轨卫星更重要，冻结轨道的解有差别，详见参考文献[13]和[14].

(3) 拱线静止轨道解的稳定性问题

上述轨道解所对应的是一个平均系统的特解，那么在原完整力学系统中，这种特解所固有的特征——拱线指向不变是否还能保持，这就涉及到该特解的稳定性问题. 若仅限于线性意义下的稳定性，那是容易回答这一问题的，略去证明过程，结论为：拱线静止轨道对应的特解(4.312)是稳定的.

至于非线性情况，特别是除地球非球形引力摄动外，还有更复杂的摄动因素，对相应的完整力学系统，上述特解是否还保持稳定，目前还难以回答. 但人们关心的是在有限扰动下，这种轨道特征的变化状况. 因此，用具体计算来表明该轨道特征的保持或变化，显得更具实际意义. 计算表明，在适当选取初始条件下可以使拱线在较长间隔内保持小范围摆动的状态，即这种特殊轨道在一定条件下是可以实现的. 不过，实际轨道中拱线的摆动(甚至摆动幅度较大)，在具体工程任务中是要考虑的，特别是需要在较长间隔内保持拱线"静止"状态的那种应用卫星.

3. 地球同步卫星的运动特征及其漂移

地球同步卫星的轨道周期与地球自转周期相同，除周期相同外，如果轨

道面又与地球赤道面"重合"(即轨道倾角 $i\approx 0$),且偏心率 $e\approx 0$,这种卫星相对地面固定点将是静止的,所以也称为地球静止卫星,常作为通信卫星.关于这种卫星,地球非球形引力位的田谐项(特别是 $C_{2,2}$,$S_{2,2}$ 项)对其轨道的摄动作用会产生一种通约小分母所导致的共振项.这种卫星轨道的一个基本特征,即当轨道周期有误差时,只要误差在一定范围内,它会围绕地球赤道短轴方向摆动,却不会远离原定点方向"漂移而去".这里将直接从原运动方程着手,阐明在一定条件下它围绕地球赤道短轴方向摆动的力学机制.

(1) 运动方程

考虑地球非球形引力位中的主要项(扁率项和椭率项)J_2 和 $J_{2,2}$ 项的影响,引用地心赤道坐标系 $O-r,\lambda,\phi$,略去岁差、章动和极移,并采用标准计算单位,则相应的地球引力位函数为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{r}\left[1-\frac{J_2}{r^2}P_2(\sin\varphi)+\frac{J_{2,2}}{r^2}P_{2,2}(\sin\varphi)\cos 2\bar{\lambda}\right] \\ &= \frac{1}{r}-\frac{J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)+\frac{J_{2,2}}{r^3}(3\cos^2\varphi)\cos 2\bar{\lambda}. \end{aligned} \tag{4.315}$$

其中$\bar{\lambda}$是卫星相对地球赤道长轴方向(该方向在地固坐标系中的经度为 $\lambda_{2,2}$)的经度,这在前面 §4.4 中已有阐述.

在上述球坐标系中,卫星的位置矢量$\boldsymbol{r}$和速度矢量$\dot{\boldsymbol{r}}$的表达如下

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.316}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\cos\varphi\dot{\lambda} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix}, \tag{4.317}$$

其中

$$\dot{\lambda}=\dot{\bar{\lambda}}+S_{2,2}=\dot{\bar{\lambda}}+n_e, \tag{4.318}$$

n_e 即地球自转角速度.相应的卫星的动能(去掉质量因子)T 即表示为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2+r^2\dot{\varphi}^2). \tag{4.319}$$

根据动力学中运动方程的拉格朗日形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q}=\dfrac{\partial V}{\partial q} \\ q=\begin{pmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{pmatrix},\dot{q}=\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.320}$$

可给出卫星运动的基本方程如下

$$\begin{cases} \ddot{r}-r\cos^2\varphi\,\dot{\lambda}^2-r\dot{\varphi}^2=-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{3J_2}{r^4}\left(\dfrac{3}{2}\sin^2\varphi-\dfrac{1}{2}\right)- \\ \qquad \dfrac{9J_{2,2}}{r^4}\cos^2\varphi\cos 2\bar{\lambda} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\cos^2\varphi\,\dot{\lambda})=-\dfrac{6J_{2,2}}{r^3}\cos^2\varphi\sin^2\bar{\lambda} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})+\dfrac{1}{2}r^2\sin 2\varphi\,\dot{\lambda}^2=\dfrac{3J_2}{2r^3}\sin 2\varphi-\dfrac{3J_{2,2}}{r^3}\sin 2\varphi\cos 2\bar{\lambda} \end{cases}. \tag{4.321}$$

(2) 运动方程的特解——地球同步卫星的运动特征

不难证明,方程(4.321)存在如下特解

$$\dot{r}\equiv r_0,\quad \bar{\lambda}\equiv\bar{\lambda}_0,\quad \varphi\equiv 0. \tag{4.322}$$

证明如下:

此时有

$$\dot{r}=0,\qquad \ddot{r}=0;$$

$$\dot{\lambda}=\dot{\bar{\lambda}}+n_e=n_e,\quad \ddot{\lambda}=0;$$

$$\dot{\varphi}=0,\quad \ddot{\varphi}=0.$$

以此代入运动方程(4.321)得

$$\begin{cases} -r_0n_e^2=-\dfrac{1}{r_0^2}-\dfrac{3J_2}{2r_0^4}-\dfrac{9J_{2,2}}{r_0^4}\cos 2\bar{\lambda} \\ 0=\dfrac{6J_{2,2}}{r_0^3}\sin 2\bar{\lambda}_0, \\ 0=0 \end{cases}, \tag{4.323}$$

只要能由该方程确定 r_0 和$\bar{\lambda}_0$ 即得证. 由方程(4.323)的第二式可知

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_0=\bar{\lambda}_{01},\bar{\lambda}_{02} \\ \bar{\lambda}_{01}=90^\circ,270^\circ. \\ \bar{\lambda}_{02}=0^\circ,180^\circ \end{cases} \tag{4.324}$$

由此,第一式变为下列形式:

$$r_0 n_e^2 = \frac{1}{r_0^2} + \left[\frac{3J_2}{2r_0^4} \mp \frac{9J_{2,2}}{r_0^4}\right], \tag{4.325}$$

其中 $J_{2,2}$ 项前的"－"号和"＋"号分别对应$\bar{\lambda}_{01}$和$\bar{\lambda}_{02}$. r_0 的解可写成

$$r_0^{-3} = n_e^2 - \left(\frac{3}{2}J_2 \mp 9J_{2,2}\right)/r_0^5. \tag{4.326}$$

该式确实可得 r_0 的两个实解. 由于 $J_2, J_{2,2}$ 是小量,可用简单迭代法求解 r_0,最后得运动方程(4.321)的两个特解,即

$$r \equiv r_{01}, \quad \bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda}_{01} = 90°, 270°, \quad \varphi \equiv 0; \tag{4.327}$$

$$r \equiv r_{02}, \quad \bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda}_{02} = 0°, 180°, \quad \varphi \equiv 0. \tag{4.328}$$

这两个特解分别表示卫星定点在地球赤道短轴和长轴上空. 如果取

$$J_2 = 1.082637^{-3}, J_{2,2} = 1.771156^{-6},$$

则由(4.326)式解得

$$r_{01} = 42164.71346\ \text{km}(\text{短轴上空}), \tag{4.329}$$

$$r_{02} = 42164.72371\ \text{km}(\text{长轴上空}). \tag{4.330}$$

上述特解即平衡解. 容易证明解(4.327)和(4.328)分别对应中心和鞍点,后者是不稳定的,前者容易证明是线性稳定的. 至于在非线性意义下是否稳定,这并无实际意义,关键在于同时考虑其他摄动因素时(即不同性质的有限扰动),该平衡解是否稳定,或者说得确切一些,即在此情况下,卫星是否在上述稳定平衡点(地球赤道短轴上空)附近"摆动". 这里的特征量即$\bar{\lambda}$,如果稳定,则$\bar{\lambda}$在平衡位置 90°(或 270°)附近的变化范围 $\Delta\bar{\lambda}$应小于±90°,实际计算证实了这一特征,具体变化特点如下:

1) 同步卫星在地球赤道短轴上空附近摆动的特征明显,并不因初始轨道周期有误差就从平衡点漂移离去而不返回.

2) 仅考虑地球非球形引力摄动时,e 和 i 的变化很小,而考虑日、月引力和光压摄动后,则变化范围明显增大,特别是轨道倾角 i,这是低轨卫星轨道变化没有的现象. 关于这一问题,下一章中将要介绍,主要原因是日、月引力(特别是月球引力)摄动效应所致.

根据地球同步卫星运动的特点,作为地球上空的定点通信工具显然是可行的,这已广为采用. 但不可能都定点在地球赤道短轴上空的两个位置上(即东经 75°和西经 105°),因此,就有东西向漂移问题和倾角变化引起的南北漂移现象,这都需要不断进行轨控.

§4.8 双曲线轨道的扁率摄动

对于深空探测器的运动,当它从地球停泊轨道上飞抵目标天体附近时,

未变轨前，相对目标天体的运动通常是双曲线轨道. 要使其变为绕目标天体运动的轨道器，就必须再次变轨，将双曲线轨道变为椭圆轨道；或者仅需要接近探测过程中的某个目标天体，绕飞或接近目标天体后离去. 无论是前一种探测形式，还是后一种，探测器接近目标天体时，相对该天体总有一段运行轨道是双曲线轨道. 为了更好了解探测器的运动状态，给地面测控系统或者星上自主设备提供必要的轨道信息（不仅仅是孤立点上的位置速度值），有必要对双曲线轨道的变化特征进行研究，给出类似椭圆轨道变化的一些基本特征. 而接近目标天体时，该天体的扁率效应显然是主要的，因此这一节将给出双曲线轨道在扁率摄动影响下的变化规律.

仍采用标准单位系统，即长度、质量和时间单位取下列值：

$$\begin{cases}[L]=R_e\text{（中心天体赤道半径）}\\ [M]=M_0\text{（中心天体质量）}.\\ [T]=(R_e^3/GM_0)^{1/2}\end{cases} \tag{4.331}$$

在此计算单位系统中，$G=1$，$\mu=GM_0=1$.

扁率（J_2）项对应的摄动函数为

$$\begin{aligned}R&=-\frac{J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)\\ &=\frac{J_2}{2a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2u\right],\end{aligned} \tag{4.332}$$

其中 $u=f+\omega$. 将 R 代入摄动运动方程（3.75）即可得轨道变化对应的小参数方程：

$$\dot{\sigma}=f(\sigma,t;\varepsilon). \tag{4.333}$$

由于双曲线轨道是“开放的”，近点角 f 和 M 的变化不同于椭圆轨道，故相应摄动解无长期项和周期项之分，因此可将轨道解记为

$$\sigma(t)=\sigma(t_0)+\Delta\sigma(t). \tag{4.334}$$

根据解的特征，这里的 $\Delta\sigma(t)$ 又记为下列形式：

$$\Delta\sigma=\sigma_S(t)-\sigma_S(t_0). \tag{4.335}$$

式中 $\sigma_S(t)$ 的一阶形式如下（略去推导过程）：

$$a_S(t)=-\frac{3J_2}{2a}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\sin^2 i\cos(2f+2\omega)\right],$$

$$\begin{aligned}e_S(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\Bigg\{&\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(1+\frac{e^2}{4}\right)\cos f+\frac{e}{2}\cos 2f+\right.\\ &\left.\frac{e^2}{12}\cos 3f\right]+\sin^2 i\left[\frac{1}{16}e^2\cos(f-2\omega)+\left(\frac{1}{4}+\frac{11}{16}e^2\right)\right.\end{aligned}$$

$$\cos(f+2\omega)+\frac{5}{4}e\cos(2f+2\omega)+\left(\frac{7}{12}+\frac{17}{48}e^2\right)$$

$$\cos(3f+2\omega)+\frac{3}{8}e\cos(4f+2\omega)+\frac{1}{16}e^2\cos(5f+2\omega)\Big]\Big\},$$

(4.337)

$$i_S(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2i\right)\left[\frac{e}{2}\cos(f+2\omega)+\frac{1}{2}\cos(2f+2\omega)+\right.$$

$$\left.\frac{e}{6}\cos(3f+2\omega)\right],\tag{4.338}$$

$$\Omega_S(t)=-\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\left[(f+e\sin f)-\frac{e}{2}\sin(f+2\omega)-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\sin(2f+2\omega)-\frac{e}{6}\sin(3f+2\omega)\right],\tag{4.339}$$

$$\omega_S(t)=-\cos i\Omega_s(t)+\frac{3J_2}{2p^2}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[f+\left(\frac{1}{e}+\frac{3}{4}e\right)\sin f+\right.\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\frac{1}{16}e\sin(f-2\omega)-\left(\frac{1}{4e}-\frac{7}{16}e\right)\right.$$

$$\sin(f+2\omega)+\frac{3}{4}\sin(2f+2\omega)+\left(\frac{7}{12e}+\frac{11}{48}e\right)\sin(3f+2\omega)+$$

$$\left.\left.\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+\frac{1}{16}e\sin(5f+2\omega)\right]\right\},\tag{4.340}$$

$$M_S(t)=\frac{3}{2a}a_s(t_0)M+\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{(e^2-1)}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{4}e\right)\right.\right.$$

$$\left.\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\frac{1}{16}e\sin(f-\right.$$

$$2\omega)-\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)+\left(\frac{7}{12e}-\frac{1}{48}e\right)\sin(3f+$$

$$\left.\left.2\omega)+\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)+\frac{1}{16}e\sin(5f+2\omega)\right]\right\},\tag{4.341}$$

上述各式中 $a=a_0, e=e_0, i=i_0, \Omega=\Omega_0, \omega=\omega_0, M=M(t), M_0=M(t_0)$.

以月球探测器为例,探测器飞抵月球作用范围边界时,相对月球为双曲线运动. 作为算例,选取向月飞行轨道的一种,即探测器到达该作用范围边界(月心距为 57800 km$=33.26R_e$,$R_e=1738$ km 是月球赤道半径)时,相对月球的速度为 0.903783403 km/s$=0.538105019$,相应的近月点高度为 100 km. 这一双曲线轨道(这里取顺行轨道,对逆行轨道,计算情况相同)的 6 个初始根数为

$$\begin{cases} a_0 = 4.358728198, & \Omega_0 = 45°, \\ e_0 = 1.242625222, & \Omega_0 = 45°, \\ i_0 = 45°, & M_0 = -338°.88866330. \end{cases} \tag{4.342}$$

分别用高精度数值解(积分器为 RKF7(8)[15])和上述摄动分析解,计算探测器从进入月球作用范围(图 4.2 中的 A 点)到飞离作用范围(图 4.2 中的 B 点)这一关键弧段上双曲线轨道的变化. 按二体问题,这一弧段的飞行时间为 $1^{\mathrm{d}}.2892668 = 1856^{\mathrm{m}}.544192$,计算结果列于表 4.2.

表 4.2 两种方法给出的根数和坐标速度矢量的结果

根数	数值法	分析法	坐标速度	数值解	分析解
$a(R_e)$	4.358728041280	4.358728041277	$x(R_e)$	−22.5037946917	−22.5037946623
e	1.24263185315	1.242623181860	$y(R_e)$	−24.4517219010	−24.4517219719
$i(°)$	44.9997324696	44.9997320198	$z(R_e)$	−1.3956476350	−1.3856470591
$\Omega(°)$	44.9857322459	44.9857333244	$\dot{x}$(km/s)	−0.5671864971	−0.5671864968
$\omega(°)$	45.0150039744	45.0150023362	$\dot{y}$(km/s)	−0.6975563433	−0.6975563457
$M(°)$	338.8885835763	338.8885835407	$\dot{z}$(km/s)	−0.0924072365	−0.0924072201

从计算结果可以看出,以数值解为标准,分析解的误差也只有 10^{-8},这于上述一阶摄动解的精度是相当的,在这一弧段上,月球扁率摄动量级为 10^{-5} 10^{-4},而且又是保守力摄动,二阶摄动的量级应为 10^{-8}. 对于探测器的运动,另一种重要摄动源是第三体(地球)的引力摄动,但其影响不会超过月球扁率摄动. 故上述双曲线轨道的一阶摄动分析解还是有其实际意义的,而建立第三体引力摄动也并不困难.

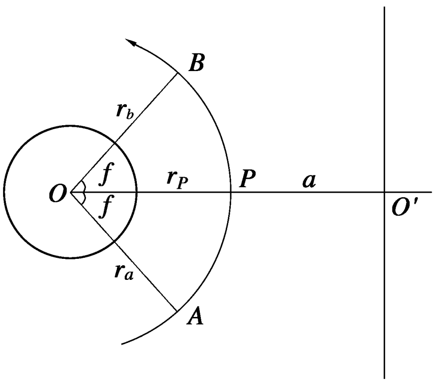

图 4.2 双曲线轨道

这一章结合卫星运动中最主要的摄动源——中心天体非球形引力摄动，对构造小参数幂级数解的方法及其具体过程作了详尽的阐述，剩下的问题是级数解中出现的奇点如何处理？关于根数变化的周期项中出现的小 e **和小** i **问题，只要采用第三章** §3.3 **中提出的无奇点根数即可. 另一个奇点问题是长周期项中出现的通约（通常所说的小分母）问题，这是平均根数法带来的，作为本章的结束，对此再作必要的阐述，简要介绍问题解决的一种途径.**

针对平均根数法出现该问题的特点，可对摄动法采用更进一步的改进，即用拟平均根数代替平均根数作为参考解. 拟平均根数的定义与平均根数稍有差别，但仍用$\bar{\sigma}(t)$**表示，精确到二阶长期项的表达式如下：**

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}_0 + (\delta\bar{n}_0 + \sigma_1 + \sigma_2)(t - t_0) + \Delta\sigma_l^{(1)}(t),$$

$$\Delta\sigma_l^{(1)}(t) = \sigma_l^{(1)}(t) - \sigma_l^{(1)}(t_0),$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 - [\sigma_S^{(1)}(t_0)].$$

相应的瞬时根数 $\sigma(t)$**即由下式表达：**

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(t) + \sigma_S^{(1)}(t).$$

因为通约问题发生在长周期项中，故应对其另行处理，将其变化 $\Delta\sigma_l^{(1)}(t)$**以二阶长期项对待，放入拟平均根数中，由此即可解决相应的小分母问题. 在此参考解的基础上即可构造相应的无奇点的小参数幂级数解，其原理和过程与平均根数法类似，详见参考文献**[3～5].

参 考 文 献

[1] Kozai Y. The motion of a close earth satellite. Astron. J. 1959,64(9)：367～377

[2] Cook G E. Basic theroy for prod, a program for computing the devolopment of satellite orbits. Celest. Mech, 1973,7(3)：301～314

[3] **刘林. 人造地球卫星在临界角附近运动的解. 天文学报**, 1974,15(2)：230～240

LIU Lin. A Solution of the Motion of an Artificial Satellite in the Vicinity of the Critical Inclination. Chin. Astron. Astrophys. 1977,1(1)：31～42

[4] **刘林. 一种人造地球卫星的摄动计算方法. 天文学报**, 1975,16(1)：65～80

LIU Lin. A Method of Calculation the Perturbation of Artificial Satellites. Chin. Astron. Astrophys, 1977,1(1)：63～78

[5] **刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京：高等教育出版社**,1992

[6] Brouwer D. Solution of the Problem of Artifical Satellite Theory without Drag.

Astron. J，1959，64(9)：378～397

［7］**刘林，章圣泮．非正则形式的变换方法及其应用．中国科学**(A)，1983，13(5)：455～465

LIU Lin，ZHANG Sheng-pan. A Transformation Method of Non-Hamiltonian Systems and Its Application. SCIENCE IN CHINA(Series A)，1983，26(8)：861～873

［8］**刘林**，Chum C K. **在非球形引力摄动下金星轨道器运动的分析解．中国科学**(A)，1999，29(10)：952～960

LIU Lin，Chum C K. Analytic Perturbation to the Venusian Orbiter Due to the Nonspherical Gravitational Potential. SCIENCE IN CHINA(Series A)，2000，43(5)：552～560

［9］**刘林，王家松．月球卫星轨道变化的分析解．天文学报**，1998，39(1)：81～102

［10］**刘林．航天器轨道理论(第五章)．北京：国防工业出版社**．2000

［11］Cook G E. Perturbations of near-circular orbits by the earth's gravitational potential. Planet. Space Sci，1966，14(3)：433～444

［12］**刘林**，Iunanen K. A. **关于人造卫星运动中的临界角和通约问题．天文学报**，1986，27(1)：1～8

LIU Lin，Iunanen K. A. Problem of Critical Inclination and Commensurability in the Motion of Artificial Satellites. Chin. Astron. Astrophys，1986，10(3)：245～251

［13］**刘林，刘世元，王彦荣．关于大行星(或月球)轨道器的冻结轨道．飞行器测控学报**，2003，22(2)：19～24

［14］**刘林，王歆．月球卫星轨道力学综述．天文学进展**，21(4)：281～288

［15］Fehlberg E. Classical Fifith- sixth- seventh and Eighth Order Runge-Kutta with Stepsize Control. NASA TR R－287，1968

第 5 章　第三体引力摄动、非引力摄动及后牛顿效应

对于可以处理成受摄二体问题的航天器运动而言，除中心天体的非球形引力摄动外，还有另外几类摄动源，即第三体（其他天体）引力摄动，非引力摄动（大气的耗散效应和一般情况下的太阳辐射压作用）及后牛顿效应等.

就人造地球卫星的运动而言，第三体主要指太阳和月球，即通常所说的日、月摄动，如果是环月轨道器的运动，则第三体即地球和太阳. 不管是第三体引力摄动，还是非引力中的太阳辐射压摄动和大气阻力摄动，都将涉及到太阳的坐标或太阳和月球的坐标. 因此本章将首先介绍日、月坐标的计算方法.

§5.1　日、月坐标

对于轨道摄动的分析解，着重的是卫星轨道变化规律，并不要求高精度. 因此，计算可采用日、月平均轨道，即长期进动椭圆，而在几天的弧段内，还可采用"不变椭圆"轨道. 下面给出日、月在历元地心平赤道坐标系中的位置计算方法和相应的计算公式.

1. 日、月的平均轨道

太阳在 J2000.0 地心天球坐标系（即地心平赤道坐标系）中的平均轨道根数 $\bar{\sigma}'$ 为[1]

$$\begin{cases} \bar{a}=1.00000102(\mathrm{AU}),\ \mathrm{AU}=1.49597870\times 10^{8}\ \mathrm{km}, \\ \bar{e}=0.016709, \\ \bar{i}=\varepsilon=23^{\circ}.4393, \\ \bar{\Omega}=0^{\circ}.0, \\ \bar{\omega}=282^{\circ}.9373+0^{\circ}.32T, \\ \bar{M}=357^{\circ}.5291+0^{\circ}.9856d, \end{cases} \tag{5.1}$$

月球在 J2000.0 **地心平黄道坐标系中的平均轨道根数** σ' **为**[1]

$$\begin{cases} \bar{a}=384747.981\ \text{km}, \\ \bar{e}=0.054880, \\ \bar{i}=J=5^\circ.1298, \\ \bar{\Omega}=125^\circ.0446-1934^\circ.14T, \\ \bar{\omega}=318^\circ.3087+6003^\circ.15T, \\ \bar{M}=134^\circ.9634+13^\circ.0650d, \end{cases} \tag{5.2}$$

上述两公式中出现的 T **和** d **分别为由标准历元** J2000.0 **起算的世纪数和儒略日.**

2. 日、月在历元(J2000.0)地心平赤道坐标系中的轨道根数 $\boldsymbol{\sigma'}$

在日、月引力摄动解中将会出现的轨道根数 σ'**:**$a',e',i',\Omega',u'=f'+\omega'$**,对太阳有**

$$\begin{cases} a'=\bar{a}, \quad e'=\bar{e}, \quad i'=\bar{i}=\varepsilon, \quad \Omega'=0^\circ.0, \\ u'=\bar{f}+\bar{\omega}. \end{cases} \tag{5.3}$$

其中 $\bar{f}$ **将通过解** Kepler **方程由** $\bar{e},\bar{M}$ **给出** $\bar{E}$**,再由** $\bar{E},E$ **给出该真近点角. 对月球有**

$$a'=\bar{a},\ e'=\bar{e}. \tag{5.4}$$

而 i',Ω',u' **的计算公式如下:**

$$\begin{cases} \cos i'=\cos\varepsilon\cos J-\sin\varepsilon\sin J\cos\bar{\Omega}, \\ \sin i'=\sqrt{1-\cos^2 i'}, \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\begin{cases} \sin\Omega'=\dfrac{\sin J\sin\bar{\Omega}}{\sin i'}, \\ \cos\Omega'=\dfrac{\cos J-\cos\varepsilon\cos i'}{\sin\varepsilon\sin i'}, \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} u'=(\bar{f}+\bar{\omega}+\bar{\Omega})-(\bar{\Omega}-\varphi), \\ \sin(\bar{\Omega}-\varphi)=\dfrac{\cos\varepsilon\sin\bar{\Omega}}{\sin i'}\sin J-\dfrac{\sin\varepsilon\sin 2\bar{\Omega}}{\sin i'}\sin^2\dfrac{J}{2}. \end{cases} \tag{5.7}$$

在日、月引力摄动长周期项中将要涉及到变率 Ω'_c **和** n'**,对太阳,见**(5.1)**,有**

$$\Omega'_c=0,n'=0^\circ.9856/d. \tag{5.8}$$

对月球,由(5.5)**和**(5.6)**式给出**

$$\begin{cases} \Omega'_c=\left(\dfrac{\sin J}{\cos J-\cos^2\varepsilon}\right)\cos\bar{\Omega}\cdot\dot{\bar{\Omega}}, \\ n'=13^\circ.0650/d, \end{cases} \tag{5.9}$$

其中 $\dot{\bar{\Omega}}$ 由(5.2)式 $\bar{\Omega}$ 的计算公式给出，即$-1934°.14/T$，T 是世纪数.

§5.2　第三体引力摄动

关于第三体引力摄动，基本上有两大类. 一种是外摄情况，即摄动天体到中心天体的距离 r' 大于运动天体(卫星)到中心天体的距离 r，即$(r/r')<1$. 另一种是内摄情况，即$(r'/r)<1$. 对于外摄情况，有两种可能，$r/r'\ll1$ 或 $m'\ll M$(这里 m' 和 M 分别为摄动天体即第三体的质量和中心天体的质量)，或两者兼而有之. 对于内摄情况，则有些不同，通常要求 $m'\ll M$，而并不需要 $r'/r\ll1$；如果同时有 $r'/r\ll1$，即摄动天体非常靠近中心天体，在此情况下，往往改为讨论运动天体相对中心天体和第三体两者质心的运动.

就低轨卫星(不仅是低轨地球卫星)的运动而言，显然属于外摄情况. 对于地球卫星，在历元地心平赤道坐标系中，运动方程如下：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}-Gm'\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3}+\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right).$$

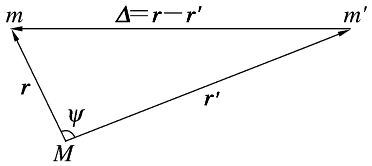

图 5.1　三天体的相对位置

其中各量见图 5.1，如采用标准计算单位，则上式变化如下简单形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-m'\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3}+\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right), \tag{5.10}$$

这里 m'是第三体的以中心天体质量 M 为单位的无量纲质量. 相应的摄动函数 R 的形式如下：

$$\begin{cases}R=m'\left(\dfrac{1}{\Delta}-\dfrac{r}{r'^2}\cos\psi\right),\\[2ex]\cos\psi=\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}'}{r'}\right)\end{cases}. \tag{5.11}$$

对于外摄情况有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta}&=(r^2+r'^2-2rr'\cos\psi)^{-1/2}\\&=\frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\psi)\left(\frac{r}{r'}\right)^l,\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 $P_l(\cos\psi)$是上一章出现过的勒让德多项似式，上一章已出现过，只不过变量 $\sin\varphi$ 变为 $\cos\psi$，有

$$\begin{cases} P_0(\cos\psi)=1, P_1(\cos\psi)=\cos\psi, \\ P_2(\cos\psi)=\dfrac{3}{2}\cos^2\psi-\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

将这些关系引入(5.11)式得

$$R=m'\left[\frac{r^2}{r'^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\psi-\frac{1}{2}\right)+\frac{r^3}{r'^4}\left(\frac{5}{2}\cos^3\psi-\frac{3}{2}\cos\psi\right)+\cdots\right]. \tag{5.13}$$

对于低轨人造地球卫星而言，日、月引力摄动量级为二阶小量，即由(5.10)式给出下列估计：

$$|\boldsymbol{F}_\varepsilon|/|\boldsymbol{F}_0|\approx\left(\frac{m'}{M}\right)\left(\frac{r}{r'}\right)^3=O(J_2{}^2).$$

就一阶摄动解而言，只需要给出二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$、一阶长周期项$\sigma_L^{(1)}(t)$和轨道半长径 a 的二阶短周期项. 但考虑到对稍高的地球卫星，以及其他类型的探测器，第三体引力摄动的重要性，这里仍将六个轨道根数的二阶短周期项一并给出. 而且，日、月引力摄动将用“同一”公式表达，应用时可分开. 既然日、月摄动量为二阶小量，则相应的摄动函数(5.13)式可取为下列简单形式：

$$R=\frac{m'}{r'^3}r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\psi-\frac{1}{2}\right). \tag{5.14}$$

利用位置矢量与根数的关系(见第二章§2.3)，不难导出

$$\cos\psi=A\cos f+B\sin f. \tag{5.15}$$

其中

$$\begin{aligned}A=\frac{1}{4}\{&(1-\cos i)[(1+\cos i')\cos(\omega-\theta+u')+(1-\cos i')\cos(\omega-\theta\\&-u')]+(1+\cos i)[(1+\cos i')\cos(\omega+\theta-u')+\\&(1-\cos i')\cos(\omega+\theta+u')]+2\sin i\sin i'[\cos(\omega-u')-\\&\cos(\omega+u')]\},\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}B=-\frac{1}{4}\{&(1-\cos i)[(1+\cos i')\sin(\omega-\theta+u')+\\&(1-\cos i')\sin(\omega-\theta-u')]+(1+\cos i)[(1+\cos i')\sin(\omega+\\&\theta-u')+(1-\cos i')\sin(\omega+\theta+u')]+2\sin i\sin i'[\sin(\omega-u')-\\&\sin(\omega+u')]\},\end{aligned} \tag{5.17}$$

这里

$$\theta=\Omega-\Omega', u'=f'+\omega'. \tag{5.18}$$

所有带“′”的根数 i'，Ω'，ω'，f'等均为摄动天体相对同一中心天体的轨道根

数，下面不再说明. 将 $\cos\psi$ 代入(5.14)式，得

$$R = \frac{3}{2}\beta\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(A^2+B^2)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}(A^2-B^2)\cos 2f + AB\sin 2f\right], \tag{5.19}$$

$$\beta = m'/r'^3. \tag{5.20}$$

对于$\left(\frac{r}{r'}\right)\ll 1$ 的外摄情况，上述表达式比较理想，因为在这种情况下，只有运动天体的真近点角 f 是快变量，而 Ω，ω 和摄动天体的 Ω'，ω'，f' 都是慢变量，上述表达式正好将快、慢变量完全分离开，这便于求相应摄动解的各种摄动项.

利用下列平均值

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2} = 1+\frac{3}{2}e^2, \overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f} = \frac{5}{2}e^2, \overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f} = 0, \tag{5.21}$$

可将摄动函数 R 分解为

$$R = R_{\mathrm{C}} + R_{\mathrm{L}} + R_{\mathrm{S}}, \tag{5.22}$$

$$R_{\mathrm{C}} = \frac{3}{2}\beta\alpha^2\left[C\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\right], \tag{5.23}$$

$$R_{\mathrm{L}} = \frac{3}{2}\beta\alpha^2\left[L_1\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)+L_2\left(\frac{5}{2}e^2\right)\right], \tag{5.24}$$

$$R_{\mathrm{S}} = \frac{3}{2}\beta\alpha^2\left\{S_1\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2-\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\right]+S_2\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f-\frac{5}{2}e^2\right]+\right.$$
$$\left.S_3\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f\right\}. \tag{5.25}$$

其中

$$C = \frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right), \tag{5.26}$$

$$L_1 = \frac{1}{16}\left\{\sin^2 i[2\sin^2 i'\cos 2\theta + (1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u')+\right.$$
$$(1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')]+2\sin 2i[2\sin 2i'\cos\theta -$$
$$\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u')+\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')]+$$
$$\left.4\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)[\sin^2 i'\cos 2u']\right\}, \tag{5.27}$$

$$L_2 = \frac{1}{16}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_1 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_2 + \sin^2 i D_3 +\right.$$
$$\left.2\sin i(1-\cos i)D_4 + 2\sin i(1+\cos i)D_5\right\}, \tag{5.28}$$

$$S_1 = C + L_1, \tag{5.29}$$

$$S_2 = L_2, \tag{5.30}$$

$$S_3 = -\frac{1}{16}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_6 + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_7 + \sin^2 i D_8 + 2\sin i(1-\cos i)D_9 + 2\sin i(1+\cos i)D_{10}\right\}. \tag{5.31}$$

关于 $D_1, D_2, \cdots, D_{10}$ **的表达式如下：**

$$\begin{cases} D_1 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega-2\theta) + (1+\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta+2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta-2u'), \\ D_2 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega+2\theta) + (1+\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta-2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta+2u'), \\ D_3 = 2(2-3\sin^2 i')\cos 2\omega + 3\sin^2 i'\cos(2\omega-2u') + \\ \qquad 3\sin^2 i'\cos(2\omega+2u'), \\ D_4 = \sin i'[2\cos i'\cos(2\omega-\theta) - (1+\cos i')\cos(2\omega-\theta+2u') + \\ \qquad (1-\cos i')\cos(2\omega-\theta-2u')], \\ D_5 = \sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega+\theta) + (1+\cos i')\cos(2\omega+\theta-2u') - \\ \qquad (1-\cos i')\cos(2\omega+\theta+2u')], \end{cases} \tag{5.32}$$

$$\begin{cases} D_6 = 2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta) + (1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u'), \\ D_7 = 2\sin^2 i'\sin(2\omega+2\theta) + (1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\sin(2\theta+2\omega+2u'), \\ D_8 = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega + \\ \qquad 3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u') + 3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u'), \\ D_9 = \sin i'[2\cos i'\sin(2\omega-\theta) - (1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+2u') + \\ \qquad (1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')], \\ D_{10} = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta) + (1+\cos i')\sin(2\omega+\theta-2u') - \\ \qquad (1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u')], \end{cases} . \tag{5.33}$$

将上述分解后的摄动函数 R_C, R_L **和** R_S **分别代入摄动运动方程，即可给出卫星轨道变化所满足的小参数方程，同时考虑一阶量** J_2**（扁率项），有**

$$\frac{d\sigma}{dt} = f_0(a) + f_1(\sigma, J_2) + f_2(\sigma, \beta). \tag{5.34}$$

其中 f_2 **有三项，即**

$$f_2 = f_{2C} + f_{2L} + f_{2S}. \tag{5.35}$$

采用平均根数法构造小参数幂级数解，在一阶摄动意义下，下面给出第三体引力摄动相应的摄动项[2].

1. 长期项 $\boldsymbol{\sigma}_2(t-t_0)$ 的变率 $\boldsymbol{\sigma}_2$

$$a_2 = 0, e_2 = 0, i_2 = 0, \tag{5.36}$$

$$\Omega_2 = -\left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-1/2} n\cos i, \tag{5.37}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+\frac{1}{2}e^2\right](1-e^2)^{-1/2} n, \tag{5.38}$$

$$M_2 = -\left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(\frac{7}{3}+e^2\right)n. \tag{5.39}$$

各式右端出现的根数 a, e, i，和 n 均为平均根数 $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$ 和 $\bar{n}_0 = \bar{a}^{-\frac{3}{2}}$. 日、月有关量 β 的定义如下：

$$\beta = m'/r'^3. \tag{5.40}$$

上述各式中，凡带有“′”的量（包括质量 m' 和根数 $a', e', i', \cdots$）均为第三体（即摄动天体日、月）的有关量. 下面不再说明.

对于中低轨卫星的定轨，基本上涉及的弧段不会太长，日、月位置（或轨道）变化不大，可采用简单模型（例如平均椭圆轨道）计算日、月的轨道及相应的距离量 r'，具体计算方法见 § 5.1.

2. 长周期项 $\sigma_L^{(1)}(t)$

$$a_L^{(1)}(t) = 0, \tag{5.41}$$

$$e_L^{(1)}(t) = -\left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)(5e\sqrt{1-e^2})nH_1, \tag{5.42}$$

$$i_L^{(1)}(t) = \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\frac{n}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\times \left[(5e^2)\cos i H_1 - 2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)H_2 - (5e^2)H_3\right], \tag{5.43}$$

$$\Omega_L^{(1)}(t) = \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\frac{n}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\left[\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)H_4 + \left(\frac{5}{2}e^2\right)\cos i H_5\right] + \left(\frac{3}{2}\beta\right)\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[(25e^2)\cos i H_1^* - 2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)H_2^* - (5e^2)H_3^*\right], \tag{5.44}$$

$$\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)n\Big\{\sqrt{1-e^{2}}(3H_{6}+5H_{7})-$$

$$\frac{\cos i}{\sqrt{1-e^{2}}\sin i}\left[\left(1+\frac{3}{2}e^{2}\right)H_{4}+\left(\frac{5}{2}e^{2}\right)H_{5}\right]\Big\}-$$

$$\left(\frac{3}{2}\beta\right)\left(\frac{3J_{2}}{2p^{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^{2}}}\Big[(5e^{2})(13-15\sin^{2}i)H_{1}^{*}-$$

$$10\left(1+\frac{3}{2}e^{2}\right)\cos iH_{2}^{*}-(25e^{2})\cos iH_{3}^{*}\Big],\tag{5.45}$$

$$M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)n[(7+3e^{2})H_{6}+(5+5e^{2})H_{7}]-$$

$$\left(\frac{3}{2}\beta\right)\left(\frac{3J_{2}}{2p^{2}}\right)\Big[(15e^{2})\left(2-\frac{5}{2}\sin i\right)H_{1}^{*}-$$

$$6\left(1+\frac{3}{2}e^{2}\right)\cos iH_{2}^{*}-(15e^{2})\cos iH_{3}^{*}\Big].\tag{5.46}$$

上述各式右端出现的各量，除在 σ_2 **中已出现过的之外，**$p=a(1-e^{2})$**亦为平均根数，而** $H_1,H_2,\cdots,H_7$ **和** H_1^*,H_2^*,H_3^* **由下列各式表达：**

$$H_{1}=\frac{1}{16}\Big[\frac{1}{2}(1-\cos i)^{2}K_{1}+\frac{1}{2}(1+\cos i)^{2}K_{2}+\sin^{2}iK_{3}+$$

$$2\sin i(1-\cos i)K_{4}+2\sin i(1+\cos i)K_{5}\Big],\tag{5.47}$$

$$H_{2}=\frac{1}{16}[\sin^{2}iK_{6}+\sin 2iK_{7}],\tag{5.48}$$

$$H_{3}=\frac{1}{16}\Big[-\frac{1}{2}(1-\cos i)^{2}K_{1}+\frac{1}{2}(1+\cos i)^{2}K_{2}-$$

$$\sin i(1-\cos i)K_{4}+\sin i(1+\cos i)K_{5}\Big],\tag{5.49}$$

$$H_{4}=\frac{1}{16}[\sin 2iK_{16}+4\cos 2iK_{17}-6\sin 2iK_{18}],\tag{5.50}$$

$$H_{5}=\frac{1}{16}[\sin i(1-\cos i)K_{11}-\sin i(1+\cos i)K_{12}+\sin 2iK_{13}+$$

$$2(\cos i-\cos 2i)K_{14}+2(\cos i+\cos 2i)K_{15}],\tag{5.51}$$

$$H_{6}=\frac{1}{16}[\sin^{2}iK_{16}+2\sin 2iK_{17}+2(2-3\sin^{2}i)K_{18}],\tag{5.52}$$

$$H_{7}=\frac{1}{16}\Big[\frac{1}{2}(1-\cos i)^{2}K_{11}+\frac{1}{2}(1+\cos i)^{2}K_{12}+\sin^{2}iK_{13}+$$

$$2\sin i(1-\cos i)K_{14}+2\sin i(1+\cos i)K_{15}\Big],\tag{5.53}$$

$$K_{1}=2\sin^{2}i'\cos(2\omega-2\theta)/n_{1}+(1+\cos i')^{2}\cos(2\omega-2\theta+2u')/n_{3}+$$

$$(1-\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta-2u')/n_4, \tag{5.54}$$

$$K_2 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega+2\theta)/n_2+(1+\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta-2u')/n_5+ (1-\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta+2u')/n_6, \tag{5.55}$$

$$K_3 = 2(2-3\sin^2 i')\cos 2\omega/2\omega_1+3\sin^2 i'\cos(2\omega-2u')/n_7+ 3\sin^2 i'\cos(2\omega+2u')/n_8, \tag{5.56}$$

$$K_4 = \sin i'[2\cos i'\cos(2\omega-\theta)/n_9-(1+\cos i')\cos(2\omega-\theta+ 2u')/n_{11}+(1-\cos i')\cos(2\omega-\theta-2u')/n_{12}], \tag{5.57}$$

$$K_5 = \sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega+\theta)/n_{10}+(1+\cos i')\cos(2\omega+\theta- 2u')/n_{13}-(1-\cos i')\cos(2\omega+\theta+2u')/n_{14}], \tag{5.58}$$

$$K_6 = 2\sin^2 i'\cos 2\theta/2\theta_c+(1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u')/n_{15}+ (1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')/n_{16}, \tag{5.59}$$

$$K_7 = \sin 2i'\cos\theta/\theta_c-\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u')/n_{17}+ \sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')/n_{18}, \tag{5.60}$$

$$K_{11} = 2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta)/n_1+(1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u')/n_3+ (1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u')/n_4, \tag{5.61}$$

$$K_{12} = 2\sin^2 i'\sin(2\omega+2\theta)/n_2+(1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u')/n_5+ (1-\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta+2u')/n_6, \tag{5.62}$$

$$K_{13} = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega/2\omega_1+3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u')/n_7+ 3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u')/n_8, \tag{5.63}$$

$$K_{14} = \sin i'\Big[2\cos i'\sin(2\omega-\theta)/n_9-(1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+ 2u')/n_{11}+(1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')/n_{12}\Big], \tag{5.64}$$

$$K_{15} = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta)/n_{10}+(1+\cos i')\sin(2\omega+\theta- 2u')/n_{13}-(1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u')/n_{14}], \tag{5.65}$$

$$K_{16} = 2\sin^2 i'\sin 2\theta/2\theta_c+(1+\cos i')^2\sin(2\theta-2u')/n_{15}+ (1-\cos i')^2\sin(2\theta+2u')/n_{16}, \tag{5.66}$$

$$K_{17} = \sin 2i'\sin\theta/\theta_c-\sin i'(1+\cos i')\sin(\theta-2u')/n_{17}+ \sin i'(1-\cos i')\sin(\theta+2u')/n_{18}, \tag{5.67}$$

$$K_{18} = \sin^2 i'\sin 2u'/2n', \tag{5.68}$$

$$H_1^* = \frac{1}{16}\Big[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2K_1^*+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2K_2^*+\sin^2 iK_3^*+ 2\sin i(1-\cos i)K_4^*+2\sin i(1+\cos i)K_5^*\Big], \tag{5.69}$$

$$H_2^* = \frac{1}{16}[\sin^2 iK_6^*+\sin 2iK_7^*], \tag{5.70}$$

$$H_3^* = \frac{1}{16}\Big[-\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 K_1^* + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 K_2^* - \sin i(1-\cos i)K_4^* + \sin i(1+\cos i)K_5^*\Big], \tag{5.71}$$

$$K_1^* = 2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta)/n_1^2 + (1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u')/n_3^2 + (1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u')/n_4^2, \tag{5.72}$$

$$K_2^* = 2\sin^2 i'\sin(2\omega+2\theta)/n_2^2 + (1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u')/n_5^2 + (1-\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta+2u')/n_6^2, \tag{5.73}$$

$$K_3^* = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega/4\omega_1^2 + 3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u')/n_7^2 + 3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u')/n_8^2, \tag{5.74}$$

$$K_4^* = \sin i'[2\cos i'\sin(2\omega-\theta)/n_9^2 - (1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+2u')/n_{11}^2 + (1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')/n_{12}^2], \tag{5.75}$$

$$K_5^* = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta)/n_{11}^2 + (1+\cos i')\sin(2\omega+\theta-2u')/n_{13}^2 - (1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u')/n_{14}^2], \tag{5.76}$$

$$K_6^* = 2\sin^2 i'\sin 2\theta/4\theta_c^2 + (1+\cos i')^2\sin(2\theta-2u')/n_{15}^2 + (1-\cos i')^2\sin(2\theta+2u')/n_{16}^2, \tag{5.77}$$

$$K_7^* = \sin 2i'\sin\theta/\theta_c^2 - \sin i'(1+\cos i')\sin(\theta-2u')/n_{17}^2 + \sin i'(1-\cos i')\sin(\theta+2u')/n_{18}^2. \tag{5.78}$$

上述各式中的 $n_1, n_2, \cdots, n_{18}$ 均是慢变化的变化率，即

$$\begin{cases} n_1 = 2\omega_1 - 2\theta_C, & n_2 = 2\omega_1 + 2\theta_C, & n_3 = 2\omega_1 - 2\theta_C + 2n' \\ n_4 = 2\omega_1 - 2\theta_C - 2n', & n_5 = 2\omega_1 + 2\theta_C - 2n', & n_6 = 2\omega_1 + 2\theta_C + 2n' \\ n_7 = 2\omega_1 - 2n', & n_8 = 2\omega_1 + 2n', & n_9 = 2\omega_1 - \theta_c \\ n_{10} = 2\omega_1 + \theta_C, & n_{11} = 2\omega_1 - \theta_C + 2n', & n_{12} = 2\omega_1 - \theta_C - 2n' \\ n_{13} = 2\omega_1 + \theta_C - 2n', & n_{14} = 2\omega_1 + \theta_C + 2n', & n_{15} = 2\theta_C - 2n' \\ n_{16} = 2\theta_C + 2n', & n_{17} = \theta_C - 2n', & n_{18} = \theta_C + 2n' \end{cases} \tag{5.79}$$

其中

$$\begin{cases} \theta = \Omega - \Omega' \\ \theta_C = \Omega_1 - \Omega'_C \end{cases}, \tag{5.80}$$

Ω_1 和 ω_1 是卫星轨道根数 Ω 和 ω 的一阶长期项系数（即变率），即上一章给出的地球扁率（J_2）摄动项. 而 Ω'_C 和 n' 是日、月轨道根数 Ω' 和 u' 的长期变率. 关于 Ω'_C，对于太阳轨道，无此项，而对于月球轨道，见（5.9）式. 关于 n'，在上述摄动解中，就可当作日、月的平运动角速度，即相应平近点角 M' 的变率，具体计算公式见（5.1）和（5.2）式中 $\overline{M}$ 的表达式.

3. 短周期项 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$

$$a_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)2aG_{1}, \tag{5.81}$$

$$e_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)\left(\frac{\sqrt{1-e^{2}}}{e}\right)\left(\sqrt{1-e^{2}}G_{1}-G_{2}\right), \tag{5.82}$$

$$i_{\mathrm{S}}\mathrm{s}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^{2}}\sin i}(\cos iG_{2}-G_{3}), \tag{5.83}$$

$$\Omega_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^{2}}\sin i}G_{4}, \tag{5.84}$$

$$\omega_{\mathrm{S}}(t)=\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)\left(\frac{\sqrt{1-e^{2}}}{e}\right)G_{5}-\cos i\Omega_{\mathrm{S}}(t), \tag{5.85}$$

$$M_{\mathrm{S}}(t)=-\left(\frac{3}{2}\beta a^{3}\right)\left(\frac{1-e^{2}}{e}G_{5}+7G_{6}\right). \tag{5.86}$$

其中

$$\begin{aligned}G_{1}=&S_{1}\left[-e^{2}-2e\cos E+\frac{1}{2}e^{2}\cos 2E\right]+\\&S_{2}\left[-e^{2}-2e\cos E+\left(1-\frac{1}{2}e^{2}\right)\cos 2E\right]+\\&S_{3}\sqrt{1-e^{2}}[-2e\sin E+\sin 2E],\end{aligned} \tag{5.87}$$

$$\begin{aligned}G_{j}(j=2,3,4,6)=&S_{1j}\left[e\left(-2+\frac{3}{4}e^{2}\right)\sin E+\frac{3}{4}e^{2}\sin 2E-\frac{1}{12}e^{3}\sin 3E\right]+\\&S_{2j}\left[-\frac{5}{2}e\left(1-\frac{1}{2}e^{2}\right)\sin E+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}e^{2}\right)\sin 2E-\right.\\&\left.\frac{1}{6}e\left(1-\frac{1}{2}e^{2}\right)\sin 3E\right]+S_{3j}\sqrt{1-e^{2}}\left[\frac{5}{2}e\cos E-\right.\\&\left.\frac{1}{2}(1+e^{2})\cos 2E+\frac{1}{6}e\cos 3E\right],\end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}G_{5}=&S_{1}\left[(-2+e^{2})\sin E+\frac{1}{2}e\sin 2E\right]+\\&S_{2}\left[-3(1-e^{2})\sin E-\frac{1}{2}e\sin 2E+\frac{1}{3}\sin 3E\right]+\\&S_{3}(1-e^{2})^{-1/2}\left[3\left(1-\frac{11}{6}e^{2}\right)\cos E+\frac{1}{2}e(1+e^{2})\cos 2E-\right.\\&\left.\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}e^{2}\right)\cos 3E\right].\end{aligned} \tag{5.89}$$

这里 S_1, S_2, S_3 和 $S_{1j}, S_{2j}, S_{3j}(j=2,3,4,6)$ 的表达式如下：

$$S_1 = \frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+$$
$$\frac{1}{16}\left\{\sin^2 i[2\sin^2 i'\cos 2\theta+(1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u')+\right.$$
$$(1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')]+$$
$$2\sin 2i[\sin 2i'\cos\theta-\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u')+$$
$$\left.\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')]+4\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)[\sin^2 i'\cos 2u']\right\}, \tag{5.90}$$

$$S_2 = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_1+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_2+\sin^2 iD_3+\right.$$
$$\left.2\sin i(1-\cos i)D_4+2\sin i(1+\cos i)D_5\right], \tag{5.91}$$

$$S_3 = -\frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_6+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_7+\sin^2 iD_8+\right.$$
$$\left.2\sin i(1-\cos i)D_9+2\sin i(1+\cos i)D_{10}\right]. \tag{5.92}$$

$$S_{12} = 0, \tag{5.93}$$

$$S_{13} = \frac{1}{16}\{-2\sin^2 i[2\sin^2 i'\sin 2\theta+(1+\cos i')^2\sin(2\theta-2u')+$$
$$(1-\cos i')^2\sin(2\theta+2u')]-2\sin 2i[\sin 2i'\sin\theta-$$
$$\sin i'(1+\cos i')\sin(\theta-2u')+\sin i'(1-\cos i')\sin(\theta+2u')]\}, \tag{5.94}$$

$$S_{14} = -\frac{1}{4}\sin 2i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)+\frac{1}{16}\{\sin 2i[2\sin^2 i'\cos 2\theta+$$
$$(1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u')+(1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')]+$$
$$4\cos 2i[\sin 2i'\cos\theta-\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u')+$$
$$\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')]-$$
$$6\sin 2i[\sin^2 i'\cos 2u']\}, \tag{5.95}$$

$$S_{16} = S_1, \tag{5.96}$$

$$S_{22} = 2S_3, \tag{5.97}$$

$$S_{23} = \frac{1}{16}[(1-\cos i)^2 D_6-(1+\cos i)^2 D_7+$$
$$2\sin i(1-\cos i)D_9-2\sin i(1+\cos i)D_{10}], \tag{5.98}$$

$$S_{24} = \frac{1}{16}[\sin i(1-\cos i)D_1-\sin i(1+\cos i)D_2+$$
$$\sin 2iD_3+2(\cos i-\cos 2i)D_4+2(\cos i+\cos 2i)D_5], \tag{5.99}$$

$$S_{26} = S_2, \tag{5.100}$$

$$S_{32} = -2S_2, \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned} S_{33} = \frac{1}{16}[&(1-\cos i)^2 D_1 - (1+\cos i)^2 D_2 + \\ &2\sin i(1-\cos i)D_4 - 2\sin i(1+\cos i)D_5], \end{aligned} \tag{5.102}$$

$$\begin{aligned} S_{34} = -\frac{1}{16}[&\sin i(1-\cos i)D_6 - \sin i(1+\cos i)D_7 + \\ &\sin 2i D_8 + 2(\cos i - \cos 2i)D_9 + 2(\cos i + \cos 2i)D_{10}], \end{aligned} \tag{5.103}$$

$$S_{36} = S_3. \tag{5.104}$$

$D_1, D_2, \cdots, D_{10}$ **都是慢变量的函数，它们的表达式如下：**

$$\begin{cases} D_1 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega-2\theta) + (1+\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta+2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta-2u'), \\ D_2 = 2\sin^2 i'\cos(2\omega+2\theta) + (1+\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta-2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta+2u'), \\ D_3 = 2(2-3\sin^2 i')\cos 2\omega + \\ \qquad 3\sin^2 i'\cos(2\omega-2u') + 3\sin^2 i'\cos(2\omega+2u'), \\ D_4 = \sin i'[2\cos i'\cos(2\omega-\theta) - (1+\cos i')\cos(2\omega-\theta+2u') \\ \qquad (1-\cos i')\cos(2\omega-\theta-2u')], \\ D_5 = \sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega+\theta) + (1+\cos i')\cos(2\omega+\theta-2u') \\ \qquad (1-\cos i')\cos(2\omega+\theta+2u')], \end{cases} \tag{5.105}$$

$$\begin{cases} D_6 = 2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta) + (1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u'), \\ D_7 = 2\sin^2 i'\sin(2\omega+2\theta) + (1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u') + \\ \qquad (1-\cos i')^2\sin(2\theta+2\omega+2u'), \\ D_8 = 2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega + \\ \qquad 3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u') + 3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u'), \\ D_9 = \sin i'[2\cos i'\sin(2\omega-\theta) - (1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+2u') + \\ \qquad (1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')], \\ D_{10} = \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta) + (1+\cos i')\sin(2\omega+\theta-2u') - \\ \qquad (1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u'), \end{cases} \quad . \tag{5.106}$$

§5.3 太阳光压摄动

太阳辐射压(简称光压)是一表面力,与承受辐射压的卫星表面形状和大小有关,因此光压摄动应与卫星姿态有关. 除球形卫星外,承受光压力的卫星截面积 $S=S(t)$是变化的,要严格计算光压力的大小有一定程度的困难,通常采用一确定值,即所谓的有效截面积 S. 如果对卫星姿态完全了解,可给出 $S(t)$随时间的变化规律,不管这一规律多么复杂,对数值求解光压摄动方程而言,不会遇到任何问题,但往往会给光压摄动分析解的建立带来困难. 故在构造光压摄动分析解时,通常采用固定值的有效截面积,即 $S=\text{const}$,我们亦作如此处理.

太阳光压摄动的另一个特点是:尽管光压力可以近似地处理成有心斥力(力心即作为质点的太阳),但常会遇到地影问题(从卫星上看即"日蚀"),在一定意义下,光压力实为一"间断力",摄动效应不同于一般保守力,相应摄动解的结构亦不同于中心天体非球形引力和第三体质点引力的摄动解形式.

1. 光压摄动加速度

从实用的角度来看,可对相应的光压摄动加速度进行一些合理简化. 其原始形式为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon=\mu_S\left(\rho_S\,\frac{\Delta_S^2}{\Delta^2}\right)\hat{\boldsymbol{\Delta}},\tag{5.107}$$

$$\mu_S=\frac{\kappa S}{m}.\tag{5.108}$$

这里 $\kappa=1+\eta$,η 是卫星表面反射系数,$0<\eta<1$. S/m 即卫星的有效面质比,ρ_S 是地球附近(距太阳 $\Delta_s=1.0\ \mathrm{AU}$,AU 是天文单位)的太阳辐射压强度,有

$$\begin{aligned}\rho_S &= 4.5605\times10^{-6}\ \mathrm{N/m^2}\\ &= 0.3166\times10^{-17}.\end{aligned}\tag{5.109}$$

后一个无量纲值对应标准单位系统. $\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_S$,$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_S$ 各为卫星和太阳的地心位置矢量,$\hat{\boldsymbol{\Delta}}=\boldsymbol{\Delta}/\Delta$ 即单位矢量.

对于典型的有效截面积与质量之比(以下简称有效面质比)为 10^9 的人造地球卫星,光压摄动量级为

$$\varepsilon=\frac{|\boldsymbol{F}_\varepsilon|}{|\boldsymbol{F}_0|}=\begin{cases}10^{-8} & \text{中低轨卫星},\\ 10^{-7} & \text{高轨卫星}.\end{cases}\tag{5.110}$$

面质比为 10^9 相当于 0.00681 m^2/kg，一个半径为 1.5 m 重 1 t 的球形卫星的面质比即 1.038×10^9. 因此，对于低轨人造地球卫星的运动，光压摄动亦可当作二阶摄动小量. 既然如此，考虑到太阳离地球远得多，有 $\frac{r}{r_S}=O(10^{-4})$，那么进一步作些简化是合理的，即

(1) 可用 $-\boldsymbol{r}_S$ 代替 $\boldsymbol{\Delta}$；

(2) 可认为太阳光来自无穷远，为平行光，可采用圆柱型地影模型，相应的圆截面的半径 R 就采用地球参考椭球体赤道半径 a_e 值，最大误差也只有 10^{-3}（即地球几何扁率的量级）.

在上述近似处理下，光压摄动加速度变为下列形式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_\varepsilon=-k_0\boldsymbol{r}_S/r_S,\\ k_0=\left(\dfrac{kS}{m}\right)\rho_S\end{cases},\tag{5.111}$$

$\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 的三个分量 S,T,W 即

$$S=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\hat{\boldsymbol{r}},\quad T=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\hat{\boldsymbol{t}},\quad W=\boldsymbol{F}_\varepsilon\cdot\hat{\boldsymbol{w}},\tag{5.112}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{t}},\hat{\boldsymbol{w}}$ 即卫星径向，横向和轨道面法向单位矢量. 不难给出

$$\begin{cases}S=-k_0(A\cos f+B\sin f),\\ T=-k_0(B\cos f-A\sin f),,\\ W-k_0C\end{cases}\tag{5.113}$$

$$C=\sin i[\sin(\Omega-u')+\sin(\Omega+u')]+\sin i\cos i'[\sin(\Omega-u')-\sin(\Omega+u')]\\ +\cos i\sin i'[\sin u'].\tag{5.114}$$

A 和 B 的表达式见(5.16)和(5.17)，A,B 和 C 仅涉及慢变量，C 中的 i' 即黄赤交角. 由 S,T,W 三分量可给出受摄运动方程(3.73)的右函数 $f_2(\sigma,k_0)$.

2. 无地影情况的光压摄动解[2]

在此情况下只有长周期项和短周期项，分别为 $\sigma_l^{(1)}(t)$和 $\sigma_s^{(2)}(t)$.

(1) 长周期项 $\boldsymbol{\sigma}_L^{(1)}$

$$a_L^{(1)}(t)=0,\tag{5.115}$$

$$e_L^{(1)}(t)=-\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\sqrt{1-e^2}[(1-\cos i)G_1+(1+\cos i)G_2+2\sin iG_3],\tag{5.116}$$

$$i_L^{(1)}(t)=\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}[\sin iG_1-\sin iG_2+2\cos iG_3],\tag{5.117}$$

$$\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}\sin i}[\sin iG_4-\sin iG_5+2\cos iG_6],\tag{5.118}$$

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=&-\cos i\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)+\\&\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}[(1-\cos i)G_4+(1+\cos i)G_5+\\&2\sin iG_6].\end{aligned}\tag{5.119}$$

$$M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\left(\frac{3k_0}{8u}\right)na^2\left(\frac{1+e^2}{e}\right)[(1-\cos i)G_4+(1+\cos i)G_5+2\sin iG_6].\tag{5.120}$$

其中 $\mu=GM=1,G_1$ **等量的表达式如下：**

$$\begin{cases}G_1=(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega+u')/n_1+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega-u')/n_2,\\G_2=(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega-u')/n_1+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega+u')/n_2,\\G_3=\sin\varepsilon[\cos(\omega-u')/n_5-\cos(\omega+u')/n_6],\end{cases}\tag{5.121}$$

$$\begin{cases}G_4=(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega+u')/n_1+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega-u')/n_2,\\G_5=(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-u')/n_1+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+u')/n_2,\\G_6=\sin\varepsilon[\sin(\omega-u')/n_5-\sin(\omega+u')/n_6],\end{cases}\tag{5.122}$$

$$\begin{cases}n_1=\omega_1-\Omega_1+n', & n_2=\omega_1-\Omega_1-n',\\n_3=\omega_1+\Omega_1+n', & n_4=\omega_1+\Omega_1+n',\\n_5=\omega_1-n', & n_6=\omega_1+n'.\end{cases}\tag{5.123}$$

这里 Ω_1 **和** ω_1 **即第四章给出的一阶长期项系数**（J_2 **项**）**，而** u'**和相应的** n'**就是太阳平黄经及其变率，而** n'**亦可用太阳平运动角速度，黄赤交角** ε **的计算公式见**（5.1）**式.**

上述 $\sigma_1^{(L)}(t)$**是直接部分，而间接部分**（**即与地球扁率** J_2 **项的联合效应**）**如下，记作**$[\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}]_2$**：**

$$\begin{cases}[\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2=\dfrac{5\sin i}{\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)}I,\\[\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2=-\tan i\dfrac{(13-15\sin^2 i)}{\left(2-\dfrac{5}{2}\sin^2 i\right)}I,\\[M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)]_2=-3\sqrt{1-e^2}\tan iI.\end{cases}\tag{5.124}$$

其中

$$
\begin{aligned}
I &= \int^t \omega_1 i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\left(\frac{3}{8}k_0\right)na^2\,\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}[-\sin i G_7+\sin i G_8-2\cos i G_9],
\end{aligned} \tag{5.125}
$$

$$
\begin{cases}
G_7 = (1+\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega+u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_1^2}\right)+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega-u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_2{}^2}\right), \\
G_8 = (1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_1^2}\right)+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_4^2}\right), \\
G_9 = \sin\varepsilon\left[\sin(\omega-u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_5^2}\right)-\sin(\omega+u')\left(\dfrac{\omega_1}{n_6^2}\right)\right].
\end{cases} \tag{5.126}
$$

(2)短周期项 $\boldsymbol{\sigma}_s^{(2)}(\mathbf{t})$

$$
a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=-2k_0a^3\left[A\left(\cos E+\frac{1}{2}e\right)+B\sqrt{1-e^2}\sin E\right], \tag{5.127}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=&-k_0a^2\sqrt{1-e^2}\Big[\sqrt{1-e^2}A\left(\frac{1}{4}\cos 2E\right)+ \\
&B\left(-\frac{e}{2}\sin E+\frac{1}{4}\sin 2E\right)\Big],
\end{aligned} \tag{5.128}
$$

$$
\begin{aligned}
i_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=&-\frac{1}{4}k_0a^2\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\Big[\sqrt{1-e^2}\left(\left(\cos E+\frac{e}{2}\right)-\frac{e}{4}\cos 2E\right)H_1- \\
&\left(\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E\right)H_2\Big],
\end{aligned} \tag{5.129}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=&-\frac{1}{4}k_0a^2\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\Big[\left(\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E\right)H_1+ \\
&\sqrt{1-e^2}\left(\left(\cos E+\frac{e}{2}\right)-\frac{e}{4}\cos 2E\right)H_2\Big],
\end{aligned} \tag{5.130}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=&-\cos i\,\Omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)-k_0\,\frac{a^2}{e}\Big[\sqrt{1-e^2}A\left(-\frac{e}{2}\sin E+\frac{1}{4}\sin 2E\right)+B \\
&\left(e\left(\cos E+\frac{e}{2}\right)-\frac{1}{4}\cos 2E\right)\Big],
\end{aligned} \tag{5.131}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=&-\sqrt{1-e^2}[\omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)+\cos i\,\Omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)]+ \\
&5k_0a^2\Big\{A\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E\right]+ \\
&B\sqrt{1-e^2}\left[-\left(\cos E+\frac{e}{2}\right)+\frac{e}{4}\cos 2E\right]\Big\},
\end{aligned} \tag{5.132}
$$

其中

$$\begin{cases} H_1 = \sin i[(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega+u')+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega-u')]- \\ \qquad \sin i[(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega-u')+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega+u')]+ \\ \qquad 2\cos i\sin\varepsilon[\cos(\omega-u')-\cos(\omega+u')] \\ H_2 = \sin i[(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega+u')+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega-u')]- \\ \qquad \sin i[(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-u')+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+u')]+ \\ \qquad 2\cos i\sin\varepsilon[\sin(\omega-u')-\sin(\omega+u')] \end{cases}. \tag{5.133}$$

上述各式中出现的卫星根数,都是平均根数 $\bar{\sigma}$,有关太阳的各种量意义同前.

3. 地影存在情况下的光压摄动解

此时,光压摄动的结构不同于无地影情况,考虑到地影的空间几何位置相对卫星的运动而言变化缓慢,可处理成卫星每圈进、出地影的位置相同,或以计算弧段中间一圈的进、出地影位置代替整个弧段的相应值. 于是光压摄动解全部变成长周期项,在计算弧段不太长的情况下可按二阶长期项处理,但公式右端涉及到的 Ω,ω 以及太阳位置量 u',宜取$(t-t_0)$的中间时刻的平均根数 $\bar{\sigma}_{1/2}$. 摄动解变为如下形式:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma(t) &= \sigma_2(t-t_0) \\ &= [\Delta\sigma(t)]_L + [\Delta\sigma(t)]_S, \end{aligned} \tag{5.134}$$

其中

$$[\Delta\sigma(t)]_L = (1-\Delta E/2\pi)[\sigma_L^{(1)}(t)-\sigma_L^{(1)}(t_0)], \tag{5.135}$$

$$[\Delta\sigma(t)]_S = \frac{1}{2\pi}[\sigma_S^{(2)}(E_1)-\sigma_S^{(2)}(E_0)]n(t-t_0), \tag{5.136}$$

其中 E_0 和 E_1 各为卫星出地影和进地影时的偏近点角,这将由求解地影方程给出,见下面第 4 段. 有两点说明:

(1) (5.135)式右端出现的 $\Delta E=\widehat{E_1E_0}$,是卫星在地影内运行的弧段(用弧度单位表示),当无地影时 $\Delta E=0$,解(5.135)退化为(5.115)~(5.120)的形式,只是当作长周期变化项处理:$[\Delta\sigma(t)]_L=\sigma_L^{(1)}(t)-\sigma_L^{(1)}(t_0)$. 而此时短周期变化项(5.136)式消失,即无地影时 $\sigma_S^{(2)}(E_1)=\sigma_S^{(2)}(E_0+2\pi)$,导致$[\Delta\sigma(t)]_S=0$,这相当于不计算光压摄动短周期项,亦是合理的. 故可用(5.135)~(5.136)式代替地影存在与否两种情况的计算公式,而不必分别处理.

(2) $\sigma_L^{(1)}(t)$与 $\sigma_S^{(2)}(E)$的公式除 $M_S^{(2)}$ 外全部用(5.115)~(5.120)和(5.127)~(5.131)式的形式,而原(5.132)式给出的 $M_S^{(2)}$ 由下列两部分代替.

$$[\Delta M(t)]_{\mathrm{S}} = [\Delta M]_1 + [\Delta M]_2, \tag{5.137}$$

$$[\Delta M]_1 = \frac{1}{2\pi}[M_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_1) - M_{\mathrm{S}}^{(2)}(E_0)]n(t-t_0); \tag{5.138}$$

$$M_{\mathrm{S}}^{(2)}(E) = k_0\frac{a^2}{e}\left\{A\left[\frac{1}{2}(3-e^2)e\sin E + \frac{1}{4}(1-3e^2)\sin 2E\right] - \sqrt{1-e^2}B\left[e\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) + \frac{1}{4}(1-2e^2)\cos 2E\right]\right\}, \tag{5.139}$$

$$[\Delta M]_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2a}\right)[\Delta a(t)]_{\mathrm{S}}n(t-t_0). \tag{5.140}$$

其中$[\Delta a(t)]_{\mathrm{S}}$即由(5.136)式给出的 a 的变化部分.

从(5.137)～(5.140)式可以看出，当无地影时，$[\Delta M(t)]_{\mathrm{S}}$ 的两个部分，直接部分$[\Delta M]_1$ 和由 Δa 导致的间接部分$[\Delta M]_2$ 均为 0，即 M 的短周期项 $M_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$同样消失.

4. 地影方程的解

卫星进出柱形地影边界处满足如下条件：

$$\cos\psi = A\cos f + B\sin f, \sin\psi = R/r, \tag{5.141}$$

其中 ψ 即卫星进出地影边界径向与太阳方向的地心张角，由此不难导出地影方程如下：

$$\begin{cases}\sin(\theta+f) = -\dfrac{1}{K}\left[1-\dfrac{R^2}{p^2}(1+e\cos f)^2\right]^{1/2}, \\ K^2 = A^2 + B^2, \qquad (K>0), \\ \theta = \arctan(A/B).\end{cases} \tag{5.142}$$

A，B 的表达式前面已有注明，$p=a(1-e^2)$，而 R 是圆柱形地影圆截面的半径，可取 $R=a_{\mathrm{e}}=1$.

求解地影方程即寻找满足方程(5.142)的两个真近点角 f 对应的 f_0(出地影)和 f_1(进地影)，具体求解方法是一迭代过程：

(1)首先令 $e=0$，由

$$\sin(\theta+f)^{(0)} = -\frac{1}{K}\left[1-\left(\frac{R}{p}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{5.143}$$

给出 f_0 和 f_1 的迭代初值 $f_0^{(0)}$ 和 $f_1^{(0)}$. (5.143)式两个解分别在第三和第四象限，而根据地影的特点要求弧 $f_0f_1>180°$，因此$(\theta+f)^{(0)}$在第四象限的一个解给出的是 $f_0^{(0)}$，另一个是 $f_1^{(0)}$. 如果无解，即$|\sin(\theta+f)^{(0)}|>1$，则取 $\sin(\theta+f)^{(0)}=-1$，$(\theta+f)^{(0)}=270°$，$f_0{}^{(0)}=f_1{}^{(0)}=270°-\theta$.

(2)由初值 $f_0^{(0)}$ 和 $f_1^{(0)}$ 分别代入原方程(5.142)进行迭代：

$$\sin(\theta+f)^{(k)}=-\frac{1}{K}\left[1-\frac{R^2}{p^2}(1+e\cos f^{(k-1)})^2\right]^{\frac{1}{2}},\qquad k=1,2,\cdots,\tag{5.144}$$

直到 f_0 和 f_1 满足精度要求终止，即相邻两次的 f_0 和 f_1 满足下列条件：

$$|f_0^{(k)}-f_0^{(k-1)}|<\varepsilon\,|f_1^{(k)}-f_1^{(k-1)}|<\varepsilon.\tag{5.145}$$

ε 是所给的精度要求，根据光压摄动量的大小和所采用的各种近似，可取 $\varepsilon=10^{-3}$.

注意，迭代时，$f_0^{(k)}$ 和 $f_1^{(k)}$ 是分别进行的，它们始终分别对应 $(\theta+f)^{(k)}$ 在第四象限和第三象限.

在迭代过程中，只要再有一次 $|\sin(\theta+f)^{(k)}|>1$，就认为无地影，此时可取 $f_0=0$，$f_1=2\pi$.

求得出、进地影位置 f_0 和 f_1 后，根据下列几何关系即可给出最终需要的 E_0 和 E_1：

$$\sin E=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos f}\sin f,\ \cos E=\frac{1-e^2}{1+e\cos f}\cos f+e.\tag{5.146}$$

§5.4 大气阻力摄动

对于典型的有效面质比为 10^9 的人造地球卫星，如果运行高度在 300 km 以上，大气阻力摄动的量级不会高于 10^{-6}，即对中低轨卫星的运动而言，大气阻力摄动量级亦可当作二阶小量来处理.

1. 大气阻力摄动加速度的近似公式

对于 200 km 以上的高层大气而言，实属稀薄大气，对于尺度不是特别大的航天器而言，其运动是处于自由分子流中. 高马赫数的航天器在这种状态的稀薄气体中飞行，所受的气动力主要表现为一种阻力，并有很好的近似表达式：

$$\boldsymbol{D}=-\frac{1}{2}(C_{\mathrm{D}}S)\rho V^2\left(\frac{\boldsymbol{V}}{V}\right),\tag{5.147}$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}},\tag{5.148}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ 各为卫星和大气相对地心坐标系的速度矢量. 公式(5.147)中有几个量必须处理好，下面分别加以说明.

(1) 阻力系数 C_D，通常取

$$C_{\mathrm{D}}=2.2.\tag{5.149}$$

当高度降低后，特别是 150 km 以下，大气状态将处于自由分子流和连续介质流之间的过渡状态，阻力系数要随高度变化，而且还没有严格的计算公式，这里暂不考虑它.

(2) 大气阻力亦是表面力，卫星承受阻力的截面积 S 很重要，对阻力加速度而言，即面质比 S/m. 与光压摄动类似，要严格给出相应的 S/m，必须了解卫星的形状和姿态. 如果缺乏这种信息，只能采用一个等效的面质比，亦称有效面质比，$S/m=\text{const}$.

(3) 大气运动速度 v_a，通常大气运动表现为一个旋转运动，其旋转角速度 ω_a 比较复杂，其值有一个范围，即

$$\omega_a=(0.8\sim1.4)n_e,$$

其中 n_e 是地球自转角速度. 不过，对于大气阻力摄动特别重要的低轨卫星，飞行高度 $h=200\sim400$ km，可取

$$\omega_a=n_e. \tag{5.150}$$

随着飞行高度的增加，大气阻力的影响减小，因此对中低轨卫星的运动而言，就采用(5.150)式的值.

(4) 大气密度模式 $\rho=\rho(\boldsymbol{r},t)$，这是一个极其复杂的问题，在目前大气模式的精度还不够高的情况下，取如下指数模式：

$$\rho=\rho_0\exp\left(-\frac{r-\sigma(r_0)}{H(r)}\right). \tag{5.151}$$

其中 ρ_0 对应 r_0，$\sigma(r_0)$ 是过 r_0 的等密度椭球面(或称扁球面)，有：

$$\sigma=r_0\ \frac{1-\epsilon\sin^2\varphi}{1-\epsilon\sin^2\varphi_0}, \tag{5.152}$$

ϵ 是地球几何扁率. 在 $h=200-600$ km 范围内，密度标高 $H(r)$ 随 r 线性变化，且有

$$H(r)=H_0+\frac{\mu}{2}(r-r_0),\quad \mu=0.1. \tag{5.153}$$

考虑到密度随时间的变化(太阳辐射效应)，取

$$\rho_0=\bar{\rho}_0(1+F^*\cos\psi^*), \tag{5.154}$$

$$F^*=\frac{f^*-1}{f^*+1},\quad f^*=\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}, \tag{5.155}$$

$$\cos\psi^*=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_m. \tag{5.156}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{r}}_m$ 是密度周日峰方向的单位矢量，其地心赤道球坐标表达式为

$$\boldsymbol{r}_m=\begin{pmatrix}\cos\delta_s\cos(\alpha_S+\lambda_m)\\ \cos\delta_s\sin(\alpha_S+\lambda_m)\\ \sin\delta_S\end{pmatrix},\quad \lambda_m\geqslant30^\circ. \tag{5.157}$$

这里 α_S 和 δ_S 是太阳的赤经赤纬，λ_m 是否取 30°（即太阳偏西 2^h）可视具体情况而定.

在具体引用上述大气密度分布公式时，参考点总是取初始近地点 p_0 对应的 r_{p_0}，于是密度公式即写成下列形式：

$$
\begin{aligned}
\rho &= \rho_{p_0} \exp\left(-\frac{r-\sigma(p_0)}{H(r)}\right) \\
&= \bar{\rho}_{p_0}(1+F^* \cos\psi^*) \exp\left(-\frac{r-\sigma(p_0)}{H(r)}\right),
\end{aligned}
\tag{5.158}
$$

其中

$$
\begin{cases}
F^* = \dfrac{f^*-1}{f^*+1}, \ f^* = \left(\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\right)_{p_0}, \\
\sigma(p_0) = r_{p_0}(1-\epsilon\sin^2\varphi)/(1-\epsilon\sin^2\varphi_{p_0}), \\
\sin\varphi = \sin i\sin(f+\omega)\sin\varphi_{p_0} = \sin i\sin\omega_0, \\
H(r) = H_{p_0} + \dfrac{\mu}{2}(r-r_{p_0}).
\end{cases}
\tag{5.159}
$$

计算中需注意首先要提供参考点处的平均大气密度 $\bar{\rho}_{p_0}$，它对应高度 h_{p_0}，有

$$
h_{p_0} = a_0(1-e_0)-(1-\epsilon\sin^2 i_0\sin^2\omega_0), \tag{5.160}
$$

其中根数 a_0, e_0, i_0 和 ω_0 是取初始平均根数还是初始瞬时根数均无妨，这里指的是参考点，与具体求摄动分析解用什么方法无关，只要计算参考点及其相应的各种参量（见公式(5.159)），采用统一的根数值即可.

2. 大气阻力摄动运动方程

对于旋转大气，其旋转速度 v_a 在 (U,N,W) 三个方向的分量为

$$
\begin{cases}
(v_a)_U = (v_a)_T\sin\theta, & \cos\varphi\cos i' = \cos i, \\
(v_a)_N = (v_a)_T\cos\theta, & \cos\varphi\sin i' = \cos(f+\omega)\sin i, \\
(v_a)_W = -r\cos\varphi\, n_e\sin i'.
\end{cases}
\tag{5.161}
$$

其中 $(v_a)_T = r\cos\varphi n_e\sin i'$，$i'$ 是大气旋转方向与轨道面横向 (T) 之间的夹角，θ 是径向与速度方向（即 U 向）之间的夹角，并有

$$
\sin\theta = 1+O(e^2), \quad \cos\theta = O(e). \tag{5.162}
$$

而卫星运动速度 v 在上述三个方向的分量为 $(v,0,0)$. 考虑到大气模式本身的状况，且反映大气旋转的特征量

$$
\frac{rn_e}{v} \approx O(10^{-1}).
$$

可对大气阻力 D 作一些简化，三个阻力加速度分量 U, N, W 可以写成下列形式：

$$\begin{cases} U = -\dfrac{1}{2}A_1\ \dfrac{(1+2e\cos f+e^2)}{a(1-e^2)}\rho, \\ N = 0, \\ W = -\dfrac{1}{2}A_2 r\cos u\sin i\left[\dfrac{1+2e\cos f+e^2}{a(1-e^2)}\right]^{1/2}\rho, \end{cases} \tag{5.163}$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = \left(\dfrac{C_D S}{m}\right)F^2, \quad A_2 = \left(\dfrac{C_D S}{m}\right)n_e F, \\ F = \left(1-\dfrac{rn_e}{v}\cos i\right)\approx\left(1-\dfrac{r_{p_0}n_e}{v_{p_0}}\cos i\right). \end{cases} \tag{5.164}$$

将 U, N, W 代入摄动运动方程即得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_1 na^2}{(1-e^2)^{3/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{3/2}\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_1 na}{(1-e^2)^{1/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(\cos f+e)\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_2 a\sin i}{4(1-e^2)}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(1+\cos 2u)\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_2 a}{4(1-e^2)}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\sin 2u\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A_1 ana}{e(1-e^2)^{1/2}}\sin f(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\rho, \\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\partial n}{\partial a}\right)\Delta a+\dfrac{A_1 na}{e(1-e^2)}\left(\dfrac{r}{a}\right)\sin f(1+e\cos f+ \\ \qquad e^2)(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\rho. \end{cases} \tag{5.165}$$

由此还可给出近星距 $r_p = a(1-e)$ 的变化率，即

$$\frac{\mathrm{d}r_p}{\mathrm{d}t} = -\frac{A_1 na^2}{(1-e^2)^{3/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(1-\cos f)(1-e^2)\rho\leqslant 0. \tag{5.166}$$

从上述摄动运动方程可知，如果大气静止，运动天体的轨道面则不变，而无论大气是静止还是旋转，半长径 a 和近星距 r_p 都在不断减小. 虽然 de/dt右端因子$(\cos f+e)$并不恒大于零，但后面将会从平均效应得知，e 亦是减小的. 这就表明，阻力摄动效应的主要特点是使运动天体的轨道不断变小变圆，此即阻尼作用下，轨道能量耗散的一种表现，这种耗散效应将是低

轨地球卫星轨道寿命长短的决定性因素.

3. 大气阻力摄动解[2]

上述大气阻力摄动运动方程(5.165)实为完整的卫星受摄运动对应的小参数方程中的二阶小量部分,即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f_0(a)+f_1(J_2)+f_2(\boldsymbol{D}/m)$$

中的 $f_2(\boldsymbol{D}/m)$. 仍采用平均根数法构造小参数幂级数解,只需给出二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$.

只保留上述对球形静止平均大气模式各种修正的一次项(10^{-1}的量级),它们彼此的联合效应(10^{-2}的量级)均略去. 因为大气模式本身的误差可有 5%～10%(即 10^{-1}),故在构造 $\sigma_2(t-t_0)$时,密度公式中保留到与此相当的 10^{-1}量级的摄动量,有如下形式:

$$\begin{aligned}\rho = {}& \rho_{p_0}\exp\left(-\frac{1}{H_{p_0}}(a-a_0+a_0e_0)-C\cos2\omega_0\right)\times\\ & \{1+C\cos2\omega\cos2E-C\sin2\omega\sin2E+\Delta(\mu,F^*)\}\exp(z\cos E),\end{aligned} \tag{5.167}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\mu,F^*) = {}& \mu z_0^2\left(\frac{3}{4}-\cos E+\frac{1}{4}\cos2E\right)+\\ & F^*A^*\left(-\frac{e}{2}+\cos E+\frac{e}{2}\cos2E\right)+F^*B^*\left(\sin E+\frac{e}{2}\sin2E\right).\end{aligned}$$

其中

$$z=\frac{ae}{H_{p_0}},\quad z_0=\frac{a_0e_0}{H_{p_0}}. \tag{5.168}$$

以这种形式的密度公式代入摄动运动方程(5.165)即可给出右函数 $f_2(\boldsymbol{D}/v)$的具体形式. 与前面各种摄动影响不同,在分解该右函数求平均值时,将要出现下列形式的积分及其结果:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nE\exp(z\cos E)=0,\qquad (n=1,2,\cdots), \tag{5.169}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nE\exp(z\cos E)=I_n(z),\qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{5.170}$$

$I_n(z)$称为第一类虚变量的贝赛尔函数,具体计算公式后面第 4 段中介绍.

根据上述平均值的表达,二阶长期项系数 σ_2 的表达式如下:

$$a_2=-B_1a^2n\left\{(I_0+2eI_1)+C(\cos2\omega I_2)+\mu z_0^2\left(\frac{3}{4}I_0-I_1+\frac{1}{4}I_2\right)+\right.$$

$$F^* A^* \left(\frac{e}{2}I_0 + I_1 + \frac{3}{2}eI_2\right)\Bigg\}, \tag{5.171}$$

$$e_2 = -B_1 an\Bigg\{\left(\frac{e}{2}I_0 + I_1 + \frac{e}{2}I_2\right) + \frac{C}{2}\cos 2\omega(I_1 + I_3) +$$
$$\mu z_0^2\left(-\frac{1}{2}I_0 + \frac{7}{8}I_1 - \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{8}I_3\right) +$$
$$F^* A^* \left(\frac{1}{2}I_0 + \frac{e}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 + \frac{e}{2}I_3\right)\Bigg\}, \tag{5.172}$$

$$i_2 = -\frac{1}{4}B_2 a\sin i[(I_0 + \cos 2\omega I_2)], \tag{5.173}$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{4}B_2 a\ I_2\sin 2\omega, \tag{5.174}$$

$$\omega_2 = -\cos i\Omega_2 - B_1 an\Bigg\{C\sin 2\omega\left[\frac{1}{4}I_0 - \frac{1}{2e}I_1 - I_2 + \frac{1}{2e}I_3 + \frac{3}{4}I_4\right] +$$
$$F^* B^*\left[\left(\frac{1}{2e} + \frac{e}{16}\right)I_0 + \frac{1}{2}I_1 - \left(\frac{1}{2e} - \frac{e}{4}\right)I_2 - \frac{1}{2}I_3 - \frac{5}{16}eI_4 -\right.$$
$$\left.\frac{e}{4}(I_0 - I_2)\right]\Bigg\}, \tag{5.175}$$

$$M_2 = -(\omega_2 + \cos i\Omega_2) + B_1 an\left\{F^* B^*\left[\frac{e}{4}(I_0 - I_2)\right]\right\} -$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2a}\right)a_2(t - t_0). \tag{5.176}$$

上述摄动解表达式右端出现的慢变量 Ω,ω **以及太阳平黄经** $u' = L$**，宜取**$(t - t_0)$**的中间值** $\bar{\sigma}_{1/2}$**，即**

$$\begin{cases} \Omega = \bar{\Omega}_0 + \frac{1}{2}\Omega_1(t - t_0), \\ \omega = \bar{\omega}_0 + \frac{1}{2}\omega_1(t - t_0), \\ L = L_0 + \frac{1}{2}n'(t - t_0). \end{cases} \tag{5.177}$$

其中 Ω_1 **和** ω_1 **是第** 4 **章给出的一阶长期项系数**(J_2 **项**)，n'**即太阳平运动角速度. 见**(5.1)**式.**

注意，为了计算公式的统一，凡长周期项变化按长期项处理的计算公式中，出现 Ω,ω **以及有关量时，均取** $\bar{\sigma}_{1/2}$**代替** $\bar{\sigma}_0$.

(5.171)～(5.176)**式中有关大气阻力的几个参数** B_1, B_2, C, μ, F^* **和** A^*, B^***，除** μ **和** F^* **在前面**(5.153)**和**(5.159)**式已给出外，其他各变量意义如下：**

$$B_1 = \left(\frac{C_D S}{m}\right)\bar{\rho}_{p_0} F^2 \exp\left(-\frac{1}{H_{p_0}}(a - a_0 + a_0 e_0) - C\cos 2\omega_0\right), \tag{5.178}$$

$$B_2 = \left(\frac{C_D S}{m}\right)\bar{\rho}_{p_0} F n_e \exp\left(-\frac{1}{H_{p_0}}(a - a_0 + a_0 e_0) - C\cos 2\omega_0\right), \tag{5.179}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{H_{p_0}} r_{p_0}\right)\sin^2 i_0. \tag{5.180}$$

$\epsilon = 1/298.257$ 即前面所提到的地球几何扁率，A^* 和 B^* 的表达式与上一章的 A 和 B 类似，见公式(5.16)和(5.17)，只是那里的 Ω 在 A^* 和 B^* 中改为 $\Omega - \lambda_m$ 即可. 剩下的一个问题是(5.178)和(5.179)式右端指数函数中包含的 a，这与计算参考点处各参数采用的 a_0，e_0 不一样，按平均根数法，它应取 $\bar{a}_0$. 考虑到有地影时的光压摄动和大气阻力摄动，轨道半长径 a 有二阶长期项 $a_2(t - t_0)$，可在计算弧段 $(t - t_0)$ 中取 $\bar{a}_{1/2} = \bar{a}_0 + \frac{1}{2}a_2(t - t_0)$ 代替 $\bar{a}_0$.

4. 第一类虚变量 Bessel 函数 $I_n(z)$ 的计算

计算公式为

$$\begin{cases} I_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+k)!k!}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{n+2k}, \\ I_{n+1} = I_{n-1} - \left(\dfrac{2n}{z}\right) I_n, \qquad (n \geqslant 1), \\ z = \dfrac{ae}{H_{p_0}} = \dfrac{\bar{a}\bar{e}}{H_{p_0}}, \end{cases} \tag{5.181}$$

有

$$I_n(z) = O(z^n). \tag{5.182}$$

计算中 k 的取值由相对精度控制，若记

$$\begin{cases} [I_n(z)]_N = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{(n+k)!k!}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{n+2k} = \sum\limits_{k=0}^{N} [I_n(z)]_k, \\ [I_n(z)]_{k=N+1} = \dfrac{1}{(n+N+1)!(N+1)!}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{n+2(N+1)}, \end{cases} \tag{5.183}$$

则要求满足下列条件：

$$[I_n(z)]_{k=N+1} \Big/ [I_n(z)]_N < \varepsilon^*. \tag{5.184}$$

这里 ε^* 是精度控制值，根据具体要求取值.

计算 $I_n(z)$ 比较麻烦，对于偏心率较小的卫星轨道，高度变化幅度 Δh 不会太大，在精度要求不太高时，可将密度表达式中的 $\exp(z\cos E)$ 展开，表

示成$(z\cos E)$的幂形式,取其几项即可,这可在摄动解中避免出现 $I_n(z)$.

§5.5 后牛顿效应

这是高速问题中,广义相对论对牛顿力学的修正. 对于受摄二体问题,相应的后牛顿摄动加速度为

$$A_{\mathrm{PN}} = \frac{\mu}{c^2 r^2}\left[\left(\frac{4\mu}{r} - v^2\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) + 4\dot{r}v\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{v}\right)\right], \tag{5.185}$$

显然有

$$\varepsilon = |A_{\mathrm{PN}}| \Big/ \left(\frac{\mu}{r^2}\right) = O\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{5.186}$$

其中 c 是光速,$\mu=GM$ 是中心天体的引力常数,在标准单位系统中 $\mu=1$. 但下面仍然保持写为 μ 的形式.

在太阳系中,水星绕日运动和人造卫星绕地球运动,这一摄动量级分别为 10^{-8}和 10^{-9}. 对水星运动而言,后牛顿项相对其他天体的引力摄动是不太小的,而对人造地球卫星(确切地说是指近地卫星)的运动,后牛顿项相对地球扁率摄动仅为三阶小量,即 $O(J_2^3)$,但仍然给出相应的摄动解.

由 $\boldsymbol{r}$,$\dot{\boldsymbol{r}}$与轨道根数之间的关系可知,用径向、横向和轨道面法向三个分量表达的形式为

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\sin f\ \sqrt{\mu/p} \\ (1+e\cos f)\sqrt{\mu/p} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.187}$$

其中 $p=a(1-e^2)$. 由此可得 A_{PN}的 S,T,W 三分量为

$$\begin{cases} S = \dfrac{\mu^2}{c^2 a^3}\left[-3\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 + 10\left(\dfrac{a}{r}\right)^3 - 4(1-e^2)\left(\dfrac{a}{r}\right)^4\right], \\ T = \dfrac{\mu^2}{c^2 a^3}\left[4e\left(\dfrac{a}{r}\right)^3 \sin f\right], \\ W = 0. \end{cases} \tag{5.188}$$

将其代入相应的摄动运动方程即得

$$\dot{\sigma} = f_0(a,e) + f_{\mathrm{PN}}(\sigma,\varepsilon), \tag{5.189}$$

这里的后牛顿项 f_{PN}实为三阶小量,且只有长期部分和短周期部分,即

$$f_{\mathrm{PN}} = f_{\mathrm{C}}(a,e) + f_{\mathrm{S}}(a,e,M). \tag{5.190}$$

由平均根数法,积分后给出摄动解的长期项和短周期项如下[2]:

$$a_C(t-t_0)=0,\ e_C(t-t_0)=0,\ i_C(t-t_0)=0, \tag{5.191}$$

$$\Omega_C(t-t_0)=0, \tag{5.192}$$

$$\omega_C(t-t_0)=\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{3}{p}n(t-t_0), \tag{5.193}$$

$$M_C(t-t_0)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{3}{p}(1-e^2)^{-1}\left(3+\frac{7}{2}e^2+e^4\right)n(t-t_0), \tag{5.194}$$

$$a_S(t)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)(1-e^2)^{-2}[(14+6e^2)e\cos f+5e^2\cos 2f], \tag{5.195}$$

$$e_S(t)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{1}{p}\left[(3+7e^2)\cos f+\frac{5}{2}e\cos 2f\right], \tag{5.196}$$

$$i_S(t)=0, \tag{5.197}$$

$$\Omega_S(t)=0, \tag{5.198}$$

$$\omega_S(t)=\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{1}{p}\left[3(f-M)-\left(\frac{3}{e}-e\right)\sin f-\frac{5}{2}\sin 2f\right], \tag{5.199}$$

$$M_S(t)=-\left(\frac{\mu}{c^2}\right)\frac{1}{p}\sqrt{1-e^2}\left[3e\left(\frac{r}{a}\right)\sin f-\left(\frac{3}{e}+7e\right)\sin f-\frac{5}{2}\sin 2f\right]. \tag{5.200}$$

上述 $\omega_C(t-t_0)$，对水星运动而言就是水星近日点进动项，这是后牛顿效应的一个重要结果. 对于人造卫星的运动，视精度要求而决定取舍.

参 考 文 献

[1] **中国紫金山天文台编. 中国天文年历. 北京：科学出版社**

[2] **刘林. 航天器轨道理论. 北京：国防工业出版社.** 2000

第 6 章　航天器轨道设计和星座设计

§6.1　航天器轨道设计的基本内容

航天器轨道设计的目的就是根据飞行任务需求来确定航天器的运行轨道参数以及发射时机，并使得航天器的运行成本最低. 轨道设计是一个复杂的优化过程，它涉及到许多参数之间的权衡. 通常在航天器执行空间飞行任务的不同时期，往往有不同的飞行轨道，譬如：用来检测和存贮航天器的停泊轨道，用于航天器在不同轨道之间转移的转移轨道，航天器执行正常飞行任务的工作轨道以及航天器任务结束后进入的废弃轨道等. 一个完整的轨道设计应包括航天器在不同飞行阶段的各种轨道，但在任务设计早期，可主要着眼于航天器的工作轨道.

轨道设计没有绝对的规则可循，不同的飞行任务，其设计思想、设计方法也不尽相同. 这一节主要介绍一些卫星轨道类型、轨道选择以及发射窗口选择等有关人造地球卫星轨道设计的基本知识. 有兴趣的读者可进一步阅读文献[1]的第五、六章和文献[2]的第七章内容.

1. 轨道类型概述

轨道设计首先是根据任务要求选择的合适的轨道类型. 按照轨道高度或者轨道特征可以分为低地球轨道(LEO：Low Earth Orbit)、中地球轨道(MEO：Medium Earth Orbit)、地球同步轨道(GSO：GeoSynchronous Orbit)、大椭圆轨道(HEO：Highly Eccentric Orbit)等.

LEO 的轨道高度在 2000 km 以下，周期约在 90～120 分钟之间，LEO 的优点有：卫星和用户设备相对简单，成本较低；由于高度低，因此无线电发射功率可以降低. 但是，LEO 也有一些明显的缺陷：单颗卫星覆盖范围很小，可视时间短(对周期为 105 分钟的轨道，可视时间大约为 15 分钟). LEO 轨道受大气阻力摄动影响明显，在此摄动的影响下轨道将不断变圆、

变低，因此卫星需要额外的燃料来提供补偿轨道衰减所需的能量．这种轨道常用于资源勘测的资源卫星，用于地区侦察的军用侦察卫星，用于全球气象观测和预报的气象卫星以及空间站、载人航天器等．

MEO 的轨道高度一般在 5000 km 以上，周期为 200 分钟到十几个小时，大气阻力影响可忽略，轨道相对较稳定，便于精密定轨和精密星历预报，目前，GPS、GLONASS 和未来的 GALILEO 等卫星导航系统都选用了这种轨道．MEO 卫星地面覆盖范围较大，可视时间较长，如一颗 GPS 卫星约可覆盖地球 34％左右的面积，最大可视时间达 9 小时以上．但 MEO 轨道 Doppler 频移缓慢，卫星的发射成本相对 LEO 卫星也要高的多．

GSO 的轨道高度约为 35800 km，包括地球静止轨道卫星（GEO：Geostationary Earth Orbit）和倾斜同步轨道卫星（IGSO：Inclined GeoSynchronous Orbit）．GEO 是倾角为 0 的地球同步轨道，相对地面观测者，卫星好像在赤道上空静止不动，其星下点轨迹是一个点．GEO 卫星可以提供大范围的地面覆盖（约 40％），在其覆盖区域内任何一点，卫星均 24 小时可见．GEO 已用于通信、电视转播、气象和导航卫星系统的增强（如美国的 WAAS 系统、欧洲的 EGNOS 系统和日本的 MSAS 系统等）．但 GEO 也存在一些缺陷：它不能提供对极区的覆盖，卫星发射费用高，多普勒频移很低，此外 GEO 需要较频繁的定点维持，不利于精密定轨和精密星历的长期预报．

IGSO 是指倾角不为 0 的地球同步轨道，其星下点轨迹是一个跨南北半球的“8”字，其交叉点在赤道上．这种轨道可对极区可以提供很好的覆盖，其交叉点在赤道上除了有长期漂移外，还存在由田谐项共振引起的长周期漂移，这种共振影响在不同的交叉点位置也会有不同，考虑到与 GEO 卫星的碰撞危险和服务的稳定性，也会需要频繁的轨道维持．此外，IGSO 卫星发射费用也高，且在国际上应用很少，这在技术上也会存在一些风险．

HEO 为大椭圆轨道，近地点高度约几百千米，远地点高度通常在几万千米以上．卫星在远地点附近运动较慢，可见时间长，适合对特殊地区的覆盖（如高纬度地区），前苏联的闪电（Molniya）通信卫星系统就采用这种轨道．HEO 轨道的偏心率大，要解决拱线指向（近地点方向）的长期进动使其保持拱线静止，轨道倾角就必须取临界倾角（63.43°或 116.57°）．还有，对于 HEO，信号空间传输时的损耗在近地点和远地点相差 10 dB 以上，这导致信号跟踪性能的下降，当然，理论上可通过改变卫星天线的增益来改善跟踪性能，但这将导致硬件的复杂性．HEO 的 Doppler 频移变化也很大，这也将导致地面设备的复杂化．此外，HEO 存在一个严重的缺陷：卫星穿过

Van Allen辐射带（2000～10000 km），这有可能导致卫星机械和电子设备故障.

除了上面这些轨道分类外，还有其它一些以轨道特征来描述的特殊轨道，如回归轨道、太阳同步轨道、冻结轨道等. 所谓回归轨道是指卫星的星下点轨迹在卫星运行 n 圈以后重复的轨道. 太阳同步轨道和冻结轨道在前面第四章中均有介绍，前者是指卫星轨道面在赤道上的进动速度等于地球公转角速度，这类轨道有一特点，就是卫星同方向通过同一纬度圈时的地方时相同. 后者也叫拱线静止轨道，它是指轨道拱线指向在空间保持不变的轨道，这类轨道的特征是轨道偏心率和轨道形状不变，近地点幅角保持在 $90°$，因此，卫星通过同一纬度地区的高度保持不变. 这种轨道的实现，通常是通过适当选择轨道周期、倾角和偏心率来达到拱线静止的目的.

2. 轨道选择

轨道选择是指根据任务总体以及各分系统对轨道提出的一些技术要求来确定卫星的有关轨道参数. 首先，轨道根数 a，e 表示了轨道的大小与形状，决定了轨道近地点、远地点高度和轨道周期，因此 a，e 的选择其实就是选择轨道周期和近地点高度.

又由 $\sin\varphi_p=\sin i\sin\omega$（$\varphi_p$ 为近地点的地心纬度）知近地点幅角 ω 可以由轨道倾角 i 和近地点位置决定. 于是近地点幅角的选择可以通过选择近地点位置来代替.

$$\omega=\begin{cases}\sin^{-1}(\sin\varphi_p/\sin i), & \text{近地点位于升轨,}\\ 180°-\sin^{-1}(\sin\varphi_p/\sin i), & \text{近地点位于降轨.}\end{cases} \tag{6.1}$$

升交点赤经 Ω 通常在轨道设计中由发射时间来最后确定，因此，在轨道选择时用升交点经度 Ω_G 来代替 Ω，$\Omega_G=\Omega-S$（S 为卫星发射时刻的格林尼治恒星时）.

$$\Omega_G=\begin{cases}\lambda-\sin^{-1}(\tan\varphi/\tan i), & \text{入轨点位于升轨,}\\ 180°+\lambda+\sin^{-1}(\tan\varphi/\tan i), & \text{入轨点位于降轨.}\end{cases} \tag{6.2}$$

这里（λ，φ）为入轨点的地心经纬度. 这样，升交点经度 Ω_G 的选择也就由入轨点位置选择来代替.

综上，这六个轨道根数的选择可以用轨道周期、近地点高度、轨道倾角、近地点位置、发射时间和入轨点位置的选择所代替.

下面来讨论这几个参数的选择问题.

(1) 轨道倾角的选择

轨道倾角选择所需考虑的约束因素主要有:

1) 对 LEO 卫星,轨道倾角不应小于被观测区域的最高纬度或最低纬度的绝对值.

2) 对一次入轨的卫星而言,轨道倾角不能小于发射场的地心纬度.若要发射倾角小于发射场纬度的轨道,则必须经过变轨,且应选择纬度接近轨道倾角的发射场发射,因为变轨道面的轨道调整是最耗能量的.小倾角轨道卫星一般都从低纬度地区的发射场发射就是这个原因.

3) 倾角的选择必须考虑运载火箭的能力.轨道倾角越大,消耗运载火箭的能量就越多.

4) 倾角选择必须注意与轨道周期和升交点的配合,使星下点轨迹经过被观测区域的重点目标.

5) 必须注意地面台站的布设,以保证对卫星的跟踪、测量和控制.

6) 必须注意发射方向的限制(瞄准方向及各级火箭落点的安全).

7) 一些特殊轨道(太阳同步轨道、极轨道、临界倾角轨道等)对倾角的要求.

(2) 近地点位置的选择

对侦察或资源卫星,为了提高地面分辨率,一般把近地点位置安排在所需侦察或勘察地区的中部上空较为合适.

对返回式卫星,一般把近地点位置放在制动点后边(飞行方向的前方),只有这样,才可能使卫星速度方向与当地水平面的夹角是负的,这可以节省制动火箭的能量.

对像 Molniya 这一类 HEO 卫星,近地点位置应放在主要服务区的天底方向.比如卫星的主要服务区在北半球,则近地点位置应放在南半球上空,以保证卫星对北半球的服务时间.

此外,一些冻结轨道对近地点位置有特殊的要求.

(3) 近地点高度与轨道周期的选择

影响轨道高度选择的约束条件主要有:

1) 高度对地面覆盖的影响.高度越高,地面覆盖范围就越大.

2) 高度对地面分辨率的影响.高度越高,地面分辨率就越差.

3) 高度与地面台站的关系.高度越高,卫星可见时间就越长.

4) 与轨道寿命的关系.轨道越高,受大气阻力影响越小,寿命就越长.近地卫星的轨道高度不能过低,轨道寿命必须大于工作寿命.

5) 与测轨精度的关系.这也与大气阻力有关,高度越高,大气阻尼摄动

影响就越小，测轨精度相应就可能高些.

6）空间电磁辐射环境的影响，特别 Van Allen 辐射带的影响等.

在考虑以上轨道高度选择的因素后，可进一步选择轨道的近地点高度和轨道周期. 近地点高度选择的主要考虑因素有：

1）地面分辨率一般以近地点处的分辨率作参考，所以应对此加以考虑.

2）轨道寿命必须大于工作寿命. 对 LEO 和 HEO 卫星，因大气密度一般以近地点处的大气密度作参考，所以应考虑轨道寿命与近地点高度之间的关系.

3）与测轨精度、预报精度的关系.

4）运载火箭的能力以及有效载荷的质量. 高度越高，所需燃料就越多. 有效载荷的质量越大，要到达同样的轨道高度所需的燃料就越多.

轨道周期选择除了要考虑高度选择的一些约束条件外，还有以下几个约束因素：

1）对返回式卫星，应考虑返回制动点的高度、速度、速度方向与方位等. 还有最后一圈卫星星下点应通过回收区的期望落点.

2）对侦察和资源等一类照相卫星，要考虑摄影的旁向重叠率.

3）要求星下点轨迹重复的回归轨道对应的轨道周期限制.

（4）入轨位置的选择

卫星入轨位置由发射场、运载火箭发射轨道的飞行程序以及对卫星星下点轨迹的安排所确定，它还与入轨航程、主动段、入轨段的测控及火箭各子级落点的散布有关.

3. 发射窗口的选择

发射窗口的选择问题就是确定将卫星发射到所设计的轨道平面的时刻. 由于轨道平面在惯性空间中是不动的（二体条件下），因此发射时刻就是指地面发射点位置旋转通过轨道平面的时刻，这个时刻取决于发射点的经纬度、卫星轨道倾角和升交点赤经. 从理论上讲，每天地面发射点通过轨道面两次，因此，每天都有两次可供发射的时机. 但事实上，并不是任意一天就都能进行发射，具体的可发射时间，即发射窗口还必须根据卫星任务和星上设备的各种要求来确定.

发射窗口选择实际上是根据某些限制条件来选择卫星轨道跟太阳（和月球）的相对位置关系. 影响发射窗口选择的因素很多，这里给出几个约束条件：

(1) 卫星运行期间,太阳对地面目标的光照条件.

(2) 在卫星运行时,太阳能电池、卫星热控等对太阳照射卫星的方向的要求.

(3) 卫星姿态测量精度所要求的地球、卫星、太阳三者之间的几何关系.

(4) 卫星处于地影时间长短的要求以及进出地影时卫星在轨位置要求.

(5) 卫星运行时,地面站对卫星测控条件的要求(地球、卫星、太阳三者之间的几何关系).

(6) 返回式卫星对回收时间要求.

(7) 其他有关条件如交会、卫星组网的要求.

由于发射窗口的约束条件很多,因此这就需要用系统工程的方法去分析各种约束条件的合理性,协调相互矛盾的因素,建立各条件与发射时间之间的数学模型,计算出各约束条件对应发射时间的交集,从而得到发射窗口.

§6.2 星座设计的基本问题

随着卫星应用需求的日益发展,特别是20世纪80年代以来,越来越多的航天任务仅靠单颗卫星已不可能完成,于是由多颗卫星组成的卫星星座开始引起人们的关注,成为许多航天任务的首选方案.这一节将介绍星座的有关基本知识.

1. 基本概念

这里介绍星座设计中常采用的几种星座类型和有关的基本概念.

(1) 星形星座

星形星座是早期研究的一种星座.星形星座以各条轨道有一对公共节点,以及相邻同向轨道之间有相等(或近似相等)的相对倾角为特征.如极轨卫星组成的星座属于星形星座.星形星座的理论分析比较方便,但覆盖特性很差.主要表现有以下两大缺点:

1) 所有轨道都在两个节点相交,在两个节点附件过于密集,而两节点间的其他区域,卫星比较稀疏,因此覆盖很不均匀.

2) 同向相邻轨道之间的卫星,相对位置基本不变,但反向轨道之间的卫星相对相位经常变化,所以其覆盖特性变化比较剧烈,实用价值不大.

(2) Walker-δ 星座

Walker-δ 星座是由一些高度相同的圆轨道卫星构成的一类均匀星座.

它具有如下一些基本特性：

1）每个轨道平面所含卫星数目相同，且卫星在轨道平面内均匀分布；

2）相邻轨道面间卫星的相对相位为一常数；

3）各轨道平面相对某一参考面的夹角相同，该参考面不一定是赤道面；

4）各轨道面和参考面的交点沿参考面均匀分布.

Walker-δ 星座可以用三个参数 $T/P/F$ 来描述其相对几何结构，T 为星座中卫星总数，P 为星座轨道平面个数，F 为相邻轨道间卫星的相对相位的度量参数，表示当一条轨道上的一颗卫星经过升交点时，相邻的东侧轨道上的相应卫星已经过了它的升交点，对应的相位为 $360°F/T$，F 的取值为 0 到 $P—1$ 之间的任意整数. 若给定了 Walker-δ 星座的轨道高度、参考平面、相对参考平面的倾角和某个轨道面相对参考面的升交点位置，则 $T/P/F$ 三个参数就唯一确定了这个星座.

Walker-δ 星座有如下优点：星座中各卫星所受长期摄动影响的主要部分均相同，从而使星座的相对几何结构保持基本不变，便于星座的维持；其次，对全球连续覆盖，Walker-δ 星座的几何结构具有某种“均匀性”和“对称性”，因此在全球范围内的覆盖相对较为均匀.

对以赤道为参考平面，参数为 $T/P/F$ 的 Walker-δ 星座，若令其中任一轨道面为第一轨道面，对应升交点赤经为 Ω_0，令该轨道面上任一颗卫星作为计数的第一颗星，对应的相位为 u_0，则星座中第 i 轨道面上第 j 颗卫星，其升交点赤经 Ω 和相位 u 可用下式确定：

$$\Omega = \Omega_0 + (i-1)\frac{360°}{P}. \tag{6.3}$$

$$u = u_0 + (i-1)F\frac{360°}{T} + (i-1)P\frac{360°}{T}, \tag{6.3}$$

（3）Rosette 星座

Rosette 星座是 δ 星座 $P=T$ 的一种特殊星座，因为这种星座的轨道图形在固定的天球上的投影犹如一朵盛开的玫瑰，故称其为 Rosette 星座.

由 N 颗卫星组成的 Rosette 星座满足以下的关系：

$$\begin{cases} \alpha_i = 2\pi i/N \quad i = 0,1,2,\cdots,N-1, \\ \beta_i = \beta, \\ \gamma_i = m\alpha_i \quad m = 0,1,2,\cdots,N-1. \end{cases} \tag{6.5}$$

其中，α_i 为第 i 颗卫星的升交点赤经，β_i 为第 i 颗卫星的轨道倾角，γ_i 为第 i 颗卫星从升交点起算的初始相位角.

(4) σ 星座

σ 星座是 δ 星座的子星座. 其特点是星座中所有卫星的星下点轨迹只有一条,且卫星等间隔分布. σ 星座通常用两个整数 T 和 M 作参考码,它和 Walker-δ 星座的 $T/P/F$ 参数的关系满足下式:

$$\begin{cases} P = \dfrac{T}{H[M,T]}, \\ F = \left(\dfrac{T}{PM}\right)(KP - M - 1), \end{cases} \tag{6.6}$$

式中 $H[M, T]$表示取 M 和 T 的最大公因子. 由于 F 为 0 到 $P-1$ 间的整数,因此整数 K 可以唯一确定.

(5) 覆盖性能参数[2]

星座的覆盖品质需要一些覆盖性能指标来量化. 最普遍的也最常用的覆盖性能指标有覆盖百分比、最大覆盖间隙、平均覆盖间隙、时间平均间隙和平均响应时间等. 这里给出这些指标的定义:

覆盖百分比(Percent Coverage):地面上任一点的覆盖百分比等于被一颗或多颗卫星覆盖的时间除以总的仿真时间. 覆盖百分比可以直接表示地面某一点或某一地区被覆盖多少次,但它并不提供有关覆盖间隙分布的任何信息.

最大覆盖间隙(Maximum Coverage Gap):等于单独一个点所遇到的最大的覆盖间隙. 当研究多个点的统计特性时,我们可以取其最大覆盖间隙的平均值或其中的最大值,因此全球平均最大间隙是全部个别点的最大间隙的平均值,而全球最大间隙则是某一个别点覆盖间隙的最大值. 这个统计特性可给出某种最坏情况的信息,但由于用一个点或几个点就可确定这一结果,故它不能正确地排定星座覆盖性能地优劣. 因此,最大覆盖间隙是一个不好的性能指标.

平均覆盖间隙(Mean Coverage Gap):是指地面上任意一点的覆盖间隙的总长度除以覆盖间隙的次数. 覆盖间隙次数指在给定的仿真时间段中该点不被卫星覆盖的次数,覆盖间隙总长度是指该点不被卫星覆盖的总时间.

时间平均间隙(Time Average Gap):时间平均间隙是指按时间平均的平均间隙持续时间,也就是说,时间平均间隙就是间隙长度的平均. 该指标在数值上等于各次覆盖间隙长度的平方和除以总的仿真时长.

平均响应时间(Mean Response Time):响应时间是指从我们接收到要观测某点的随机请求开始到可以观测到该点为止的时间长度,最大响应时

间等于最大覆盖间隙. 如果一颗卫星在给定的一个时间步长内位于该点的视场中,则该时间步长的响应时间为 0;如果所讨论的点在某个覆盖间隙内,则响应时间就是到覆盖间隙终点的时间长度. 平均响应时间就是指在仿真时段内,各个时间步长的响应时间的总和对总的仿真时间的平均. 事实上,在计算平均响应时间时,由于对称性,响应时间可以用到覆盖间隙开始时间的长度来代替,而这并不影响平均响应时间的最后计算结果,且方法更加简单. 这个性能指标既考虑了覆盖的统计特性,又考虑了间隙的统计特性,因此可以确定整个系统的响应能力. 平均响应时间是评价响应能力的最好的覆盖性能指标.

2. 卫星导航星座的常用性能指标

在卫星导航星座的设计中,还会有一些特殊的性能要求,如共视卫星个数、星座值、导航精度和服务可用性等,下面介绍几个常用的性能指标.

(1) 共视性要求

对同时提供三维定位和定时能力的导航星座而言,共视性要求就是在规定的截至仰角(如 5°)下,在任何时刻,服务区内任意地点同时可见的导航卫星数目应不少于 4 颗.

(2) 精度因子 DOP(Dilution of Precision)

对导航星座而言,系统所提供的定位几何是影响导航精度的一个重要因素. 一般导航系统的定位几何可以用 DOP 值来描述,定义为用户等效距离误差 UERE(User Equivalent Range Error)到最终定位误差或定时误差的放大系数,它反映了观测源几何位置对定位误差的影响. 常用的有下几种 DOP 参数:几何精度因子 GDOP(Geometry Dilution of Precision)、位置精度因子 PDOP(Position Dilution of Precision),水平精度因子 HDOP(Horizontal Dilution of Precision)、垂直精度因子 VDOP(Vertical Dilution of Precision)和时间精度因子 TDOP(Time Dilution of Precision).

对同时支持用户解算接收机钟差的导航星座而言,各种 DOP 的计算如下:

在用户的本地坐标系(x 轴指向东,y 轴指向北,z 轴指向天顶)中,设矩阵 G 为用户到定位星 $S_i(i=1,2,...,\kappa,\kappa\geqslant 4)$的方向余弦矩阵,即

$$G=\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_k & m_k & n_k & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

其中,l_i,m_i,n_i 分别为用户到定位星 S_i 的方向余弦. 记矩阵$(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G})^{-1}$的主对角线元素为 $\sigma_{ii}(i=1,2,3,4)$,则对零均值等精度的独立观测而言,各种 DOP 分别为

$$\mathrm{GDOP} = \sqrt{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}+\sigma_{44}}, \tag{6.8}$$

$$\mathrm{PDOP} = \sqrt{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}, \tag{6.9}$$

$$\mathrm{HDOP} = \sqrt{\sigma_{11}+\sigma_{22}}, \tag{6.10}$$

$$\mathrm{VDOP} = \sqrt{\sigma_{33}}, \tag{6.11}$$

$$\mathrm{TDOP} = \sqrt{\sigma_{44}}. \tag{6.12}$$

需要注意的是,这些 DOP 的概念都是基于不加权的协方差矩阵得到的,而事实上来自各颗卫星的观测误差是不相同的,因此 DOP 并不能真实地反映系统的导航精度. 尽管如此,在星座设计时,为了撇开其他一些非星座因素的影响,人们还是经常用 DOP 值去衡量星座的导航性能.

(3) 星座值 CV(Constellation Value)

对导航星座,我们常用星座值 CV 来分析星座的导航性能. CV 反映了星座的几何特性和连续可用性,是星座性能的一个重要体现. 其定义为覆盖区内 DOP 值小于某一门限值的区域占整个服务区域的面积百分比在全时段上的平均值. 其计算公式为

$$\mathrm{CV} = \frac{\sum\limits_{t=t_0}^{t_0+\Delta T}\sum\limits_{i=1}^{L}\mathrm{bool}(\mathrm{DOP}t,\mathrm{i}\leqslant \mathrm{DOP}_{\max})\times \mathrm{area}_i}{\Delta T\times \mathrm{Area}}\times 100\%. \tag{6.13}$$

这里,ΔT 为总的仿真时间,L 为网格个数,bool(X)为布尔函数,若 X 为真则等于 1,若 X 为假则等于 0. $\mathrm{Area}=\sum\limits_{i=1}^{L}\mathrm{area}_i$ 为服务区域总面积,area_i 为第 i 个网格的面积.

(4) 可用性(Availability)[3]

可用性是指系统能为用户提供可用的导航服务的时间百分比,在卫星星座性能的评估中. 可用性是一个普遍使用的术语,依照对系统不同的性能需求,可定义为各种类型的可用性,如精度可用性,连续可用性等.

一个系统性能的可用性要求可在三个层次上进行计算: 瞬间的,局部的,服务区域的. 瞬时可用性(IAL: Instantaneous Availability Level) $\alpha(i, t)$定义为在特定地点(i)和特定时刻(t)满足系统性能需求的概率. 最简单的情况下,IAL 等于 0 或 1,而在一般情况下 IAL 为 0 和 1 之间的某个概率值. 因此,可定义一个瞬时可用性指示函数(IAI: Instantaneous Avail-

ability Indicator)$\beta(i, t)$：当 IAL 超过最低 IAL 要求 $\alpha_{\min}$，$\beta(i, t)$的值为 1，反之则为 0. IAL 和 IAI 之间的关系表达式如下：

$$\beta(i, t) = \mathrm{bool}\{\alpha(i, t) \geqslant \alpha_{\min}\}. \tag{6.14}$$

局部可用性(LAL：Local Availability Level)是指对特定地点在某一时间间隔的"平均"可用性. 首先，定义时间平均的局部可用性(TALAL：Time - Averaged Local Availability Level)为对地点 l 在时间间隔$(t_0, t_0 + \Delta T)$内的瞬时可用性的时间平均，即：

$$\bar{\alpha}(i) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T} \alpha(i, t), \tag{6.15}$$

这里 ΔT 是所计算的时间间隔.

同样也定义一个局部可用性的时间百分比(LAPOT：Percentage-of-Time Local Availability Level)为一段时间间隔内特定地点的 IAI 的平均，即：

$$\bar{\beta}(i) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T} \beta(i, t). \tag{6.16}$$

这两种定义的含义是不同的，如果说"PDOP＜6 的平均概率至少是 0.95"指的是 TALAL；然而如果说"至少在 95％的时间 PDOP＜6 的概率超过 0.999"则指 LAPOT.

服务区可用性(SAL：Service Availability Level)是对整个服务区域内所有地点的局部可用性的平均，同样有基于 IAL 和 IAI 两种可用性：

$$A_S = \frac{1}{\mathrm{Area}} \sum_{i=1}^{L} [\bar{\alpha}(i) \times \mathrm{area}_i] = \frac{1}{\mathrm{Area} \times \Delta T} \sum_{i=1}^{L} \sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T} [\alpha(i, t) \times \mathrm{area}_i], \tag{6.17}$$

$$B_S = \frac{1}{\mathrm{Area}} \sum_{i=1}^{L} [\bar{\beta}(i) \times \mathrm{area}_i] = \frac{1}{\mathrm{Area} \times \Delta T} \sum_{i=1}^{L} \sum_{t=t_0}^{t_0+\Delta T} [\beta(i, t) \times \mathrm{area}_i]. \tag{6.18}$$

由 CV 值的定义可知，CV 是 A_S 对于不考虑卫星故障的理想星座时的一个特例.

根据星座状态的不同，瞬时可用性还可以分为以下几种基本的类型：理想的可用性，降阶的可用性和期望的可用性.

理想的可用性是最早定义的可用性，它是基于没有卫星损坏的理想星座来定义的，可表示如下：

$$\alpha_0(i, t) = \mathrm{bool}\{R(i, t)\}. \tag{6.1}$$

这里,$R(i,t)$表示满足某种导航性能需求的情况.对理想星座,IAL 仅取 0 或 1.例如:若 PDOP<6 是系统的性能需求,则当 PDOP<6 时 IAL=1;反之,当 PDOP≥6 时 IAL=0.此外对理想星座,IAI 的值与 IAL 相同.

降阶的可用性是指星座中有卫星故障发生时的降阶星座所提供的服务可用性.假设星座中有 κ 颗卫星故障,则可用性定义为 κ 颗卫星损坏的所有组合的可用性平均值:

$$\alpha_\kappa(i,t)=\frac{1}{C_M^\kappa}\sum_{n=1}^{C_M^\kappa}\mathrm{bool}\{R_n(i,t)\},k=0,\ldots,M. \tag{6.20}$$

这里,M 为理想星座的卫星个数,符号 C_M^κ 表示星座的 κ 卫星损坏的所有组合:

$$C_M^\kappa=\frac{M!}{\kappa!(M-\kappa)!}, \tag{6.21}$$

$R_n(i,t)$表示系统在某 κ 颗卫星故障时的满足导航性能需求的情况.这时,降阶星座的 IAL 不再刚好等于 0 或 1,而是 0 与 1 之间的某个值.注意理想星座的 IAL 是(6.20)式在 $\kappa=0$ 时的特例.IAL 在当卫星故障数进一步增加时变得更坏.

期望的可用性是指考虑所有可能的降阶星座的可用性的加权平均值.在 M 颗卫星的星座里,有 $M+1$ 种可能状态,用 $S_\kappa(\kappa=0,1,\ldots,M)$表示.$S_0$ 是没有卫星损坏的状态,S_1 是有一颗卫星损坏的状态,等等.对每种星座状态 S_κ,均给定一个概率值 P_κ,其中$\sum_{\kappa=0}^{M}P_\kappa=1$.考虑星座各种状态概率的可用性定义如下:

$$\alpha(i,t)=\sum_{\kappa=0}^{M}P_\kappa\alpha_\kappa(i,t)=\sum_{\kappa=0}^{M}P_\kappa\frac{1}{C_M^\kappa}\sum_{n=1}^{C_M^\kappa}\mathrm{bool}\{R_n(i,t)\}. \tag{6.22}$$

理性星座的可用性是(6.22)式的一种特殊情况,此时:

$$P_\kappa=\begin{cases}1,\kappa=0,\\0,\kappa\neq 0.\end{cases}$$

K 颗卫星故障的降阶星座的可用性也是(6.22)式的特殊情况,此时:

$$P_\kappa=\begin{cases}1,\kappa=K,\\0,\kappa\neq K.\end{cases}$$

与期望的可用性相关的一个很重要的问题是怎样对星座卫星的状态概率进行建模或计算.一般而言,卫星状态概率可以通过基于 Markov 链分析卫星的故障和恢复率来得到,文献[3],[4],[5],[6],[7]对此有详细的讨论.

3. 星座覆盖分析方法简介

在星座设计研究过程中，人们提出了各种星座覆盖分析方法，其中较著名的和得以广泛应用的主要有外接圆方法、覆盖带方法和格网方法. 这里给出这些方法的简单介绍，详细的描述请参阅相关文献.

外接圆方法由 Walker 提出[8]，主要是研究全球连续单重覆盖和多重覆盖问题. 它主要针对 Walker-δ 星座，但方法本身并没有对此作出限制. 外接圆方法分析星座和覆盖特性的准则是：保证全球各地在任何时候都能在某个最小仰角以上看到用户要求的卫星数量. 在覆盖分析中用离开卫星星下点最远的一些点(相邻三颗卫星的的星下点组成的球面三角形的外接圆圆心)进行评估. 不断改变星座轨道倾角，就能够找出最坏情况下的最小的外接圆半径，从而得到最佳星座. 外接圆方法是一种基于几何的方法，直观、易于理解和接受. 它主要用于解决全球的单重和多重连续覆盖问题. 但该方法也存在一些问题：首先，随着卫星总数的增长，计算所需时间的增长极为迅速. 也许正因为如此，外接圆方法最近十几年来没有得到发展. Walker 本人也深知此缺陷，但他在公开文献中并没有提出解决办法，而是别转它径，试图用“网格”、“正多面体”、“半正多面体”的方法来弥补，但效果不佳. 因而，寻找新的算法势在必行. 其次，外接圆方法设计出的星座往往其轨道面数等于卫星总数，即 $T/T/F$. 这样的星座有两个较大的缺陷：第一，性能台阶太高，导致每上一个覆盖性能台阶要花费较多的经费. 第二，导致响应用户要求的应变能力太弱. 最后，外接圆方法无法评估导航星座最为关心的导航精度.

覆盖带方法最初由 Luders 提出[9]，经由 Rider[10],[11]、Adams[12],[13] 和 Hopkins 等人的发展，已用于区域连续覆盖和全球连续覆盖等各种星座的设计. 覆盖带方法一般假设所采用的星座具有如下性质：

(1) 所有轨道为同一高度的圆轨道；

(2) 各轨道的倾角均相同；

(3) 轨道面内卫星均匀分布；

(4) 每一轨道面内的卫星数目大于 3，因为覆盖带方法要求同一轨道面内卫星的有效覆盖区相互重叠，形成一条环带.

覆盖带方法利用这些基本的约定，将覆盖要求转化为一些约束方程，求解这些方程组就可以获得满足覆盖性能的星座，但须注意这星座未必是最优的. 覆盖带方法简洁明了，具有比外接圆方法高得多的计算效率，但也具有因基本约定带来的不足和缺陷，而且它同样也无法评估导航星座的精度

性能.

格网方法最初是由 Morrison 在 1973 年对由圆形轨道和椭圆轨道构成的星座进行多重覆盖研究时所采用[14],他分析了在地球表面构成的格网(10°×10°)的每个点上,在某个最小仰角以上能看到的卫星数目. 后来 Bogen 用类似方法研究了星座覆盖[15],但他选用的是矩形网格,格网的纬度间距缩小到 5°,经度间距仍为 10°. 格网方法的缺点是:格网间距较大时,计算结果的精度较差. 为了提高精度,就要缩小格网的间距,这样又会带来很大的工作量. 但格网方法的优点是简单易于实现,便于统计各类覆盖性能指标,且适用于各种用途的星座设计.

4. 星座设计的基本过程和准则

在开始设计星座时,一般我们都是从最简单的星座入手,如从Walker-δ星座、单平面赤道轨道或者从具有 1 个、2 个或 3 个轨道平面的极轨道开始工作. 有时我们还可以考虑椭圆轨道,或者用它来构成一个完整的星座,或者用它来补充星座以增强其性能. 大致来讲,星座设计的基本过程可描述如下:

(1) 确定任务需求,特别是性能需求和指标,以及性能增长和降级台阶的目标;

(2) 进行星座性能的综合评估. 如选择星座类型,评估覆盖性能和其他一些性能指标,分析性能增长与台阶以及高度台阶等问题

(3) 形成设计文件,设计过程反复迭代至得到满足任务需求的最优或近优星座.

在设计过程中,一般我们用下面三个标准来评价每个星座的设计.

(1) 覆盖性能或可用性等其他一些指标. 一般不要在只有一个指标时就着手整个星座的设计.

(2) 性能增长和降级. 星座的性能增长和降级是实际星座设计中的一个关键问题. 对每一种星座,性能增长或降级情况是不同的. 在评价增长或降级时,我们假定在轨道平面内重新定相所花的推进剂代价适中,而改变轨道面是不现实的.

(3) 性能台阶. 我们应该评价每一个星座,看看是否存在这样的性能台阶,使星座中轨道平面的数目、轨道高度或其他关键的特征参数成为离散的台阶.

在设计时,往往要确定大量的参数,表 6.1 给出了星座设计中的一些待定参数和选择准则.

表 6.1　星座设计中的一些基本因素和选择准则

因　素	影　响	选择准则
主要设计变量		
卫星数目	决定成本和覆盖的主要因素	选择最少的卫星满足覆盖和性能台阶的要求
轨道高度	覆盖、发射和变轨成本	通常是成本和性能之间的系统级权衡
轨道平面数目	灵活性、覆盖性能台阶、发展和降级使用	以最少的轨道平面满足覆盖性能的要求
其他设计变量		
轨道倾角	决定覆盖的纬度分布	纬度覆盖和成本的总和权衡
轨道平面的相位	决定覆盖的均匀性	在各组独立的相位取舍中选择最佳覆盖
偏心率	任务的复杂性、可达的高度和覆盖与成本的关系	一般取 0，除非为满足特别需求才选择其它值

§6.3　星座的相对几何和覆盖重复周期

1. Walker 的工作

在星座设计的早期研究中，Walker 指出[16]，卫星星座中每颗卫星的星下点轨迹在某些条件下完全分离，但是在另外一些条件下却可以部分重合或完全重合. 对星座标记为 $T/P/F$ 的 Walker-δ 星座，如果星座卫星采用 α 天（恒星日，下同）β 圈回归的轨道，Walker 给出了该星座的星下点轨迹条数计算方法：

$$E_{\alpha,\beta} = \frac{T}{K}, \tag{6.23}$$

这里，K 由下式计算：

$$K = H(G, PJ), \tag{6.24}$$

式中

$$G = s\alpha + F\beta, J = H(s, \beta). \tag{6.25}$$

$s = T/P$ 为每个轨道面上的卫星个数，H(a，b)表示取 a 和 b 的最大公因子.

星座的覆盖重复周期是指星座遍历了对覆盖特性而言的所有不同星座构型的一段时间间隔. Walker 也给出了覆盖重复周期（GCRP）的计算

公式:

$$\mathrm{GCRP} = T_{\mathrm{orbit}} \frac{yz}{4T}, \tag{6.26}$$

式中,T_{orbit}为卫星的轨道周期,而

$$y = H(F, P),\ z = H\left(2, \frac{T}{y}\right). \tag{6.27}$$

单就星座的覆盖性能而言,经过一个覆盖重复周期后,星座中的卫星构型就开始重复,因此,在对星座覆盖性能的仿真中,一般只要取一个覆盖重复周期即可.

需要注意,Walker 给出的星下点轨迹的计算公式仅适用于 Walker 星座,而对于在区域星座中经常用到的非 Walker-δ 星座或由 Walker 星座中的部分卫星构成的星座,则不再成立,因此还有必要对星座的卫星相对几何关系进行进一步的分析. 此外,Walker 给出的星座覆盖重复周期的计算利用了球的旋转对称性,忽略了地球自转,因此只对全球覆盖的 Walker-δ 星座有效,而无法用以确定 Walker-δ 星座和其他一些非 Walker-δ 星座对某特定地区和地点的覆盖重复周期(为了和 Walker 给出的覆盖重复周期相区别,就称这种星座对某地区或地点的覆盖重复周期为区域覆盖重复周期).

2. 星座的相对几何

(1) 星座中任意两颗卫星是否有同一条星下点轨迹的判别法则

对参数为 $T/P/F$ 的 Walker-δ 星座中任一卫星(i, j)(表示第 i 轨道面第 j 颗卫星,$i=1,2,\cdots,P$;$j=1,2,\cdots,T/P$,下文同),在 t_0 时刻其相位和升交点赤经分别为

$$u_{i,j} = u_0 + 360\left[\frac{F}{T}(i-1) + \frac{P}{T}(j-1)\right], \tag{6.28}$$

$$\Omega_{i,j} = \Omega_0 + \frac{360}{P}(i-1), \tag{6.29}$$

其中 u_0 为第 1 轨道面第 1 颗星的相位,Ω_0 为第一轨道面的升交点赤经.

定义这颗卫星星下点轨迹在 t_0 时刻前第一次由南向北过赤道时对应点的经度为该星下点轨迹的升交点经度 $\Omega_{i,j}^{\mathrm{G}}$,其值为

$$\Omega_{i,j}^{\mathrm{G}} = \Omega_{i,j} - S_0 + \frac{u_{i,j}\omega_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{s}}}, \tag{6.30}$$

其中 ω_{e} 为地球自转角速度,n_{S} 为卫星平均运动,S_0 对应 t_0 时刻的恒星时.

对 α 天 β 圈回归的回归轨道(在二体问题的情况下)而言,式(6.30)可

改写为

$$\Omega_{i,j}^{G} = \Omega_{i,j} - S_0 + \frac{u_{i,j}\alpha}{\beta}. \tag{6.31}$$

下面对回归轨道讨论星下点轨迹重合的问题(下文若对卫星轨道没有特别说明,均是指回归轨道). 对星座中任意的两颗卫星(i, j)和(m, n),若它们在同一条星下点轨迹上,则它们满足

$$\Delta\Omega^{G} = \Omega_{i,j}^{G} - \Omega_{m,n}^{G} = \kappa\frac{360}{\beta}, \tag{6.32}$$

其中 κ 为任意的整数.

把式(6.28),(6.29)和(6.31)代入式(6.32)整理后有

$$\left(\frac{\beta}{P} + \frac{\alpha F}{T}\right)(i-m) + \frac{\alpha P}{T}(j-n) = \kappa. \tag{6.33}$$

上式就是 Walker-δ 星座中卫星的星下点轨迹是否重合的一个判断准则.

(2) 一条星下点轨迹中两颗卫星间的轨迹长度和卫星相对顺序

对于在同一条星下点轨迹上的任意两颗卫星(i, j)和(m, n),它们星下点之间的轨迹长度(时间间隔)$\Delta\lambda$ 可用下式计算:

$$\Delta\lambda = T_{\text{orbit}}\left[\frac{360\ K - (\Delta\Omega_{m,n}^{G} - \Delta\Omega_{i,j}^{G})}{360\ \alpha/\beta}\right]_{\text{int}} + \frac{u_{m,n} - u_{i,j}}{n_{\text{S}}}. \tag{6.34}$$

式中方括号的下标 int 表示 K 为 1 到 α 之间惟一确定的整数,它使得方括号的值为 0 和 β 之间的整数,下文出现的 int 下标的含义也是如此;T_{orbit} 为卫星轨道周期.

应用式(6.28)和(6.32),式(6.34)可改写为

$$\Delta\lambda = T_{\text{orbit}}\left[\frac{K\beta - \kappa}{\alpha}\right]_{\text{int}} + T_{\text{orbit}}\left[\frac{F}{T}(i-m) + \frac{P}{T}(j-n)\right]. \tag{6.35}$$

或应用式(6.28),(6.32)和(6.33),式(6.34)亦可写为

$$\Delta\lambda = T_{\text{orbit}}\left[\frac{K\beta}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha P} + \frac{F}{T}\right)(i-m) - \frac{P}{T}(j-n)\right]_{\text{int}} + T_{\text{orbit}}\left[\frac{F}{T}(i-m) + \frac{P}{T}(j-n)\right]. \tag{6.36}$$

下面来讨论 Walker-δ 星座中任一星下点轨迹上各卫星的的相对顺序. 令 N 为一条星下点轨迹上的卫星个数,若指定卫星(i, j)为 0 号星,则 $\Delta\lambda$ 与卫星(m, n)相对 0 号星由西向东的顺序编号 l 之间存在以下关系:

$$\Delta\lambda = l\frac{\beta}{N}T_{\text{orbit}}, l = 1, \cdots, N-1. \tag{6.37}$$

综合式(6.34)和(6.37)不难得到确定卫星顺序编号 l 的关系式

$$\Delta\lambda = T_{\text{orbit}}\left[\frac{360\,K-(\Delta\Omega_{m,n}^{\text{G}}-\Delta\Omega_{i,j}^{\text{G}})}{360\alpha/\beta}\right]_{\text{int}}+\frac{(u_{m,n}-u_{i,j})}{n_{\text{S}}} = T_{\text{orbit}}\frac{\beta}{N}l. \tag{6.38}$$

根据式(6.28)和(6.32),上式也可改写为

$$\left[\frac{K\beta-\kappa}{\alpha}\right]_{\text{int}}+\frac{F}{T}(i-m)+\frac{P}{T}(j-n) = \frac{\beta}{N}l, \tag{6.39}$$

或把式(6.28),(6.32)和(6.33)代入式(6.38)便可得另一形式的表达式:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{K\beta}{\alpha}-\left(\frac{\beta}{\alpha P}+\frac{F}{T}\right)(i-m)-\frac{P}{T}(j-n)\right]_{\text{int}}+\\&\frac{F}{T}(i-m)+\frac{P}{T}(j-n) = \frac{\beta}{N}l.\end{aligned} \tag{6.40}$$

(3) 相邻星下点轨迹间两相邻升交点的经度差

在进行区域星座的优化时,也需要调整卫星的的升交点经度,为了提高优化的效率,需要确定合适的升交点经度的调整范围,因此就需要确定星座相邻两条星下点轨迹之间的两相邻升交点之间的经度差. 对 Walker-δ 星座,这里给出计算升交点经度差的计算公式:

$$\Delta\Omega_{\text{G}} = \frac{360}{\beta E_{\alpha,\beta}}. \tag{6.41}$$

3. 区域覆盖重复周期

Walker 给出了 Walker-δ 星座对全球的覆盖特性重复周期的计算公式,但是它既不适用于对任意指定区域或地点的覆盖重复周期的计算,也不适用于非 Walker-δ 星座的重复周期的计算.

在讨论星座的覆盖重复周期之前,我们先定义星下点重复周期为该条星下点轨迹上卫星星下点的分布出现重复的时间间隔,称其中最小的时间间隔为最小重复周期. 下文若无特别说明,星下点重复周期就是指最小重复周期.

对一个均匀分布的 Walker-δ 星座而言,其每条星下点轨迹上的卫星个数记为 N,卫星轨道周期记为 T_{orbit},则对于由其中任意 M ($M\leqslant N$)颗卫星的星下点重复周期 T_{sub},满足以下规律:

(1) $T_{\text{sub}}=\gamma T_{\text{orbit}}\dfrac{\beta}{N}$,$\gamma$ 为 N 的因子,当 $M=N$ 时,$\gamma=1$;

(2) 若(M, N)互为质数,则 $T_{\text{sub}}=\beta T_{\text{orbit}}$;

(3) 用一个 N 位二进制序列 $S_0(N) = a_1 a_2\cdots a_N$($a_i$,$i = 1,\cdots,N$ 的取值为 0 或 1)来表示 M 颗卫星的分布,0 表示不选取此卫星,1 表示选取此

卫星，对这个二进制序列施以如下移位运算：

$$S_1(N) = \mathrm{shift}(S_0) = a_N a_1 a_2 \cdots a_{N-1}. \tag{6.42}$$

若经过 L（显然，$1 \leqslant L \leqslant N$）次这样的移位运算后得到的一个二进制序列 S_L：

$$S_L = a_{N-L+1} a_{N-L+2} \cdots a_N a_1 a_2 \cdots a_{N-L}.$$

等于初始的二进制序列 S_0，则这 M 颗卫星分布的重复周期为 $LT_{\mathrm{orbit}}\beta/N$；

(4) 若在所有 M 颗卫星中相邻两颗星之间的轨迹长度中有一个等于 $(N-M)T_{\mathrm{orbit}}\beta/N$，则这 M 颗卫星分布的重复周期 $T_{\mathrm{sub}} = \beta T_{\mathrm{orbit}}$.

我们接着定义：对某一特定区域或地点，我们称其上空的卫星几何构形重复出现的时间间隔为星座对该区域或地点的覆盖重复周期，称其中最小的重复间隔为最小覆盖重复周期（简称区域覆盖重复周期：RCRP）. 下文若无特别说明，重复周期均指最小重复周期.

假设我们所要讨论的卫星星座有 $E_{\alpha,\beta}$ 条星下点轨迹，记各条星下点轨迹的星下点重复周期为 T_{sub}^{i}，$i=1,2,\cdots,E_{\alpha,\beta}$，则该星座对任一地点的覆盖重复周期 RCRP 为：

$$\mathrm{RCRP} = [T_{\mathrm{sub}}^{1}, T_{\mathrm{sub}}^{2}, \cdots, T_{\mathrm{sub}}^{E_{\alpha,\beta}}]. \tag{6.43}$$

这里，式中的方括号表示取 $T_{\mathrm{sub}}^{1}, T_{\mathrm{sub}}^{2}, \cdots, T_{\mathrm{sub}}^{E_{\alpha,\beta}}$ 的最小公倍数. 注意对 GEO 卫星，我们定义其星下点重复周期为 1.

特别的，对 Walker-δ 星座，其对特定地区或地点的区域覆盖重复周期可以由下式计算：

$$\mathrm{RCRP} = \frac{\alpha E_{\alpha,\beta}}{T}. \tag{6.44}$$

对任意指定区域，若星座的星下点轨迹在该区域上的分布不是对称的，则星座对该区域的覆盖重复周期也可以由(6.43)式计算. 此外，需要指出的是，对星下点分布对称的区域，用(6.43)式求得的覆盖重复周期不一定是最小重复周期，其最小重复周期与星下点轨迹和该区域本身的对称程度以及卫星的具体分布有关.

§6.4　星座结构演化

根据第四章对卫星运动各种摄动的分析知，地球引力场的扁率摄动是对卫星运动影响最大的一种摄动因素. 此外，由于在星座组网时卫星不可能准确进入其设计轨道，实际轨道与设计轨道之间总会存在一个偏差（下文称之为入轨偏差）. 通常这种入轨偏差在设计指标允许范围之内，但是它仍然

能够引起实际轨道和设计轨道在摄动变化上的不可忽略的差异，而且还存在因轨道半长轴偏差导致的卫星位置在轨道沿迹方向上的长期变化. 因此，这一节主要就地球非球形引力场的扁率摄动和入轨偏差的影响来讨论星座的结构演化.

1. 卫星轨道演化

(1) 卫星轨道摄动

卫星在地球中心引力和 J_2 项的作用下，其对应运动方程的轨道解包括长期变化项的形式可写为下列形式：

$$\begin{cases} a = a_0, e = e_0, i = i_0, \\ \Omega = \Omega_0 + \Omega_1(t - t_0) + O(J_2^2), \\ \omega = \omega_0 + \omega_1(t - t_0) + O(J_2^2), \\ \lambda = \omega + M = \omega_0 + M_0 + (n + \lambda_1)(t - t_0) + O(J_2^2), \end{cases} \tag{6.45}$$

其中下标“0”表示卫星的初始状态，λ 为卫星的沿迹量. 轨道长期变化率由下式表达：

$$\Omega_1 = -\frac{3J_2}{2p^2} n\cos i, \tag{6.46}$$

$$\omega_1 = \frac{3J_2}{2p^2} n\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right), \tag{6.47}$$

$$\lambda_1 = \omega_1 + M_1 = \frac{3J_2}{2p^2} n\left[\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) + \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1 - e^2}\right]. \tag{6.48}$$

这里，$p = a(1 - e^2)$. 以上(6.45)～(6.48)式中的轨道根数均为平根数.

从上面几个式子可以看出，对于轨道高度、偏心率和倾角相同的一组卫星，它们在地球扁率摄动作用下的轨道长期变化是相同的.

(2) 入轨偏差引起的轨道演化

卫星入轨偏差将导致实际轨道和设计轨道在摄动上的差异，而且还会因轨道半长轴偏差导致卫星位置在轨道沿迹方向上长期变化. 下面来分析入轨偏差的影响.

记卫星的入轨偏差为($\delta a_0, \delta e_0, \delta i_0, \delta\Omega_0, \delta w_0, \delta M_0$)，则由(6.46)和(6.48)式可得到由入轨偏差引起的轨道长期摄动的变化为

$$\delta\Omega_1 = \frac{7\Omega_1}{2a}\delta a_0 + \frac{4ae\Omega_1}{p}\delta e_0 - \frac{\sin i\Omega_1}{\cos i}\delta i_0, \tag{6.49}$$

$$\delta\lambda_1 = -\frac{7\lambda_1}{2a}\delta a_0 + \frac{ae}{p}\left[\frac{3J_2}{2p^2} n\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) + 3\lambda_1\right]\delta e_0 -$$

$$\frac{3J_2}{4p^2}n(5+3\sqrt{1-e^2})\sin 2i\delta i_0. \tag{6.50}$$

另外,半长轴偏差还将引起沿迹方向的长期变化,由(6.45)式中的最后一个方程可知这种变化为

$$\Delta\lambda=\delta n_0(t-t_0)=-\frac{3n}{2a}\delta a_0(t-t_0). \tag{6.51}$$

由于 Ω_1 和 λ_1 都是 $O(J_2 n/a^2)$的量级,相对于平运动 n 而言均为小量,因此在一般情况下,轨道半长轴的入轨偏差是决定卫星实际轨道相对设计轨道演化的主要因素. 在考察影响轨道面相对变化时,对小倾角的轨道,倾角的入轨偏差影响小而半长轴和偏心率的误差影响大,当星座采用极轨道时,倾角的入轨偏差影响达到最大而半长轴和偏心率误差的影响最小. 若星座采用小偏心率轨道时,偏心率入轨偏差的影响就可予以忽略.

2. 星座的结构演化

星座的几何结构可以用卫星的绝对位置或(和)卫星间的相对几何关系来确定. 一般卫星相对设计位置的变化反映了星座结构在时空中的绝对变化(称之为时空变化或绝对变化),而卫星间相对位置变化则反映了星座结构的空间几何的相对变化(称之为空间几何变化或相对变化). 前面讨论的卫星轨道演化结果可以很清楚地描述星座结构时空变化的规律,这里不再重复,下面给出星座结构的相对变化.

(1) 空间几何变化的一般规律

卫星的相对位置关系可以用卫星轨道半长轴、偏心率、倾角以及卫星相位和升交点位置关系等来描述. 从前面的分析得知,地球扁率摄动不会引起卫星轨道半长轴、偏心率和倾角的长期变化,但会导致卫星相位和升交点赤经的长期变化,因此可以用卫星之间的相位和升交点赤经的变化来描述星座结构的空间几何变化.

对于星座中任意的两颗卫星 i 和 j,由式(6.46)和(6.48)可得地球扁率摄动引起的卫星轨道面之差和相位差的长期变化率为

$$\Delta\Omega_1=-\frac{3J_2}{2}\left(\frac{n_i\cos i_i}{p_i^2}-\frac{n_j\cos i_j}{p_i^2}\right), \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_1=\frac{3J_2}{2}\bigg\{&\frac{n_i}{p_i^2}\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i_i\right)-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i_i\right)\sqrt{1-e_i^2}\right]-\\&\frac{n_j}{p_j^2}\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i_j\right)-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i_j\right)\sqrt{1-e_j^2}\right]\bigg\}.\end{aligned} \tag{6.53}$$

这里,$\Delta\Omega_1$ 为两卫星的轨道面赤经差的长期变化率,$\Delta\lambda_1$ 为两卫星相位差的

长期变化率. 式中的下标“i”表示卫星 i 的轨道参数,下标“j”表示卫星 j 的轨道参数.

由上两式可见,对卫星的轨道半长轴、偏心率和倾角均相同的星座,地球扁率摄动不会引起卫星之间的相位差和升交点赤经差的长期变化,这说明地球扁率的长期摄动不会引起这类星座结构的空间几何变化. 这个性质是很有意义的,因为尽管星座结构发生了时空变化,但只要星座的空间几何结构保持不变,则通过简单的坐标旋转和时间平移就可以证明星座的全球覆盖性能不会发生变化.

对于卫星的入轨偏差的影响,将两颗卫星各自的入轨偏差引起的轨道变化相减便可得两星之间位置的长期变化率为

$$\delta\Omega = (\delta\Omega_1)_i - (\delta\Omega_1)_j, \tag{6.54}$$

$$\delta\lambda = (\delta\lambda_1 + \Delta\lambda)_i - (\delta\lambda_1 + \Delta\lambda)_j, \tag{6.55}$$

式中的 $\delta\Omega_1$,$\delta\lambda_1$ 和 $\Delta\lambda$ 由(6.49)~(6.51)式分别给出.

对这种变化,即使这两卫星的轨道长期摄动影响相同,但由于两星入轨偏差的影响,两颗卫星之间的相位差和轨道面的位置差也会有缓慢的长期变化,从而引起星座结构的变化.

上面的讨论均是在历元地心天球坐标系这个“惯性”空间中进行的,反映了各种星座结构演化的一般特征. 特别是对全球覆盖星座,这些规律已基本描述了它的结构演化特征,但对区域覆盖星座,尚不能反映出它相对服务区域的地域性变化规律.

(2)区域覆盖星座的地域性结构演化

这里所谓的地域性结构演化是指星座的几何结构相对地球上某一地点或地区的演化情形. 这种变化显然与地球自转相关,因而无法用上面给出的一般规律来描述,而应选择一些地固系中的参数来进行分析. 这里以星座卫星星下点轨迹的变化、同一条星下点轨迹上任意两颗卫星过轨迹上任意一点的时间间隔和相邻星下点轨迹上两颗卫星相继从南向北过赤道的时间间隔的变化为参数来讨论地域性的结构演化.

1)星下点轨迹的变化

对星下点轨迹的变化,可以用卫星过升交点时刻对应的升交点经度 Ω_G 和星下点轨迹的最高纬度相对设计值的变化来描述. 星下点轨迹的最高纬度由卫星轨道倾角确定,由于倾角在 J_2 项和入轨偏差的作用下没有长期变化,因此最高纬度是一个常值.

对卫星在 t 时刻过升交点时对应的升交点经度 Ω_G 有

$$\Omega_G = \Omega - S_t = \Omega - S_0 - \mathrm{int}\left(\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{orbit}}}\right)\omega_e T_{\mathrm{orbit}}, \tag{6.56}$$

这里，Ω 为该时刻的升交点赤经，S_t 为该时刻的格林尼治恒星时，S_0 为卫星在 t_0 过升交点时的格林尼治恒星时，ω_e 为地球自转角速度，T_{orbit} 为卫星轨道周期.

上式对时间求导，有

$$\dot{\Omega}_G = \dot{\Omega} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\mathrm{int}\left(\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{orbit}}}\right)\omega_e T_{\mathrm{orbit}}\right]. \tag{6.57}$$

式中，$\dot{\Omega}$为升交点赤经的长期变率，可用(6.46)和(6.49)式计算. 由于卫星轨道周期没有长期变化，但与设计值存在 δT_{orbit} 的入轨偏差，

$\delta T_{orbit} = (3T_{orbit}\delta a)/(2a)$，因此，在 t 时刻 Ω_G 的相对设计值变化为

$$\Delta\Omega_G = \delta\,\Omega_0 + \Omega_1(t-t_0) + \left[\delta\Omega_1(t-t_0) - \mathrm{int}\left(\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{orbit}}}\right)\omega_e \delta T_{\mathrm{orbit}}\right]. \tag{6.58}$$

由于轨道高度、偏心率和倾角都相同的卫星，由地球扁率摄动引入的 Ω_1 均相同，因此，对由同种轨道类型的卫星构成的星座，Ω_1 带来的升交点赤经长期漂移是星座的一种系统性的整体漂移，这种系统性的整体漂移不会影响全球星座的性能，但对区域星座，将导致其服务区域的漂移. 对式中方括号部分，由于星座中各颗卫星各自入轨偏差不同(对具体星座而言，每颗卫星的入轨偏差虽然是确定的，但它们的分布可认为是随机的)，因此，方括号部分的值也各不相同，而且它们的分布也可认为是随机的(虽然对具体的一颗卫星而言，这误差是确定的可预报的)，从而使星座原先整齐规则的星下点轨迹排列逐渐变得杂乱无序. 此外，方括号中的 δT_{orbit} 项是破坏星座结构的主项.

2) 卫星星下点间隔的变化

定义星下点轨迹在地图上 0 度经线东边的第一个升交点为该轨迹的参考升交点. 按照理想的设计星座，对同一条星下点轨迹上的两颗卫星相继通过轨迹上任一点的时间间隔 ΔT 可写为:

$$\Delta T = (\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)})T_{\mathrm{orbit}} + \frac{u^{(1)}}{n} - \frac{u^{(2)}}{n}, \tag{6.59}$$

这里，上标(1)和(2)分别表示卫星 1 和卫星 2，κ 为小于 β(β 为卫星的回归参数，β 圈后轨迹重复)的非负整数，表示从过参考升交点时刻起算的卫星所经过的轨道周期数，u 为卫星相位.

将(6.59)式对时间求导数，有

$$\Delta \dot{T} = (\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)}) \dot{T}_{\text{orbit}} + \frac{1}{n}\left[\dot{u}^{(1)} - \frac{u^{(1)}}{n}\dot{n}\right] - \frac{1}{n}\left[\dot{u}^{(2)} - \frac{u^{(2)}}{n}\dot{n}\right]. \tag{6.60}$$

由上式可知，ΔT 的变化跟卫星的相位和半长轴的变化相关. 在只考虑 J_2 项作用的情况下，卫星的轨道半长轴没有长期变化，卫星相位的长期变化也相同，因此有：$\Delta \dot{T}=0$，即 ΔT 在这种情形下是不变的. 若同时再考虑卫星的入轨误差，则由(6.50)、(6.51)和(6.60)式可得：

$$\begin{aligned}\Delta \dot{T} &= \frac{1}{n^{(1)}}\left[\delta\lambda_1^{(1)} - \frac{3n^{(1)}}{2a^{(1)}}\delta a^{(1)}\right] - \frac{1}{n^{(2)}}\left[\delta\lambda_1^{(2)} - \frac{3n^{(2)}}{2a^{(2)}}\delta a^{(2)}\right] \\ &\approx \frac{1}{n}\left[\delta\lambda_1^{(1)} - \delta\lambda_1^{(2)} - \frac{3n}{2a}(\delta a^{(1)} - \delta a^{(2)})\right],\end{aligned} \tag{6.61}$$

式中的 $\delta\lambda_1^{(1)}$ 和 $\delta\lambda_1^{(2)}$ 可根据(6.50)式计算得到. 由上式可得到一段时间内 ΔT 的变化为

$$\delta(\Delta T) = \frac{1}{n}\left[\delta\lambda_1^{(1)} - \delta\lambda_1^{(2)} - \frac{3n}{2a}(\delta a^{(1)} - \delta a^{(2)})\right](t - t_0) + C. \tag{6.62}$$

这里，$C = \kappa^{(1)}\delta T_{\text{orbit}}^{(1)} - \kappa^{(2)}\delta T_{\text{orbit}}^{(2)}$，$\delta T_{\text{orbit}}^{(1)}$ 和 $\delta T_{\text{orbit}}^{(2)}$ 分别为卫星 1 和卫星 2 的入轨周期偏差，可由半长轴偏差转换得到.

由式(6.50)和式(6.62)可知，地球扁率摄动不会影响两卫星通过星下点轨迹上任一点的时间间隔变化，而导致时间间隔变化的主要因素是半长轴的入轨偏差.

接下来讨论任意两条星下点轨迹上的两颗星由南向北过赤道的时间间隔的变化. 记 t 时刻轨迹 1 和轨迹 2 上的两颗星的相位分别为 $u^{(1)}$ 和 $u^{(2)}$，则它们下一次通过各自的参考升交点的时间分别为

$$t + L^{(1)} T_{\text{orbit}}^{(1)} + \frac{2\pi - u^{(1)}}{n^{(1)}} \text{ 和 } t + L^{(2)} T_{\text{orbit}}^{(2)} + \frac{2\pi - u^{(2)}}{n^{(2)}},$$

这里，$L^{(1)}$ 和 $L^{(2)}$ 为小于 β 的非负整数. 于是它们通过各自的参考升交点的时间间隔 $\Delta\tau$ 为

$$\Delta\tau = (L^{(1)} T_{\text{orbit}}^{(1)} - L^{(2)} T_{\text{orbit}}^{(2)}) + \left(\frac{2\pi - u^{(1)}}{n^{(1)}} - \frac{2\pi - u^{(2)}}{n^{(2)}}\right). \tag{6.63}$$

同样，在考虑 J_2 项和入轨偏差的情形下，$\Delta\tau$ 的变化率为

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\tau} = \frac{\dot{u}^{(2)}}{n^{(2)}} - \frac{\dot{u}^{(1)}}{n^{(1)}} &= \frac{1}{n^{(2)}}\left(\lambda_1^{(2)} + \delta\lambda_1^{(2)} - \frac{3n^{(2)}}{2a^{(2)}}\delta a^{(2)}\right) - \\ &\quad \frac{1}{n^{(1)}}\left(\lambda_1^{(1)} + \delta\lambda_1^{(1)} - \frac{3n^{(1)}}{2a^{(1)}}\delta a^{(1)}\right),\end{aligned} \tag{6.64}$$

对上式积分便可得一段时间内 $\Delta\tau$ 的变化为

$$\delta(\Delta\tau) = \left[\frac{1}{n^{(2)}}\left(\lambda_1^{(2)} + \delta\lambda_1^{(2)} - \frac{3n^{(2)}}{2a^{(2)}}\delta a^{(2)}\right) - \frac{1}{n^{(1)}}\left(\lambda_1^{(1)} + \delta\lambda_1^{(1)} - \frac{3n^{(1)}}{2a^{(1)}}\delta a^{(1)}\right)\right](t - t_0) + C_1. \tag{6.65}$$

这里，$C_1 = L^{(1)}\delta T_{orbit}^{(1)} - L^{(2)}\delta T_{orbit}^{(2)}$.

由(6.50)式和(6.65)式可知，导致任意两条星下点轨迹上的两颗星过参考升交点的时间间隔变化的主要因素也是半长轴的入轨偏差，由此可见，卫星轨道半长轴的入轨偏差将决定区域星座几何结构的稳定性.

3. 卫星编队飞行的构形与保持问题

卫星编队是指具有特殊几何构形要求，并且卫星间的相对位置要求保持在一定精度范围内的卫星系统. 这种特殊形式的星座常应用于一些对地观测任务(如空基雷达)，在任务期间需要通过主动和被动技术来控制和维持其编队的几何形状. 对卫星编队，星—星之间虽然相距较近，但各卫星运动对应的轨道力学问题仍是单星运动状态. 因两星质量之小可以认为它们之间没有任何动力学联系，这是考虑卫星编队飞行时共同遵循的一个前提. 在此前提下，星—星之间的特殊几何构形是如何形成的，下面对这一问题作一简单介绍，在第 7 章 § 7.5 将有详细的论述.

(1) 卫星编队或伴飞运动的基本方程

目前国内在卫星总体研究(或轨道设计)中，对编队或伴飞问题，都是采用相对运动的模式[17]. 作为一对双星(一颗为中心卫星，一颗为伴星)，它们各自遵循绕地球运动的规律，总体上可以保持一定的空间构形. 当两星相距不大时，为了研究它们之间在空间中的相对几何构形，将各自绕地球运动转化为伴星相对中心卫星的运动. 其坐标原点为中心卫星(确切地说是中心卫星的质心)，XY 坐标面即中心卫星绕地球运行的轨道平面，X 轴方向即中心卫星的径向(由地心指向中心卫星的方向). 在此卫星坐标系中，经简单的坐标转换，即可获得伴星相对中心卫星的运动方程：

$$\begin{cases} \ddot{X} - 2\dot{Y} = 3X, \\ \ddot{Y} + 2\dot{X} = 0, \\ \ddot{Z} + Z = 0. \end{cases} \tag{6.66}$$

注意，这一卫星坐标系实为一旋转坐标系，给出该方程的过程中，已假

定中心卫星的轨道为圆形(这与星座编队情况基本符合),该圆运动角速度确定了旋转坐标系. 不仅如此,上述方程还是线性化的结果,即丢掉了相对坐标量 X,Y,Z(相对卫星的地心距而言看作一阶小量)的高阶小量,此方程由 *Clohessy W H* 给出,故被称为 $C-W$ 方程. 由于该方程的形式类似于月球运动理论中 *Hill* 问题[18]~[21]的基本方程(即构造月球绕地球运动在太阳摄动下的中间轨道时采用的一种近似力学模型所得到的运动方程),故也有人称它为 *Hill* 方程.

$C-W$ 方程存在条件周期解,此解即可表明两星之间的相对构形. 由于两星之间没有任何的力学联系,而结果是伴星绕着中心卫星作一种椭圆运动,这很难让人理解. 下面直接从形式上的相对运动进行简单论述. 事实上,伴星相对中心卫星的运动,就是伴星绕一种平衡点的运动[22],它是相应平衡点的一种条件稳定性的反映,这一力学机制将在第 7 章 § 7.5 中详细论述.

(2) 卫星编队与伴飞运动的特殊构形

方程(6.66)中的 Z 分量可与问题分离,它对应一谐振动,即伴飞卫星相对 XY 平面作上下的小振动,而对 X,Y 两分量,相应的运动解为

$$\begin{cases} X = C_1 + C_2 t + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ \dot{X} = C_2 - C_3 \sin t + C_4 \cos t, \\ Y = \dfrac{3}{2} C_1 t - \dfrac{3}{4} C_2 t^2 - 2C_3 \sin t + 2C_4 \cot t, \\ \dot{Y} = -\dfrac{3}{2} C_1 - \dfrac{3}{2} C_2 t - 2C_3 \cot t - 2C_4 \sin t, \end{cases} \tag{6.67}$$

可选择适当的初始条件,使 $C_1=0$,$C_2=0$,构成一个条件周期解. 具体的初始条件为

$$t = t_0: X_0, Y_0, \dot{X}_0 = Y_0/2, \dot{Y}_0 = -2X_0, Z_0, \dot{Z}_0. \tag{6.68}$$

此时相对运动的解为如下周期解:

$$\begin{cases} X = X_0 \cos t + (Y_0/2) \sin t, \\ Y = -2X_0 \sin t + Y_0 \cot t, \\ Z = Z_0 \cos t + \dot{Z}_0 \sin t, \\ \dot{X} = -X_0 \sin t + (Y_0/2) \cos t, \\ \dot{Y} = -2X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \\ \dot{Z} = -Z_0 \sin t + \dot{Z}_0 \cos t, \end{cases} \tag{6.69}$$

如果初始条件$\dot{Z}_0$同时也满足下列关系：

$$\dot{Z}_0 = \pm (Y_0/2X_0)Z_0. \tag{6.70}$$

那么它们在 XY 平面、XZ 平面和 YZ 平面上的构形均为一椭圆. 相应的 XY 平面和 YZ 平面上的两个椭圆方程如下：

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1, \frac{Y^2}{C^2} + \frac{Z^2}{D^2} = 1, \tag{6.71}$$

其中

$$\begin{cases} A^2 = X_0^2 + Y_0^2/4, B^2 = 4A^2, \\ C^2 = 4A^2 = B^2, D^2 = (4Z_0^2/X_0^2)A^2. \end{cases} \tag{6.72}$$

上述条件周期运动即卫星编队飞行或伴飞的一种依据，但两星之间地距离不能大，否则方程(6.66)右端略去的高阶项很快就起作用，伴飞的构形会遭破坏. 若要保持，就必须按条件(6.71)进行轨控.

(3) 轨道摄动变化对卫星编队飞行相对构形的影响

上述讨论是在无摄情况下进行的. 事实上，由于各种摄动因素的存在，卫星轨道变化导致的位置偏离远大于上述初值偏离量，那么是否有可能选择适当的轨道配置(由轨道设计提供)，使两星轨道变化的差别尽量接近，从而保持特殊的几何构形？另一个问题是，对于这种真实的受摄运动，前面给出的初值控制条件(6.71)是否仍旧有助于两星空间构形的保持？这些都是卫星编队飞行中保持星—星之间特殊构形的重要问题.

关于摄动的影响，前面已针对卫星星座的空间整体几何结构作了必要的阐述，下面则着重就星—星之间在相距较近的情况下摄动如何影响星间特殊构形展开讨论.

在各种摄动因素的影响下，卫星轨道有 3 种不同性质的变化，即随时间增长的长期项和振幅一定的长、短周期项. 周期项最大振幅的量级是 10^{-3}，而对两星相接近的轨道配置，相互之间的周期变化就很接近，故对卫星编队飞行和伴飞运动而言，主要考虑各自轨道的长期变化，而长期变化项只依赖于 3 个根数 a，e，i，只要两星的轨道配置使两星的这 3 个根数接近，那么两个卫星的轨道变化量之差就会很小(参见公式(6.52)和(6.53))，这种轨道变化量之差相对两星位置差实为高阶小量，与 C-W 方程线性化过程中丢掉的高阶项相当.

事实上，卫星编队飞行或伴飞的空间构形(确切地说是相对构形)主要取决于第(2)段所阐述的伴星相对中心卫星所作的一种条件周期运动. 而在两星轨道根数适当选择的情况下，各种摄动影响导致两星轨道变化的差别

与相对运动方程线性化过程中丢掉的高阶项是相当的. 因此,与无摄情况类似,它们的相对构形在一定时间内同样是可以保持的.

对于编队或伴飞情况,两星之间的距离不会很大,这很关键. 这样两星的轨道根数不可能有太大的差别,特别是 a,e,i **三个根数,对于近圆轨道而言,**Ω **与沿迹量**(M+ω)**的差别也不可能很大. 因此,这就决定了两星的轨道是相近的,只要选择轨道半长径** a **基本相同的近圆**(**即两者** e **亦接近**)**轨道即可,**i,Ω **的差别将由两星的距离来制约,显然亦是较小的.**

当然,仅仅作上述选择是不够的,还必须按构形条件(6.68)**作轨道校正**(**实际飞行中的轨控措施**)**,这样才能保持两星在空间的相对构形.**

通过对高、中、低轨三种类型的伴飞情况的仿真计算表明,考虑各种摄动影响,只要按照构形条件(6.68)**进行轨控,两星之间的相对几何构形仍受前面所阐明的平衡点附近条件周期运动的制约,在较长的时间段内保持不变. 至于具体的定量结果**(**包括构形变化的范围、保持的时间长度等**)**,则与卫星的初始位置差等各种条件有关,但其基本规律确实受构形条件**(6.68)**所制约.**

参 考 文 献

［1］**杨嘉墀,范秦鸿,张云彤等. 航天器轨道力学与控制**(**上**). **北京:宇航出版社**,1995

［2］Wertz J. R. ,Larson W. J. Space Mission Analysis and Design(3rd Edition),CA:Microcosm Press,1999

［3］Quyen Hua. Availability:What is Availability?Availability of What?Proceedings of the National Technical Meeting, Santa Monica, CA, 1997:14～16

［4］Clifford W. Kelley and Boeing. GPS Constellation State Probabilities Historical & Projected, Proceedings of ION NTM-99, 1999

［5］Durand J. M. and Caseau A. , GPS Availability, Part Ⅱ: Evaluation of Probabilities for 21-Satellite and 24-Satellite Constellations, NAVIGATION,1990, 37(3):285～297

［6］Mitch Sams and et al. Availability and Continuity Performance Modeling, Proceedings of The 52nd Annual Meeting,1996:289～298

［7］Rhonda Slattery and et al. New and Improved GPS Satellite Constellation Availability Model. Proceedings of ION GPS-99, 1999

［8］Walker J. G. Circular Orbit Patterns Providing Continuous Whole Earth Coverage, Royal Aircraft Establishment Technical Report 70211,1970

[9] Luders R. D. Satellite Network for Continuous Zonal Coverage, J. ARS, 1961, 31: 179～184

[10] Rider L. Optimized Polar Orbit Constellation for Redundent Earth Coverage, J. Astro. Sci., 1985, 33(2): 147～161

[11] Rider L. Analytic Design of Satellite Constellation for Zonal Earth Coverage Using Inclined Circular Orbit, J. Astro. Sci, 1986, 34(1): 31～64

[12] Adams W. S., Rider L. Circular Polar Constellation Providing Continuous Single or Multiple Coverage above a Specificial Latitude, J. Astro. Sci., 1987, 35(2): 155～192

[13] Adams W. S., Hopkins R. G. Minimal Arbitrarily Phased Constellation with a Given Inclination Providing Single Global Coverage, AAS Paper 1991～508

[14] Morrison J. J. A System of Sixteen Synchronous Satellite for Worldwide Navigation and Surreillance. Report FAA-RD-73-30, 1973

[15] Bogen A. H. Geometric Performance of the Global Positioning System, Aerospace Corp. Report SAMSO-TR-74-169, 1974

[16] Walker J. G. Continuous Whole Earth Coverage by Circular Orbit Satellite Patterns. Royal Aircraft Establishment Technical Report 77044, 1977

[17] 林来兴. 见: 微小卫星编队飞行及应用论文集. 北京: 国家高技术航天领域专家委员会, 2000: 1～34

[18] Hill G W. American Journal of Mathematics, 1978, 1: 5～26

[19] Brown E W. Introductory Treatise on Lunar Theory Cambridge University Press, 1896

[20] Дубошин Г Н, Небесная Механика, Москва: ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА, 1964. 297～336

[21] Szebehly V. Theory of Orbit, New York and London: Academic Press, 1967. 602～629

[22] 王歆, 刘林, 张轲. 飞行器测控学报, 2001, 20(4): 7～10

第 7 章　深空探测器运动的轨道力学基础

深空探测器是指飞离地球引力作用范围的月球和行星际探测器. 卫星型航天器运动的基本动力学模型对应一个受摄二体问题，而深空探测器运动的基本动力学模型则对应一个受摄的限制性三体问题(确切地说是受摄圆型限制性三体问题). 本章即阐述其基础部分圆型限制性三体问题的有关知识. 尽管探测器飞抵探测目标天体引力作用范围内经变轨转化为绕飞目标天体的卫星，其运动与人造地球卫星类似，亦对应一个受摄二体问题，但由于各目标天体的引力位特征与地球不一定相同或类似，相应的卫星运动有它自身的特殊内容，如月球卫星就是如此，这将在后面第 9 章中另有介绍.

§7.1　限制性问题的提出

一个 N 体系统，$N=n+k$，其中 n 个大天体和 k 个小天体，它们的质量分别记作 $M_i(i=1,2,\cdots n)$ 和 $m_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,k)$，这里所谓的小天体，是指它们的存在并不改变 n 个大天体的运动，即 $m_\alpha \ll M_i(\alpha=1,2,\cdots k, i=1,2,\cdots,n)$，那么研究 n 个大天体的运动将与 k 个小天体无关，限制性问题就是关于这 N 体系统，在 n 个大天体的运动作为已知的情况下，研究 k 个小天体的运动问题.

在太阳系中，研究小行星的运动就对应一个典型的限制性问题. 其原因很简单，即绝大部分小行星的质量相对太阳和各大行星而言是如此之小，小到由于它们的存在，各大行星相对太阳的运动没有“任何”改变，至少在当今测量精度下还无法使它们的影响体现出来，完全符合采用限制性问题的基本前提. 类似的力学系统在太阳系中还有很多，因此，限制性问题的提出确实具有广泛的天文背景. 深空探测器就是一个典型的人造小天体，其质量相对而言是如此之小，它的存在不会改变太阳系中任何一个自然天体(大、小行星，自然卫星，彗星等)的运动状况，研究它的运动当然是一个限制性问题.

限制性问题中最简单的模型是限制性三体问题，这是一个 $N=(2+1)$ 体系统，该三体系统中有两个大天体和一个小天体，例如月球探测器的运动就涉及地、月两个大天体. 由于小天体对两个大天体的运动没有影响，因此两个大天体的运动即对应一个简单的二体问题，其相对运动（或相对该两个大天体质心的运动）的解是一圆锥曲线. 既然讨论构成一个系统的问题，当然排除抛物线和双曲线的情况，即只有圆运动和椭圆运动，分别对应圆型和椭圆型限制性三体问题. 对这样一类限制性三体问题，就是在两个大天体运动确定的情况下，研究第三个天体——小天体的运动.

太阳系中大多数天体的轨道偏心率都较小，作为第一近似可以看成是圆轨道，例如月球绕地球的运动轨道偏心率是 0.0549，地球绕太阳的运动轨道偏心率是 0.0167. 因此，作为深空探测器的运动，其基本动力学模型可以处理成一个圆型限制性三体问题，其中两个大天体在发射阶段和深空探测器进入目标轨道运动阶段可能对应不同的两个大天体. 例如发射月球探测器，在发射阶段和运行阶段，两个主要的大天体均是地球和月球；而如果是火星探测器，发射段可能是地球和太阳，而飞往目标天体（火星）附近，两个大天体则变为火星和太阳.

深空探测器的运动除受相关的两个大天体的引力作用外，还受其他大天体的影响等，但相对而言作用较小，故可以将深空探测器的实际运动处理成一个受摄限制性三体问题，而只有圆型限制性三体问题存在一些可引用的基本特征，故确切地说是处理成受摄圆型限制性三体问题.

§7.2 圆型限制性三体问题的基本方程与 Jacobi 积分

1. 坐标系的选择与无量纲化

对于限制性三体问题，由于两个大天体 P_1 和 P_2 的运动状况已知，在研究小天体 P 的运动时，根据各种运动状态与需要，往往涉及到下面四种坐标系的选择，即

（1）$P_i(i=1$ 或 $2)$固定坐标系；

（2）$P_i(i=1$ 或 $2)$旋转坐标系，亦称固连坐标系；

（3）质心（P_1 与 P_2 二体系统质心 C）惯性坐标系；

（4）质心旋转坐标系，亦称会合坐标系. 这四种坐标系的原点分别在 P_i（注意，三个天体 P_1，P_2 和 P 均处理成质点）和质心 C 上，它们的基本平面

(xy 坐标面)和主方向将根据不同的天体系统和不同的问题来选择.

小天体 P 在某一大天体 P_i 附近运动(例如月球探测器从地球上发射后的初始飞行段和到达月球附近的飞行段),往往选取第一种或第二种坐标系,而当小天体 P 在两个大天体之间运动时,则采用后三种坐标系之一,特别是后两种.

为了讨论运动问题和计算上的方便,往往采用无量纲形式,即类似于研究人造地球卫星运动时所采用的计算单位,不仅使各物理量无量纲化,而且使它们的量级"标准化",便于问题的分析. 在这里,若是第一种运动问题,即小天体在大天体 P_i 附近运动,则相应的质量单位$[M]$,长度单位$[L]$和时间单位$[T]$,分别取为

$$\begin{cases}[M]=M_i, & (i=1\text{ 或 }2),\\ [L]=a_e, & (P_i\text{ 的赤道半径}),\\ [T]=(a_e^3/GM_i)^{1/2},\end{cases}\tag{7.1}$$

此时新系统的引力常数 $G=1$. 对于第二种运动问题,由于小天体在两个大天体之间运动,其涉及的运动"尺度"与前者不同,为此,计算单位有下述习惯取法:

$$\begin{cases}[M]=M_1+M_2,\\ [L]=a_{12},\\ [T]=[a_{12}{}^3/G(M_1+M_2)]^{1/2}=1/n.\end{cases}\tag{7.2}$$

同样,新系统的引力常数 $G=1$. 上式中 a_{12} 是两个大天体之间的相互距离,n 是它们之间相对运动的角速度. 在此计算单位系统中,两个大天体的质量分别为

$$1-\mu=\frac{M_1}{M_1+M_2},\mu=\frac{M_2}{M_1+M_2}.\tag{7.3}$$

它们到质心的距离各为

$$r_1'=\mu,\quad r_2'=1-\mu.\tag{7.4}$$

下面的论述,各物理量均采用无量纲形式,并着重介绍体现限制性三体问题特点的有关内容. 至于小天体在大天体附近的运动,则属于卫星型探测器的运动问题,主要内容已在前面各章中作过介绍,需要进一步阐述的内容将安排在后面两章中.

2. 不同坐标系中小天体的运动方程

(1) 质心惯性坐标系中小天体的运动方程

质心惯性坐标系记作 C-XYZ,其原点在质心 C 上,XY 坐标面即两个

大天体相对运动平面，X 轴方向的选择，对应初始时刻 $t=t_0$ 时，两个大天体处于该坐标轴上，且指向大天体 P_1. 在此坐标系中，小天体和两个大天体的坐标矢量分别记为 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}_1'$ 和 $\boldsymbol{R}_2'$，于是小天体相对两个大天体的坐标矢量各为

$$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1',\quad \boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2'. \tag{7.5}$$

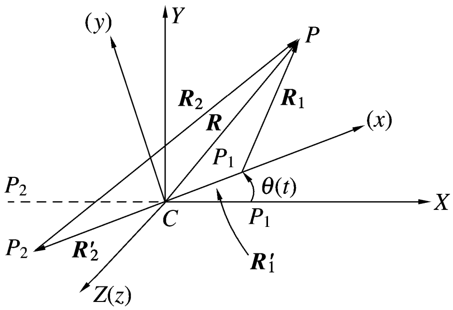

图 7.1 质心惯性系 C－XYZ 与质心旋转系 C－xyz

这些量的几何关系见图 7.1. 两个大天体相对质心 C 的运动为圆运动，其坐标矢量随时间 t 的变化关系为

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_1'=\begin{pmatrix}\mu\cos t\\ \mu\sin t\\ 0\end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{R}_2'=\begin{pmatrix}-(1-\mu)\cos t\\ -(1-\mu)\sin t\\ 0\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{7.6}$$

这里用到

$$t^*=t\cdot[T]=t/n,\quad \theta(t)=nt^*=t \tag{7.7}$$

t 为无量纲时间，这表示在新计算单位系统中，两个大天体的圆运动角速度 $\dot{\theta}(t)=1$.

在上述坐标系和计算单位的选择下，小天体的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{R}}=\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)^{\mathrm{T}}=-(1-\mu)\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3}-\mu\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2^3}. \tag{7.8}$$

这里 U 为

$$U=U(R_1,R_2)=\frac{1-\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}, \tag{7.9}$$

其中

$$\begin{cases} R_1 = |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_1'| = [(X-\mu\cos t)^2 + (Y-\mu\sin t)^2 + Z^2]^{1/2} \\ R_2 = |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_2'| = [(X+(1-\mu)\sin t)^2 + (Y+(1-\mu\cos t)^2 + Z^2]^{1/2} \end{cases}. \tag{7.10}$$

(2) 质心旋转坐标系中小天体的运动方程

质心旋转坐标系记作 $C-xyz$,该坐标系的旋转角速度就是两个大天体相对运动的角速度 $\dot{\theta}(t)$,即两个大天体一直处于 x 轴上,见图 7.1. 三个天体的坐标矢量各记为 $\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{r}_1'$和 $\boldsymbol{r}_2'$. 相应地小天体相对两个大天体的坐标矢量各为

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1', \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2', \tag{7.11}$$

其中

$$\boldsymbol{r}_1' = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2' = \begin{pmatrix} -(1-\mu) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

于是有

$$\begin{cases} r_1 = [(x-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} = R_1 \\ r_2 = [(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} = R_2 \end{cases}. \tag{7.13}$$

$\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的转换关系为

$$\boldsymbol{r} = R_z(t)\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} X\cos t + Y\sin t \\ -X\sin t + Y\cos t \\ Z \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

$$\boldsymbol{R} = R_z(-t)\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x\cos t - y\sin t \\ x\sin t + y\cos t \\ z \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

这里 $R_z(t)$和 $R_z(-t)$是旋转矩阵,定义如下:

$$\begin{cases} R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \\ R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},. \\ R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{7.16}$$

由(7.15)式可给出

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{R}}=\dot{R}_z(-t)\boldsymbol{r}+R_z(-t)\dot{\boldsymbol{r}},\\ \ddot{\boldsymbol{R}}=\ddot{R}_z(-t)r+2\dot{R}_z(-t)\dot{r}+R_z(-t)\ddot{\boldsymbol{r}},\end{cases}\tag{7.17}$$

其中

$$\begin{cases}R_z(-t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\\ \dot{R}_z(-t)=\begin{pmatrix}-\sin t & -\cos t & 0\\ \cos t & -\sin t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},,\\ \ddot{R}_z(-t)=\begin{pmatrix}-\cos t & \sin t & 0\\ -\sin t & -\cos t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{cases}\tag{7.18}$$

由上述转换关系,并利用旋转矩阵的性质:

$$R_z^{-1}(t)=R_z^{\mathrm{T}}(t)=R_z(-t),\tag{7.19}$$

即可由质心惯性坐标系中的运动方程(7.8)转换为小天体在质心旋转坐标系中的运动方程,即

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+2\begin{pmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\\ 0\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{r}}\right)^{\mathrm{T}}.\tag{7.20}$$

其中 $\Omega=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)+U(r_2,r_2)$, $\hfill(7.21)$

$$U(r_1,r_2)=\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}.\tag{7.22}$$

在限制性问题讨论中,为了某种需要,常将 Ω 表示为下列形式[1]:

$$\Omega=\frac{1}{2}[(x^2+y^2)+\mu(1-\mu)]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2},\tag{7.23}$$

进而可表示为一"对称"形式,即

$$\begin{aligned}\Omega&=\left\{\frac{1}{2}[(x^2+y^2+z^2)+\mu(1-\mu)]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right\}-\frac{1}{2}z^2\\ &=\left\{\frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right\}-\frac{1}{2}z^2.\end{aligned}\tag{7.24}$$

为了与习惯用法相吻合,下面的论述中,如不加说明,Ω 的形式即(7.23)式.

(3) P_1(或 P_2)坐标系中小天体的运动方程

为了对某种问题分析的方便,将坐标原点从质心 C 移至两个大天体之

一，如P_1（或 P_2）上. 将非旋转坐标系和旋转坐标系分别记为P_1-XYZ和 P_1-xyz，XY 坐标面仍为两个大天体相对运动的轨道平面，但 X 轴方向在起始时刻是由 P_1 指向 P_2，在相应的旋转坐标系 P_1-xyz 中，P_2 处于 x 轴的正方向上，见图 7.2. 不妨称此坐标系为 P_1和 P_2固连坐标系.

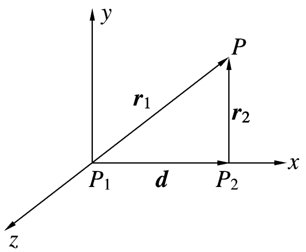

图 7.2　P_1-xyz 固连坐标系

在 P_1-XYZ 坐标系中，小天体相对 P_1 的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_1=-\frac{GM_1}{R_1^3}\boldsymbol{R}_1-GM_2\left(\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2^3}+\frac{\boldsymbol{D}}{D^3}\right),\tag{7.25}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}D\cos\theta\\D\sin\theta\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{D},\tag{7.26}$$

D 是 P_1 到 P_2 之间的距离，θ 是 P_2 绕 P_1 运转的角度，有 $\dot{\theta}=n$.

在固连坐标系 P_1-xyz 中，小天体的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1=-\frac{GM_1}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1-GM_2\left(\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}+\frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right)+n^2\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\0\end{pmatrix}+2n\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\-\dot{x}_1\\0\end{pmatrix}\tag{7.27}$$

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}D\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{d},\tag{7.28}$$

若采用前面的无量纲量，则该方程变为下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1=-\frac{1-\mu}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1-\mu\left(\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}+\frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right)+\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\-\dot{x}_1\\0\end{pmatrix},\tag{7.29}$$

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}x_1-1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}.\tag{7.30}$$

3. Jacobi 积分

方程(7.20)与(7.8)的主要差别是 $\Omega=\Omega(x,y,z)$不显含 t，于是由方程

(7.20)立即可得

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}=\frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\dot{z},$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(v^2)=\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{dt}},\\ v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2.\end{cases}\tag{7.31}$$

由此给出一积分:

$$2\Omega-v^2=C.\tag{7.31}$$

此即质心旋转坐标系中的 Jacobi 积分,这是到目前为止,圆型限制性三体问题中找到的唯一的一个积分.

尽管质心惯性坐标系中,因 U 显含 t,不能由上述途径直接给出一积分,但同是一个圆型限制性三体问题,当然应同样存在一积分,仅给出的途径不同而已,通过两个坐标系之间的坐标转换,即可给出质心旋转坐标系中的 Jacobi 积分在质心惯性坐标系中的相应形式.需要转换的三个量如下:

$$r_1,r_2;\quad x^2+y^2;\quad v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2.$$

而

$$\begin{cases}r_1=R_1,r_2=R_2,\\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=(R_z(t)\boldsymbol{R})\cdot(R_z(t)\boldsymbol{R}),\end{cases}\tag{7.33}$$

即

$$x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

但 $z=Z$,因此有

$$x^2+y^2=X^2+Y^2.\tag{7.34}$$

最后由(7.14)式给出

$$\dot{\boldsymbol{r}}=R_z(t)\dot{\boldsymbol{R}}+\dot{R}_z(t)\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}(\dot{X}+Y)\cos t+(\dot{Y}-X)\sin t\\ -(\dot{X}+Y)\sin t+(\dot{Y}-X)\cos t\\ \dot{Z}\end{pmatrix}.$$

于是有

$$\begin{cases}v^2=\dot{\boldsymbol{r}}^2=V^2+2(\dot{X}Y-X\dot{Y})+(X^2+Y^2),\\ V^2=\dot{\boldsymbol{R}}^2=\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2,\end{cases}\tag{7.35}$$

将上述关系代入 Jacobi 积分(7.32),即得该积分在质心惯性坐标系中的表达形式:

$$\begin{cases}2U-[V^2+2(\dot{X}Y-X\dot{Y})]=C-\mu(1-\mu),\\ U=\dfrac{1-\mu}{R_1}+\dfrac{\mu}{R_2}.\end{cases} \tag{7.36}$$

如果 Ω 采用原形式(7.21),则积分(7.30)右端的 $\mu(1-\mu)$ 将不出现,读者引用时请注意 Ω 采用的形式.

§7.3　圆型限制性三体问题的特解

虽然限制性三体问题解的存在性已有证明[1],但并不表明能将相应的解具体给出. 至今,只找到一个 Jacobi 积分,而且在一般情况下又不能归结为受摄二体问题,因此构造小参数幂级数解的方法通常也无法采用. 尽管如此,该问题却存在五个特解,习惯上称为平动解,即平衡解,而由这五个平衡解和上一节导出的 Jacobi 积分,可以了解小天体运动的一些规律和特征. 这些规律有它的实用价值,例如它可确定深空探测器的发射条件和提供其轨道运动的一些有关信息.

1. 五个特解——平动解(平衡解)

显然,在会合坐标系中讨论问题比较简单,相应的基本方程即(7.20)式. 所谓平衡解,即满足下列条件的特解:

$$x(t)\equiv x_0,\quad y(t)\equiv y_0,\quad z(t)\equiv z_0. \tag{7.37}$$

其中 x_0, y_0, z_0 由初始条件给定,相应地有

$$\begin{cases}\dot{x}=0,\quad \dot{y}=0,\quad \dot{z}=0,\\ \ddot{x}=0,\quad \ddot{y}=0,\quad \ddot{z}=0,\end{cases} \tag{7.38}$$

这表明由(7.37)式所确定的空间点是一平衡点(亦称平动点). 由方程(7.20)不难看出,在这种平衡点处应满足

$$\Omega_x=0,\quad \Omega_y=0\quad \Omega_z=0. \tag{7.39}$$

这里的 $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ 分别表示 $\Omega(x,y,z)$ 对 x,y,z 的偏导数. 条件(7.39)的具体形式为

$$\begin{cases}\Omega_x=x-\dfrac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3}-\dfrac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}=0,\\ \Omega_y=y\left(1-\dfrac{1-\mu}{r_1^3}-\dfrac{\mu}{r_2^3}\right)=0,\\ \Omega_z=-z\left(\dfrac{1-\mu}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}\right)=0,\end{cases} \tag{7.40}$$

因

$$\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\neq 0,$$

故要求

$$z=z_0=0. \tag{7.41}$$

即平衡点在 xy 平面上. 由 $z=0$,条件(7.40)将有下列两种情况:

$$y=0,\quad \begin{cases} x+\dfrac{1-\mu}{(x-\mu)^2}+\dfrac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0, \\ x+\dfrac{1-\mu}{(x-\mu)^2}-\dfrac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0, \\ x-\dfrac{1-\mu}{(x-\mu)^2}+\dfrac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0, \end{cases} \tag{7.42}$$

$$y\neq 0,\quad \begin{cases} 1-\dfrac{1-\mu}{r_1^3}-\dfrac{\mu}{r_2^3}=0 \\ x-\dfrac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3}-\dfrac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}=0. \end{cases} \tag{7.43}$$

对于第一种情况,方程(7.42)有三个实解:$x_1(\mu)$,$x_2(\mu)$,$x_3(\mu)$. 相应的三个平衡点在 x 轴上,分别记作 L_2,L_1,L_3,称为共线平衡点(亦称共线平动点),其分布见图 7.3.

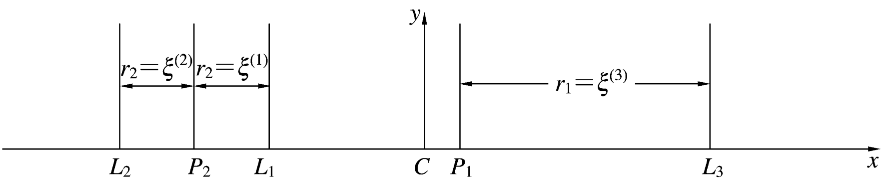

图 7.3　三个共线平衡点 L_1,L_2,L_3 与两个大天体 P_1,P_2 的相对位置

图中 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$ 各为平衡点 L_1 和 L_2 到大天体 P_2 的距离,$\xi^{(3)}$ 是平衡点 L_3 到大天体 P_1 的距离. 它分别由下列三个 μ 的幂级数表达[1]:

$$\xi^{(1)}=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}}+\cdots\right], \tag{7.44}$$

$$\xi^{(2)}=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}}-\cdots\right], \tag{7.45}$$

$$\begin{cases} \xi^{(3)}=1-\nu\left[1+\dfrac{23}{84}\nu^2+\dfrac{23}{84}\nu^3+\dfrac{761}{2352}\nu^4+\dfrac{3163}{7056}\nu^5+\dfrac{30703}{49392}\nu^6\right]+O(\nu^8), \\ \nu=\dfrac{7}{12}\mu. \end{cases} \tag{7.46}$$

相应的三个共线平衡解 $x_i(\mu)$ 即

$$x_1(\mu) = -(1-\mu) + \xi^{(1)}, \tag{7.47}$$

$$x_2(\mu) = -(1-\mu) - \xi^{(2)}, \tag{7.48}$$

$$x_3(\mu) = \mu + \xi^{(3)}, \tag{7.49}$$

这三个共线平衡解亦称为共线平动解.

当 $\mu=0$ 时,有

$$\begin{cases} x_1(\mu) = x_2(\mu) = -1, \\ x_3(\mu) = 1, \end{cases} \tag{7.50}$$

而当 $\mu=1/2$ 时,则有

$$\begin{cases} x_1(\mu) = 0, \\ x_2(\mu) = -1.198406, \\ x_3(\mu) = -x_2(\mu), \end{cases} \tag{7.51}$$

三个共线平衡解的位置 $x_i(\mu)$ 以及两个大天体的位置 $x(P_1)$ 和 $x(P_2)$ 在 x 轴上随 μ 值的变化,见图 7.4.

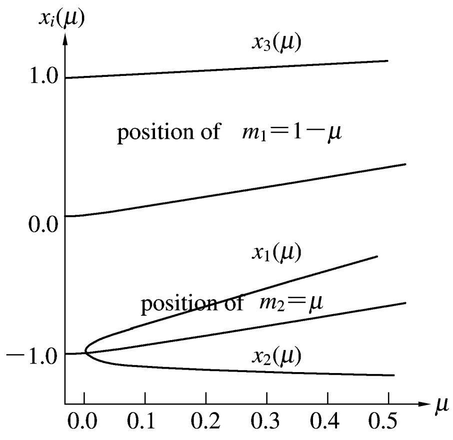

图 7.4　平衡解和大天体的位置随 μ 值的变化

对于后一组方程(7.43),其解为

$$r_1 = r_2 = 1. \tag{7.52}$$

这表示相应平衡点与两个大天体呈等边三角形,故称此平衡解为等边三角形解(亦称三角平动解). 该解有两个对称平衡点 L_4 和 L_5,各对应

$$\begin{cases} x_4 = x_5 = -\dfrac{1}{2} + \mu, \\ y_4 = +\sqrt{3}/2, \quad y_5 = -\sqrt{3}/2, \end{cases} \tag{7.53}$$

2. Jacobi 常数及其五个临界值 $C_i(i=1,2,\cdots,5)$

根据(7.32)**式表达的** Jacobi **积分**:

$$2\Omega(x,y,z)-v^2=C,$$

可给出五个平衡点 $L_i(i=1,2,\cdots,5)$**对应的** $C_i(\mu)$**值. 在** L_i **处,有**$v^2=0$(**注意,这是会合坐标系中的速度**),**因此给出平衡点对应的** C **值如下**:

$$C_i(\mu)=2\Omega(x_i(\mu),0,0),\quad i=1,2,3;\tag{7.54}$$

$$C_i(\mu)=2\Omega(x_i(\mu),y_i,0,),\quad i=4,5.\tag{7.55}$$

其中 $y_4=\sqrt{3}/2,y_5=-\sqrt{3}/2$. **对** L_1,L_2,L_3 **有**

$$C_i(\mu)=[x_i^2(\mu)+\mu(1-\mu)]+2\left[\frac{1-\mu}{|x_i(\mu)-\mu|}+\frac{\mu}{|x_i(\mu)+(1-\mu)|}\right],\tag{7.56}$$

对 L_4**和** L_5 **有**

$$C_4(\mu)\ =C_5(\mu)=3.\tag{7.57}$$

由(7.56)**和**(7.57)**两式和** $x_i(\mu)$**与** μ **值的关系可知,五个平衡点处对应的** Jacobi **积分常数值** $C_i(\mu)$**有如下关系**:

$$3=(C_4,C_5)\leqslant C_3(\mu)\leqslant C_2(\mu)\leqslant C_1(\mu)\leqslant 4.25,\tag{7.58}$$

它们各自随 μ **值的变化见图** 7.5.

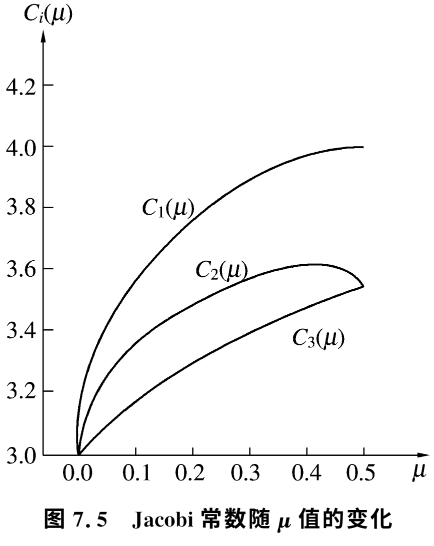

图 7.5 Jacobi 常数随 μ 值的变化

太阳—行星系统和地—月系统对应的圆型限制性三体问题,三个共线平动点的位置 $x_i(\mu)$**及其相应的** Jacobi **常数** $C_i(\mu)$,**分别列于表** 7.1 **和** 7.2

表 7.1　共线平动点的位置 $x_i(\mu)$

	μ	x_2	x_1	x_3
太阳—水星	0.00000017	−1.00382039	−0.99618898	1.00000007
—金星	0.00000245	−1.00937503	−0.99067832	1.00000102
—地 月	0.00000304	−1.01007019	−0.98999093	1.00000126
—火 星	0.00000032	−1.00476578	−0.99524867	1.00000013
—木 星	0.00095388	−1.06883052	−0.93236559	1.00039745
—土 星	0.00028550	−1.04605727	−0.95476098	1.00011896
—天王星	0.00004373	−1.02458081	−0.97572949	1.00001822
—海王星	0.00005177	−1.02601130	−0.97433032	1.00002157
—冥王星	0.00000278	−1.00977551	−0.99028227	1.00000116
地—月	0.01215057	−1.15568210	−0.83691521	1.00506264

表 7.2　共线平动点对应的 Jacobi 常数 $C_i(\mu)$

	μ	C_2	C_1	C_3
太阳—水 星	0.00000017	3.00013043	3.00013065	3.00000033
—金 星	0.00000245	3.00077756	3.00078083	3.00000490
—地 月	0.00000304	3.00089604	3.00090009	3.00000607
—火 星	0.00000032	3.00020261	3.00020304	3.00000065
—木 星	0.00095388	3.03844172	3.03971380	3.00190682
—土 星	0.00028550	3.01771636	3.01809709	3.00057092
—天王星	0.00004373	3.00521010	3.00536840	3.00008745
—海王星	0.00005177	3.00582087	3.00588991	3.00010354
—冥王星	0.0000278	3.00084481	3.00084851	3.00000556
地—月	0.01215057	3.18416325	3.20034388	3.02415006

这里说明两点：

（1）表 7.1 和表 7.2 中的数据是直接引用文献[1]中给出的结果，所用的有关各大行星和月球的基本数据和目前给出的数值可能有微小差别，故这里列出的数据只是为了说明所阐述内容. 读者如有需要，可直接根据前两段给出的方法，利用新的基本数据进行计算，但结果与表 7.1 和表 7.2 的数

据不会有明显差别.

(2) 关于三个共线平动点的排列,若按原有习惯[1],是按三个平动点的 x 坐标进行排列的,而在当今的某些领域,特别是航天界,是按“能量”大小排列的(这种排列有它的特点),将 L_1 和 L_2 的位置互换,即两个大天体之间的平动点称为 L_1,另一个为 L_2,本书的排列就是这样,请读者注意.

3. 零速度面与运动可能区域

(1) 零速度面及其变化

既然 Jacobi 积分(7.32)是圆型限制性三体问题的一个积分,因此,下列曲面

$$2\Omega(x,y,z)=C, \tag{7.59}$$

即为零速度面,在此曲面上小天体的运动速度为 0,积分常数由初始条件确定,有

$$C=2\Omega(x_0,y_0,z_0)-v_0^2, \tag{7.60}$$

零速度面的几何结构将随 Jacobi 常数 C 值的变化而变化. 为了便于看清这一变化,用零速度面在 xy 平面上的截线(零速度线)来描述,随 C 值的变化见图 7.6~7.9.

(2) 运动可能区域

上述四幅图(图 7.6~7.9)中,零速度面将整个空间分为两种区域,阴影部分对应 $v>0$,此即小天体运动的可能区域,而阴影外的另一部分则对应 $v<0$,此即运动的禁区,小天体不可能从 $v>0$ 的阴影区穿过零速度面而进入禁区(因 $v<0$ 是不可能的). 小天体在运动过程中若达到零速度面,那只可能沿零速度面的法线方向与其相接,而相接后又沿此法向返回原区域.

从上述四幅图的变化可以看出,当 C 值较大时,即图 7.6,零速度面将整个空间分为四个部分,而随着 C 值的减小,分别包围两个大天体 P_1 和 P_2 的零速度面逐渐增大、靠近、相接(在 L_1)、直至连通,即图 7.7;当 C 值再减小时,内部的零速度面扩大,与外部逐渐缩小的零速度面靠近、相接(在 L_2)而连通,即图 7.8;最后通过 L_3 进而变为图 7.9. 注意,由 Jacobi 积分可以看出,积分常数 C 值的减小就意味着在同一位置处速度的增大. 这表明,随着小天体初始速度的增大而使其运动的可能区域增大. 对于第一种情况,C 值大,v_0 小,小天体只能在大天体 P_1 或 P_2 附近的区域运动,而不可能从一个大天体附近运行到另一个大天体附近.

由上述讨论可知,小天体运动可能区域对应的连通性变化都是通过五个平衡点发生的,故将相应的 Jacobi 常数 C_i 称为临界值.

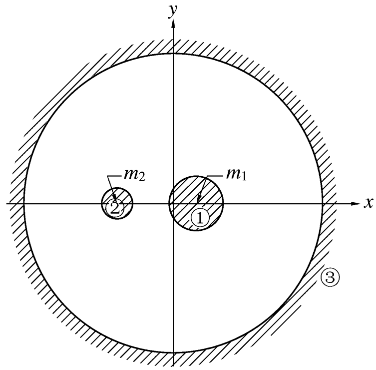

图 7.6　$C>C_1$ 的情况

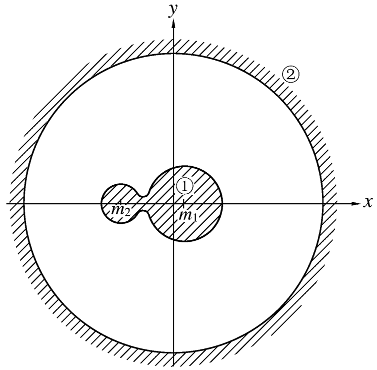

图 7.7　$C_2<C<C_1$ 的情况

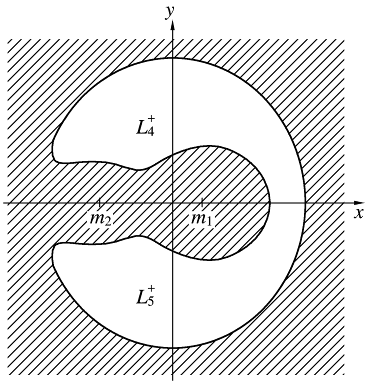

图 7.8　$C_3<C<C_2$ 的情况

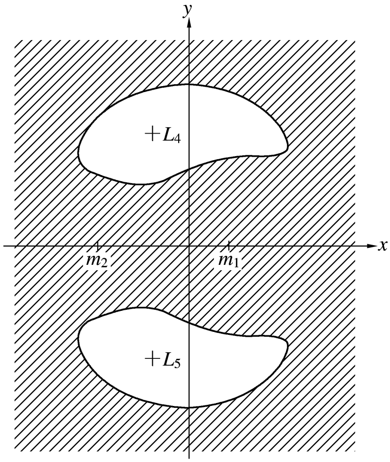

图 7.9　$C_4<C<C_3$ 的情况

4. 发射深空探测器的有关问题

以月球探测器为例，若月球绕地球运行的轨道为圆，那么，要从地球上发射一个月球探测器，在初始停泊轨道上，必须经变轨让其运行速度达到使相应的 C 值满足 $C_2<C<C_1$，它才有可能从地球附近飞向月球. 若探测器的轨道速度大到满足 $C_3<C<C_2$，则它不仅可以飞向月球，而且还可能从月球附近飞离地月系统，变为人造小行星. 下面介绍几个有关问题[2].

（1）引力范围与作用范围

关于深空探测器 P 的运动，往往是在两个大天体 P_1 和 P_2 共同作用下的运动. 由于探测器 P 在运动过程中可能会接近 P_1，也可能会接近 P_2，通

常不能处理成受摄二体问题,对应的是一个限制性三体问题.但是,由于探测器总是要接近被探测天体(例如 P_2),那么,当探测器 P 进入以 P_2 为中心的某一范围内,P_2 的引力作用将成为探测器运动的主要力源,在此范围内可近似地看成 P 相对 P_2 运动的一个二体问题,而在此范围外,则近似地看成 P 相对 P_1 运动的二体问题,这种近似将有助于对一个复杂问题进行初步分析.关于这一范围,有如下两种定义:

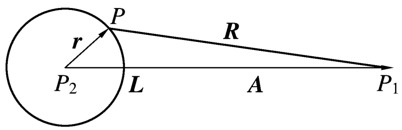

图 7.10　P_2 的引力范围与作用范围

1) 引力范围　见图 7.10,在 P_2 的引力范围边界上,P 受到两个大天体 P_1 和 P_2 的引力大小相等.有

$$\frac{GM_2}{r^2}=\frac{GM_1}{R^2}, \tag{7.61}$$

其中 M_1 和 M_2 分别为两个大天体 P_1 和 P_2 的质量.当 M_2/M_1 较小时,根据图 7.10 的几何构形,可将 L 点到 P_2 的距离近似地作为引力范围的半径,记作 r_1.由此根据(7.61)式容易给出

$$r_1=\sqrt{\mu}A,\quad \mu=M_2/M_1, \tag{7.62}$$

其中 $A=|\boldsymbol{A}|$,即两个大天体 P_1 与 P_2 之间的距离.

2) 作用范围　引用上述引力范围作简化不太合理,因在考虑 P 相对 P_2(或 P_1)的运动时,另一大天体 P_1(或 P_2)对该系统存在“摄动”作用.P 相对 P_1 和 P_2 的运动方程分别为

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{r}}=-\dfrac{GM_2}{r_2}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+GM_1\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\dfrac{\boldsymbol{A}}{A^3},\right)\\ \ddot{\boldsymbol{R}}=\dfrac{GM_1}{R_2}\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}\right)-GM_2\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\dfrac{\boldsymbol{A}}{A^3}.\right)\end{cases} \tag{7.63}$$

考虑两种作用力的平衡,即定义出作用范围,相应的边界由下式确定:

$$GM_1\left|\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\frac{\boldsymbol{A}}{A^3}\right|\left(\frac{GM_2}{r^2}\right)^{-1}=Gm_2\left|\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{A}}{A^3}\right|\left(\frac{GM_1}{R^2}\right)^{-1}. \tag{7.64}$$

同样以图 7.10 中 L 点的位置作为边界,在 M_2/M_1 较小时,给出作用范围的半径 r_2 为

$$r_2=\left(\frac{\mu^2}{2}\right)^{1/5}A\ \text{或}\ (\mu^2)^{1/5}A,\quad \mu=M_2/M_1. \tag{7.65}$$

这种作用范围(也可以称作引力作用范围)可以用来为深空探测器发射轨道设计提供初始选择,但在此基础上引入的双二体问题的拼接方法在当今计算条件下就没有什么实际意义了.

（2）希耳（Hill）范围

在讨论探测器（例如月球探测器）发射条件时，往往需要给出另一种范围，即必须同时考虑 P_1（地球）和 P_2（月球）的引力作用，才能确切地给出从地球上发射探测器能达到月球附近的最小速度，此即讨论的问题. 当初始条件（P 相对 P_1 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 和速度矢量 $\boldsymbol{v}_0$）确定的 Jacobi 常数 C 值分别为 $C>C_1$ 和 $C_2<C<C_1$ 时，它们各对应图 7.6 和图 7.7. 当 $C>C_1$ 时，探测器只能在地球（P_1）附近，即图 7.6，那么图 7.11 即临界状况. 此时围绕 P_1 和 P_2 的范围（阴影部分）即为希耳范围，L_1 即图 7.3 中给出的排列第二的共线平衡点. 若以 L_1 到 P_2 的距离作为 P_2 的希耳范围大小，记作 r_3，则由（7.45）式给出

$$r_3=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}A,\quad \mu=\frac{M_2}{M_1+M_2}. \tag{7.66}$$

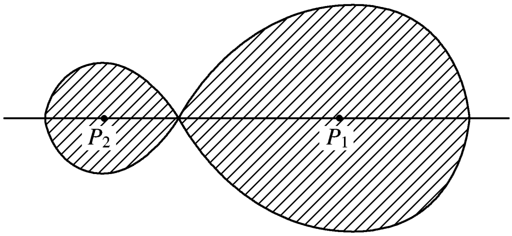

图 7.11　希尔范围

对于地—月系统，日—地系统和日—地月系统，相应的月球、地球和地月系作为各自系统中较小天体 P_2 的上述三个范围的数据列于表 7.3.

表中 A 为 P_1 与 P_2 之间的平均距离. 其他大行星的上述三个范围可分别由（7.62）式，（7.65）式和（7.66）式计算，这里不再具体列出.

表 7.3　三个系统的引力范围、作用范围和希耳范围

系统	引力范围 (10^4 km)	作用范围 (10^4 km)	希耳范围 (10^4 km)	A (10^4 km)
地—月	4.27	5.78	6.14	38.5327374
日—地	25.9	80.5	149.7	14959.7870
日—地月	26.1	80.9	150.3	14959.7870

（3）第二宇宙速度 $\boldsymbol{v}_2$

v_2 即脱离地球引力场的最小速度，也就是从地面发射探测器相对地球的抛物线（$a\rightarrow\infty$，$e=1$）速度，有

$$v_2=\sqrt{\frac{2GE}{a_e}}=\sqrt{2}v_1=11.1799\ \mathrm{km/s} \tag{7.67}$$

对于从地球上发射星际探测器而言，人们首先关心的是第二宇宙速度 v_2，从地球表面发射和从近地停泊轨道上发射，相应的 v_2 相差不大，例如从地面高度 200 km 处发射，相应的 v_2 为 11.0086 km/s. 但是，如果考虑到月球的引力加速作用，发射速度并不需要这么大，下段给出.

(4) 向月球发射探测器的最小速度

如果按地—月—探测器圆型限制性三体问题来考虑，在近地停泊轨道(假定为地面高度 200 km 的圆轨道)上"发射"探测器，并假定该停泊轨道经轨道调整已使其轨道平面与月球绕地运动的白道面重合. 那么，只要以停泊轨道半径为近地距 $r_p=a_e+200\ \mathrm{km}$，发射速度 $v_p=10.8746\ \mathrm{km/s}$，即可使相应的 Jacobi 常数 $C=C_1$，亦即发射速度比这一 v_p 值稍大一点，探测器即有可能经月球引力加速飞抵月球附近. 上述轨道的主要根数为

$$a=135893.7198\ \mathrm{km},\quad e=0.9516,$$

相应的轨道周期 $T_S=5^d.77$. 但是以这种轨道方式飞往月球，需绕地球运行若干圈后才有可能，因此所耗费的时间远比 T_S 长得多. 发射月球探测器通常不会采用这样的最小速度轨道，而实际问题往往使考虑能量消耗小(即最小能量轨道)和运行时间短这两个重要条件，关于这一问题后面第八章中将有论述.

§7.4 平动点附近的运动与晕轨道

就航天应用而言，必须了解平动解的稳定性，稳定或不稳定各具不同的应用价值.

1. 平动解的稳定性

记平动解为

$$x_0=a,\quad y_0=b,\quad z_0=0, \tag{7.68}$$

初始扰动记作

$$\Delta x=\xi,\quad \Delta y=\eta,\quad \Delta z=\zeta. \tag{7.69}$$

将 $x=x_0+\Delta x=a+\xi$, $y=y_0+\Delta y=b+\eta$ 和 $z=z_0+\Delta z=\zeta$ 代入运动方程得

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=\Omega_{xx}^0\xi+\Omega_{xy}^0\eta+\Omega_{xz}^0\zeta+O(2),\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=\Omega_{yx}^0\xi+\Omega_{yy}^0\eta+\Omega_{yz}^0\zeta+O(2),\\ \ddot{\zeta}=\Omega_{zx}^0\xi+\Omega_{zy}^0\eta+\Omega_{zz}^0\zeta+O(2),\end{cases} \tag{7.70}$$

其中 $O(2)$ 表示 ξ,η 和 ζ 的二阶以上(包括二阶)小量,$\Omega_{xx}^0,\Omega_{xy}^0,\cdots,\Omega_{zz}^0$ 表示 Ω 的两阶偏导数在平衡点上取值,有

$$\begin{cases}\Omega_x^0=0, \quad \Omega_y^0=0, \quad \Omega_z^0=0,\\ \Omega_{xy}^0=\Omega_{yx}^0,\\ \Omega_{xz}^0=\Omega_{zx}^0=\Omega_{yz}^0=\Omega_{zy}^0=0.\end{cases} \tag{7.71}$$

于是方程(7.70)变为

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=\Omega_{xx}^0\xi+\Omega_{xy}^0\eta,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=\Omega_{yy}^0\eta+\Omega_{yx}^0\xi,\\ \ddot{\zeta}=\Omega_{zz}^0\zeta.\end{cases} \tag{7.72}$$

方程(7.72)是常系数线性齐次方程组,ζ 分量可以分离掉,它对应一个简谐振动,即小天体不会远离 xy 平面. 下面只需讨论 xy 平面的情况,即方程组(7.72)前面两个关于 ξ,η 的扰动性质. 相应的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda^2-\Omega_{xx}^0 & -2\lambda-\Omega_{xy}^0\\ 2\lambda-\Omega_{xy}^0 & \lambda^2-\Omega_{yy}^0\end{vmatrix}=0. \tag{7.73}$$

这是关于特征量 λ 的四次代数方程,即

$$\lambda^4+(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)\lambda^2+(\Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0-\Omega_{xy}^{0\ 2})=0. \tag{7.74}$$

(1) 共线平动解(L_1,L_2,L_3)的情况

对于 $0<\mu<1/2$(任何一个限制性三体问题,除 $M_1=M_2$ 外均符合这一条件),有

$$\begin{cases}\Omega_{xx}^0=1+2C_0>0, \quad \Omega_{yy}^0=1-C_0<0, \quad \Omega_{zz}^0=-C_0<0,\\ C_0=\dfrac{(1-\mu)}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}.\end{cases} \tag{7.75}$$

$$\begin{cases}\Omega_{xy}^0=0, \quad \Omega_{xx}^0>0, \quad \Omega_{yy}^0<0,\\ \Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0-(\Omega_{xy}^0)^2<0.\end{cases} \tag{7.76}$$

其中 C_0 右端出现的 r_1,r_2 分别为三个共线平动点到两个大天体的距离,即 $r_1=|x_i-\mu|,r_2=|x_i+1-\mu|$. 于是方程(7.73)的四个特征根分别为

$$\begin{cases}\lambda_{1,2}=\pm S_1^{\ 1/2}\\ \lambda_{3,4}=\pm S_2^{\ 1/2}\end{cases}, \tag{7.77}$$

$$\begin{cases}S_1=\dfrac{1}{2}\{-(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)+[(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)^2-4\Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0]^{1/2}\},\\ S_2=\dfrac{1}{2}\{-(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)-[(4-\Omega_{xx}^0-\Omega_{yy}^0)^2-4\Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0]^{1/2}\}.\end{cases}$$

(7.78)

其中 $S_1>0, S_2<0$，故有一正实根，三个共线平动解是不稳定的.

（2）三角平动解（L_4, L_5）的情况

容易给出

$$\begin{cases} \Omega_{xx}(L_{4,5})=\dfrac{3}{4}, \Omega_{yy}(L_{4,5})=\dfrac{9}{4}, \\ \Omega_{xy}(L_4)=+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\mu-\dfrac{1}{2}\right), \\ \Omega_{xy}(L_5)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\mu-\dfrac{1}{2},\right) \end{cases} \tag{7.79}$$

此时特征方程(7.73)变为

$$\lambda^4+\lambda^2+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0. \tag{7.80}$$

令 $S=\lambda^2$，方程变为

$$S^2+S+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0, \tag{7.81}$$

解为

$$S_{1,2}=\frac{1}{2}\{-1\pm[1-27\mu(1-\mu)]^{1/2}\}. \tag{7.82}$$

相应的特征根 λ 如下：

$$\begin{cases} \lambda_1=+\sqrt{S_1}, \lambda_2=-\sqrt{S_1}, \\ \lambda_3=+\sqrt{S_2}, \lambda_4=-\sqrt{S_2}. \end{cases} \tag{7.83}$$

特征根的性质取决于(7.82)式中的 $d=1-27\mu(1-\mu)$，当

$$0<1-27\mu(1-\mu)<1$$

时，即

$$\mu(1-\mu)<\frac{1}{27} \tag{7.84}$$

时，特征根为两对纯虚根，此时三角平动解有线性稳定性，相应的 μ 的临界值 μ_0 满足

$$\mu_0(1-\mu_0)=\frac{1}{27}. \tag{7.85}$$

注意 $\mu<\dfrac{1}{2}$，故有

$$\mu_0=\frac{1}{2}(1-\sqrt{69}/9)=0.038520896504551\cdots, \tag{7.86}$$

上述线性稳定性条件为

$$0<\mu<\mu_0. \tag{7.87}$$

对太阳系中处理成限制性三体问题的各个系统，如日—木—小行星，日—地—月球，……，相应的 μ 值均满足条件(7.87).

对于 $\mu_0<\mu<\dfrac{1}{2}$ 的情况，显然是不稳定的. 至于 $\mu=\mu_0$，非线性稳定情况，以及椭圆型限制性三体问题中的三角平动解情况，读者如有兴趣请阅读文献[1]和[3].

2. 平动点附近的运动状况

在上述线性稳定性的讨论中，相应的扰动量构成的线性方程(7.70)，其解就可以描述平衡点附近的运动状况. 关于三角平动解，当条件(7.85)满足时，相应平衡点附近的运动即简单的周期运动，不再讨论. 这里主要讨论三个共线平动解的情况.

前面(7.77)式给出的四个特征根可写成下列形式：

$$\begin{cases}\lambda_{1,2}=\pm d_1,\\ \lambda_{3,4}=\pm d_2 i, \quad i=\sqrt{-1}.\end{cases} \tag{7.88}$$

这里 $d_1>0, d_2>0$，具体值为

$$\begin{cases}d_1=\left[\dfrac{1}{2}(9C_0^2-8C_0)^{1/2}-\left(1-\dfrac{C_0}{2}\right)\right]^{1/2}\\ d_2=\left[\dfrac{1}{2}(9C_0^2-8C_0)^{1/2}+\left(1-\dfrac{C_0}{2}\right)\right]^{1/2}\end{cases}. \tag{7.89}$$

在线性意义下，三个共线平动解是不稳定的，考虑高阶项后亦如此. 相应平动点附近的运动有如下形式：

$$\begin{cases}\xi=C_1e^{d_1t}+C_2e^{-d_1t}+C_3\cos d_2t+C_4\sin d_2t,\\ \eta=\alpha_1C_1e^{d_1t}-\alpha_1C_2e^{-d_1t}-\alpha_2C_3\sin d_2t+\alpha_2C_4\cos d_2t,\end{cases} \tag{7.90}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{2}(d_1-\Omega_{xx}^0/d_1),\\ \alpha_2=\dfrac{1}{2}(d_2+\Omega_{xx}^0/d_2).\end{cases} \tag{7.91}$$

上述 C_1,C_2,C_3 和 C_4 在这里是四个积分常数，由初始扰动条件 $t_0=0,\dot{\xi}_0,\dot{\xi}_0,\eta_0,\dot{\eta}_0$ 确定. 这表明，尽管小天体初始运动状态满足共线平动解的条件，但经小扰动后即会远离平动点，远离的快慢取决于 d_1 值的大小. 对于日—(地+月)—小天体系统，三个共线平动点 L_2, L_1, L_3 处的 d_1 值分别为 2.53265918，2.48431672 和 0.00282501，因此 L_1 和 L_2 点的不稳定性要比

L_3点的不稳定性强得多，也就是说L_1和L_2点附近的小天体要比L_3点附近的小天体的远离快得多.

虽然共线平动解是不稳定的，但可选取适当的初始扰动，使相应平动点附近的运动仍为周期运动或拟周期运动. 即选取这样的初始扰动ξ_0，$\dot{\xi}_0$和η_0，$\dot{\eta}_0$使$C_1=0$，$C_2=0$，从而使解(7.90)退化为周期解，相应的运动变为稳定的，这种稳定称为条件稳定.

在会合坐标系中，若小天体偏离$L_j(j=1,2,3)$，有一初始位置小扰动ξ_0和η_0，那么按下述条件加一速度小扰动$\dot{\xi}_0$和$\dot{\eta}_0$，即可使小天体在L_j附近摆动. 具体条件为

$$\begin{cases}\dot{\xi}_0=\left(\dfrac{d_2^2}{\alpha_2 d_2}\right)\eta_0,\\ \dot{\eta}_0=(-\alpha_2 d_2)\xi_0,\end{cases}\tag{7.92}$$

其中

$$\alpha_2 d_2=\frac{1}{2}(d_2^2+\Omega_{xx}^0).\tag{7.93}$$

在上述选择下，有$C_1=0$和$C_2=0$，相应的解退化为下列周期解：

$$\begin{cases}\xi=\xi_0\cos d_2 t+(\eta_0/\alpha_2)\sin d_2 t,\\ \eta=(-\alpha_2\xi_0)\sin d_2 t+\eta_0\cos d_2 t,\end{cases}\tag{7.94}$$

小天体在xy平面上相对共线平衡点L_j的运动状态实为一个椭圆曲线，即

$$\begin{cases}\dfrac{\xi^2}{A^2}+\dfrac{\eta^2}{B^2}=1,\\ A^2=\xi_0^2+(\eta_0/\alpha_2)^2,B^2=\alpha_2^2A^2.\end{cases}\tag{7.95}$$

尽管上述结果是由线性系统给出的，还是有一定实用意义的. 至于非线性情况，同样可找到相应的条件周期解[1,4].

3. 深空探测器定位在共线平动点附近运动的晕轨道以及有关借力加速问题

深空探测器就是一个人造小天体，如果需要定位在共线平动点附近，只要按照条件(7.92)进行轨控，它就可以被保持在平动点附近而不远离，在一定的工作寿命期间完成探测任务[4]. 不仅在xy平面上它是一个周期运动，而且在z方向也是一个周期振动，但是由于两个频率因子d_1和d_2一般不通约，其相对平动点的轨道实为一拟周期轨道，如果通约则为周期轨道. 这常被人们称为 Lissajous Trajectory 或 Halo Orbit(即晕轨道)，对于后者，即从x方向(视线方向)去看，在yz平面上的轨道投影围绕平动点像一种

晕. 对于线性系统中 d_1 和 d_2 不通约的情况,可以考虑扰动方程(7.70)右端的高阶项,以此来改变相应扰动解的状态,从而获得条件周期轨道,即晕轨道.

上述共线平动点的条件稳定性,可在深空探测中被利用. 而其不稳定性亦可在深空探测器的发射上得到利用,正如§7.3 中所阐述的共线平动点 $L_j(j=1,2,3)$附近亦是一种节能通道,发射深空探测器通过这些点飞往目标天体需要的能量最小,平动点的这种利用,也是一种借力加速机制.

§7.5　限制性二体问题与航天器编队飞行的动力学机制

我们要讨论的问题是,两个卫星绕地球运动(或两个探测器绕同一探测目标天体运动). 不妨假定地球是 P_1,中心卫星是 P_2,绕地球作圆运动,另一个伴飞卫星即小天体 P. 由于卫星质量之小,相距不太近时(如超过 100 m),它们之间的相互引力可略去,因此这对应上述限制性三体问题中的 $\mu=0$. 此时,限制性三体问题退化为限制性二体问题,且会合坐标系的坐标原点移至 P_1(即地心).

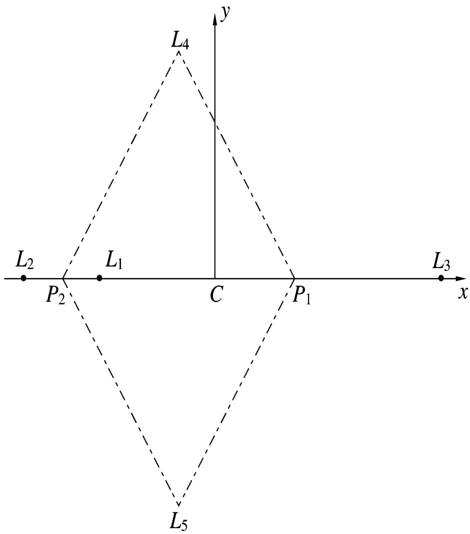

图 7.12　平动点的位置

对于这种限制性二体问题,在地心旋转坐标系(旋转角速度即中心卫星的绕飞角速度)中,伴飞卫星的运动方程变为如下形式:

$$\begin{cases}\ddot{x}-2\dot{y}=U_x=(x-\dfrac{x}{r^3}),\\ \ddot{y}+2\dot{x}=U_y=(y-\dfrac{y}{r_3}),\\ \ddot{z}=U_z=-\dfrac{z}{r^3}.\end{cases}\tag{7.96}$$

原来的五个平衡点 $L_i(i=1,2,3)$ **和** $L_i(i=4,5)$**,退化为下列状况:**

L_1 **和** L_2 **合一,位置为** $x=-1,\quad y=0;$

L_3 **的位置为** $x=+1,\quad y=0;$

L_4 **和** L_5 **的位置为** $x=-\dfrac{1}{2},\quad y=\pm\sqrt{3}/2.$

事实上,从方程(7.96)**不难看出** $U_x=0,U_y=0,U_z=0$ **对应**

$$z=0,\quad r=1,\tag{7.97}$$

即在 xy **平面上,以地球**(P_1)**为中心的单位圆**(r **即中心卫星的圆轨道半径**)**上每个点都是平衡点,这一点并不难理解. 回到上述五个相应的平衡点,略去证明,结论是五个平衡点** L_i **和** L_j **均是不稳定的. 关于** L_4 **和** L_5 **的性质发生变化也是不难理解的,此时另一保持其平衡的力源** P_2 **实际上已不存在,因** $\mu=0$.

为了与星上轨道坐标系相吻合,我们仍旧关心的是三个与伴飞有关的共线平衡点. 尽管它们是不稳定的,但在线性意义下,与限制性三体问题一样,其附近小领域内的运动,仍然可以维持一种周期运动,即条件周期运动.

在 $L_i(i=1,2,3)$ **位置上给一小扰动,扰动坐标分量各记作** ξ,η,ζ**,代入方程**(7.96)**得**

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=U_{xx}\xi+U_{xy}\eta+U_{xz}\zeta+O(0),\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=U_{yx}\xi+U_{yy}\eta+U_{yz}\zeta+O(2),\\ \ddot{\zeta}=U_{zx}\xi+U_{zy}\eta+U_{zz}\zeta+O(2),\end{cases}\tag{7.98}$$

其中 $O(2)$ **表示高阶小量. 不难算出,在** $L_i(x=\pm1,y=0,z=0)$ **处有**

$$\begin{cases}U_{xx}=3,\quad U_{xy}=0,\quad U_{xz}=0,\\ U_{yx}=0,\quad U_{yy}=0,\quad U_{yz}=0,\\ U_{zx}=0,\quad U_{zy}=0,\quad U_{zz}=-1.\end{cases}\tag{7.99}$$

代入方程(9.97)**,略去高阶项,即得** L_i **附近小扰动方程线性化的结果如下:**

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=3\xi,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=0,\\ \ddot{\zeta}+\ \xi=0,\end{cases}\tag{7.100}$$

此即前面第 6 章§6.4 中提到的伴飞的 C–W 方程. 因两卫星之间无引力作用,中心卫星可以是虚拟的,是否存在无所谓,只要旋转坐标系按相应虚拟卫星的圆轨道角速度旋转即可. 若把上述平衡点放在单位圆上的$x=0$, $y=\pm 1$处,其附近小扰动运动方程的线性化形式即

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=0,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=3\eta,\\ \ddot{\zeta}+\zeta=0,\end{cases}\tag{7.101}$$

它对应

$$U_{xx}=0,\quad U_{yy}=3,\quad U_{zz}=-1.\tag{7.102}$$

根据上述讨论可知,尽管两卫星之间无任何动力学联系,但是只要他们相距较近,仍然可由限制性二体问题中平衡点附近的运动这一动力学机制来理解它们之间相对构形形成的原因. 无论是方程(7.100)还是(7.101),ζ 分量可与问题分离,对应一谐振动,即伴飞卫星在 xy 平面上下作小振动. 而对 ξ,η 两分量,相应的特征方程为

$$\lambda^4+\lambda^2=0.\tag{7.103}$$

存在一对重根 $\lambda_{1,2}$ 和一对共轭虚根 $\lambda_{3,4}$,即

$$\lambda_{1,2}=0,\quad \lambda_{3,4}=\pm\sqrt{-1}.\tag{7.104}$$

相应的运动解为

$$\begin{cases}\xi=C_1+C_2t+C_3\cos t+C_4\sin t,\\ \dot{\xi}=C_2-C_3\sin t+C_4\cos t,\\ \eta=\dfrac{3}{2}C_1t-\dfrac{3}{4}C_2t^2-2C_3\sin t+2C_4\cos t,\\ \dot{\eta}=-\dfrac{3}{2}C_1-\dfrac{3}{2}C_2t-2C_3\cos t-2C_4\sin t.\end{cases}\tag{7.105}$$

可选择适当的初始条件,使 $C_1=0$,$C_2=0$,构成一个条件周期解,具体的初始条件为

$$t=t_0:\ \xi_0,\eta_0,\dot{\xi}_0=\eta_0/2,\dot{\eta}_0=-2\xi_0,\zeta_0,\dot{\zeta}_0.\tag{7.106}$$

此时小扰动运动的解为如下“拟”周期解:

$$\begin{cases}\xi=\xi_0\cos t+(\eta_0/2)\sin t,\quad \dot{\xi}=-\xi_0\sin t+(\eta_0/2)\cos t,\\ \eta=-2\xi_0\sin t+\eta_0\cos t,\quad \dot{\eta}=-2\xi_0\cos t-\eta_0\sin t,\\ \zeta=\zeta_0\cos t+\dot{\zeta}_0\sin t,\quad \dot{\zeta}=-\zeta_0\sin t+\dot{\zeta}_0\cos t,\end{cases}\tag{7.107}$$

在(x,y)平面上的构形为一椭圆,如果初始扰动 $\dot{\zeta}_0$ 满足下列条件:

$$\dot{\zeta}_0=\pm(\eta_0/2\xi_0)\zeta_0, \tag{7.108}$$

那么在(y,z)平面上的构形亦为一椭圆.相应的上述两个椭圆方程如下:

$$\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}=1, \tag{7.109}$$

$$\frac{\eta^2}{C^2}+\frac{\zeta^2}{D^2}=1. \tag{7.110}$$

其中

$$A^2=\xi_0^2+\eta_0^2/4,\quad B^2=4A^2, \tag{7.111}$$

$$C^2=4A^2=B^2, D^2=(4\zeta_0^2/\xi_0^2)^{A^2}. \tag{7.112}$$

上述条件周期运动,即卫星编队飞行或伴飞的一种动力学机制,但两星相距不能大,否则方程(7.98)右端略去的高阶项 $O(2)$很快即起作用,若仍按条件(7.108)控制,伴飞的构形会遭破坏,此时必须考虑高阶项,相应的条件(7.108)将会改变.从上述讨论不难看出,卫星编队构形,实际上就是二体问题对应的运动不稳定性在条件(7.108)约束下的结果,只是直接从二体问题对应的运动不稳定性着手讨论比较麻烦,而从限制性三体问题过渡到退化后的限制性二体问题,从而获得编队构形,显得很自然.

注意,限制性三体问题中共线平动点附近的运动,对应的特征频率 $d_1\neq0$(见前面第二段给出的数据),而上述卫星编队问题中,$d_1=0$,前者对 t 而言是指数不稳定(或称强不稳定),而后者则是线性不稳定(或称弱不稳定).因此,这两种情况所需要的轨控能量有较大差别,对于卫星编队飞行,需要的轨控能量相对而言要小得多[6].

参 考 文 献

[1] Szebehely, V. Theory of Orbits. Academic Press, New York and London, 1967

[2] 刘林. 航天器轨道理论(第十六章). 北京:国防工业出版社,2000

[3] Siegel , C. L. & Moser, J. K.. Lectures on Celestial Mechanics(chapter 3). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York,1971

[4] Gómez, G. etc. Dynamics and Mission Design Near Libration Points, Vol. Ⅲ Adavanced Methods for Collinear Points. World Scientific, Singapro. New Jersey. London. Hong Kong, 2001

[5] 刘林,侯锡云,王建峰,王海红. 关于空间探测器定位在太阳系中特殊点上的有

关问题．天文学进展，2005,23(2)：

[6] **刘林，王海红，马剑波．关于星座小卫星的编队飞行问题．天文学报**，2004,45(1)：57～67

LIU Lin，Wang Haihong，MA Jian-bo. On the Formation Flying of Satllite Constellations. Chin. Astro. Astrophy.，2004,28(2)：188～199

第 8 章　轨道机动与轨道过渡

§ 8.1　脉冲式轨道机动与轨道过渡

轨道机动或轨道过渡有两种方式，其中第一种就是传统的大推力脉冲式的变轨方式. 脉冲式的大推力推进器多采用化学推进剂，推进器的排气速度小、推力大、工作时间短，在轨道计算中通常是将这种脉冲式的推力（实为由推力获得的加速度）处理成瞬间的速度变化 Δv.

1. 脉冲式变轨的基本原理

无论是航天器运行过程中的轨道调整或向目标轨道过渡的轨道转移，都涉及到轨道改变问题，即给一速度增量 Δv，从而获得所需的轨道变化. 因此首先要了解各轨道根数（$a, e, \cdots$）与瞬时冲量（或一速度增量 Δv）之间的关系. 前面第二章 § 2.6 中已就二体问题简单介绍了各轨道根数随速度（包括大小和方向）变化的状况. 本章将在受摄运动模型下阐述这类问题，包括大推力的脉冲式变轨和小推力持续式变轨，这一节讨论的是脉冲式变轨问题. 第三章 § 3.3 和 § 3.4 中已分别给出了椭圆运动和双曲线运动的受摄运动方程. 本节具体讨论椭圆轨道的变轨问题，涉及的受摄运动方程有两种形式，即以（S, T, W）表达的（3.73）式，和以（U, N, W）表达的（3.74）式.

对于大推力脉冲式变轨，因作用时间间隔 Δt 很短，可以近似处理成一个瞬时过程，以短暂的间隔 Δt 和相应的根数变化 $\Delta\sigma$ 代替 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\sigma$. 机动力（相当于一种摄动源）提供的加速度可以作为一种摄动加速度，通过间隔 Δt 内的速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 来表达，有

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{v} &= (\Delta v_r, \Delta v_\theta, \Delta v_W) \\ &= (\Delta v_U, \Delta v_N, \Delta v_W)\end{aligned} \tag{8.1}$$

和

$$\begin{cases}\Delta v_r = S\Delta t, \quad \Delta v_\theta = T\Delta t, \quad \Delta v_W = W\Delta t, \\ \Delta v_U = U\Delta t, \quad \Delta v_N = N\Delta t, \quad \Delta v_W = W\Delta t.\end{cases} \tag{8.2}$$

其中速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的切向(即速度方向)分量是 Δv_U 常记作 Δv,与前面第 2 章 §2.8 中的表达一致,以下就将 Δv_U 记作 Δv,注意,它区别于 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的模 $|\Delta \boldsymbol{v}|$. 在上述处理下,即可由受摄运动方程(3.73)和(3.74)给出在脉冲式变轨中轨道根数 σ 的变化 $\Delta\sigma$ 与速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 之间的关系,即

$$\begin{cases}\Delta a = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[e\sin f\Delta v_r + (1+e\cos f)\Delta v_\theta], \\ \Delta e = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}[\sin f\Delta v_r + (\cos f + \cos E)\Delta v_\theta], \\ \Delta i = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\Delta v_W, \\ \Delta\Omega = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\Delta v_W, \\ \Delta\omega = -\cos i\Delta\Omega + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-\cos f\Delta v_r + \left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\Delta v_\theta\right], \\ \Delta M = -\dfrac{1-e^2}{nae}\left[-\left(\cos f - 2e\dfrac{r}{p}\right)\Delta v_r + \left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\ \Delta v_\theta\right],\end{cases} \tag{8.3}$$

和

$$\begin{cases}\Delta a = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\Delta v, \\ \Delta e = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2(\cos f+e)\Delta v - \\ \qquad \sqrt{1-e^2}\sin E\Delta v_N], \\ \Delta i = \dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\Delta v_W, \\ \Delta\Omega = \dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\Delta v_W, \\ \Delta\omega = -\cos i\Delta\Omega + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\times \\ \qquad [2\sin f\Delta v + (\cos E+e)\Delta v_N], \\ \Delta M = -\dfrac{1-e^2}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[\left(2\sin f + \dfrac{2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)\Delta v + \right. \\ \qquad \left.(\cos E - e)\Delta v_N\right].\end{cases} \tag{8.4}$$

上述受摄运动方程中的 $u=f+\omega$. 注意，原受摄运动方程 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ 的右端有 n 这一项，对于瞬间获得速度增量的变轨方式，因无“过程”，右端 n 项与脉冲式变轨无关，后面 §8.2 中阐述的小推力持续式变轨中将涉及到该项.

按上述处理，即可根据速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 得知轨道根数的变化 $\Delta\sigma(\Delta a,\Delta e,\cdots,\Delta M)$. 若给一特殊的速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$：

$$\Delta\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\Delta v_U\\ \Delta v_N\\ \Delta v_W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta v\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\tag{8.5}$$

那么根据方程(8.4)和瞬时椭圆的相应关系很容易给出 a，e 的变化 Δa 和 Δe，即

$$\Delta a=\frac{2a^2}{\mu}(v\Delta v),\tag{8.6}$$

$$\Delta e=\left[\frac{2}{ve}\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{rv^2}{\mu}-1\right)\right]\Delta v,\tag{8.7}$$

这与前面第 2 章 §2.8 中直接在二体问题意义下导出的关系式(2.205)和(2.206)是一致的. 推导(8.6)和(8.7)式利用到下列瞬时椭圆关系式：

$$\begin{cases}v^2=\mu\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{\mu}{p}(1+2e\cos f+e^2),\\ \dfrac{rv^2}{\mu}-1=1-\dfrac{r}{a},\\ \cos f+e=\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{p}{r}\right)\left(1-\dfrac{r}{a}\right).\end{cases}\tag{8.8}$$

事实上，无论是轨道调整，还是作为由初始轨道向目标轨道过渡的转移过程，主要涉及如何由脉冲能量(归结为速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$)去改变轨道的大小和形状(a 和 e)，轨道面的空间定向(i 和 Ω)以及拱线的指向(ω). 因此，上述关系式(8.3)和(8.4)，还有(8.6)式，就轨道而言，它们都是脉冲式变轨的理论基础. 从(8.6)式不难看出，在近地点处(此处速度 v 极大)变轨，所需能量(即 Δv)极小. 从(8.3)或(8.4)式中的 Δi 和 $\Delta\Omega$ 的表达式可以看出，对于轨道平面的改变，只依赖速度增量的轨道面法向分量 Δv_W，而且在 $u=0$ 或 $180°$时(即处于升交点或降交点处)，改变倾角 i 最节省能量，对轨道面的进动($\Delta\Omega$)而言，在 $u=90°$或 $270°$处变轨最节省能量.

前面的讨论尽管是对椭圆轨道所作的，但对双曲线轨道亦有类似的结果，讨论方法相同，只要将受摄运动方程(3.73)和(3.74)改为双曲线运动的受摄运动方程(3.82)和相应的以(U,N,W)表达的形式即可，同样可以获得与椭圆轨道类似的轨道机动遵循的关系式. 但必须说明一点，上述结果的获

得,不管是(8.3)和(8.4)式,还是(8.6)和(8.7)式,只是定性准确地表明了轨道根数的变化与瞬时脉冲(以 Δv 体现)之间的关系,而从定量上来看,这些结果只是一个近似,它仅适用于 $\Delta\sigma$ 为小量的情况,即无论是简单的轨道调整还是轨道过渡,只有变轨前后的轨道相差较小时,才能引用这些结果. 如果轨道相差(即 $\Delta\sigma$)较大时,只能根据变轨处对应两个不同轨道速度给出冲量(Δv)要求,下一段将会讨论这一问题.

2. 霍曼(W. Hohmann)转移轨道

航天器从初始轨道(或停泊轨道)向目标轨道的过渡,就是一种轨道转移,它由轨道机动来完成,即变轨. 轨道转移有多种形式,按变轨(由脉冲式轨道机动实现)次数分为一次、两次或多次变轨实现,最终完成过渡. 只有在初始轨道和目标轨道相交时,才有可能用一次变轨完成转移. 初始轨道和目标轨道可以分别为圆轨道、椭圆轨道,甚至是双曲线轨道,它们两者之间可以共面的,也可以是不共面的、相交的或不相交的. 转移轨道可以是椭圆,为了节省时间也可以是双曲线. 在轨道过渡中,如何选择适当的转移轨道,往往是寻求能量最省的过渡形式,但这是一个理论问题,在具体的航天任务中,需要综合考虑能量消耗大小、飞行时间长短、制导精度要求高低以及测量和控制是否方便等条件,从中选择一种可以实现的最佳过渡方式. 这里就变轨原理阐述轨道过渡中的转移过程,并以一种节能的霍曼转移轨道为例来介绍轨道过渡的实现.

考虑一种较简单的轨道过渡:初始轨道和目标轨道为两个共面的同心(中心天体的质心)圆轨道,见图 8.1. 图中轨道 1 和轨道 2 各为低圆轨道和高圆轨道,无论是从低圆轨道过渡到高圆轨道,还是从高圆轨道过渡到低圆轨道,在限定只用两次脉冲推力的情况下,采用与两个圆轨道相切的椭圆轨道(见图 8.1 中通过切点 1 和切点 2 的转移轨道)过渡,耗费能量最小,这是霍曼在 1925 年首先提出的,人们称其为霍曼过渡,相应的轨道即称为霍曼转移轨道.

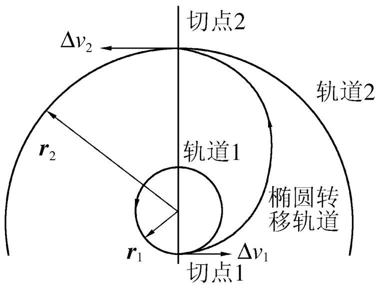

图 8.1　霍曼转移轨道

事实上,上述过渡就是两次改变轨道半长径的转移过程. 两个圆轨道的半长径各为 r_1 和 r_2,如果从低圆轨道(作为初始轨道)向高圆轨道(作为目标轨道)过渡,则霍曼转移轨道的半长径 a_1 应变为

$$a_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \tag{8.9}$$

相应的半长径改变量为

$$\Delta a_1 = a_1 - r_1 = \frac{1}{2}(r_2 - r_1). \tag{8.10}$$

由此在切点 1 处点火脉冲，取得相应的速度增量 Δv_1 即可. 如果根据(8.6)式，有

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\right], \tag{8.11}$$

而准确的 Δv_1 值应由切点 1 处对应的变轨前后的速度差给出，即

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= \sqrt{\mu}\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_1}\right)^{1/2} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left[\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}\right)^{1/2} - 1\right].\end{aligned} \tag{8.12}$$

两种结果之差为

$$\sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left\{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\right] - \left[\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}\right)^{1/2} - 1\right]\right\},$$

这种差别还是明显的，当 $r_2 = 2r_1$ 时，括号“{ }”内的差别达 $0.095 \approx 10\%$. 而只有当 r_2 与 r_1 相差较小时，两种结果才可能在一定精度意义下相符. 例如，一个 $a = 7000$ km 的低圆轨道若在轨道机动过程中，半长径调高 70 km，即 $r_2 = 1.01r_1$，则上述括号{ }内的差别只有 1.6×10^{-5}. 不难看出，上一段给出的结果(8.6)式，不仅有定性的意义，而且在轨道调整中亦有定量应用的价值.

上述霍曼过渡的第二次变轨是在切点 2 处点火脉冲，取得相应的速度增量 Δv_2，使其变为半径为 r_2 的目标圆轨道. 根据切点 2 处变轨前后的速度差给出

$$\begin{aligned}\Delta v_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\mu}\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_1}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\left[1 - \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2}\right)^{1/2}\right].\end{aligned} \tag{8.13}$$

根据同样的原理，若要从高轨向低轨过渡，则需两次减速，是上述过程的逆向转移. 这种霍曼转移轨道虽然节能，但飞行时间和飞行路线较长，因此过渡的最佳选择应根据具体问题作综合考虑.

如果初始轨道和目标轨道均为椭圆，则还涉及到拱线(ω)的改变问题. 如果两轨道不共面，则还需考虑轨道面(i, Ω)的改变问题，但脉冲(包括推

力的大小和方向)的基本依据仍然是上一段的结果(8.3)和(8.4),这里不再一一具体阐明.

§8.2 小推力持续式变轨

近年来随着小推力发动机制造技术的成熟,越来越多的航天任务特别是深空探测任务采用不同于大推力脉冲式的小推力持续式变轨,2003 年 9 月欧空局发射的月球探测器 SMART-1 就是一个成功的例子. 脉冲式的大推力可使航天器在较短时间内获得较高的速度(加速度大),但所需要的推进剂多,从而减少了有效载荷. 小推力推进器则克服了上述缺点,推进器排气速度大,推力小(加速度小),可长时间连续工作几十天甚至几年. 航天器的加速过程虽然缓慢,但发动装置小,并可将更多的有效载荷送入轨道,而且通过长期的连续加速,航天器仍然可以获得很高的速度. 经过足够长的时间,可以获得比脉冲式变轨更高的速度. 这些特点都更加适合目前深空探测的需要. 对于行星际飞行(尤其是木星以远),相比脉冲式的轨道过渡可以大大缩短飞行时间.

小推力持续式变轨过程可以看成是一个连续过程,即使小推力的过程也有间隙,但只要是均匀喷气,仍可处理成一个平均化的连续过程,而且可以将小推力看成一种机动力的摄动作用,具体摄动量级将视不同的变轨过程和小推力的大小而定. 相应的分析解可以提供小推力变轨过程中航天器轨道变化的一些规律. 尽管这种小推力摄动分析解仅在持续时间不长的情况下是适用的,而对于星际飞行这样的长时间过程和具体的力学背景(已不是简单的受摄二体问题),分析解并不完全适用,但对于持续时间不太长的卫星轨道机动过程,了解其轨道变化规律,还是有必要给出相应的分析解. 至于长时间的小推力轨道过渡的有关问题,将视具体的动力学模型而采用相应的分析.

考虑均匀加速过程,并分两种情况给出均匀喷气过程中轨道的变化规律:一是径向、横向和轨道面法向均有加速过程,另一种是仅在卫星运动方向上有加速过程. 前者有

$$S=\text{const},\quad T=\text{const},\quad W=\text{const} \tag{8.14}$$

而后者只有 U 分量(即切向分量),且

$$U=\text{const}, \tag{8.15}$$

两种形式的受摄运动方程即第三章给出的(3.73)和(3.74)式. (S,T,W)型的形式如下:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[Se\sin f+T(1+e\cos f)],\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}[S\sin f+T(\cos f+\cos E)],\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\dfrac{1}{\sin i}W,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f+T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right],\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{1-e^2}{nae}\left[-S\left(\cos f-2e\dfrac{r}{p}\right)+T\left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin f\right].\end{cases}\tag{8.16}$$

(U,N,W)型的形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}U,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2(\cos f+e)U-\sqrt{1-e^2}\sin EN],\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}}\dfrac{1}{\sin i}W,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\cos i\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{dt}+\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\times\\ \qquad[2\sin fU+(\cos E+e)N],\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n-\dfrac{1-e^2}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[\left(2\sin f+\dfrac{2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)U+\right.\\ \qquad\left.(\cos E-e)N\right].\end{cases}\tag{8.17}$$

1. 喷气加速度(S,T,W)三分量导致的卫星轨道变化

当 S,T,W 三分量均为常数时，上述方程(8.16)**的右函数 $f(\sigma,t;\varepsilon)$用求平均值的方法即可将其分解成 f_c,f_l 和 f_s 三个部分，显然，i 和 Ω 的右函数无长期部分，即**

$$(f_i)_c=0,\quad (f_\Omega)_c=0.$$

因此，这种轨道机动过程中，轨道平面无长期变化.

由于相应的$(f_i)_L$，$(f_\Omega)_L$，$(f_\omega)_L$ 不为 0，有积分降阶问题（除非小推力摄动比中心天体扁率摄动小得多），不能采用平均根数法，只能采用拟平均根数法，即解的构造形式应为

$$\sigma(t) = \bar{\sigma} + \sigma_S(t), \tag{8.18}$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}_0 + (\delta\bar{n} + \sigma_C)(t - t_0) + \Delta\sigma_L(t), \\ \Delta\sigma_L(t) = \sigma_L(t) - \sigma_L(t_0), \end{cases} \tag{8.19}$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma(t_0) - [\sigma_S(t_0)], \tag{8.20}$$

(8.19)式中的 $\delta\bar{n}$在第 4 章中已有说明，即对应平近点角 M 的 0 阶长期项.

长期项 $\sigma_C(t-t_0)$的变率 σ_C 的表达式如下：

$$a_C = 2\sqrt{1-e^2}(T/n), \tag{8.21}$$

$$e_C = -\frac{3\sqrt{1-e^2}}{2a}e(T/n), \tag{8.22}$$

$$i_C = 0, \tag{8.23}$$

$$\Omega_C = 0, \tag{8.24}$$

$$\omega_C = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a}(S/n), \tag{8.25}$$

$$M_C = -\left(\frac{3}{a}\right)(S/n) - \frac{3n}{4a}a_C(t-t_0). \tag{8.26}$$

右端出现的根数 a, e, i 及 n 均为 $\bar{a}_0$，$\bar{e}_0$，$\bar{i}_0$ 和$\bar{n}_0 = \sqrt{\mu}\,\bar{a}_0^{(-3/2)}$.

长周期变化项 $\Delta\sigma_L(t)$的表达式为

$$\Delta a_L(t) = 0, \tag{8.27}$$

$$\Delta e_L(t) = 0, \tag{8.28}$$

$$\Delta i_L(t) = -\frac{3}{2a\sqrt{1-e^2}}e\cos\bar{\omega}_0(W/n)(t-t_0), \tag{8.29}$$

$$\Delta\Omega_L(t) = -\frac{3}{2a\sqrt{1-e^2}\sin i}e\sin\bar{\omega}_0(W/n)(t-t_0), \tag{8.30}$$

$$\Delta\omega_L(t) = -\cos i\Delta\Omega_l(t), \tag{8.31}$$

$$\Delta M_L(t) = 0. \tag{8.32}$$

各式右端出现的根数 a, e, i 和 n，其定义同前.

短周期项 $\sigma_S(t)$如下：

$$a_S = \frac{2}{n^2}\left[-S\,e\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) + T\sqrt{1-e^2}\,e\sin E\right], \tag{8.33}$$

$$e_{\mathrm{S}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 a}\left\{-S\sqrt{1-e^2}\left(\cos E+\frac{e}{2}\right)+\right.$$

$$\left.T\left[\left(2-\frac{3}{2}e^2\right)\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E\right]\right\}, \tag{8.34}$$

$$i_{\mathrm{S}} = \frac{W}{n^2 a\sqrt{1-e^2}}\left\{\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E\right]\cos\omega+\right.$$

$$\left.\sqrt{1-e^2}\left[\cos E-\frac{e}{4}\cos 2E\right]\sin\omega\right\}, \tag{8.35}$$

$$\Omega_{\mathrm{S}} = \frac{W}{n^2 a\sqrt{1-e^2}\sin i}\left\{\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E\right]\sin\omega-\right.$$

$$\left.\sqrt{1-e^2}\left[\cos E-\frac{e}{4}\cos 2E\right]\cos\omega\right\}, \tag{8.36}$$

$$\omega_{\mathrm{S}}(t) = -\cos i\,\Omega_{\mathrm{S}}(t)-\frac{1}{n^2 ae}\{S(1-e^2)^{3/2}\sin E+$$

$$T[(2-e^2)\cos E-\frac{e}{4}\cos 2E]\}, \tag{8.37}$$

$$M_{\mathrm{S}}(t) = \frac{1}{n^2 ae}\left\{S\left[\left(1+3e^2-\frac{3}{2}e^4\right)\sin E-\frac{5}{4}e^3\sin 2E\right]+\right.$$

$$\left.T\sqrt{1-e^2}\left[2(1+e^2)\cos E-\frac{e}{4}(1+3e^2)\cos 2E\right]\right\}. \tag{8.38}$$

各式右端出现的根数 σ 均为拟平均根数 $\bar{\sigma}$，E 是偏近点角.

2．喷气加速度 U 分量导致的卫星轨道变化

对于这一加速分量，$\dot{\sigma}$ 的右函数中出现 $(1+2e\cos f+e^2)^{\pm 1/2}$ 的因子，求解时就会涉及相应的级数展开问题，无法构造对 e 封闭形式的摄动解，既然如此，就将右函数展成平近点角 M 的三角级数，取到 e^2 项的结果如下：

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{n}U\left[\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)+e\cos M+\frac{3}{4}e^2\cos 2M\right], \tag{8.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{na}U\left[-\frac{1}{2}e+(1-e^2)\cos M+\frac{e}{2}\cos 2M+\frac{e^2}{2}\cos 3M\right], \tag{8.40}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{8.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{8.42}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{nae}U\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin M+\frac{e}{2}\sin 2M+\frac{e^2}{2}\sin 3M\right], \tag{8.43}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \frac{2}{nae}U\left[\sin M + \frac{e}{2}\sin 2M + \frac{e^2}{2}\sin 3M\right]. \tag{8.44}$$

不难看出，与 S,T 分量的影响有所不同，相应摄动运动方程 $\dot{\sigma} = f(\sigma,t;\varepsilon)$ 的右函数对六个根数都只包含 f_C 和 f_S 两部分，$f_L = 0$. 可用完整的平均根数法构造摄动分析解的长期项和短周期项.

长期项 $\sigma_C(t-t_0)$ 的变率为

$$a_C = 2\left(1 - \frac{1}{4}e^2\right)(U/n), \tag{8.45}$$

$$e_C = -\frac{e}{a}(U/n), \tag{8.46}$$

$$i_C = 0, \tag{8.47}$$

$$\Omega_C = 0, \tag{8.48}$$

$$\omega_C = 0, \tag{8.49}$$

$$M_C = -\frac{3}{2a}\left(1 - \frac{1}{4}e^2\right)U(t - t_0). \tag{8.50}$$

短周期项 $\sigma_S(t)$ 为

$$a_S(t) = \frac{2}{n^2}\left[e\sin M + \frac{3}{8}e^2\sin 2M\right]U, \tag{8.51}$$

$$e_S(t) = \frac{2}{n^2 a}\left[(1 - e^2)\sin M + \frac{e}{4}\sin 2M + \frac{e^2}{6}\sin 3M\right]U, \tag{8.52}$$

$$i_S(t) = 0, \tag{8.53}$$

$$\Omega_S(t) = 0, \tag{8.54}$$

$$\omega_S(t) = -\frac{2}{n^2 ae}\left[\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\cos M + \frac{e}{4}\cos 2M + \frac{e^2}{6}\cos 3M\right]U, \tag{8.55}$$

$$M_S(t) = \frac{2}{n^2 ae}\left[\cos M + \frac{e}{4}\cos 2M + \frac{e^2}{6}\cos 3M\right]U + \left(\frac{3}{2a}\right)\frac{2}{n^2}\left[e\cos M + \frac{3}{16}e^2\cos 2M\right]U. \tag{8.56}$$

上述各式右端出现的 a,e 及 n 均为平均根数 $\bar{a}_0,\bar{e}_0$ 和 $\bar{n}_0 = \sqrt{\mu}\,\bar{a}^{(-\frac{3}{2})}$.

这里必须说明一点，对于大偏心率情况（如接近或超过 Laplace 极限值 0.6627），上述展成 M 的三角级数的方法不再适用，但正如本节开始所提到的，这里主要针对持续时间不太长的卫星轨道机动中的小推力变轨过程，或变轨量不大的轨道过渡问题，所涉及到的初始轨道和目标轨道的偏心率都不大. 而对于深空探测中涉及大偏心率的轨道过渡的全过程，已不是受摄二体问题，当然不会再采用上述处理方法. 不过，即使偏心率较大，不宜采用展

成 M 的三角级数的方法，可改为直接对 f 或 E 的积分方法，只是将方程(8.17)中的 $(1+2e\cos f+e^2)^{\pm1/2}$ 等项按二项式展开即可，同样可构造摄动分析解．保留到 $O(e^2)$ 的长期项变率和短周期项公式如下：

$$a_C = \frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)U, \tag{8.57}$$

$$e_C = -\frac{1}{na}eU, \tag{8.58}$$

$$M_C = -\frac{3}{2a}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)U(t-t_0), \tag{8.59}$$

$$a_S = \frac{2}{n}(e\sin E)U, \tag{8.60}$$

$$e_S = -\frac{1}{n^2a}\left(2\sin E+\frac{e}{2}\sin 2E\right)U, \tag{8.61}$$

$$\lambda_c = \frac{4}{n^2a}(e\cos E)U, \tag{8.62}$$

这里 $\lambda=M+\omega$. 从结果可看出，保留到 $O(e^2)$ 项，解的具体形式与前面的结果仍旧是类似的．

由上述分析解，可以了解小推力变轨的一些重要特征，对于不同的变轨要求，可采用相应的变轨方式（即 S,T,W 或 U,N,W 的选择）和变轨时机（即轨道状态，它由轨道根数来反映）．

§8.3　轨道过渡中的光压加速机制

除短时间过程的小推力轨道机动技术外，长时间的小推力轨道过渡技术也已实现，而无论是大推力过渡还是小推力过渡，还可以借助其他力因素加速，其中光压就是一个很好的力源．关于光压作用，对于太阳系自然天体的运动几乎无影响，但对于航天器的运动而言就完全不同了，其原因之一是光压作用的性质不同于引力，它与承受客体的有效面质比有关，这在前面第 5 章 §5.3 中讨论人造地球卫星的运动时有过介绍，对于一个典型大小的卫星而言，其面质比是地球面质比的 10^8 倍，光压作用大，但这一原因远不足以说明问题，因光压是一个有心斥力，通常是不会对卫星型或行星型的探测器运动起到加速或减速作用的，之所以对卫星运动有显著影响还有另一个重要原因，即地影间断，这将导致光压作用区别于一般的中心力（如引力）作用，它会使卫星轨道半长径和偏心率出现周期长、变幅大的长周期变化，在一定的长时间间隔内，卫星会得到加速作用．尽管深空探测器在向目标轨道

过渡中不会遇到地影作用,但可利用航天器太阳能帆板的特殊定向,使其在过渡轨道上得到光压力的加速,这就可以使光压力作为轨道过渡(特别是小推力过渡)中的一种辅助能源. 如果帆的面积足够大,甚至可以使航天器像一个太空帆,在无其他动力的情况下向目标轨道过渡,这就是一种光压加速机制.

1. 动力模型与加速机制

以月球探测器的发射为例,在地—月—探测器限制性三体问题基础上进一步考虑太阳引力和太阳光压的摄动影响,即处理成一个受摄的限制性三体问题. 可不必拘泥于限制性三体问题的坐标系取法[1],采用地心坐标系 $O-xyz$ 较为方便,基本平面(xy 坐标面)就取月球绕地球运动的轨道面,在此假定日、月运动可采用平均轨道(甚至不变椭圆)来体现,这不影响实质问题,于是相应的作为小天体的月球探测器相对地球的运动方程可写成下列形式:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_\varepsilon, \tag{8.63}$$

$$\boldsymbol{F}_0 = -GM\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{8.64}$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3. \tag{8.65}$$

即形式上写成受摄二体问题,$\boldsymbol{F}_0$ 是地球的中心引力加速度,$\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 是月球引力、太阳引力和太阳光压摄动加速度. 当探测器飞近月球时,其运动性质会发生变化,但这并不影响上述动力模型数学表达的正确性. 摄动加速度的具体形式如下:

$$\boldsymbol{F}_1 = -GM_1\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_1}{\Delta_1^3} + \frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}\right), \tag{8.66}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -GM_2\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_2}{\Delta_2^3} + \frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right). \tag{8.67}$$

上述各式中的 M, M_1 和 M_2 分别为地球、月球和太阳的质量,$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 各为探测器、月球和太阳的地心位置矢量,相应地有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}_1 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2 \end{cases}. \tag{8.68}$$

关于光压摄动加速度 $\boldsymbol{F}_3$,其具体表达形式与探测器(包括探测器的帆板)的姿态有关,这里不作细节性的讨论,而是以一有效面质比 S/m 代替,m 是探测器的质量,S 是相应的有效截面积(主要取决于较大帆板本身的面积). 如果该有效截面对应的法线指向太阳方向,则有

$$\boldsymbol{F}_3 = \left(\frac{\kappa S}{m}\rho_S\right)\left(\frac{\Delta_S^2}{\Delta_2^2}\right)\frac{\boldsymbol{\Delta}_2}{\Delta_2}, \tag{8.69}$$

这一表达式在第 5 章 §5.3 中出现过，见(5.107)式，其中 $\kappa=1+\eta$，η 是探测器表面材料的反射系数，ρ_S 是 $\Delta_2=\Delta_S$ 处的光压强，而当 $\Delta_S=1\mathrm{AU}$(天文单位)时，$\rho_S=4.5605\times10^{-6}\mathrm{kg/ms^2}$. 当无地影时，这种指向导致的光压力是一连续的中心斥力，仍为保守力，对探测器绕地球运行(在飞抵月球之前)的轨道只有短周期摄动影响，光压不会起加速作用. 而当帆板的法线为太阳到探测器的方向($\boldsymbol{\Delta}_2/\Delta_2$)与探测器运动方向($\boldsymbol{v}/v$)夹角的平分线时，探测器在太空运行的过程中，就会得到光压的加速[2,3]. 这与海洋中行驶的帆船能得到风力的加速有类似的力学机制，帆板的特殊定向会使光压合力在探测器整个运行过程中不会形成一种"阻力". 此时公式(8.69)变为下列形式：

$$\boldsymbol{F}_3 = \left(\frac{S}{m}\rho_S\right)\left(\frac{\Delta_S^2}{\Delta_2^2}\right)\cos\Psi^*\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_2}{\Delta_2}+\eta\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right), \tag{8.70}$$

其中

$$\Psi^* = \Psi/2, \tag{8.71}$$

$$\cos\Psi = \left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_2}{\Delta_2}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right). \tag{8.72}$$

$\Psi^*<90°$，有 $\cos\Psi^*=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\Psi\right)^{1/2}>0$.

2. 数值验证结果与分析

为了证实上述动力模型和帆板有特殊定向的光压加速作用，分别对下面 4 种模型作了计算，即

(1) 受摄椭圆限制性三体问题，即只考虑太阳引力摄动，月球与太阳的轨道均取为椭圆，代替真实轨道，这对所讨论的问题无实质性影响.

(2) 在(1)的基础上再加入光压，但帆板对太阳定向，即其法线方向一直指向太阳.

(3) 将帆板的法线取为上述角平分线方向.

(4) 在探测器绕地球运行过程中向着太阳飞行的那"半圈"，干脆使帆板法线垂直太阳方向(即这半圈光压为零).

初始条件是这样选取的，探测器在近地停泊轨道已经过一次脉冲式变轨，耗费不大的能量，使其变为近地点高度为 1000 km，远地点地心距为地月平均距离的一半的大椭圆轨道，$e=0.926127$. 在此假定下，探测器的初始绕地球运动周期为 $3^d.635706552$，近地点速度 $v_p=10.2009$ km/s，相应的 Jacobi 常数 C 的值为

$$C = 4.2293857311 > C_1.$$

根据第 7 章 § 7.3 中给出的结论，在这样的条件下，如果不借助于光压加速，探测器是不可能飞抵月球的. 对于第(1)中情况，探测器始终保持在地球周围，至少在相当长的间隔内是如此；在第(2)中情况中尽管考虑了光压，但由于帆板的定向，不可能起加速作用，探测器轨道长轴有长周期转动，这是光压的作用，但半长轴的大小亦无明显变化. 只有在(3)和(4)两种情况下，光压明显起着加速作用，探测器的轨道半长径不断地增大，经 60 多天就飞抵月球附近.

计算中，为了表明光压的明显作用，在上述(2)～(4)种情况中，帆板的截面积$\frac{S}{m}$取得较大，有

$$\frac{S}{m} = (120 \times 120\ )m^2/500\ \mathrm{kg}.$$

具体探月飞行中未必采用这么大的帆板，但这不影响对光压加速机制的探讨.

关于(3)和(4)两种情况，探测器轨道半长径的变化并无明显差别，但两种情况相比，显然前者优于后者，其原因如下：

(1) 对于第(4)种情况，当探测器向着太阳飞行的半圈中，无光压作用，而第(3)种情况，在这半圈中光压不仅无阻力方向的分量，而且仍有较小的"加速"作用.

(2) 更重要的是，从姿态控制角度来看，第(4)种情况为了使光压不起阻力作用，在探测器每向着太阳飞行的半圈中需将帆板的指向作"间断"性的调节，而第(3)种情况在探测器整个飞行过程中保持"一种"状态的控制，即根据两个确定方向(太阳方向和探测器运动方向)所决定的指向加以控制，这和第(2)种情况帆板单一地对太阳定向的的控制并无多大差别，显然比第(4)种情况控制简单. 因此在探测器运行的全过程中采用第(3)种情况加速较有利.

根据上述加速机制的分析和数值验证的结果表明，只要将探测器上太阳帆板的法线方向取上述特殊方向，那么太阳辐射作用既可作为一种能源又可起到动力加速作用. 从使用角度来看，帆板的截面积可减小些，它不会改变加速机制，可成为发射某种月球探测器轨道的一种节能途径.

§ 8.4　轨道过渡中引力加速的一种节能机制

轨道过渡中可以借助于第三体的引力加速，使探测器在节能条件下到

达目标天体，在此过渡中探测器与第三体必须有特殊的相对位置，这是不难理解的，这里将不予讨论. 下面将针对月球探测（也称为亚深空探测）和行星际探测，分别阐述轨道过渡中的另一种特殊形式，即如何借助于共线平动点 L_1 和 L_2 附近的“狭窄走廊”飞向目标天体的节能机制.

1. 地月系中的过渡问题

从低地球轨道（LEO）或地球同步转移轨道（GTO）上经变轨向目标天体（月球）过渡可采用脉冲式的大推力过渡，所需能量较大，相应的 Jacobi 常数 C 较小，往往比 C_1 值小得多，相应的原分别包围地球和月球的零速度面已连通，且共线平动点 L_1 附近的“走廊”大大敞开，见第 7 章图 7.7. 如果采用低能量的奔月方式，只要相应的过渡轨道初始速度使相应的 Jacobi 常数 $C \leqslant C_1$（接近或稍小于），此时上述两个零速度面相接或从平动点 L_1 处稍稍打开了一个“狭窄走廊”，探测器有可能越过这一通道后奔月. 但要注意，L_1 处有一个狭窄通道只是探测器可以越过该通道后奔月的一个必要条件，而不是充分条件，还要看转移轨道的起始状态. 可以做这样的数值试验，即把探测器“放”到联结 L_1 点的内稳定流形上等待系统的演化，结果探测器不能“返回”到达地球附近，即对转移轨道的初始状态有要求. 也就是说，从 L_1 点沿内稳定流形的反向积分，结果经几个月球绕地运动周期的间隔后探测器仍不能“返回”地球附近，离地球的距离约为 0.35 个地月距离（这是一个算例）. 根据这一状态，若转移轨道要在地球附近起航，则按上述最小能量不足以将探测器推向月球，需要加大初速，让 L_1 点附近的“走廊”开得大一些. 更好的选择是增加一次机动，其条件可由上述反向积分获得，在离地球0.35 个地月距离处加一次机动（反向），使其接近地球，找出适当的起始转移轨道. 曾有人采用这种转移方式进行过仿真计算[4]，结果比大推力过渡（例如 Hohmann 转移轨道）方式明显节能，但转移时间较长. 至于如何选择转移方式，是否要采用借力加速的节能方式，对转移时间的长短又如何选择等，这要看具体的航天任务而定，在众多约束（包括节能）前提下选优.

2. 行星际过渡问题

同样可借助于共线平动点附近的通道，采取节能式的过渡. 如果说上述奔月是利用内 Lagrange 点 L_1，那么行星际转移将是利用外 Lagrange 点 L_2，此时初始状态对应的 Jacobi 常数 C 满足条件 $C_3 < C < C_2$，对应第七章图 7.8. 例如从地球到火星的过渡，出发的转移轨道是通过日—地系对应的 L_2 点的不稳定流形，到达火星附近的转移轨道是通过日—火星对应的 L_2

点的稳定流形，见图 8.2 和图 8.3.

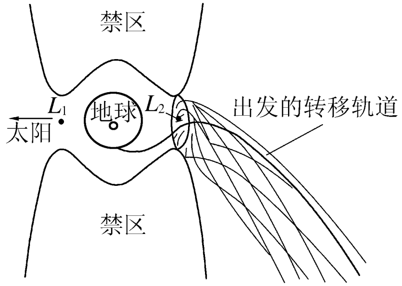

图 8.2　出发的转移轨道示意图

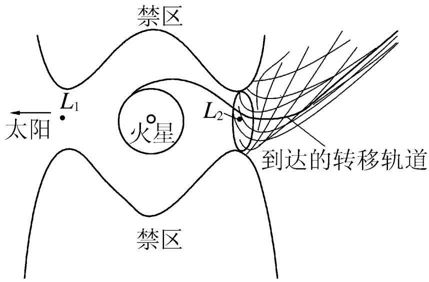

图 8.3　到达的转移轨道示意图

上述两类探测背景下的节能式轨道过渡，都是利用共线平动点 L_1 和 L_2 的动力学特征获得的. 尽管这是在限制性三体问题（更确切地说是圆型限制性三体问题）前提下得出的结论，但它毕竟是一种动力学机制的反映，对于实际问题，上述结果可以作为低能过渡轨道（转移轨道）设计的一种初选，这显然是有意义的.

参 考 文 献

［1］Szebehely V. Theory fo Orbits. New York and London：Academic Press，1967

［2］Liu L. Using Light Pressure to Guide a Probe to the Moon. Proceeding of 50th International Astronautical Congress. Amsterdam，The Netherlands，IAF-99-A. 7.06，1999

［3］刘林. 借助光压将探测器推向月球，天文学报，2001，42(1)：70～74 LIU Lin. To Guide a Lunar Probe with Light Pressure. Chin. Astron. Astrophys.，2001，25(3)：343～348

［4］Topputo F. Vasile M. & Bernaelli-Zazzera F. Interplanetary and Lunar Transfers Using Libration Points. in Proceeding of the 18th International Symposium on Space Flight Dynamics，Munich，Germany，2004，583～588

第 9 章　月球卫星运动的轨道力学

要达到对太阳系中各种天体探测的目的，必然要近距离接近目标天体，更有效的手段是在探测器接近目标天体后，再次机动变轨使其转化为环绕目标天体的轨道器，此即目标天体的人造卫星. 尽管这种卫星的运动与人造地球卫星的运动属于同一类，其动力学模型都是对应一个受摄二体问题，但由于各目标天体之间的各种差异，不能完全照搬研究人造地球卫星运动的方法和结果. 深空探测的首选目标——月球，就是另一种典型，它是太阳系中的一个慢自转天体（自转周期与绕地球运行的公转周期相同），其引力位与地球引力位有明显差异，而中心天体非球形引力又是绕其运行的卫星轨道变化的主要摄动源，因此，本书选择月球卫星的运动作为深空探测器轨道力学的一个重要内容很有必要，它可以使读者对卫星型探测器的运动及其轨道变化特征有更广泛的了解.

§9.1　月球非球形引力位的主要特征

在第 4 章 §4.2 中已对太阳系天体非球形引力位作过介绍，其一般表达式即(4.63)式：

$$V=\frac{GM}{R}\left[1+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{R}\right)^l P_{\rm lm}(\mu)(C_{\rm lm}\cos m\lambda_{\rm G}+S_{\rm lm}\sin m\lambda_{\rm G})\right],\quad(9.1)$$

在这里，(9.1)式中的 GM 是月心引力常数，$a_{\rm e}$ 是月球参考椭球体赤道半径，R，$\lambda_{\rm G}$，φ 是月固坐标系中的球坐标分量，即月心距、经度和纬度. 同样非归一化的缔合勒让德球函数 $P_{\rm lm}(\sin\varphi)$ 和相应的谐系数 $C_{\rm lm}$，$S_{\rm lm}$ 与归一化的 $\overline{P}_{\rm lm}(\sin\varphi)$ 和 $\overline{C}_{\rm lm}$，$\overline{S}_{\rm lm}$ 有如下关系

$$\begin{cases}\overline{P}_{\rm lm}(\mu)=P_{\rm lm}(\mu)/N_{\rm lm}\\ \overline{C}_{\rm lm}=C_{\rm lm}N_{\rm lm},\overline{S}_{\rm lm}=S_{\rm lm}N_{\rm lm}\end{cases},\quad(9.2)$$

$$\begin{cases} N_{\mathrm{lm}} = \left[\dfrac{1}{(1+\delta)}\dfrac{(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\right]^{1/2}, \\ \delta = \begin{cases} 0, & m=0, \\ 1, & m\neq 0. \end{cases} \end{cases} \tag{9.3}$$

为了进一步了解月球引力位的特征，本书附录三中列出了地球和月球引力场模型的部分球谐项系数，其中美国 JPL 的 LP75G 和 LP165 两种模型是目前公认较好的月球引力场模型. 尽管对月球的探测还仍未达到对地球探测的程度，由于各种原因，月球引力场模型的精度还不够理想，但还是可从这两种引力场模型得到一些重要的信息. 从引力场模型球谐系数值可以看出，除月球由于自转较慢，动力学扁率 $J_2=-C_{2,0}$ 较小(10^{-4})外，对轨道偏心率影响较大的奇次带谐项系数 $\overline{C}_{2l-1,0}(l\geqslant 2)$ 与 $\overline{C}_{2,0}$ 之比 $|\overline{C}_{2l-1,0}/\overline{C}_{2,0}|$ 的量级接近(10^{-1})，而地球引力场相应系数之比的量级只有 10^{-3}，这将导致环月运行探测器的轨道(特别是偏心率 e)出现振幅较大的长周期变化，从而导致一些人造地球卫星不会出现的现象.

月球自转慢，除动力学扁率系数 $C_{2,0}$ 的值与其他球谐系数的值不像地球中相差那么大(几乎是 10^3 倍)以外，还将使非球形引力位中田谐项对月球卫星轨道的影响也明显地不同于地球对其卫星轨道的影响. 所有这些，都将在后面 §9.4 和 §9.5 中进行详尽的介绍.

§9.2 月球物理天平动简介与参考系问题

月球天平动可以分为两类，即视天平动和物理天平动. 视天平动是由于运动的原因而使地球上的观测者看到的不仅是月球对着地球的“半面”，而是超过“半面”，这仅是视觉效果而没有力学效应；而物理天平动是月球也象陀螺一样在空间呈现真实的摆动(即赤道面的摆动)，它导致了月球引力场在空间的变化，从而影响月球卫星的轨道运动.

1. 物理天平动的两种表达形式

根据月球自转理论，给出了天平动三个参数(σ,ρ,τ)的分析表达式[1~5]，但类似于地球章动理论给出的章动序列，(σ,ρ,τ)的分析表达式亦包含几百项. 因此，对月球物理天平动的分析解和数值解均有必要作一介绍. 但在某些问题中，可以采用简化的分析表达式. 关于物理天平动的分析解有多种形式，也在不断的改进. 作为一例，下面列出 Hayn 结果中(σ,ρ,τ)的主要项(前三项)[2]：

$$\begin{cases}\tau = 0^\circ.0163888\sin l_s - 0^\circ.003333\sin l_m + 0^\circ.005\sin 2\omega_m \\ \rho = -0^\circ.0297222\cos l_m + 0^\circ.0102777\cos(l_m + 2\omega_m) - \\ \quad 0^\circ.0030556\cos(2l_m + 2\omega_m) \\ \sin I\sigma \approx I\sigma = -0^\circ.0302777\sin l_m + 0^\circ.0102777\sin(l_m + 2\omega_m) - \\ \quad 0^\circ.0030556\sin(2l_m + 2\omega_m)\end{cases}, \tag{9.4}$$

该式中 l_s 和 l_m 分别为太阳和月球的平近点角，ω_m 是月球近地点幅角. 至于三个天平动参数(σ,ρ,τ)的几何意义，将在下面介绍参考系时具体表明.

物理天平动的另一种表达为数值形式，JPL 的 DE405 数值列表中就直接给出了表达天平动的三个欧拉角(Ω', i_s, Λ)每天的具体数值. 这三个欧拉角与分析表达形式中的三个参数有不同的几何意义，它们将在建立不同的赤道坐标系中分别有相应的应用.

2. 月心赤道坐标系和月固坐标系

与研究人造地球卫星的运动类似，由于有物理天平动现象，研究月球卫星的运动，同样也涉及到历元(取 J2000.0)月心平赤道坐标系和真赤道坐标系以及月固坐标系.

对于月球平赤道，根据 Cassini 定律，月球轨道，黄道与月球平赤道交于一点 N，见图 9.1. 有

$$\begin{cases}\psi = \Omega_m, \\ I = I_m, \\ \varphi = \theta_m + \pi = L_m - \Omega_m + \pi,\end{cases} \tag{9.5}$$

其中 Ω_m, I_m, L_m 表示月球轨道的平根数，分别为月球轨道升交点平黄经，平倾角和月球平黄经.

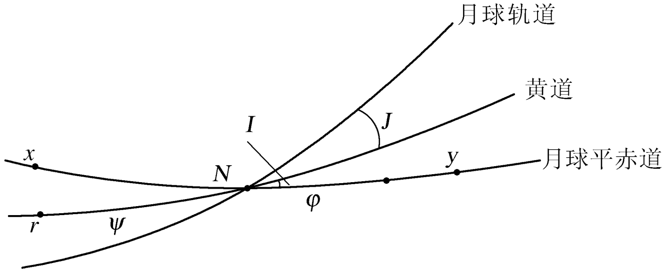

图 9.1　月球轨道、黄道与月球平赤道之间的几何关系

对于月球真赤道，它与平赤道的关系见图 9.2，有

$$\begin{cases}\psi'=\Omega_m+\sigma,\\ I'=I_m+\rho,\\ \varphi'=\theta_m+\pi+(\tau-\sigma),\end{cases}\tag{9.6}$$

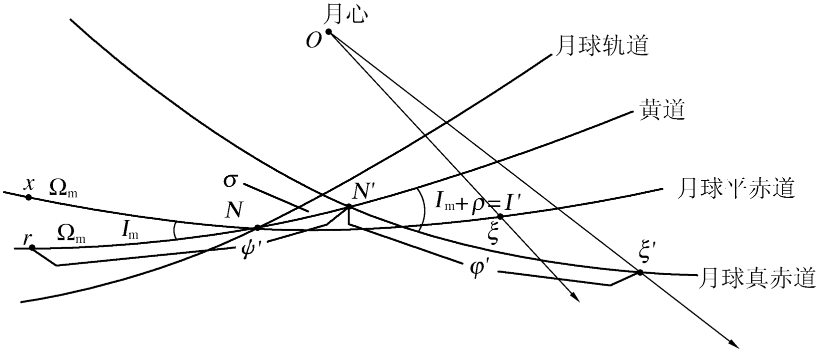

图 9.2　月球真赤道与月球平赤道之间的关系

这里以三个天平动参数(σ,ρ,τ)**表明了平赤道与真赤道之间的几何关系.图** 9.2 **中,通过真赤道也描述了月固坐标系,**$O\xi'$**方向即过月面上** Sinus Medii **的子午线的方向(亦即月球指向地球的那一惯性主轴方向).**

DE405 **数值历表中直接给出的另三个欧拉角**(Ω',i_s,Λ)**表明了月心地球平赤道坐标系与月固坐标系之间的关系,见图** 9.3.

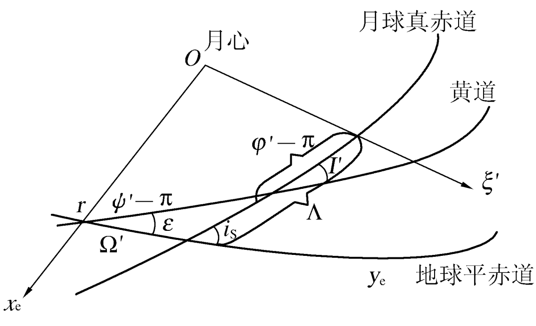

图 9.3　月心地球平赤道坐标系与月固坐标系的关系

图中 $O-x_ey_ez_e$ **即月心地球平赤道坐标系,**ξ'**是月固坐标系的** X **轴指向,三个欧拉角**(Ω',i_s,Λ)**在图中已表明清楚,不必再加注明,**ε **是黄赤交角.**

两种物理天平动参数的表达形式(σ,ρ,τ)**和**(Ω',i_s,Λ)**,分别用两种方式描述了月球真赤道面的摆动,同时也分别定义了不同的月心坐标系,即月固坐标系** $O-\xi'\eta'\zeta'$**,月心地球平赤道坐标系** $O-x_ey_ez_e$**(以下称月心天球坐标系)和月心月球平赤道坐标系** $O-xyz$**(以下称月心赤道坐标系).它们之**

间的转换关系在研究月球卫星的运动和表达月球卫星在月面上的星下点位置时必然要涉及到.

若记月心天球坐标系 $O-x_{\mathrm{e}}y_{\mathrm{e}}z_{\mathrm{e}}$ 中的卫星位置矢量为 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}$,它与月固坐标系中卫星相应的位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 之间的关系如下：

$$\boldsymbol{R}=(M_1)\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}=(M_2)\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}, \tag{9.7}$$

这里两个转换矩阵 (M_1) 和 (M_2) 各由上述两种物理天平动参数的表达形式给出. 根据图 9.3 表明的几何关系不难给出转换矩阵 (M_1) 和 (M_2) 的表达式如下：

$$(M_1)=R_z(\Lambda)R_x(i_{\mathrm{s}})R_z(\Omega'), \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned}(M_2)&=R_z(\varphi'-\pi)R_x(I')R_z(\psi'-\pi)R_x(\varepsilon)\\&=R_z(\psi')R_x(-I')R_z(\psi')R_x(\varepsilon).\end{aligned} \tag{9.9}$$

(9.9)式第一行是按图 9.3 给出的,而第二行是按图 9.2 给出的,两者实为同一转换关系. 上述两种转换关系之间的差别取决于 (σ,ρ,τ) 的取项多少,若取前面(9.4)式给出一例的前三项,分别计算 2003 年 11 月 1 日 0 时和 2004 年 6 月 15 日 0 时月球表面“上空”一点的空间坐标转换到月固坐标系中的位置,两种转换结果之差为公里级,相应的转换矩阵元素的最大差别达到 7.6×10^{-4}. 如果采用 Eckhardt 等人结果中 (σ,ρ,τ) 的前四项[3~5](量级与 Hayn 结果中的前三项相当),亦同样有上述差别.

根据上述比较可知,直接采用物理天平动分析解的简化表达式,在某些问题中是不能满足精度要求的. 但同时告诉我们,仅取 σ,ρ,τ 主项的简化表达式与 DE405 数值历表的差别小于 10^{-3},这种差别在考虑物理天平动对月球卫星轨道的影响时,在一定精度要求的前提下,则无妨. 定轨或预报中涉及轨道外推弧段为 10^2 时(对低轨卫星为 1～2 天的间隔),要保证 10 米级甚至米级精度是可以达到的.

鉴于上述比较的结果,加上要建立月球卫星轨道理论,了解轨道变化的规律,或直接反映月球卫星相对月心坐标系的几何状况,又必须采用月心赤道坐标系,而不是月心地球赤道坐标系,那么就要由 (σ,ρ,τ) 来建立月心赤道坐标系 $O-xyz$(对应所选取的历元,如目前惯用的 J2000.0)与月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$ 之间的关系. 而若要通过历元月心赤道坐标系 $O-xyz$ 与月心天球坐标系 $O-x_{\mathrm{e}}y_{\mathrm{e}}z_{\mathrm{e}}$ 之间的转换关系(即利用高精度的 $\Omega',i_{\mathrm{s}},\Lambda$ 值)来计算月球卫星在月固坐标系中的精确位置 $\boldsymbol{R}$ 也很简单,有

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}=(M_1)\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}, \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}=(N)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\\(N)=R_z(-\Omega_{\mathrm{m}})R_x(-I_{\mathrm{m}})R_z(\Omega_{\mathrm{m}})R_x(\varepsilon)\end{cases}, \tag{9.10}$$

$\boldsymbol{r}$ 是通过定轨或预报给出的月心赤道坐标系中的月球卫星位置矢量. 这里

变换矩阵(N)并不涉及到物理天平动的表达形式,转换的精度只取决于月球卫星定轨或预报的精度.

§9.3 月球卫星运动的受力分析

研究月球卫星(特别是低轨卫星)的空间运动与研究人造地球卫星的运动一样,显然采用历元(J2000.0)月心赤道坐标系 $O-xyz$ 为宜,考虑月球非球形引力摄动时,将涉及到月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$. 这两种坐标系之间的几何关系在前面的图 9.2 中已清楚地表明. 若记两种坐标系中卫星位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$,则有

$$\boldsymbol{r}=(A)\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{R}=(A)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}. \tag{9.11}$$

其中(A)为两种坐标系之间的转换矩阵,不难给出

$$\begin{aligned}(A)&=R_z(-\Omega_{\mathrm{m}})R_x(-I_{\mathrm{m}})R_z(-\sigma)R_x(I')R_z(-\varphi') \qquad (9.12)\\ &=R_z(-\Omega_{\mathrm{m}})R_x(-I_{\mathrm{m}})R_z(-\sigma)R_x(I_{\mathrm{m}}+\rho)R_z(-(\varphi+\tau-\sigma)),\end{aligned}$$

$$\varphi=L_{\mathrm{m}}-\Omega_{\mathrm{m}}+\pi, \tag{9.13}$$

$$I_{\mathrm{m}}=1^{\circ}32'32''.7. \tag{9.14}$$

L_{m} 和 Ω 的含义前面已有说明.

在历元月心赤道坐标系 $O-xyz$ 中,月球卫星的运动方程如下:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon), \tag{9.15}$$

其中 $\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 分别为月球中心引力加速度(对应无摄运动)和各种摄动加速度,有

$$\boldsymbol{F}_0=-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{9.16}$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon). \tag{9.17}$$

为了便于问题的分析和计算上的某种需要,同样采用类似研究人造地球卫星运动时所采用的标准计算单位,即长度、质量和时间单位分别为

$$\begin{cases}[L]=a_{\mathrm{e}}=1738.0\ \mathrm{km},\\ [M]=M,\qquad M\ \text{是月球质量,对应月心引力常数}\ \mu=GM,\\ [T]=(a_{\mathrm{e}}^3/GM)^{1/2}\approx 17^{\mathrm{m}}.2465\cdots,\end{cases} \tag{9.18}$$

在此标准单位系统中,$\mu=GM=1$,$G=1$,$[L]$,$[M]$和$[T]$的准确值取决于所采用的月球引力场模型.

在上述坐标系和标准单位系统中,各种物理量归结为无量纲形式. 在历元月心赤道坐标系中,相应的 $\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon)$涉及下列 10 种摄动源:

月球非球形引力摄动(C_{lm},S_{lm})　　$\boldsymbol{F}_1(J_l,J_{lm})$，
地球引力摄动(m'_1)　$\boldsymbol{F}_2(m'_1)$，
太阳引力摄动(m'_2)　$\boldsymbol{F}_3(m'_2)$，
月球固体潮摄动$(\kappa_2 J_2)$　$\boldsymbol{F}_4(\kappa_2 J_2)$，
月球物理天平动(σ,ρ,τ)　$\boldsymbol{F}_5(\sigma,\rho,\tau)$，
太阳光压摄动 $\boldsymbol{F}_6(\rho_s)$，
月球扁率间接摄动 $\boldsymbol{F}_7(m'_1 J_2)$，
地球扁率摄动 $\boldsymbol{F}_8(J'_2 m'_1)$，
大行星(金星，木星)引力摄动 $\boldsymbol{F}_9(m'_3)$，
月球引力后牛顿效应 $\boldsymbol{F}_{10}(v^2/c^2)$.

对于低轨月球卫星($\bar{h}=100\sim300$ km)，上述各摄动源对应的摄动量级 ε_j($j=1,\cdots,10$)分别为

$\varepsilon_1(J_2)=O(10^{-4})$，$\varepsilon_1(J_{2,2})=O(10^{-5})$，$\varepsilon_1(C_{lm},S_{lm},l\geqslant3)=O(10^{-6}-10^{-5})$，

$\varepsilon_2=O(10^{-5})$，

$\varepsilon_3=O(10^{-7})$，

$\varepsilon_4=O(10^{-7})$，

$\varepsilon_5=O(10^{-7})$，

$\varepsilon_6=O(10^{-9})$，对应一般面质比$(S/M)=10^8$ 的卫星，

$\varepsilon_7=O(10^{-11})$，

$\varepsilon_8=O(10^{-12})$，

$\varepsilon_9=O(10^{-12})$，

$\varepsilon_{10}=O(10^{-11})$.

根据以上对各项摄动源的量级分析可知，一般情况下只需考虑前面 5 种摄动源，即月球非球形引力摄动，地球和太阳引力摄动，月球固体潮摄动和月球物理天平动的影响. 而最主要的是月球非球形引力摄动和地球引力摄动.

§9.4　月球卫星轨道变化的主要特征

研究月球卫星轨道的变化规律是月球卫星轨道力学的核心内容，而只有构造月球卫星轨道变化的分析解才能给出其变化规律. 但由于月球卫星的受力状况(尤其是月球非球形引力位的影响)不同于地球卫星，故必须针对月球卫星的受力特点构造相应的摄动分析解. 文[6～9]先后给出相应的

分析解,但正由于月球卫星的受力状况不同于地球卫星,文[6～8]给出的是半分析解,而文[9]也只能采用拟平均根数法[10,11]给出相应的分析解.

由于月球非球形引力位中的动力学扁率项(J_2)与其他球谐项(C_{lm},S_{lm})以及地球引力摄动项相差不大,将导致长周期项中出现降阶问题,这种小分母的出现,不能采用完整的平均根数法按 $\varepsilon=O(J_2)$来构造相应的小参数幂级数解,而只能采用人为的小参数 $\varepsilon=10^{-2}$,按拟平均根数法来构造相应的幂级数解,这正是文[9]所做的工作.

真正导致月球卫星轨道变化(包括解的表达式)不同于地球卫星的主要摄动源是月球非球形引力摄动以及与其有差别的月球物理天平动引起的坐标系附加摄动.本节将针对这一人们关心的焦点,给出月球卫星轨道的相应变化特征,为有关研究工作和环月探测器的轨道设计等提供必要的轨道信息.

1. 月球非球形引力摄动解

根据上一节对月球卫星运动受力分析可知,在小参数 ε 确定为 10^{-2} 的前提下,若以 σ 表示六个 Kepler 根数(a,e,i,Ω,ω,M),运动方程可以写成下列形式:

$$\begin{cases}\dot{\sigma}=f_0(a)+f_2(J_2)+f_3(C_{lm},S_{lm}),\\ f_2=f_{2C}+f_{2L},\\ f_3=f_{3C}+f_{3L}+f_{3S},\end{cases}\tag{9.19}$$

右函数 f_2 和 f_3 由(9.1)式给出的非球形引力位部分 $\Delta V=V-\left(\dfrac{GM}{R}\right)$构成,其中 $J_2=-C_{2,0}$,物理天平动引起的坐标系附加摄动后面另行讨论.

非球形引力摄动对应的小参数幂级数解有如下形式:

$$\begin{cases}\sigma(t)=\bar{\sigma}(t_0)+(\delta\bar{n}_0+\sigma_{2C}+\sigma_{3C})(t-t_0)+\Delta\sigma_L^{(1)}(t)+\sigma_S^{(2)}(t),\\ \Delta\sigma_L^{(1)}(t)=\sigma_L^{(1)}(t)-\sigma_L^{(1)}(t_0),\\ \bar{\sigma}(t_0)=\sigma_0-\sigma_S^{(2)}(t_0),\end{cases}\tag{9.20}$$

其中 $\Delta\sigma_L^{(1)}(t)$是由除 J_2 项外所有非球形引力位的球谐项(C_{lm},S_{lm})摄动导致的长周期变化项,对应方程(9.19)右函数中的 $f_{3L}(C_{lm},S_{lm})$部分,积分降阶后给出.这里只给到三阶长期项及与其相当的一阶长周期变化项和二阶短周期项,而对于沿迹量平近点角应同时给出 a 的三阶短周期项$a_S^{(3)}(t)$.所有这些项与摄动源的关系如下:

$$\begin{cases}\sigma_{2C}=\sigma_{2C}(J_2)\\ \sigma_{3C}=\sigma_{3C}(J_l,l(2)\geqslant 4)\end{cases},\tag{9.21}$$

$$\Delta\sigma_L^{(1)}(t)=\Delta\sigma_L(t;J_l,l\geqslant 3;C_{lm},S_{lm},l\geqslant 2),\tag{9.22}$$

$$\begin{cases}\sigma_S^{(2)}(t)=\sigma_S^{(2)}(t;J_2)\\ a_S^{(3)}(t)=a_S^{(3)}(t;J_l,l\geqslant 3;C_{lm},S_{lm,l},l\geqslant 2)\end{cases}.\tag{9.23}$$

由于 $\sigma_{1C}=0$，故计算 σ_{2C}，σ_{3C} 和 $\Delta\sigma_L^{(1)}$ 时，需要用到的 $\bar{\sigma}(t)$ 均可用 $\bar{\sigma}_0=\bar{\sigma}(t_0)$，于是各根数的具体表达形式如下：

$$\begin{cases}a(t)=\bar{a}_0+a_S^{(2)}(t)+a_S^{(3)}(t)\\ e(t)=\bar{e}_0+\Delta e_L^{(1)}(t)+e_S^{(2)}(t)\\ i(t)=\bar{i}_0+\Delta i_L^{(1)}(t)+i_S^{(2)}(t)\\ \Omega(t)=\bar{\Omega}_0+(\Omega_{2C}+\Omega_{3C})(t-t_0)+\Delta\Omega_L^{(1)}(t)+\Omega_S^{(2)}(t)\\ \omega(t)=\bar{\omega}_0+(\omega_{2C}+\omega_{3C})(t-t_0)+\Delta\omega_L^{(1)}(t)+\omega_S^{(2)}(t)\\ M(t)=\bar{M}_0+(\bar{n}_0+M_{2C}+M_{3C})(t-t_0)+\Delta M_L^{(1)}(t)+M_S^{(2)}(t)\end{cases}.\tag{9.24}$$

其中 $\bar{n}_0=\bar{a}_0^{-3/2}$，这里的 $\bar{a}_0=a_0-[a_S^{(2)}(t_0)+a_S^{(3)}(t_0)]$.

（1）长期项系数 $\boldsymbol{\sigma}_C$

$$\Omega_{2C}=-\frac{3J_2}{2p^2}n\cos i,\tag{9.25}$$

$$\omega_{2C}=\frac{3J_2}{2p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right),\tag{9.26}$$

$$M_{2C}=\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\,n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right),\tag{9.27}$$

$$\Omega_{3C}=-n\cos i\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_2(i)K_1(e),\tag{9.28}$$

$$\omega_{3C}=-\cos i\Omega_{3C}-n\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_1(i)[(2l-1)K_1(e)+(1-e^2)K_2(e)],\tag{9.29}$$

$$M_{3C}=-\sqrt{1-e^2}(\omega_{3c}+\cos i\Omega_{3c})-n\sqrt{1-e^2}\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_1(i)[2(l+1)K_1(e)].\tag{9.30}$$

其中 $p_0=a(1-e^2)$，a,e,i 均取 $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$ 值. $F_1(i),\cdots,K_1(e),\cdots$ 的表达式如下：

$$\begin{cases} F_1(i) = \sum_{q=0}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)} C_{lq}(\sin i)^{2q} \\ F_2(i) = \sum_{q=1}^{l/2}(-1)^{(l+2q)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)} C_{lq}2q(\sin i)^{2q-2} \\ C_{lq} = \binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q} = \dfrac{(l+2q)!}{(q!)^2\left(\frac{l}{2}-q\right)!\left(\frac{l}{2}+q\right)!} \end{cases} \tag{9.31}$$

$$\begin{cases} K_1(e) = \sum_{\alpha(2)=0}^{l-2} C_{l\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha} \\ K_2(e) = \sum_{\alpha(2)=2}^{l-2} C_{l\alpha}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha-2} \\ C_{l\alpha} = \binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha/2} = \dfrac{(l-1)!}{(l-1-\alpha)!\left(\frac{\alpha}{2}!\right)^2} \end{cases} \tag{9.32}$$

上述各式中,求和时 $l(2)\geqslant 4$,$\alpha(2)\geqslant 2$ 表示按 $l=4,6,\cdots$,$\alpha=2,4\cdots$取值.

(2)一阶长周期变化项 $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)-\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)$

对于月球非球形引力摄动,长周期项可严格积分给出,由于相应的周期较长,亦可按长期项处理,即下面给出的表达式(9.33)~(9.38).若要给出 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 的形式,也很简单,只要将表达式(9.34)~(9.38)中的 $I(\omega)n(t-t_0)$,$\Phi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0)$,…改为下述积分:

$$\int^t I(w)n\mathrm{d}t,\ \int^t \Phi_{\mathrm{lm}p}n\,\mathrm{d}t,\cdots$$

即可.下面给出的 $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 相当于 $[\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)/\mathrm{d}t](t-t_0)$,括号内的表达式正是下一节讨论月球卫星轨道变化所确定的某些特征时要引用的.

$$\Delta a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = 0, \tag{9.33}$$

$$\begin{aligned}\Delta e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = {}& (1-e^2)\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(l-2p)F_3(i)\left(\frac{1}{e}K_3(e)\right) \\ & I(\omega)n(t-t_0) - (1-e^2)\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(l-2p) \\ & F_{\mathrm{lm}p}(i)\left(\frac{1}{e}K_3(e)\right)\Phi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0),\end{aligned} \tag{9.34}$$

$$\begin{aligned}\Delta i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = {}& -\cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(l-2p)(F_3(i)/\sin i)K_3(e)I(\omega)n(t- \\ & t_0) + \sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}[(l-2p)\cos i \\ & -m](F_{\mathrm{lm}p}(i)/\sin i)K_3(e)\Phi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0),\end{aligned} \tag{9.35}$$

$$\Delta\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(F_4(i)/\sin^2 i)K_3(e)H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(F'_{\mathrm{lm}p}(i)/\sin i)K_3(e)\psi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0),\quad(9.36)$$

$$\Delta\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\cos i\Delta\ \Omega_{\mathrm{l}}^{(1)}(t) - \sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}F_3(i)[(2l-1)K_3(e)+$$
$$(1-e^2)K_4(e)]H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}F_{\mathrm{lm}p}(i)[(2l-1)K_3(e)+$$
$$(1-e^2)K_4(e)]\psi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0),\quad(9.37)$$

$$\Delta\ M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = -\sqrt{1-e^2}\left[\ \Delta\omega_l{}^{(9.1)}(t)+\cos i\Delta\Omega_l^{(9.1)}(t)\ \right]-$$
$$\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}2(l+1)F_3(i)k_3(e)H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}2(l+1)F_{\mathrm{lm}p}(i)K_3(e)\psi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0).\quad(9.38)$$

上述各式中的 p_0 **即** $a(1-e^2)$**，为了区别求和取值符号** p**，用了** p_0 **这一符号. 同样上述各式中出现的** a,e,i **和** Ω,ω **均用** $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0,\overline{\Omega}_0,\bar{\omega}_0$. $F_3(i)$，… **各表达式如下：**

$$\begin{cases} F_3(i) = \displaystyle\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}C_{lpq}(\sin i)^{(l-2p+2q)}, \\ F_4(i) = \displaystyle\sum_{q=0}^{p}(l-2p+2q)(-1)^{(l+2q-\delta)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}\cdot \\ \qquad C_{lpg}(\sin i)^{(l-2p+2q)}, \\ C_{lpq} = \dbinom{l}{p-q}\dbinom{2l-2p+2q}{l}\dbinom{l-2p+2q}{q} \\ \qquad = \dfrac{(2l-2p+2q)\,!}{q\,!(p-q)\,!(l-p+q)\,!(l-2p+q)\,!}, \end{cases}\quad(9.39)$$

$$\delta_p = \begin{cases} 0, & l-2p=0, \\ 1, & l-2p\neq 0, \end{cases}\quad(9.40)$$

$$\begin{cases} K_3(e) = \sum\limits_{\alpha(2)=|l-2p|}^{l-2} C_{lp\alpha}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha} \\ K_4(e) = \sum\limits_{\alpha(2)=|l-2p|}^{l-2} C_{lp\alpha}\alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha-2} \\ C_{lp\alpha} = \dbinom{l-1}{\alpha}\left(\begin{matrix} \alpha \\ \dfrac{1}{2}(\alpha-|l-2p|) \end{matrix}\right) \\ \qquad = \dfrac{(l-1)!}{(l-1-\alpha)!\left[\dfrac{1}{2}(\alpha-|l-2p|)\right]!\left[\dfrac{1}{2}(\alpha+|l-2p|)\right]!}, \end{cases} \tag{9.41}$$

$$\begin{cases} I(\omega)=-(1-\delta)\sin(l-2p)\omega+\delta\cos(l-2p)\omega, \\ H(\omega)=(1-\delta)\cos(l-2p)\omega+\delta\sin(l-2p)\omega, \\ \delta=\dfrac{1}{2}[1-(-1)^l]. \end{cases} \tag{9.42}$$

还有倾角函数 $F_{\mathrm{lm}p}(i)$ **及其导数** $F'_{\mathrm{lm}p}(i)$**,在前面第四章中出现过,见**(4.262)~(4.264)**式.**

(3) 短周期项 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{S}}^{(2)}(\boldsymbol{t})$

$\sigma_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$**除** $a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)$**外,只需给出** J_2**项,而** $a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)+a_{\mathrm{S}}^{(3)}(t)$**可由下式给出:**

$$a_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)+a_{\mathrm{S}}^{(3)}(t)=2a^2R_{\mathrm{S}}(J_2;J_l,l\geqslant 3;C_{lm},S_{lm}) \tag{9.43}$$

其中

$$\begin{cases} R_{\mathrm{S}}(J_2) = \dfrac{3J_2}{2a^3}\left\{\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\dfrac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+ \dfrac{1}{2}\sin^2 i\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\cos 2u\right\}, \\ u = f+\omega, \end{cases} \tag{9.44}$$

$$R_{\mathrm{S}}(J_l)=R(J_l)-R(J_l)_{\mathrm{C,l}}, \tag{9.45}$$

$$R(J_l) = \sum_{l\geqslant 3}\frac{(-J_l)}{a^{l+1}}\sum_{p=0}^{\frac{1}{2}(l-\delta)} F_3(i)\left[(1-\delta)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)u+ \delta\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\sin(l-2p)u\right], \tag{9.46}$$

$$R(J_l)_{\mathrm{C,L}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\sum_{l\geqslant 3}\frac{(-J_l)}{p_0^l}\sum_{p=1}^{(l-\delta)/2} F_3(i)K_3(e)H(\omega), \tag{9.47}$$

$$R_{\mathrm{S}}(C_{\mathrm{lm}},S_{\mathrm{lm}})=R(C_{\mathrm{lm}},S_{\mathrm{lm}})-R_l(C_{\mathrm{lm}},S_{\mathrm{lm}}), \tag{9.48}$$

$$R(C_{\mathrm{lm}},S_{\mathrm{lm}})=\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{a^{l+1}}\sum_{p=0}^{l}F_{\mathrm{lm}p}(i)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\times$$

$$\{[(1-\delta_m)C_{\mathrm{lm}}-\delta_m S_{\mathrm{lm}}]\cos((l-2p)u+m\Omega_{\mathrm{G}})+$$

$$[(1-\delta_m)S_{\mathrm{lm}}+\delta_m C_{\mathrm{lm}}]\sin((l-2p)u+m\Omega_{\mathrm{G}})\},\quad(9.49)$$

$$\delta_m=\frac{1}{2}[1-(-1)^{l-m}],$$

$$R_{\mathrm{L}}(C_{\mathrm{lm}},S_{\mathrm{lm}})=\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{p_0^l}\sum_{p=1}^{l-1}F_{\mathrm{lm}p}(i)K_3(e)\Psi_{\mathrm{lm}p},\quad(9.50)$$

$$e_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=\frac{3J_2}{2a^2}\left(\frac{1-e^2}{e}\right)\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.$$

$$\frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos2(f+\omega)-\frac{\sin^2 i}{2(1-e^2)^2}[e\cos(f+2\omega)+$$

$$\left.\cos2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)]\right\}-$$

$$\frac{3J_2}{2p^2}\sin^2 i\left(\frac{1-e^2}{6e}\right)\overline{\cos2f}\cos2\omega,\quad(9.51)$$

$$i_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=\frac{3J_2}{8p^2}\sin2i\left[e\cos(f+2\omega)+\cos2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right]+$$

$$\frac{3J_2}{24p^2}\sin2i\,\overline{\cos2f}\cos2\omega,\quad(9.52)$$

$$\Omega_{\mathrm{S}}^{(2)}(t)=-\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\left\{(f-M+e\sin f)-\frac{1}{2}\left[e\sin(f+2\omega)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\sin2(f+\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right]\right\}+$$

$$\frac{3J_2}{12p^2}\cos i\,\overline{\cos2f}\cos2\omega,\quad(9.53)$$

$$\omega_{\mathrm{S}}^{(2)}=\frac{3J_2}{2p^2}\left\{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)(f-M+e\sin f)+\right.$$

$$\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin2f+\frac{e}{12}\sin3f\right]-$$

$$\left[\frac{1}{4e}\sin^2 i+\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 i\right)e\right]\sin(f+2\omega)-$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin2(f+\omega)+$$

$$\left[\frac{7}{12e}\sin^2 i-\left(\frac{1}{6}-\frac{19}{48}\sin^2 i\right)e\right]\sin(3f+2\omega)+$$

$$\frac{3}{8}\sin^2 i\sin(4f+2\omega)+$$

$$\frac{e}{16}\sin^2 i[\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega)]\Big\}-$$

$$\frac{3J_2}{2p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1-e^2}{6e^2}\overline{\cos 2f}\right)+\frac{1}{6}\cos^2 i\,\overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega, \quad (9.54)$$

$$M_S^{(2)}(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\Big\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\right.$$

$$\left.\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)-\right.$$

$$\left(\frac{7}{12e}-\frac{e}{48}\right)\sin(3f+2\omega)-\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)-$$

$$\left.\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)-\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\right]\Big\}+$$

$$\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1+e^2/2}{6e^2}\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega. \quad (9.55)$$

上述各式中出现的$\left(\frac{a}{r}\right)$和真近点角 f 等量与根数 e,M 的关系在前面讨论人造地球卫星的运动时已出现过,即相应的二体问题基本关系式. $\overline{\cos 2f}$是由下式表达的平均值:

$$\overline{\cos 2f}=\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2. \quad (9.56)$$

从上述月球非球形引力摄动解的具体形式不难看出动力学扁率 J_2 与奇次带谐项系数 $J_{2l-1}(l\geqslant 2)$相对大小(J_{2l-1}/J_2)的重要性,慢自转中心天体非球形引力位中田谐项对应的摄动解是以长周期项的形式出现,不像地球卫星那样,田谐项摄动解是以短周期项的形式出现,而又必须通过展成平近点角 M 的三角级数才能构造相应的短周期项,导致对大偏心率情况不适用的结果. 另外,关于卫星轨道变化的某些重要特征,对于地球卫星往往由 J_2 与 J_3,J_4 几项即可给出相应的可靠结果,而对于月球卫星而言,由于月球非球形引力位中 J_2 与 $J_{2l-1}(l\geqslant 2)$和所有田谐项系数(C_{lm},S_{lm})相差不大的原因,若要获得月球卫星轨道变化特征的可靠信息,还得审查众多的非球形引力项. 故前面必须给出相应的 J_l 和(C_{lm},S_{lm})项摄动解的完整结果,这才能保证在此基础上对有关问题分析所得结果的有效性.

2. 月球物理天平动引起的坐标系附加摄动

月球物理天平动与地球的岁差章动类似,都是引起赤道面在空间的摆动,导致在月心(或地心)平赤道坐标系中构造相应卫星轨道的摄动分析解时,均要考虑由于赤道面摆动导致的引力位的变化所带来的坐标系附加摄

动.但月球物理天平动与地球岁差章动的表达形式与结果不一样,因此不能照搬地球卫星运动中相应的摄动解部分[10,11].这里给出不同于参考文献[10,11]中采用的方法,而采用与建立月球赤道坐标系与月固坐标系之间的坐标转换关系相一致的表达形式,见(9.11)式,构造月心赤道坐标系 $O-xyz$ 中的由物理天平动引起的坐标系附加摄动解.

(1) 月心赤道坐标系中的附加引力位 ΔV

尽管物理天平动可以改变非球形引力位中的每一部分,但这里只讨论 $C_{2,0}$ 和 $C_{2,2}$ 两项的附加位,一是该两项是最主要的,另一原因是这两项分别为带谐项和田谐项的代表,仅就对这两项的讨论即可了解物理天平动对卫星轨道影响的全貌.

由于物理天平动的摄动量级即使对低轨卫星,也只有 10^{-7},故天平动参数可引用 简化的分析表达形式,这里就直接采用前面给出的简化公式(9.4).为了表达简洁,记

$$\begin{cases}\tau = \tau_1 \sin l_{\mathrm{s}} + \tau_2 \sin l_{\mathrm{m}} + \tau_3 \sin 2\omega_{\mathrm{m}}, \\ \rho = \rho_1 \cos l_{\mathrm{m}} + \rho_2 \cos(l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}) + \rho_3 \cos(2l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}), \\ \sin I\sigma = \sigma_1 \sin l_{\mathrm{m}} + \sigma_2 \sin(l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}) + \sigma_3 \sin(2l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}),\end{cases} \tag{9.57}$$

考虑到 $\rho_1 - \sigma_1 = 2''$,$(\rho_1 - \sigma_1)/\sigma_1 \approx 10^{-2}$,在一定精度下为了表达简明,可做近似处理,即 $\rho_i = \sigma_i (i=1,2,3)$,如果不作此近似处理亦不会影响讨论的结果.(9.57)式中 τ_1 等量的数值如下:

$$\begin{cases}\tau_1 = 59''.0 = 2.9 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}), \\ \tau_2 = -12''.0 = -0.58 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}), \\ \tau_3 = 18''.0 = 0.87 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}),\end{cases} \tag{9.58}$$

$$\begin{cases}\sigma_1 = -109''.0 = -5.18 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}), \\ \sigma_2 = 37''.0 = 1.8 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}), \\ \sigma_3 = -11''.0 = -0.53 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}),\end{cases} \tag{9.59}$$

$$\begin{cases}\sigma_{11} = \sigma_1 - \sigma_2 = -146''.0, \\ \sigma_{12} = \sigma_1 + \sigma_2 = -72''.0,\end{cases} \tag{9.60}$$

仅保留 ρ, σ, τ 的一阶量,可给出(9.12)式中月心赤道坐标系 $O-xyx$ 与月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$ 之间的坐标转换矩阵(A)的简化形式如下:

$$(A)=\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\Omega_m)-(\tau-\sigma+\sigma\cos I)\sin(\varphi+\Omega_m)\\ -\sin(\varphi+\Omega_m)-((\tau-\sigma+\sigma\cos I))\cos(\varphi+\Omega_m)\\ -\sigma\sin I\cos\Omega_m-\rho\sin\Omega_m\\ \sin(\varphi+\Omega_m)+(\tau-\sigma+\sigma\cos I)\cos(\varphi+\Omega_m)\\ \cos(\varphi+\Omega_m)-(\tau-\sigma+\sigma\cos I)\sin(\varphi+\Omega_m)\\ -\sigma\sin I\sin\Omega_m+\rho\cos\Omega_m\\ \sigma\sin I\cos\varphi-\rho\sin\varphi\\ -\sigma\sin I\sin\varphi-\rho\cos\varphi\\ 1\end{pmatrix}\tag{9.61}$$

其中天平动参数 σ ,ρ,τ **由**(9.57)**式表达.**

由于

$$\begin{cases}I=1^\circ 32'32''.7=1^\circ.542417=0.026920\\ \sin I=0.0269,\quad \cos I=0.9996\\ 1-\cos I=0.000362\end{cases}\tag{9.62}$$

还可以作如下简化:

$$\tau-\sigma(1-\cos I)=\tau+O(6\times10^{-6}),\tag{9.63}$$

$$\sigma\sin I\cos\varphi-\rho\sin\varphi=(\sigma_1-\sigma_2)\sin\omega_m-\sigma_3\sin(l_m+\omega_m),\tag{9.64}$$

$$-\sigma\sin I\sin\varphi-\rho\cos\varphi=(\sigma_1+\sigma_2)\cos\omega_m+\sigma_3\cos(l_m+\omega_m).\tag{9.65}$$

采用以上简化,转换矩阵(A)**有如下形式:**

$$(A)=\begin{pmatrix}-\cos L_m+\tau\sin L_m\\ \sin L_m+\tau\cos L_m\\ -\sigma_1\sin(L_m-\omega_m)-\sigma_2\sin(L_m+\omega_m)-\sigma_3\sin(2L_m-\Omega_m\\ -\sin L_m-\tau\cos L_m\\ -\cos L_m+\tau\cos L_m\\ \sigma_1\cos(L_m-\omega_m)+\sigma_2\cos(L_m+\omega_m)+\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m)\\ \sigma_{11}\sin\omega_m-\sigma_3\sin(L_m+\omega_m)\\ \sigma_{12}\cos\omega_m+\sigma_3\cos(L_m+\omega_m)\end{pmatrix}\tag{9.66}$$

由于

$$C_{2,0}=2\times10^{-4},\quad C_{2,2}=0.25\times10^{-4},$$

对于外推月球低轨卫星 10^2 **弧段的位置精度要求达到米级时,**$C_{2,0}$ **的附加位必须考虑天平动中** τ_1,τ_2,τ_3 **和** $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ **的全部,而** $C_{2,2}$ **的附加位,只需**

考虑 τ_1 和 σ_{11} ,σ_{12} 部分. 略去推导过程,直接给出 $C_{2,0}$ 项对应的附加位如下:

$$\begin{aligned}V_2(C_{2,0}) &= (-J_2/a^3)(a/r)^3[(3/2)(z/r)^2-(1/2)] \\ &= (-J_2/a^3)(a/r)^3\{[(3/2)(z/r)^2-(1/2)]- \\ &\quad 3\sigma_1(z/r)[(x/r)\sin(L_m-\omega_m)-(y/r)\cos(L_m-\omega_m)]- \\ &\quad 3\sigma_2(z/r)[(x/r)\sin(L_m+\omega_m)-(y/r)\cos(L_m+\omega_m)]- \\ &\quad 3\sigma_3(z/r)[(x/r)\sin(2L_m-\Omega_m)-(y/r)\cos(2L_m-\Omega_m)]\}.\end{aligned} \tag{9.67}$$

这里 $J_2=-C_{2,0}$,相应的以轨道根数表达的形式为

$$\begin{aligned}\Delta V_2 = &(3J_2/4a^3)(a/r)^3\{-\sin 2i(1-\cos 2u)\times[\sigma_1\cos(L_m-\omega_m- \\ &\Omega)+\sigma_2\cos(L_m+\omega_m-\Omega)+\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)]+ \\ &2\sin i(\sin 2u)[\sigma_1\sin(L_m-\omega_m-\Omega)+\sigma_2\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+ \\ &\sigma_3\sin(2L_m-\Omega_m-\Omega)].\end{aligned} \tag{9.68}$$

其中 $u=f+\omega$,用求平均值的方法,可将 ΔV_2 分解成如下两部分:

$$\begin{aligned}\Delta V_{21} &= \overline{\Delta V_2} \\ &= -(3J_2/4a^3)\sin 2i(1-e^2)^{-3/2}\times[\sigma_1\cos(L_m-\omega_m-\Omega)+ \\ &\quad \sigma_2\cos(L_m+\omega_m-\Omega)+\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)],\end{aligned} \tag{9.69}$$

$$\begin{aligned}\Delta V_{2s} = \Delta V_2-\overline{\Delta V_2} = &(3J_2/4a^3)\{-\sin 2i[(a/r)^3-(1-e^2)^{-(3/2)}- \\ &(a/r)^3\cos 2u]\times[\sigma_1\cos(L_m-\omega_m-\Omega)+\sigma_2\cos(L_m+\omega_m-\Omega)+ \\ &\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)]+2\sin i(a/r)^3\sin 2u[\sigma_1\sin(L_m-\omega_m \\ &-\Omega)+\sigma_2\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\sigma_3\sin(2L_m-\Omega_m-\Omega)]\},\end{aligned} \tag{9.70}$$

ΔV_{21} 和 ΔV_{2s} 分别为附加位的长周期和短周期两个部分.

同样给出 $C_{2,2}$ 项的附加位如下:

$$\begin{aligned}V(C_{2,2}) &= (3C_{2,2}/a^3)(a/r)^3((x^2-y^2)/r^2) \\ &= (3C_{2,2}/a^3)(a/r)\{[(1/r^2)(x^2-y^2)\cos 2L_m+ \\ &\quad (2xy)\sin 2L_m]-2\tau[(1/r^2)(x^2-y^2)\sin 2L_m- \\ &\quad 2(xy/r^2)\cos 2L_m]-2\sigma_1(z/r)[(x/r)\sin(L_m+\omega_m)- \\ &\quad (y/r)\cos(L_m+\omega_m)]-2\sigma_2(z/r)[(x/r)\sin(L_m-\omega_m)- \\ &\quad (y/r)\cos(L_m-\omega_m)]\}.\end{aligned} \tag{9.71}$$

相应的轨道根数形式为

$$\begin{aligned}\Delta V_2(C_{2,2}) = &-(3C_{2,2}/a^3)(a/r)^3\{\tau[\sin(2L_m-2\Omega)(2\cos 2u+\sin^2(1- \\ &\cos 2u))-\cos(2L_m-2\Omega)(2\cos i\sin 2u)]+\sigma_1\sin i[\sin(L_m+ \\ &\omega_m-\Omega)\sin 2u-\cos i\cos(L_m+\omega_m-\Omega)(1-\cos 2u)]+\end{aligned}$$

$$\sigma_2 \sin i[\sin(L_m - \omega_m - \Omega) \sin 2u - \cos i \cos(L_m - \omega_m - \Omega)(1 - \cos 2u)]\}, \tag{9.72}$$

$$(\Delta V_{2,2})_1 = -(3C_{2,2}/a^3) \sin i(1-e^2)^{-3/2}\{\tau \sin i[\sin(2L_m - 2\Omega)] - \sigma_1 \cos i[\cos(L_m + \omega_m - \Omega)] - \sigma_2 \cos i[\cos(L_m - \omega_m - \Omega)]\}, \tag{9.73}$$

$$\begin{aligned}(\Delta V_{2,2})_s = &-(3C_{2,2}/a^3)\{\sin i[\tau \sin i \sin(2L_m - 2\Omega) - \sigma_1 \cos i \cos(L_m + \omega_m - \Omega) - \sigma_2 \cos i \cos(L_m - \omega_m - \Omega)][(a/r)^3 - (1-e^2)^{-3/2}] \\ &+ \tau[(2-\sin^2 i)\sin(2L_m - 2\Omega)(a/r)^3 \cos 2u - (2\cos i)\cos(2L_m - 2\Omega)(a/r)^3 \sin 2u] + \sigma_1 \sin i[\sin(L_m + \omega_m - \Omega)(a/r)^3 \sin 2u + \cos i \cos(L_m + \omega_m - \Omega)(a/r)^3 \cos 2u] \\ &+ \sigma_2 \sin i[\sin(L_m - \omega_m - \Omega)(a/r)^3 \sin 2u + \cos i \cos(L_m - \omega_m - \Omega)(a/r)^3 \cos 2u\}.\end{aligned} \tag{9.74}$$

（2）天平动引起的坐标系附加摄动解

根据天平动引起的附加摄动位 $\Delta V(C_{2,0})$ 和 $\Delta V(C_{2,2})$ 可知，对月球卫星轨道只有长、短周期影响. 在米级精度要求下，只要给出长周期变化项即可，至于短周期项，只有轨道半长径 a 需要考虑，这是由于沿迹根数 M 的精度要求所致.

采用与前面相同的拟平均根数法，很容易建立相应的摄动解，相应的长周期变化项为

$$\Delta\sigma_L(t) = \sigma_L(t) - \sigma_L(t_0), \tag{9.75}$$

对于 $C_{2,0}$ 的附加部分 $\sigma_L(t)$ 的具体形式如下：

$$a_L(t) = 0, \tag{9.76}$$

$$e_L(t) = 0, \tag{9.77}$$

$$i_L(t) = -(3J_2/2p^2) \cos i \times \left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1} \cos(L_m - \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_2}{\alpha_2} \cos(L_m + \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_3}{\alpha_3} \cos(2L_m - \Omega_m - \Omega)\right], \tag{9.78}$$

$$\Omega_L(t) = -(3J_2/2p^2) \frac{\cos 2i}{\sin i} \times \left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1} \sin(L_m - \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_2}{\alpha_2} \sin(L_m + \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_3}{\alpha_3} \sin(2L_m - \Omega_m - \Omega)\right], \tag{9.79}$$

$$\omega_L(t) = (3J_2/2p^2) \frac{\cos i}{\sin i}(1 - 5\sin^2 i) \times \left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1} \sin(L_m - \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_2}{\alpha_2} \sin(L_m + \omega_m - \Omega) + \frac{\sigma_3}{\alpha_3} \sin(2L_m - \Omega_m - \Omega)\right], \tag{9.80}$$

$$M_{\mathrm{L}}(t)=-(9J_2/4p^2)\sqrt{1-e^2}\sin 2i\times\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\sin(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)+\right.$$

$$\left.\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\sin(L_{\mathrm{m}}+\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\sin(2L_{\mathrm{m}}-\Omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right],\qquad(9.81)$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{n}(\dot{L}_{\mathrm{m}}-\dot{\omega}_{\mathrm{m}}-\dot{\Omega})=O(10^{-3})\\ \alpha_2=\dfrac{1}{n}(\dot{L}_{\mathrm{m}}+\dot{\omega}_{\mathrm{m}}-\dot{\Omega})=O(10^{-3})\\ \alpha_3=\dfrac{1}{n}(2\dot{L}_{\mathrm{m}}-\dot{\Omega}_{\mathrm{m}}-\dot{\Omega})=O(10^{-3})\end{cases}.\qquad(9.82)$$

对于 $C_{2,2}$ 的附加项部分，相应的结果如下：

$$a_{\mathrm{L}}(t)=0,\qquad(9.83)$$

$$e_{\mathrm{L}}(t)=0,\qquad(9.84)$$

$$i_{\mathrm{L}}(t)=-(3C_{2,2}/p^2)\times\left[\frac{2\tau}{\alpha_4}\sin i\sin(2L_{\mathrm{m}}-2\Omega)-\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\cos i\cos(L_{\mathrm{m}}+\right.$$

$$\left.\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)-\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\cos i\cos(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right],\qquad(9.85)$$

$$\Omega_{\mathrm{L}}(t)=(3C_{2,2}/p^2)\times\left[\frac{2\tau}{\alpha_4}\cos i\cos(2L_{\mathrm{m}}-2\Omega)+\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\frac{\cos 2i}{\sin i}\sin(L_{\mathrm{m}}+\omega_{\mathrm{m}}\right.$$

$$\left.-\Omega)+\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{\cos 2i}{\sin i}\sin(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right],\qquad(9.86)$$

$$\omega_{\mathrm{L}}(t)=-(3C_{2,2}/p^2)\times\left[\frac{\tau}{\alpha_4}(2-5\sin^2 i)\cos(2L_{\mathrm{m}}-2\Omega)+\right.$$

$$\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\frac{\cos i}{\sin i}(1-5\sin^2 i)\sin(L_{\mathrm{m}}+\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)+$$

$$\left.\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{\cos i}{\sin i}(1-5\sin^2 i)\sin(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right],\qquad(9.87)$$

$$M_{\mathrm{L}}(t)=(9C_{2,2}/p^2)\sqrt{1-e^2}\times\left[\frac{\tau}{\alpha_4}\sin^2 i\cos(2L_{\mathrm{m}}-2\Omega)+\right.$$

$$\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\sin i\cos i\sin(L_{\mathrm{m}}+\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)+$$

$$\left.\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\sin i\cos i\sin(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right],\qquad(9.88)$$

其中

$$\alpha_4=\frac{1}{n}(2\dot{L}_{\mathrm{m}}-2\dot{\Omega})=O(10^{-3}).\qquad(9.89)$$

为了使平近点角 M 达到同样的精度要求，如有需要，应考虑轨道

半长径 a 的短周期项,上述两部分($C_{2,0}$和 $C_{2,2}$)附加摄动引起的 a 的短周期项为

$$a_s(t)=2a^2[(\Delta V_2)_s+(\Delta V_{2,2})_s]. \tag{9.90}$$

经数值验证表明,这里给出的月球物理天平动对月球卫星轨道影响的摄动分析解是正确的,其中 $C_{2,2}$项的影响要比 $C_{2,0}$项的影响小一个量级.

§9.5 月球卫星运动的轨道寿命与冻结轨道问题

众所周知,大气耗散作用是决定卫星轨道寿命的重要因素,就像人造地球卫星那样,特别是低轨卫星,由于大气耗散作用,轨道不断变小变圆,最终落入地球稠密大气层被烧毁而结束其轨道寿命. 但对于卫星轨道寿命问题,还有另一种动力学机制,即存在一种摄动作用,会使其轨道偏心率 e 增大(实为变幅较大的长周期项),导致其近星距 $r_p=a(1-e)\leqslant a_e$(中心天体赤道半径)而与中心天体相撞,结束其轨道寿命. 在这种动力学机制中,中心天体的动力学扁率 J_2 的大小起着决定性作用,相应的表现对于高轨卫星和低轨卫星有所不同.

1. 高轨卫星情况

无论是有或无大气的中心天体,对于它们的高轨卫星,耗散作用已不重要. 对于非耗散效应,如中心天体的扁率(J_2)和第三体质点引力,这两种重要的摄动源均为保守力摄动,相应的卫星轨道半长径 a 仅有微小的周期变化,而高轨卫星轨道偏心率 e 变化的幅度将是影响其轨道寿命的关键因素. 在保守力摄动下,尽管偏心率 e 没有长期变化,但可能有因小分母引起的变幅较大的长周期变化. 根据第四章和第五章分别给出的 J_2 项摄动和第三体引力摄动的摄动解,e 的长周期摄动项可分别写成如下形式:

$$\begin{aligned}[e_L(t)]_1 = {} & \mu a_e^2\left(\frac{3J_2}{2a^2}\right)\sin^2 i\left[\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i\right)^{-1}+\right. \\ & \left.\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{6(1+\sqrt{1-e^2})^2}\right]\left(\frac{e}{1-e^2}\right)\cos 2\omega,\end{aligned} \tag{9.91}$$

$$\begin{aligned}[e_L(t)]_2 = {} & -\frac{15}{16}\left(\frac{\mu' a^3}{\mu a'^3}\right)(1-e'^2)^{-3/2}\sin^2 i(e\sqrt{1-e^2})\times \\ & \left(\frac{n}{\dot\omega}\right)[\cos 2\omega+O(\sin i')].\end{aligned} \tag{9.92}$$

其中 μ 和 μ'分别为中心天体和摄动天体的质心引力常数,$\dot\omega$是卫星轨道拱

线的进动速率,即摄动长期项的系数($\omega_1+\omega_2$),有

$$\left(\frac{\dot{\omega}}{n}\right)=\left[\left(\frac{3J_2a_e^2}{2a^2}\right)+\left(\frac{3}{4}\ \frac{\mu' a^3}{a'3}\right)\right]\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)+O(e^2,e'^2,\sin^2 i')\right]. \tag{9.93}$$

(9.92)式和(9.93)式右端的 $O(\sin i')$ 等项无需具体写出,因为摄动天体的 e' 和 i' 一般都较小,对讨论的问题无实质性影响. (9.91)~(9.93)式就是讨论高轨卫星轨道寿命的主要理论依据.

卫星近星距 r_p 的变化,关键在于 e 的变幅. 从(9.91)式可看出,对于扁率摄动,e 的变化幅度主要取决于因子 J_2/a^2,对一特定的中心天体(J_2 值确定),轨道越高,e 的变化幅度越小. 而第三体摄动效应却不同,从(9.92)式可看出,e 的变化幅度在很大程度上依赖于由(9.93)式表达的$\dot{\omega}$的大小. 对于低轨卫星,$\dot{\omega}$的大小取决于月球扁率 J_2,其值一般不太小. 对于高轨卫星,扁率摄动项减小,第三体引力摄动项增大,其临界值(亦即$\dot{\omega}$的最小值,相应 e 的变化出现小分母)对应上述两项摄动量级相等的情况,有

$$\frac{3J_2a_e^2}{2a^2}=\frac{3}{4}\ \frac{\mu' a^3}{a'^3}. \tag{9.94}$$

由此可知,相应的卫星轨道半长径的临界值 a_c 为

$$a_c=\left[2\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)\left(\frac{a'}{a_e}\right)^3 J_2\right]^{1/5} a_e, \tag{9.95}$$

这里 a' 是第三体“相对”中心天体的轨道半长径.

对于地球—卫星—月球系统,$a_c=8.2a_e$(地球赤道半径),而对于月球—卫星—地球系统,由于月球的 J_2 值小,$a_c=2.2a_e$(月球赤道半径). 当高轨卫星的轨道半长径 a 接近 a_c 时,e 的变幅会增大,有可能大到使卫星近星距 r_p 减小到等于 a_e 的状态,从而与地球或月球相撞. 文[13~15]中均有算例,像月球轨道器 $a_0=4.0a_e$, $e_0=0.20$, $i_0=85°$,运行不到 6 个恒星月,就因 e 增大,使 $r_p=a_e$ 从而落到月球上. 这种动力学机制相当于起着“保护”作用的中心天体的动力学扁率较小,卫星轨道还是被第三体质点引力效应周期性地拉扁,扁到一定程度即出现上述卫星与中心天体相撞的现象.

2. 月球低轨卫星的轨道寿命

尽管月球无大气,但在非球形引力作用下,低轨卫星的近月距 $r_p=a(1-e)$ 也会减小,当 $r_p=a_e$ 时,卫星将与月球相撞. 轨道半长径 a 在非球形引力作用下,只有振幅较小的短周期变化,主要源于月球动力学扁率 J_2 项摄动,变化量级只有 10^{-4},不会导致 r_p 的明显变化. 显然,r_p 有明显减小趋

势的原因是轨道偏心率 e 有振幅较大的长周期变化 Δe_L. 文[16]有过简单计算结果,文[17]讨论过简单的动力学机制,这里将进一步深入地讨论该问题.

在月球非球形引力和地球引力两种主要摄动源的作用下,消除短周期变化后,e 的长周期变化满足下列方程:

$$\frac{\mathrm{d}e_L}{\mathrm{d}t} = n(1-e^2)\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(-1)^{(l-\delta)/2}(l-2p)F(i)\left[\frac{1}{e}K(e)\right]I(\omega) - n(1-e^2)\sum_{l=2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(l-2p)\,F_{lmp}(i)\left[\frac{1}{e}K(e)\right]\Phi_{lmp}(\omega,\theta) + O(em'). \tag{9.96}$$

此方程的原始形式在前面 §9.4 中曾给出过,为了探讨月球低轨卫星的轨道寿命问题,这里又作了一些必要的改变.(9.96)式右端第一和第二大项分别为带谐项($J_l=-C_{l,0}$)和田谐项摄动,第三大项为地球引力摄动,含有 e 因子. 方程中的 $n=a^{-3/2}$,采用符号 p_0 是为了与式中求和取值 p 区分开. 有关表达式改变后的形式如下:

$$\delta = \frac{1}{2}[1-(-1)^l] = \begin{cases}1, l\ \text{奇},\\ 0, l\ \text{偶},\end{cases} \tag{9.97}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{e}K(e) = \displaystyle\sum_{\alpha(2)=(l-2p)}^{l-2} C_{lp\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha} = \begin{cases}O(e^0), l\ \text{奇},\\ O(e), l\ \text{偶},\end{cases}\\[2ex] C_{lp\alpha} = \dbinom{l-1}{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \frac{1}{2}(\alpha-(l-2p))\end{pmatrix}, \dbinom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(m-n)!},\end{cases} \tag{9.98}$$

$$\begin{cases}F(i) = -\displaystyle\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}C_{lpq}(\sin i)^{(l-2p+2q)},\\[2ex] \delta_p = \begin{cases}0, l-2p=0,\\ 1, l-2p\neq 0,\end{cases}\\[2ex] C_{lpq} = \dbinom{l}{p-q}\dbinom{2l-2p+2q}{l}\left(\dfrac{l-2p+2q}{q}\right)\end{cases} \tag{9.99}$$

$$I(\omega) = -1(1-\delta)\,\sin(l-2p)\omega + \delta\cos(l-2p)\omega. \tag{9.100}$$

田谐项摄动中的 $\Phi(\omega,\theta)$涉及的 $\theta=\Omega-S(t)$,$S(t)$是月固坐标系中 X 轴(即 ξ' 轴)方向的经度,随月球自转而变化. $\Phi(\omega,\theta)$的表达式和一般的倾角函数 $F_{lmp}(i)$以及地球引力摄动项 $O(em')$,不再具体给出,因下面的讨论表明,可略去相应的两类摄动影响.

对(9.96)式作进一步分析,l 为奇数时,右函数中含有 $O(e^0)$因子,即以 $e^0\cos\omega$ 形式出现,l 为偶数时却含有 $O(e)$因子,是以 $e\sin 2\Omega$ 形式出现. 而

考虑月球低轨卫星寿命时，相应的 e 肯定是小量，有 $e<0.1$. 事实上，对于平均高度为 100 km 的低轨卫星，只要 e 达到 $0.05\sim0.06$，即可使 r_p 接近 a_e 值，若 e 增大将会立即撞上月球. 因此，(9.96)式中只有对应 l 为奇数的摄动项值得考虑，但与奇次带谐项相比，田谐项影响要小一个量级. 故对于理论分析而言，只要保留(9.96)式中的奇次带谐摄动部分即可. 舍去的各种摄动项的影响，可在后面对相应的完整力模型进行模拟计算中去考察，实际计算结果将会证实上述简化的合理性. 在(9.96)式中只保留奇次带谐项摄动部分，但仅取其 $O(e^0)$ 项，对应求和中 $l-2p=1$ 的取值，从而简化成下列形式：

$$\frac{\mathrm{d}e_L}{\mathrm{d}t}=\sin i\sum_{l(2)\geqslant3}(-1)^{(l-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)(l-1)(J_1/P_0^l)F^*(i)(n\cos\omega),\tag{9.101}$$

其中

$$\begin{cases}F^*(i)=\sum\limits_{q=0}^{(l-1)/2}(-1)^q\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(l+2q)}C_{lpq}^*(\sin^2 i)^q,\\ C_{lpq}^*=\dbinom{l}{(l-1)/2-q}\dbinom{l+2q+1}{l}\left(\dfrac{2q+1}{q},\right)\end{cases}\tag{9.102}$$

(9.101)式求和中 $l(2)$表示取值“步长”为 2，即 $l(2)=3,5,\cdots$. $\omega=\bar{\omega}(t)=\bar{\omega}_0+\omega_c(t-t_0)$，$\omega_c$ 是$\bar{\omega}(t)$的长期变率，如果仅取其由 J_2 项给出的一阶变率 ω_1，有

$$\omega_c=\omega_1=\frac{3J_2}{2p_0^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right).\tag{9.103}$$

积分(9.101)式给出 e 的长周期变化 Δe_l 的表达式如下：

$$\Delta e_L=e_L(t)-e_L(t_0)=\sin i\left\{\sum_{l(2)\geqslant3}(-1)^{(l-1)/2}\frac{(l-1)}{3p_0^l}\left(\frac{J_l}{J_2}\right)F^*(i)\right\}\cdot\left[\sin\bar{\omega}(t)-\sin\bar{\omega}(t_0)\right]/\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right).\tag{9.104}$$

由此可以看出，e 的变幅主要取决于奇次带谐项系数 $J_{2l-1}(J\geqslant2)$与 J_2 的相对大小以及倾角函数 $F^*(i)$的性质，有

$$|\Delta e_l|\sim O(J_{2l-1}/J_2)\cdot F^*(i).\tag{9.105}$$

对于地球卫星，由于

$$O(J_{2l-1}/J_2)=10^{-3},\tag{9.106}$$

相应的轨道偏心率的变幅很小，而月球卫星则不同，由于

$$O(J_{2l-1}/J_2)=10^{-1}.\tag{9.107}$$

故完全有可能使月球低轨卫星的轨道偏心率 e 增大到使 $r_p=a_e$ 的状态. 当

然，这还要取决于$(J_{2l-1}/J_2)F^*(i)$值的变化状况.

由于月球非球形引力位的特征，谐系数J_{2l-1}随阶l的升高并无明显地减小，由函数$(J_{2l-1}/J_2)F^*(i)$的特征，长周期变化Δe_l的模$|\Delta e_l|$随着不同的i值$(0°< i\leqslant 90°)$将出现多个极小与极大值，相应的r_p值将不会达到a_e或必然会达到a_e值，亦即月球低轨卫星的轨道寿命既取决于奇次带谐项的摄动影响，又与轨道的空间定向有关. 由于$\sin i$的特征，$90°\leqslant i<180°$的情况与$0°< i\leqslant 90°$的情况类似.

因有关低轨月球卫星的轨道寿命与冻结轨道有某种联系，下面首先作一理论分析，然后再作相应的数值验证.

3. 关于冻结轨道

与地球卫星类似，在月球非球形引力作用下，相应的平均系统（即消除轨道变化的短周期部分）可能存在一种特解（详见第4章§4.7）：

$$\bar{a}(t)=a_0,\quad \bar{e}(t)=e_0,\quad \bar{i}(t)=i_0,\bar{\omega}(t)=\omega_0=90°\text{ 或 }270°. \tag{9.108}$$

拱线不动，此即冻结轨道，此解对i_0无任何限制，对应不同的i_0有相应的e_0存在. 那么根据(9.104)式给出的Δe_l，对于平均高度为100 km的低轨卫星，是否存在某些轨道配置，通过冻结轨道的选择保持$r_p>a_e$使其不会与月球相撞呢？

首先考查冻结轨道的存在情况，同样由于月球引力场的特征，与地球卫星的冻结轨道状况亦有差别. 对于地球卫星，基本上由J_2和J_3两项即可确定冻结轨道解，而对月球卫星则不然，文[18]有过简单讨论，这里将进一步深入讨论. 对于平均轨道根数，仍记作a,e,i,ω，略去推导过程，下面将直接给出相应的冻结轨道解. 当a值给定的情况下，对于任一i值，冻结轨道对应的e值满足下列条件：

$$e=\pm\sin i\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)(l-1)\left(\frac{J_l}{J_2}\right)F^*(i)\left(\frac{n}{\omega_c}\right), \tag{9.109}$$

其中ω_c是ω的长期变率. 与上一段讨论e的长周期变化对应，若只取由J_2给出的一阶变率ω_1，则(9.109)式简化为下列形式：

$$e=\pm\sin i\left\{\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\frac{(l-1)}{3p_0^l}\left(\frac{J_l}{J_l}\right)F^*(i)\right\}\Big/\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right). \tag{9.110}$$

式中“＋”号对应冻结轨道解$\omega\equiv\omega_0=90°$，“－”号对应$\omega_0=270°$，即前者对

应(9.110)式右端值(除前面的±外)为正,而后者则对应右端值为负.这一结果与地球卫星情况有差别,地球卫星的冻结轨道主要取决于 J_3 项,且总有 $\omega \equiv \omega_0 = 90°$,由类似的(9.110)式给出的偏心率 e 对不同的 i 值均很小,即 $e_0 = O(10^{-3})$,而对于月球低轨卫星则不同,对不同的 i 值,冻结轨道解有两种可能,即 $\omega \equiv \omega_0 = 90°$或 $270°$,且相应的 e_0 值可能较大.

从(9.110)式和上一段给出的(9.104)式可以看出,在考虑主要摄动因素的前提下,冻结轨道解的 e 值与 e 的长周期变化幅度 $|\Delta e_L|$ 是相同的,而这一解是在平均系统中给出的,且仅在 i 变化的小邻域内才能保持,对于月球卫星,由于月球非球形引力位的特征,实际状况是 $\omega(t)$ 有明显的变化幅度.由此可知,当 $|\Delta e_L|$ 对应某些 i 值为极小时,即使冻结轨道不能保持(即 $\omega(t)$ 有大范围变化),也不会出现 e 有明显增大的可能,r_p 不会降至 a_e 值;相反,当 $|\Delta e_L|$ 对应某些 i 值为极大时,即使冻结轨道(此时对应解的 e 值较大)能基本保持(即 $\omega(t)$ 的变化范围不大),e 的变化也有可能使 r_p 降至 a_e 大小,结束其轨道寿命.也就是说,月球低轨卫星的轨道寿命并不依赖冻结轨道的选择(即轨道偏心率 e 和倾角 i 按条件(9.110)的选择),而主要取决于(9.104)式中所确定的 Δe_L 的模,这归结为月球非球形引力场的基本特征和卫星轨道倾角 i 的选择.我们将在下一段给出相应的模拟计算来证实月球低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系.

4. 模拟计算——理论分析的数值验证

为了验证理论分析的正确性,对低轨卫星(平均高度 100 km),可通过下列三种情况的计算来证实,即

(1) 根据分析解(9.104),扫描似地从 $i = 0°.5$ 到 $179°.5$,间隔 $1°$,计算了对应的 $|\Delta e_L|$ 值,看极小

与极大的分布状况.

(2) 根据分析解(9.110)式,同样对 $i = 0°.5 \sim 179°.5$,间隔 $1°$求出相应的冻结轨道解:e_0 和对应的 ω_0 值.

(3) 考虑主要摄动因素(月球非球形引力,地球引力和太阳引力),对完整的运动方程计算低轨卫星(取平均高度 $\overline{h} = 100$ km,$e_0 = 0.001$)随倾角 i_0 的不同,相应近月点高度 h_p 的变化情况,即轨道寿命与倾角 i 的关系.

上述第(3)部分的计算正是为了证实第(1)和第(2)两部分由分析解给出的结果的正确性,从而确定月球低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系,同时也进一步证实这种结果主要是由月球非球形引力场特征所决定的.

计算中,月球引力场模型采用了美国 JPL 的 LP75G 模型,前两部分对

引力场球谐展开式阶次 l 取 30～45,无实质性差别,第(3)部分是取完整的力模型,即 l 取到 75,m 取 $0\sim l$.

关于 $|\Delta e_L|$,对应极小值有如下几个"稳定区"(即 $|\Delta e_L|$ 值很小):

$$i=0^\circ,\quad 27^\circ,\quad 50^\circ,\quad 77^\circ,\quad 85^\circ.$$

根据 $\sin i$ 的性质,在 90°～180°间有对应的"稳定区",即 95°,103°,….

关于冻结轨道,与上述 $|\Delta e_L|$ 的情况对应,对应"稳定区"的倾角 i_0,相应的冻结轨道解 e_0 的值均较小,而对应"不稳定区"的倾角 i_0,则相应的解 e_0 值均较大. 表 9.1 列出了部分结果,对应 l 取 40.

根据上述结果,考虑完整力模型后,第(3)部分的计算应有如下预期结果,即在上述"稳定区"(即取 $i_0=0^\circ,27^\circ,\cdots$),低轨卫星的轨道寿命应很长,而相反,则轨道寿命应很短. 为了节省篇幅表 9.2 列出了对 i 取值有一定间隔的结果. 表中 $\min h_p=0.0$ 或接近 0.0,即表明与月球相撞,T_c 即为对应的轨道寿命值. 对所有 i_0 值计算间隔均为 10 年,当在较短间隔内 $h_p=0.0$ 时计算结束. 而在"稳定区",如 $i_0=85^\circ$和 95°,即使卫星运行 10 年近月点高度 h_p 也不会明显降低,极小值仍有 60 多公里高. 图 9.4～图 9.7,分别为 $i_0=40^\circ,90^\circ$和 85°,95°时 h_p 随时间的变化状态,前者分别为 48 天和 172 天与月球相撞,后者 10 年期间的极小值还分别有 60 km 和 68 km 高.

上述数值结果一方面验证了理论分析的正确性,同时也给出了低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系. 但这些保持不与月球相撞的所谓"稳定区"的范围(对轨道倾角 i_0 值而言)都较小,考虑到各种因素(包括发射误差的影响),即使允许选择适当的倾角,也还要注意运行过程中的轨道控制(耗费较小能量的轨道机动).

最后说明两点:

(1) 低轨卫星的轨道寿命与轨道升交点 Ω 的初值无关,这一点从非球形引力位带谐项的性质不难看出,实际计算结果也证实了这一点,在上述第(3)种情况的计算中,改变 Ω 的不同初值,对计算结果 h_p 的变化无实质性影响.

(2) 月球卫星的冻结轨道难以保持,即使是那种特殊的冻结轨道,即临界倾角情况,$i=i_c=63^\circ26'$,在采用实际力模型对应的第(3)种计算中,ω 仍在大范围内变化,未保持"冻结".

表 9.1　冻结轨道解

i(deg)	ω(deg)	e	i(deg)	ω(deg)	e
0.5	90.0	0.002831	5.0	90.0	0.025923
1.0	90.0	0.005647	10.0	90.0	0.040836
27.0	90.0	0.005333	20.0	90.0	0.021863
28.0	270.0	0.002481	35.0	270.0	0.060784
49.5	270.0	0.007062	40.0	270.0	0.047442
50.0	90.0	0.000870	45.0	270.0	0.046151
75.0	270.0	0.009016	55.0	90.0	0.140493
76.0	270.0	0.002874	60.0	270.0	0.253887
77.0	270.0	0.005638	63.0	270.0	0.188417
85.0	270.0	0.001753	80.0	90.0	0.026043
95.0	270.0	0.001728	90.0	270.0	0.043215

表 9.2　月球低轨卫星轨道寿命的状况

i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)	i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)
1.0	2723.1	0.0362	33.9	60.0	88.2	0.0548	0.0
2.0	549.0	0.0414	24.6	61.0	88.1	0.0547	0.0
3.0	1852.7	0.0479	13.0	63.43	85.9	0.0545	0.0
4.0	273.2	0.0550	0.0	65.0	88.0	0.0546	0.0
5.0	49.5	0.0548	0.0	67.0	115.5	0.0547	0.0
7.5	42.9	0.0545	0.0	69.0	224.1	0.0523	3.9
10.0	42.5	0.0545	0.0	70.0	3347.5	0.0464	14.9
12.5	43.9	0.0547	0.0	71.0	3407.0	0.0406	25.5
15.0	43.9	0.0547	0.0	72.0	2453.3	0.0348	36.2
17.5	46.3	0.0548	0.0	73.0	1469.4	0.0333	39.0
20.0	77.0	0.0547	0.0	74.0	1498.4	0.0339	37.8
22.0	80.7	0.0532	3.2	75.0	1500.5	0.0340	37.8
24.0	80.0	0.0525	4.4	76.0	1449.0	0.0336	38.5
26.0	2543.1	0.0515	6.0	77.0	3383.8	0.0381	30.4
27.0	2219.9	0.0419	23.6	79.0	401.1	0.0544	0.0
28.0	2599.4	0.0264	52.1	80.0	320.6	0.0545	0.0
29.0	1404.4	0.0251	54.4	81.0	294.0	0.0545	0.0
30.0	2084.1	0.0453	17.3	82.0	294.7	0.0547	0.0

续 表

i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)	i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)
31.0	91.6	0.0547	0.0	83.0	403.2	0.0544	0.0
33.0	46.2	0.0547	0.0	84.0	2941.4	0.0419	23.0
35.0	44.5	0.0546	0.0	85.0	1711.7	0.0220	59.6
37.0	45.2	0.0546	0.0	86.0	3401.8	0.0414	23.6
39.0	47.4	0.0548	0.0	87.0	308.8	0.0523	4.0
40.0	47.9	0.0547	0.0	88.0	174.6	0.0542	0.3
41.0	48.4	0.0546	0.0	89.0	171.3	0.0545	0.0
43.0	48.3	0.0548	0.0	90.0	172.0	0.0545	0.0
45.0	49.7	0.0544	0.7	91.0	193.0	0.0546	0.0
47.0	72.7	0.0545	0.0	92.0	226.7	0.0546	0.0
49.0	177.9	0.0546	0.0	93.0	309.9	0.0546	0.0
50.0	2522.0	0.0545	0.0	94.0	1133.9	0.0392	28.1
51.0	1908.1	0.0337	38.5	95.0	1102.0	0.0172	68.3
52.0	211.9	0.0547	0.0	96.0	1557.2	0.0253	53.6
54.0	88.9	0.0546	0.0	97.0	1118.8	0.0464	14.5
56.0	83.1	0.0547	0.0	98.0	236.2	0.0546	0.0
58.0	84.6	0.0546	0.0				

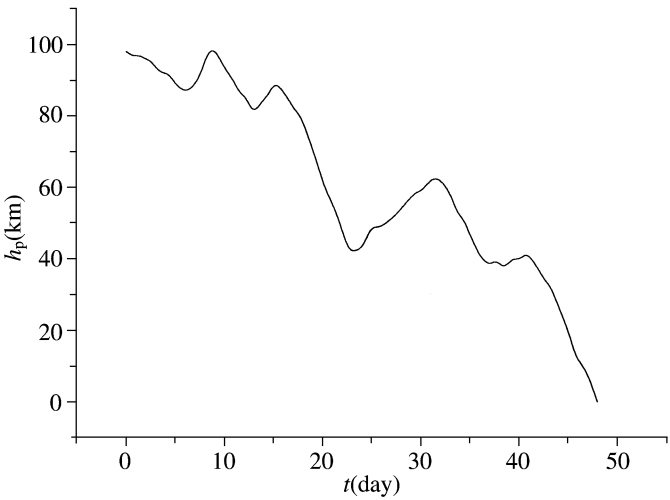

图 9.4 初始轨道倾角 i_0＝40°的月球低轨卫星轨道寿命

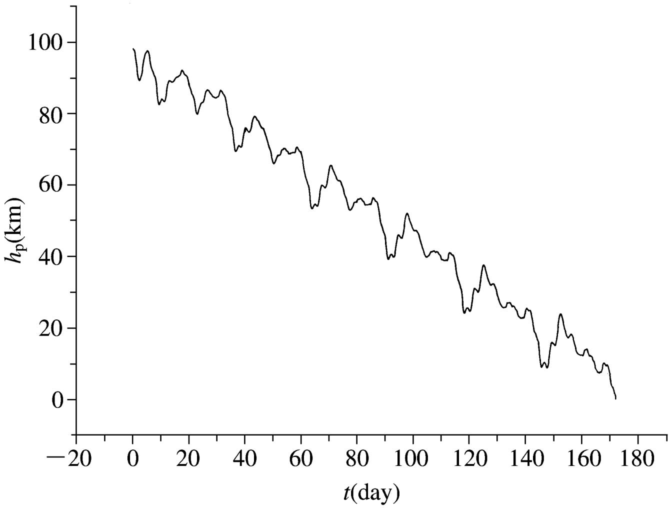

图 9.5　初始轨道倾角 $i_0=90°$的月球低轨卫星轨道寿命

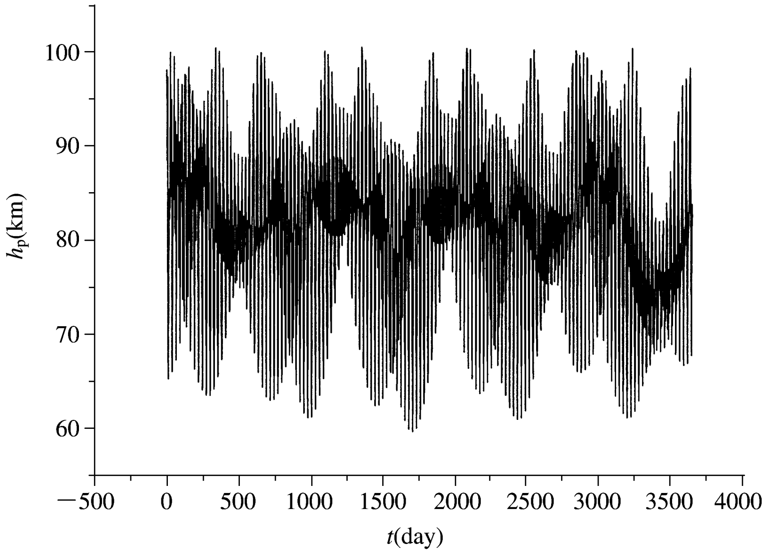

图 9.6　初始轨道倾角 $i_0=85°$的月球低轨卫星轨道寿命

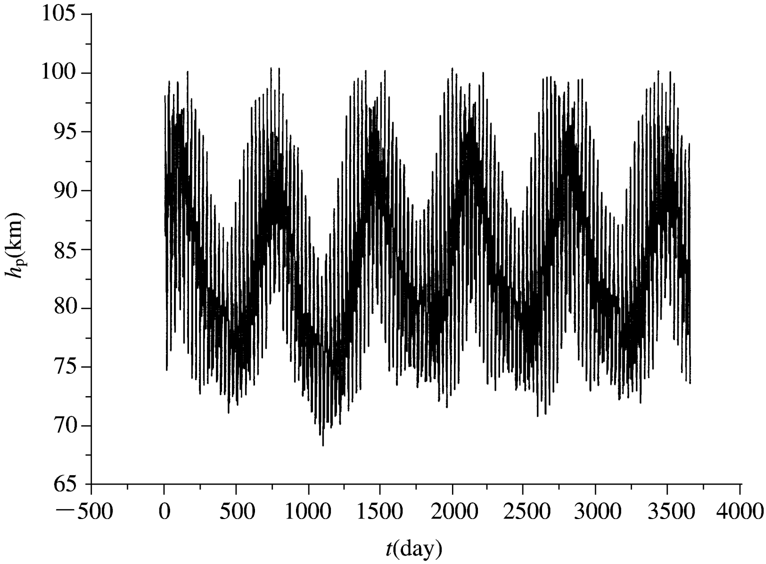

图 9.7 初始轨道倾角 $i_0 = 95°$的月球低轨卫星轨道寿命

参 考 文 献

［1］Koziel K. Physicsand Astronomy of the Moon. Ed. by Kopal Z. New York: Academic Press,1962

［2］Gappellari J O. Velez C E & Fuchs A J. Mathematical Theory of Goddard Trajectory Determination System. Goddard Space Flight Center, Greenbeit, Maryland. 1976, N76-24291-24302: 3-31～ 3-32

［3］Eckhardt D H. Theory of the Libration of the Moon. The Moon and the Planets, 1981,25: 3～ 49

［4］Moons M. Physical Libration of the Moon. Celest. Mech. 1982, 26 (2) 131～142

［5］Newhall X. X. Estimation of the Lunar Physical Libration. Celest. Mech. 1997,66(1)21～30

［6］Oesterwinter C. The Motion of a lunar satellite. Celest. Mech. 1970, 1(3): 368～436

［7］Giacaglia G E O. Murphy J P. and Felsentreger T L. A Semi-Analytic Theory for the Motion of a lunar satellite. Celest. Mech. 1970, 3(1): 3～66

［8］Brumberg V A. Evdokimova L S. and Kochina N G. Analytical Methods for the Orbits of Artificial Satellites of the Moon. 1971, 3(2): 197～221

[9] Liu Lin and Wang Jia-song. An Analytic Solution of the Orbital of Lunar Satellites. Chin. Astron. Astrophys. 1998，22(3)：328～351

[10] **刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京：高等教育出版社**，1992

[11] **刘林. 航天器轨道理论. 北京：国防工业出版社**. 2000

[12] **张巍，刘林. 月球物理天平动对环月轨道器运动的影响. 天文学报**，2005，46(2)：196～206

[13] Marchal C. L. The Restricted Three-Body Problem Resisited. IAF－99－A. 7.01，50th International Astronautical Congress，4～8 Oct 1999，Amsterdam，The Netherlands

[14] **王歆，刘林. 目标天体极轨卫星的轨道寿命. 宇航学报**. 2001，22(5)：62～65

[15] Wang Xin，Liu Lin，Another Mechanism of Restricting the Lifetime of Orbiting Satellites. Chin. Astron. Astrophys. 2002，26(4)：489～496

[16] Meyer K W，Buglia J J，Desai P N. LifeTimes of Lunar Satellite Orbits. NASA Technical Paper 3394，1994

[17] Wang Xin，Liu Lin. Another Mechanism of Restricting the Lifetime of Orbiting Satellites (Continued). Chin. Astron. Astrophys. 2003，27(1)：107～113

[18] **刘林，刘世元，王彦荣. 关于大行星(或月球)轨道器的冻结轨道. 飞行器测控学报**，2003，22(2)：19～24

第 9 章　月球卫星运动的轨道力学

要达到对太阳系中各种天体探测的目的，必然要近距离接近目标天体，更有效的手段是在探测器接近目标天体后，再次机动变轨使其转化为环绕目标天体的轨道器，此即目标天体的人造卫星. 尽管这种卫星的运动与人造地球卫星的运动属于同一类，其动力学模型都是对应一个受摄二体问题，但由于各目标天体之间的各种差异，不能完全照搬研究人造地球卫星运动的方法和结果. 深空探测的首选目标——月球，就是另一种典型，它是太阳系中的一个慢自转天体（自转周期与绕地球运行的公转周期相同），其引力位与地球引力位有明显差异，而中心天体非球形引力又是绕其运行的卫星轨道变化的主要摄动源，因此，本书选择月球卫星的运动作为深空探测器轨道力学的一个重要内容很有必要，它可以使读者对卫星型探测器的运动及其轨道变化特征有更广泛的了解.

§9.1　月球非球形引力位的主要特征

在第 4 章 §4.2 中已对太阳系天体非球形引力位作过介绍，其一般表达式即(4.63)式：

$$V=\frac{GM}{R}\left[1+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_e}{R}\right)^l P_{\mathrm{lm}}(\mu)(C_{\mathrm{lm}}\cos m\lambda_{\mathrm{G}}+S_{\mathrm{lm}}\sin m\lambda_{\mathrm{G}})\right],\quad(9.1)$$

在这里，(9.1)式中的 GM 是月心引力常数，a_e 是月球参考椭球体赤道半径，R，λ_G，φ 是月固坐标系中的球坐标分量，即月心距、经度和纬度. 同样非归一化的缔合勒让德球函数 $P_{\mathrm{lm}}(\sin\varphi)$ 和相应的谐系数 C_{lm}，S_{lm} 与归一化的 $\overline{P}_{\mathrm{lm}}(\sin\varphi)$ 和 $\overline{C}_{\mathrm{lm}}$，$\overline{S}_{\mathrm{lm}}$ 有如下关系

$$\begin{cases}\overline{P}_{\mathrm{lm}}(\mu)=P_{\mathrm{lm}}(\mu)/N_{\mathrm{lm}}\\ \overline{C}_{\mathrm{lm}}=C_{\mathrm{lm}}N_{\mathrm{lm}},\overline{S}_{\mathrm{lm}}=S_{\mathrm{lm}}N_{\mathrm{lm}}\end{cases},\quad(9.2)$$

$$\begin{cases} N_{\mathrm{lm}}=\left[\dfrac{1}{(1+\delta)}\dfrac{(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\right]^{1/2}, \\ \delta=\begin{cases}0, & m=0, \\ 1, & m\neq 0.\end{cases}\end{cases} \tag{9.3}$$

为了进一步了解月球引力位的特征，本书附录三中列出了地球和月球引力场模型的部分球谐项系数，其中美国 JPL 的 LP75G 和 LP165 两种模型是目前公认较好的月球引力场模型. 尽管对月球的探测还仍未达到对地球探测的程度，由于各种原因，月球引力场模型的精度还不够理想，但还是可从这两种引力场模型得到一些重要的信息. 从引力场模型球谐系数值可以看出，除月球由于自转较慢，动力学扁率 $J_2=-C_{2,0}$ 较小(10^{-4})外，对轨道偏心率影响较大的奇次带谐项系数 $\overline{C}_{2l-1,0}\,(l\geqslant 2)$ 与 $\overline{C}_{2,0}$ 之比 $|\overline{C}_{2l-1,0}/\overline{C}_{2,0}|$ 的量级接近(10^{-1})，而地球引力场相应系数之比的量级只有 10^{-3}，这将导致环月运行探测器的轨道(特别是偏心率 e)出现振幅较大的长周期变化，从而导致一些人造地球卫星不会出现的现象.

月球自转慢，除动力学扁率系数 $C_{2,0}$ 的值与其他球谐系数的值不像地球中相差那么大(几乎是 10^3 倍)以外，还将使非球形引力位中田谐项对月球卫星轨道的影响也明显地不同于地球对其卫星轨道的影响. 所有这些，都将在后面 §9.4 和 §9.5 中进行详尽的介绍.

§9.2　月球物理天平动简介与参考系问题

月球天平动可以分为两类，即视天平动和物理天平动. 视天平动是由于运动的原因而使地球上的观测者看到的不仅是月球对着地球的“半面”，而是超过“半面”，这仅是视觉效果而没有力学效应；而物理天平动是月球也象陀螺一样在空间呈现真实的摆动(即赤道面的摆动)，它导致了月球引力场在空间的变化，从而影响月球卫星的轨道运动.

1. 物理天平动的两种表达形式

根据月球自转理论，给出了天平动三个参数(σ,ρ,τ)的分析表达式[1~5]，但类似于地球章动理论给出的章动序列，(σ,ρ,τ)的分析表达式亦包含几百项. 因此，对月球物理天平动的分析解和数值解均有必要作一介绍. 但在某些问题中，可以采用简化的分析表达式. 关于物理天平动的分析解有多种形式，也在不断的改进. 作为一例，下面列出 Hayn 结果中(σ,ρ,τ)的主要项(前三项)[2]：

$$\begin{cases}\tau = 0^\circ.0163888\sin l_s - 0^\circ.003333\sin l_m + 0^\circ.005\sin 2\omega_m \\ \rho = -0^\circ.0297222\cos l_m + 0^\circ.0102777\cos(l_m + 2\omega_m) - \\ \quad 0^\circ.0030556\cos(2l_m + 2\omega_m) \\ \sin I\sigma \approx I\sigma = -0^\circ.0302777\sin l_m + 0^\circ.0102777\sin(l_m + 2\omega_m) - \\ \quad\quad 0^\circ.0030556\sin(2l_m + 2\omega_m)\end{cases}, \tag{9.4}$$

该式中 l_s 和 l_m 分别为太阳和月球的平近点角，ω_m 是月球近地点幅角. 至于三个天平动参数(σ,ρ,τ)的几何意义，将在下面介绍参考系时具体表明.

物理天平动的另一种表达为数值形式，JPL 的 DE405 数值列表中就直接给出了表达天平动的三个欧拉角(Ω', i_s, Λ)每天的具体数值. 这三个欧拉角与分析表达形式中的三个参数有不同的几何意义，它们将在建立不同的赤道坐标系中分别有相应的应用.

2. 月心赤道坐标系和月固坐标系

与研究人造地球卫星的运动类似，由于有物理天平动现象，研究月球卫星的运动，同样也涉及到历元(取 J2000.0)月心平赤道坐标系和真赤道坐标系以及月固坐标系.

对于月球平赤道，根据 Cassini 定律，月球轨道，黄道与月球平赤道交于一点 N，见图 9.1. 有

$$\begin{cases}\psi = \Omega_m, \\ I = I_m, \\ \varphi = \theta_m + \pi = L_m - \Omega_m + \pi,\end{cases} \tag{9.5}$$

其中 Ω_m, I_m, L_m 表示月球轨道的平根数，分别为月球轨道升交点平黄经，平倾角和月球平黄经.

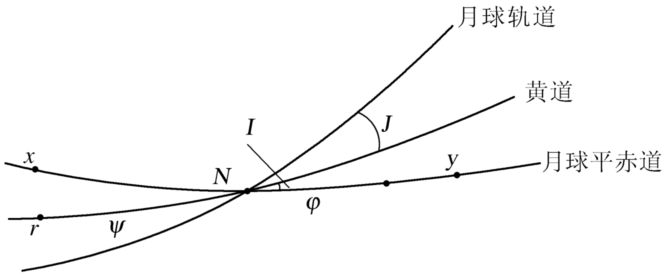

图 9.1　月球轨道、黄道与月球平赤道之间的几何关系

对于月球真赤道，它与平赤道的关系见图 9.2，有

$$\begin{cases}\psi'=\Omega_{\mathrm{m}}+\sigma,\\ I'=I_{\mathrm{m}}+\rho,\\ \varphi'=\theta_{\mathrm{m}}+\pi+(\tau-\sigma),\end{cases}\tag{9.6}$$

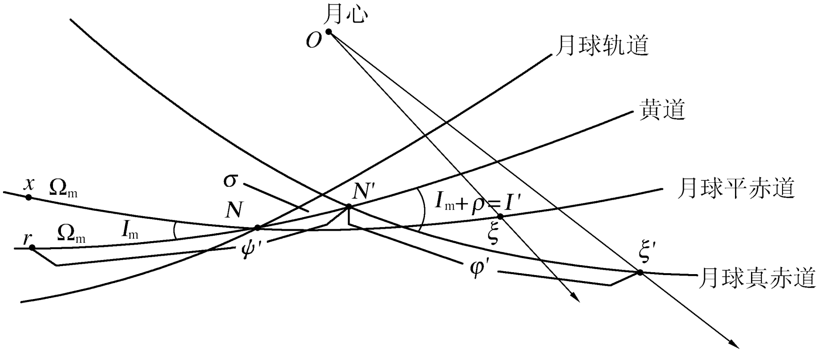

图 9.2　月球真赤道与月球平赤道之间的关系

这里以三个天平动参数(σ,ρ,τ)表明了平赤道与真赤道之间的几何关系. 图 9.2 中,通过真赤道也描述了月固坐标系,$O\xi'$方向即过月面上 Sinus Medii 的子午线的方向(亦即月球指向地球的那一惯性主轴方向).

DE405 数值历表中直接给出的另三个欧拉角(Ω',i_s,Λ)表明了月心地球平赤道坐标系与月固坐标系之间的关系,见图 9.3.

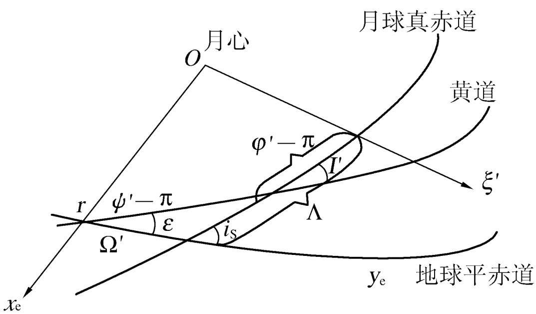

图 9.3　月心地球平赤道坐标系与月固坐标系的关系

图中 $O-x_ey_ez_e$ 即月心地球平赤道坐标系,ξ'是月固坐标系的 X 轴指向,三个欧拉角(Ω',i_s,Λ)在图中已表明清楚,不必再加注明,ε 是黄赤交角.

两种物理天平动参数的表达形式(σ,ρ,τ)和(Ω',i_s,Λ),分别用两种方式描述了月球真赤道面的摆动,同时也分别定义了不同的月心坐标系,即月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$,月心地球平赤道坐标系 $O-x_ey_ez_e$(以下称月心天球坐标系)和月心月球平赤道坐标系 $O-xyz$(以下称月心赤道坐标系). 它们之

间的转换关系在研究月球卫星的运动和表达月球卫星在月面上的星下点位置时必然要涉及到.

若记月心天球坐标系 $O-x_{\mathrm{e}}y_{\mathrm{e}}z_{\mathrm{e}}$ 中的卫星位置矢量为 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}$，它与月固坐标系中卫星相应的位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 之间的关系如下：

$$\boldsymbol{R}=(M_1)\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}=(M_2)\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}, \tag{9.7}$$

这里两个转换矩阵 (M_1) 和 (M_2) 各由上述两种物理天平动参数的表达形式给出. 根据图 9.3 表明的几何关系不难给出转换矩阵 (M_1) 和 (M_2) 的表达式如下：

$$(M_1)=R_z(\Lambda)R_x(i_{\mathrm{s}})R_z(\Omega'), \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned}(M_2)&=R_z(\varphi'-\pi)R_x(I')R_z(\psi'-\pi)R_x(\varepsilon)\\&=R_z(\psi')R_x(-I')R_z(\psi')R_x(\varepsilon).\end{aligned} \tag{9.9}$$

(9.9)式第一行是按图 9.3 给出的，而第二行是按图 9.2 给出的，两者实为同一转换关系. 上述两种转换关系之间的差别取决于 (σ,ρ,τ) 的取项多少，若取前面(9.4)式给出一例的前三项，分别计算 2003 年 11 月 1 日 0 时和 2004 年 6 月 15 日 0 时月球表面“上空”一点的空间坐标转换到月固坐标系中的位置，两种转换结果之差为公里级，相应的转换矩阵元素的最大差别达到 7.6×10^{-4}. 如果采用 Eckhardt 等人结果中 (σ,ρ,τ) 的前四项[3～5]（量级与 Hayn 结果中的前三项相当），亦同样有上述差别.

根据上述比较可知，直接采用物理天平动分析解的简化表达式，在某些问题中是不能满足精度要求的. 但同时告诉我们，仅取 σ,ρ,τ 主项的简化表达式与 DE405 数值历表的差别小于 10^{-3}，这种差别在考虑物理天平动对月球卫星轨道的影响时，在一定精度要求的前提下，则无妨. 定轨或预报中涉及轨道外推弧段为 10^2 时（对低轨卫星为 1～2 天的间隔），要保证 10 米级甚至米级精度是可以达到的.

鉴于上述比较的结果，加上要建立月球卫星轨道理论，了解轨道变化的规律，或直接反映月球卫星相对月心坐标系的几何状况，又必须采用月心赤道坐标系，而不是月心地球赤道坐标系，那么就要由 (σ,ρ,τ) 来建立月心赤道坐标系 $O-xyz$（对应所选取的历元，如目前惯用的 J2000.0）与月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$ 之间的关系. 而若要通过历元月心赤道坐标系 $O-xyz$ 与月心天球坐标系 $O-x_{\mathrm{e}}y_{\mathrm{e}}z_{\mathrm{e}}$ 之间的转换关系（即利用高精度的 $\Omega',i_{\mathrm{s}},\Lambda$ 值）来计算月球卫星在月固坐标系中的精确位置 $\boldsymbol{R}$ 也很简单，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}=(M_1)\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}, \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}=(N)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\\(N)=R_z(-\Omega_{\mathrm{m}})R_x(-I_{\mathrm{m}})R_z(\Omega_{\mathrm{m}})R_x(\varepsilon)\end{cases}, \tag{9.10}$$

$\boldsymbol{r}$ 是通过定轨或预报给出的月心赤道坐标系中的月球卫星位置矢量. 这里

变换矩阵(N)并不涉及到物理天平动的表达形式，转换的精度只取决于月球卫星定轨或预报的精度．

§9.3 月球卫星运动的受力分析

研究月球卫星（特别是低轨卫星）的空间运动与研究人造地球卫星的运动一样，显然采用历元(J2000.0)月心赤道坐标系 $O-xyz$ 为宜，考虑月球非球形引力摄动时，将涉及到月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$．这两种坐标系之间的几何关系在前面的图 9.2 中已清楚地表明．若记两种坐标系中卫星位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$，则有

$$\boldsymbol{r}=(A)\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{R}=(A)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}. \tag{9.11}$$

其中(A)为两种坐标系之间的转换矩阵，不难给出

$$\begin{aligned}(A)&=R_z(-\Omega_{\mathrm{m}})R_x(-I_{\mathrm{m}})R_z(-\sigma)R_x(I')R_z(-\varphi') \\ &=R_z(-\Omega_{\mathrm{m}})R_x(-I_{\mathrm{m}})R_z(-\sigma)R_x(I_{\mathrm{m}}+\rho)R_z(-(\varphi+\tau-\sigma)),\end{aligned} \tag{9.12}$$

$$\varphi=L_{\mathrm{m}}-\Omega_{\mathrm{m}}+\pi, \tag{9.13}$$

$$I_{\mathrm{m}}=1^{\circ}32'32''.7. \tag{9.14}$$

L_{m} 和 Ω 的含义前面已有说明．

在历元月心赤道坐标系 $O-xyz$ 中，月球卫星的运动方程如下：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon), \tag{9.15}$$

其中 $\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 分别为月球中心引力加速度（对应无摄运动）和各种摄动加速度，有

$$\boldsymbol{F}_0=-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{9.16}$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon). \tag{9.17}$$

为了便于问题的分析和计算上的某种需要，同样采用类似研究人造地球卫星运动时所采用的标准计算单位，即长度、质量和时间单位分别为

$$\begin{cases}[L]=a_{\mathrm{e}}=1738.0\ \mathrm{km}, \\ [M]=M,\qquad M\ \text{是月球质量，对应月心引力常数}\ \mu=GM, \\ [T]=(a_{\mathrm{e}}^3/GM)^{1/2}\approx 17^{\mathrm{m}}.2465\cdots,\end{cases} \tag{9.18}$$

在此标准单位系统中，$\mu=GM=1$，$G=1$，$[L]$，$[M]$和$[T]$的准确值取决于所采用的月球引力场模型．

在上述坐标系和标准单位系统中，各种物理量归结为无量纲形式．在历元月心赤道坐标系中，相应的 $\boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon)$ 涉及下列 10 种摄动源：

月球非球形引力摄动(C_{lm}, S_{lm})　$\boldsymbol{F}_1(J_l, J_{lm})$，

地球引力摄动(m'_1)　$\boldsymbol{F}_2(m'_1)$，

太阳引力摄动(m'_2)　$\boldsymbol{F}_3(m'_2)$，

月球固体潮摄动$(\kappa_2 J_2)$　$\boldsymbol{F}_4(\kappa_2 J_2)$，

月球物理天平动(σ, ρ, τ)　$\boldsymbol{F}_5(\sigma, \rho, \tau)$，

太阳光压摄动 $\boldsymbol{F}_6(\rho_s)$，

月球扁率间接摄动 $\boldsymbol{F}_7(m'_1 J_2)$，

地球扁率摄动 $\boldsymbol{F}_8(J'_2 m'_1)$，

大行星(金星，木星)引力摄动 $\boldsymbol{F}_9(m'_3)$，

月球引力后牛顿效应 $\boldsymbol{F}_{10}(v^2/c^2)$.

对于低轨月球卫星($\bar{h}=100\sim300$ km)，上述各摄动源对应的摄动量级 $\varepsilon_j(j=1, \cdots, 10)$分别为

$\varepsilon_1(J_2)=O(10^{-4})$，$\varepsilon_1(J_{2,2})=O(10^{-5})$，$\varepsilon_1(C_{lm}, S_{lm}, l\geqslant 3)=O(10^{-6}-10^{-5})$，

$\varepsilon_2=O(10^{-5})$，

$\varepsilon_3=O(10^{-7})$，

$\varepsilon_4=O(10^{-7})$，

$\varepsilon_5=O(10^{-7})$，

$\varepsilon_6=O(10^{-9})$，对应一般面质比$(S/M)=10^8$ 的卫星，

$\varepsilon_7=O(10^{-11})$，

$\varepsilon_8=O(10^{-12})$，

$\varepsilon_9=O(10^{-12})$，

$\varepsilon_{10}=O(10^{-11})$.

根据以上对各项摄动源的量级分析可知，一般情况下只需考虑前面 5 种摄动源，即月球非球形引力摄动，地球和太阳引力摄动，月球固体潮摄动和月球物理天平动的影响. 而最主要的是月球非球形引力摄动和地球引力摄动.

§9.4　月球卫星轨道变化的主要特征

研究月球卫星轨道的变化规律是月球卫星轨道力学的核心内容，而只有构造月球卫星轨道变化的分析解才能给出其变化规律. 但由于月球卫星的受力状况(尤其是月球非球形引力位的影响)不同于地球卫星，故必须针对月球卫星的受力特点构造相应的摄动分析解. 文[6～9]先后给出相应的

分析解,但正由于月球卫星的受力状况不同于地球卫星,文[6～8]给出的是半分析解,而文[9]也只能采用拟平均根数法[10,11]给出相应的分析解.

由于月球非球形引力位中的动力学扁率项(J_2)与其他球谐项(C_{lm},S_{lm})以及地球引力摄动项相差不大,将导致长周期项中出现降阶问题,这种小分母的出现,不能采用完整的平均根数法按 $\varepsilon=O(J_2)$来构造相应的小参数幂级数解,而只能采用人为的小参数 $\varepsilon=10^{-2}$,按拟平均根数法来构造相应的幂级数解,这正是文[9]所做的工作.

真正导致月球卫星轨道变化(包括解的表达式)不同于地球卫星的主要摄动源是月球非球形引力摄动以及与其有差别的月球物理天平动引起的坐标系附加摄动. 本节将针对这一人们关心的焦点,给出月球卫星轨道的相应变化特征,为有关研究工作和环月探测器的轨道设计等提供必要的轨道信息.

1. 月球非球形引力摄动解

根据上一节对月球卫星运动受力分析可知,在小参数 ε 确定为 10^{-2} 的前提下,若以 σ 表示六个 Kepler 根数(a,e,i,Ω,ω,M),运动方程可以写成下列形式:

$$\begin{cases}\dot{\sigma}=f_0(a)+f_2(J_2)+f_3(C_{lm},S_{lm}),\\ f_2=f_{2C}+f_{2L},\\ f_3=f_{3C}+f_{3L}+f_{3S},\end{cases}\tag{9.19}$$

右函数 f_2 和 f_3 由(9.1)式给出的非球形引力位部分 $\Delta V=V-\left(\dfrac{GM}{R}\right)$构成,其中 $J_2=-C_{2,0}$,物理天平动引起的坐标系附加摄动后面另行讨论.

非球形引力摄动对应的小参数幂级数解有如下形式:

$$\begin{cases}\sigma(t)=\bar{\sigma}(t_0)+(\delta\bar{n}_0+\sigma_{2C}+\sigma_{3C})(t-t_0)+\Delta\sigma_L^{(1)}(t)+\sigma_S^{(2)}(t),\\ \Delta\sigma_L^{(1)}(t)=\sigma_L^{(1)}(t)-\sigma_L^{(1)}(t_0),\\ \bar{\sigma}(t_0)=\sigma_0-\sigma_S^{(2)}(t_0),\end{cases}\tag{9.20}$$

其中 $\Delta\sigma_L^{(1)}(t)$是由除 J_2 项外所有非球形引力位的球谐项(C_{lm},S_{lm})摄动导致的长周期变化项,对应方程(9.19)右函数中的 $f_{3L}(C_{lm},S_{lm})$部分,积分降阶后给出. 这里只给到三阶长期项及与其相当的一阶长周期变化项和二阶短周期项,而对于沿迹量平近点角应同时给出 a 的三阶短周期项$a_S^{(3)}(t)$. 所有这些项与摄动源的关系如下:

$$\begin{cases}\sigma_{2C}=\sigma_{2C}(J_2)\\ \sigma_{3C}=\sigma_{3C}(J_l,l(2)\geqslant 4)\end{cases}, \tag{9.21}$$

$$\Delta\sigma_L^{(1)}(t)=\Delta\sigma_L(t;J_l,l\geqslant 3;C_{lm},S_{lm},l\geqslant 2), \tag{9.22}$$

$$\begin{cases}\sigma_S^{(2)}(t)=\sigma_S^{(2)}(t;J_2)\\ a_S^{(3)}(t)=a_S^{(3)}(t;J_l,l\geqslant 3;C_{lm},S_{lm,l},l\geqslant 2)\end{cases}. \tag{9.23}$$

由于 $\sigma_{1C}=0$，**故计算** σ_{2C}，σ_{3C} **和** $\Delta\sigma_L^{(1)}$ **时，需要用到的** $\bar{\sigma}(t)$ **均可用** $\bar{\sigma}_0=\bar{\sigma}(t_0)$，**于是各根数的具体表达形式如下：**

$$\begin{cases}a(t)=\bar{a}_0+a_S^{(2)}(t)+a_S^{(3)}(t)\\ e(t)=\bar{e}_0+\Delta e_L^{(1)}(t)+e_S^{(2)}(t)\\ i(t)=\bar{i}_0+\Delta i_L^{(1)}(t)+i_S^{(2)}(t)\\ \Omega(t)=\bar{\Omega}_0+(\Omega_{2C}+\Omega_{3C})(t-t_0)+\Delta\Omega_L^{(1)}(t)+\Omega_S^{(2)}(t)\\ \omega(t)=\bar{\omega}_0+(\omega_{2C}+\omega_{3C})(t-t_0)+\Delta\omega_L^{(1)}(t)+\omega_S^{(2)}(t)\\ M(t)=\bar{M}_0+(\bar{n}_0+M_{2C}+M_{3C})(t-t_0)+\Delta M_L^{(1)}(t)+M_S^{(2)}(t)\end{cases}. \tag{9.24}$$

其中 $\bar{n}_0=\bar{a}_0^{-3/2}$，**这里的** $\bar{a}_0=a_0-[a_S^{(2)}(t_0)+a_S^{(3)}(t_0)]$.

（1）长期项系数 $\boldsymbol{\sigma}_C$

$$\Omega_{2C}=-\frac{3J_2}{2p^2}n\cos i, \tag{9.25}$$

$$\omega_{2C}=\frac{3J_2}{2p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right), \tag{9.26}$$

$$M_{2C}=\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\,n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right), \tag{9.27}$$

$$\Omega_{3C}=-n\cos i\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_2(i)K_1(e), \tag{9.28}$$

$$\omega_{3C}=-\cos i\Omega_{3C}-n\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_1(i)[(2l-1)K_1(e)+(1-e^2)K_2(e)], \tag{9.29}$$

$$M_{3C}=-\sqrt{1-e^2}(\omega_{3c}+\cos i\Omega_{3c})-n\sqrt{1-e^2}\sum_{l(2)\geqslant 4}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)F_1(i)[2(l+1)K_1(e)]. \tag{9.30}$$

其中 $p_0=a(1-e^2)$，a,e,i **均取** $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$ **值.** $F_1(i),\cdots,K_1(e),\cdots$ **的表达式如下：**

$$\begin{cases} F_1(i) = \sum_{q=0}^{l/2} (-1)^{(l+2q)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)} C_{lq} (\sin i)^{2q} \\ F_2(i) = \sum_{q=1}^{l/2} (-1)^{(l+2q)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)} C_{lq} 2q (\sin i)^{2q-2} \\ C_{lq} = \binom{l}{l/2-q}\binom{l+2q}{l}\binom{2q}{q} = \dfrac{(l+2q)!}{(q!)^2\left(\frac{l}{2}-q\right)!\left(\frac{l}{2}+q\right)!} \end{cases} \tag{9.31}$$

$$\begin{cases} K_1(e) = \sum_{\alpha(2)=0}^{l-2} C_{l\alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha} \\ K_2(e) = \sum_{\alpha(2)=2}^{l-2} C_{l\alpha}\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha-2} \\ C_{l\alpha} = \binom{l-1}{\alpha}\binom{\alpha}{\alpha/2} = \dfrac{(l-1)!}{(l-1-\alpha)!\left(\frac{\alpha}{2}!\right)^2} \end{cases} \tag{9.32}$$

上述各式中,求和时 $l(2)\geqslant 4$,$\alpha(2)\geqslant 2$ 表示按 $l=4,6,\cdots,\alpha=2,4\cdots$取值.

(2)一阶长周期变化项 $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)-\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{L}}^{(1)}(t_0)$

对于月球非球形引力摄动,长周期项可严格积分给出,由于相应的周期较长,亦可按长期项处理,即下面给出的表达式(9.33)～(9.38).若要给出 $\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 的形式,也很简单,只要将表达式(9.34)～(9.38)中的 $I(\omega)n(t-t_0)$,$\Phi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0)$,…改为下述积分:

$$\int^t I(w)n\mathrm{d}t,\ \int^t \Phi_{\mathrm{lm}p}n\,\mathrm{d}t,\cdots$$

即可.下面给出的 $\Delta\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)$ 相当于$[\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)/\mathrm{d}t](t-t_0)$,括号内的表达式正是下一节讨论月球卫星轨道变化所确定的某些特征时要引用的.

$$\Delta a_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = 0, \tag{9.33}$$

$$\begin{aligned} \Delta e_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = {} & (1-e^2)\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(l-2p)F_3(i)\left(\frac{1}{e}K_3(e)\right) \\ & I(\omega)n(t-t_0) - (1-e^2)\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(l-2p) \\ & F_{\mathrm{lm}p}(i)\left(\frac{1}{e}K_3(e)\right)\Phi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0), \end{aligned} \tag{9.34}$$

$$\begin{aligned} \Delta i_{\mathrm{L}}^{(1)}(t) = {} & -\cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(l-2p)(F_3(i)/\sin i)K_3(e)I(\omega)n(t- \\ & t_0) + \sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}[(l-2p)\cos i \\ & -m](F_{\mathrm{lm}p}(i)/\sin i)K_3(e)\Phi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0), \end{aligned} \tag{9.35}$$

$$\Delta\Omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\cos i\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(F_4(i)/\sin^2 i)K_3(e)H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(F'_{\mathrm{lm}p}(i)/\sin i)K_3(e)\psi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0),\tag{9.36}$$

$$\Delta\omega_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\cos i\Delta\,\Omega_{\mathrm{l}}^{(1)}(t)-\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}F_3(i)[(2l-1)K_3(e)+$$
$$(1-e^2)K_4(e)]H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}F_{\mathrm{lm}p}(i)[(2l-1)K_3(e)+$$
$$(1-e^2)K_4(e)]\psi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0),\tag{9.37}$$

$$\Delta\,M_{\mathrm{L}}^{(1)}(t)=-\sqrt{1-e^2}\left[\ \Delta\omega_l^{(9.1)}(t)+\cos i\Delta\Omega_l^{(9.1)}(t)\right]-$$
$$\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}2(l+1)F_3(i)k_3(e)H(\omega)n(t-t_0)+$$
$$\sqrt{1-e^2}\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}2(l+1)F_{\mathrm{lm}p}(i)K_3(e)\psi_{\mathrm{lm}p}n(t-t_0).\tag{9.38}$$

上述各式中的 p_0 **即** $a(1-e^2)$**,为了区别求和取值符号** p**,用了** p_0 **这一符号. 同样上述各式中出现的** a,e,i **和** Ω,ω **均用** $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0,\overline{\Omega}_0,\bar{\omega}_0$. $F_3(i)$, … **各表达式如下:**

$$\begin{cases}F_3(i)=\displaystyle\sum_{q=0}^{p}(-1)^{(l+2q-\delta)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}C_{lpq}(\sin i)^{(l-2p+2q)},\\ F_4(i)=\displaystyle\sum_{q=0}^{p}(l-2p+2q)(-1)^{(l+2q-\delta)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}\cdot\\ \qquad C_{lpg}(\sin i)^{(l-2p+2q)},\\ C_{lpq}=\dbinom{l}{p-q}\dbinom{2l-2p+2q}{l}\dbinom{l-2p+2q}{q}\\ \quad=\dfrac{(2l-2p+2q)!}{q!(p-q)!(l-p+q)!(l-2p+q)!},\end{cases}\tag{9.39}$$

$$\delta_p=\begin{cases}0, & l-2p=0,\\ 1, & l-2p\neq 0,\end{cases}\tag{9.40}$$

$$
\begin{cases}
K_3(e) = \sum\limits_{\alpha(2)=|l-2p|}^{l-2} C_{lp\alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha} \\
K_4(e) = \sum\limits_{\alpha(2)=|l-2p|}^{l-2} C_{lp\alpha}\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} e^{\alpha-2} \\
C_{lp\alpha} = \binom{l-1}{\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \frac{1}{2}(\alpha - |l-2p|) \end{matrix} \right\} \\
\qquad = \dfrac{(l-1)!}{(l-1-\alpha)!\left[\frac{1}{2}(\alpha-|l-2p|)\right]!\left[\frac{1}{2}(\alpha+|l-2p|)\right]!},
\end{cases} \tag{9.41}
$$

$$
\begin{cases}
I(\omega) = -(1-\delta)\sin(l-2p)\omega + \delta\cos(l-2p)\omega, \\
H(\omega) = (1-\delta)\cos(l-2p)\omega + \delta\sin(l-2p)\omega, \\
\delta = \frac{1}{2}[1-(-1)^l].
\end{cases} \tag{9.42}
$$

还有倾角函数 $F_{lmp}(i)$ **及其导数** $F'_{lmp}(i)$**，在前面第四章中出现过，见**(4.262)～(4.264)**式.**

(3) 短周期项 $\boldsymbol{\sigma}_S^{(2)}(t)$

$\sigma_S^{(2)}(t)$**除** $a_S^{(2)}(t)$**外，只需给出** J_2 **项，而** $a_S^{(2)}(t)+a_S^{(3)}(t)$**可由下式给出：**

$$
a_S^{(2)}(t)+a_S^{(3)}(t) = 2a^2 R_S(J_2; J_l, l\geqslant 3; C_{lm}, S_{lm}) \tag{9.43}
$$

其中

$$
\begin{cases}
R_S(J_2) = \dfrac{3J_2}{2a^3}\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - (1-e^2)^{-3/2}\right] + \right. \\
\qquad \left. \frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2u\right\}, \\
u = f + \omega,
\end{cases} \tag{9.44}
$$

$$
R_S(J_l) = R(J_l) - R(J_l)_{C,l}, \tag{9.45}
$$

$$
R(J_l) = \sum_{l\geqslant 3} \frac{(-J_l)}{a^{l+1}} \sum_{p=0}^{\frac{1}{2}(l-\delta)} F_3(i)\left[(1-\delta)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\cos(l-2p)u + \right.
$$
$$
\left. \delta\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\sin(l-2p)u\right], \tag{9.46}
$$

$$
R(J_l)_{C,L} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\sum_{l\geqslant 3}\frac{(-J_l)}{p_0^l}\sum_{p=1}^{(l-\delta)/2} F_3(i)K_3(e)H(\omega), \tag{9.47}
$$

$$
R_S(C_{lm}, S_{lm}) = R(C_{lm}, S_{lm}) - R_l(C_{lm}, S_{lm}), \tag{9.48}
$$

$$R(C_{lm},S_{lm}) = \sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{a^{l+1}}\sum_{p=0}^{l}F_{lmp}(i)\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\times$$
$$\{[(1-\delta_m)C_{lm}-\delta_m S_{lm}]\cos((l-2p)u+m\Omega_G)+$$
$$[(1-\delta_m)S_{lm}+\delta_m C_{lm}]\sin((l-2p)u+m\Omega_G)\},\quad(9.49)$$
$$\delta_m=\frac{1}{2}[1-(-1)^{l-m}],$$

$$R_L(C_{lm},\ S_{lm}) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{p_0^l}\sum_{p=1}^{l-1}F_{lmp}(i)K_3(e)\Psi_{lmp},\quad(9.50)$$

$$e_S^{(2)}(t) = \frac{3J_2}{2a^2}\left(\frac{1-e^2}{e}\right)\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\right.$$
$$\frac{1}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)-\frac{\sin^2 i}{2(1-e^2)^2}[e\cos(f+2\omega)+$$
$$\left.\cos 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)]\right\}-$$
$$\frac{3J_2}{2p^2}\sin^2 i\left(\frac{1-e^2}{6e}\right)\overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\quad(9.51)$$

$$i_S^{(2)}(t) = \frac{3J_2}{8p^2}\sin 2i\left[e\cos(f+2\omega)+\cos 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right]+$$
$$\frac{3J_2}{24p^2}\sin 2i\ \overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\quad(9.52)$$

$$\Omega_S^{(2)}(t) = -\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\left\{(f-M+e\sin f)-\frac{1}{2}\left[e\sin(f+2\omega)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\sin 2(f+\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right]\right\}+$$
$$\frac{3J_2}{12p^2}\cos i\ \overline{\cos 2f}\cos 2\omega,\quad(9.53)$$

$$\omega_S^{(2)} = \frac{3J_2}{2p^2}\left\{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)(f-M+e\sin f)+\right.$$
$$\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]-$$
$$\left[\frac{1}{4e}\sin^2 i+\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 i\right)e\right]\sin(f+2\omega)-$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin 2(f+\omega)+$$
$$\left[\frac{7}{12e}\sin^2 i-\left(\frac{1}{6}-\frac{19}{48}\sin^2 i\right)e\right]\sin(3f+2\omega)+$$
$$\frac{3}{8}\sin^2 i\sin(4f+2\omega)+$$

$$\frac{e}{16}\sin^2 i[\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega)]\Big\}-$$

$$\frac{3J_2}{2p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1-e^2}{6e^2}\overline{\cos 2f}\right)+\frac{1}{6}\cos^2 i\,\overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega, \quad (9.54)$$

$$M_S^{(2)}(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\Big\{-\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\right.$$

$$\left.\frac{e}{12}\sin 3f\right]+\sin^2 i\left[\left(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e\right)\sin(f+2\omega)-\right.$$

$$\left(\frac{7}{12e}-\frac{e}{48}\right)\sin(3f+2\omega)-\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)-$$

$$\left.\frac{e}{16}\sin(5f+2\omega)-\frac{e}{16}\sin(f-2\omega)\right]\Big\}+$$

$$\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{1}{8}+\frac{1+e^2/2}{6e^2}\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega. \quad (9.55)$$

上述各式中出现的$\left(\frac{a}{r}\right)$和真近点角 f 等量与根数 e,M 的关系在前面讨论人造地球卫星的运动时已出现过,即相应的二体问题基本关系式. $\overline{\cos 2f}$是由下式表达的平均值:

$$\overline{\cos 2f}=\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2. \quad (9.56)$$

从上述月球非球形引力摄动解的具体形式不难看出动力学扁率 J_2 与奇次带谐项系数 $J_{2l-1}(l\geqslant 2)$相对大小(J_{2l-1}/J_2)的重要性,慢自转中心天体非球形引力位中田谐项对应的摄动解是以长周期项的形式出现,不像地球卫星那样,田谐项摄动解是以短周期项的形式出现,而又必须通过展成平近点角 M 的三角级数才能构造相应的短周期项,导致对大偏心率情况不适用的结果. 另外,关于卫星轨道变化的某些重要特征,对于地球卫星往往由 J_2 与 J_3,J_4 几项即可给出相应的可靠结果,而对于月球卫星而言,由于月球非球形引力位中 J_2 与 $J_{2l-1}(l\geqslant 2)$和所有田谐项系数(C_{lm},S_{lm})相差不大的原因,若要获得月球卫星轨道变化特征的可靠信息,还得审查众多的非球形引力项. 故前面必须给出相应的 J_l 和(C_{lm},S_{lm})项摄动解的完整结果,这才能保证在此基础上对有关问题分析所得结果的有效性.

2. 月球物理天平动引起的坐标系附加摄动

月球物理天平动与地球的岁差章动类似,都是引起赤道面在空间的摆动,导致在月心(或地心)平赤道坐标系中构造相应卫星轨道的摄动分析解时,均要考虑由于赤道面摆动导致的引力位的变化所带来的坐标系附加摄

动. 但月球物理天平动与地球岁差章动的表达形式与结果不一样,因此不能照搬地球卫星运动中相应的摄动解部分[10,11]. 这里给出不同于参考文献[10,11]中采用的方法,而采用与建立月球赤道坐标系与月固坐标系之间的坐标转换关系相一致的表达形式,见(9.11)式,构造月心赤道坐标系 $O-xyz$ 中的由物理天平动引起的坐标系附加摄动解.

(1) 月心赤道坐标系中的附加引力位 ΔV

尽管物理天平动可以改变非球形引力位中的每一部分,但这里只讨论 $C_{2,0}$ 和 $C_{2,2}$ 两项的附加位,一是该两项是最主要的,另一原因是这两项分别为带谐项和田谐项的代表,仅就对这两项的讨论即可了解物理天平动对卫星轨道影响的全貌.

由于物理天平动的摄动量级即使对低轨卫星,也只有 10^{-7},故天平动参数可引用 简化的分析表达形式,这里就直接采用前面给出的简化公式(9.4). 为了表达简洁,记

$$\begin{cases}\tau = \tau_1\ \sin l_{\mathrm{s}} + \tau_2\ \sin l_{\mathrm{m}} + \tau_3\ \sin 2\omega_{\mathrm{m}}, \\ \rho = \rho_1\ \cos l_{\mathrm{m}} + \rho_2\ \cos(l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}) + \rho_3\ \cos(2l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}), \\ \sin I\sigma = \sigma_1\ \sin l_{\mathrm{m}} + \sigma_2\ \sin(l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}) + \sigma_3\ \sin(2l_{\mathrm{m}} + 2\omega_{\mathrm{m}}),\end{cases} \tag{9.57}$$

考虑到 $\rho_1 - \sigma_1 = 2''$,$(\rho_1 - \sigma_1)/\sigma_1 \approx 10^{-2}$,在一定精度下为了表达简明,可做近似处理,即 $\rho_i = \sigma_i (i=1,2,3)$,如果不作此近似处理亦不会影响讨论的结果. (9.57)式中 τ_1 等量的数值如下:

$$\begin{cases}\tau_1 = 59''.0 = 2.9 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}), \\ \tau_2 = -12''.0 = -0.58 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}), \\ \tau_3 = 18''.0 = 0.87 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}),\end{cases} \tag{9.58}$$

$$\begin{cases}\sigma_1 = -109''.0 = -5.18 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}), \\ \sigma_2 = 37''.0 = 1.8 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}), \\ \sigma_3 = -11''.0 = -0.53 \times 10^{-4}(\mathrm{rad}),\end{cases} \tag{9.59}$$

$$\begin{cases}\sigma_{11} = \sigma_1 - \sigma_2 = -146''.0, \\ \sigma_{12} = \sigma_1 + \sigma_2 = -72''.0,\end{cases} \tag{9.60}$$

仅保留 ρ,σ,τ 的一阶量,可给出(9.12)式中月心赤道坐标系 $O-xyx$ 与月固坐标系 $O-\xi'\eta'\zeta'$ 之间的坐标转换矩阵(A)的简化形式如下:

$$(A) = \left(\begin{array}{c}\cos(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}) - (\tau - \sigma + \sigma\cos I)\sin(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}) \\ \sin(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}) + (\tau - \sigma + \sigma\cos I)\cos(\varphi + \Omega_{\mathrm{m}}) \\ \sigma\sin I\cos\varphi - \rho\sin\varphi\end{array}\right.$$

$$-\sin(\varphi+\Omega_m)-((\tau-\sigma+\sigma\cos I))\cos(\varphi+\Omega_m)$$
$$\cos(\varphi+\Omega_m)-(\tau-\sigma+\sigma\cos I)\sin(\varphi+\Omega_m)$$
$$-\sigma\sin I\sin\varphi-\rho\cos\varphi$$

$$\left.\begin{matrix}-\sigma\sin I\cos\Omega_m-\rho\sin\Omega_m\\ -\sigma\sin I\sin\Omega_m+\rho\cos\Omega_m\\ 1\end{matrix}\right) \tag{9.61}$$

其中天平动参数 σ ,ρ,τ **由**(9.57)**式表达**.

由于

$$\begin{cases} I=1°32'32''.7=1°.542417=0.026920\\ \sin I=0.0269,\quad \cos I=0.9996\\ 1-\cos I=0.000362\end{cases} \tag{9.62}$$

还可以作如下简化:

$$\tau-\sigma(1-\cos I)=\tau+O(6\times10^{-6}), \tag{9.63}$$
$$\sigma\sin I\cos\varphi-\rho\sin\varphi=(\sigma_1-\sigma_2)\sin\omega_m-\sigma_3\sin(l_m+\omega_m), \tag{9.64}$$
$$-\sigma\sin I\sin\varphi-\rho\cos\varphi=(\sigma_1+\sigma_2)\cos\omega_m+\sigma_3\cos(l_m+\omega_m). \tag{9.65}$$

采用以上简化,转换矩阵(A)**有如下形式**:

$$(A)=\left(\begin{matrix}-\cos L_m+\tau\sin L_m\\ -\sin L_m-\tau\cos L_m\\ \sigma_{11}\sin\omega_m-\sigma_3\sin(L_m+\omega_m)\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix}\sin L_m+\tau\cos L_m\\ -\cos L_m+\tau\cos L_m\\ \sigma_{12}\cos\omega_m+\sigma_3\cos(L_m+\omega_m)\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}-\sigma_1\sin(L_m-\omega_m)-\sigma_2\sin(L_m+\omega_m)-\sigma_3\sin(2L_m-\Omega_m\\ \sigma_1\cos(L_m-\omega_m)+\sigma_2\cos(L_m+\omega_m)+\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m)\\ 1\end{matrix}\right) \tag{9.66}$$

由于

$$C_{2,0}=2\times10^{-4},\quad C_{2,2}=0.25\times10^{-4},$$

对于外推月球低轨卫星 10^2 **弧段的位置精度要求达到米级时**,$C_{2,0}$**的附加位必须考虑天平动中** τ_1,τ_2,τ_3 **和** σ_1,σ_2,σ_3 **的全部,而** $C_{2,2}$ **的附加位,只需**

考虑 τ_1 和 σ_{11},σ_{12} 部分. 略去推导过程,直接给出 $C_{2,0}$ 项对应的附加位如下:

$$\begin{aligned}V_2(C_{2,0}) &= (-J_2/a^3)(a/r)^3[(3/2)(z/r)^2-(1/2)]\\ &= (-J_2/a^3)(a/r)^3\{[(3/2)(z/r)^2-(1/2)]-\\ &\quad 3\sigma_1(z/r)[(x/r)\sin(L_m-\omega_m)-(y/r)\cos(L_m-\omega_m)]-\\ &\quad 3\sigma_2(z/r)[(x/r)\sin(L_m+\omega_m)-(y/r)\cos(L_m+\omega_m)]-\\ &\quad 3\sigma_3(z/r)[(x/r)\sin(2L_m-\Omega_m)-(y/r)\cos(2L_m-\Omega_m)]\}.\end{aligned} \tag{9.67}$$

这里 $J_2=-C_{2,0}$,相应的以轨道根数表达的形式为

$$\begin{aligned}\Delta V_2 =& (3J_2/4a^3)(a/r)^3\{-\sin 2i(1-\cos 2u)\times[\sigma_1\cos(L_m-\omega_m-\\ &\Omega)+\sigma_2\cos(L_m+\omega_m-\Omega)+\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)]+\\ &2\sin i(\sin 2u)[\sigma_1\sin(L_m-\omega_m-\Omega)+\sigma_2\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\\ &\sigma_3\sin(2L_m-\Omega_m-\Omega)].\end{aligned} \tag{9.68}$$

其中 $u=f+\omega$,用求平均值的方法,可将 ΔV_2 分解成如下两部分:

$$\begin{aligned}\Delta V_{21} &= \overline{\Delta V_2}\\ &= -(3J_2/4a^3)\sin 2i(1-e^2)^{-3/2}\times[\sigma_1\cos(L_m-\omega_m-\Omega)+\\ &\quad \sigma_2\cos(L_m+\omega_m-\Omega)+\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)],\end{aligned} \tag{9.69}$$

$$\begin{aligned}\Delta V_{2s} =& \Delta V_2-\overline{\Delta V_2} = (3J_2/4a^3)\{-\sin 2i[(a/r)^3-(1-e^2)^{-(3/2)}-\\ &(a/r)^3\cos 2u]\times[\sigma_1\cos(L_m-\omega_m-\Omega)+\sigma_2\cos(L_m+\omega_m-\Omega)+\\ &\sigma_3\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)]+2\sin i(a/r)^3\sin 2u[\sigma_1\sin(L_m-\omega_m\\ &-\Omega)+\sigma_2\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\sigma_3\sin(2L_m-\Omega_m-\Omega)]\},\end{aligned} \tag{9.70}$$

ΔV_{21} 和 ΔV_{2s} 分别为附加位的长周期和短周期两个部分.

同样给出 $C_{2,2}$ 项的附加位如下:

$$\begin{aligned}V(C_{2,2}) &= (3C_{2,2}/a^3)(a/r)^3((x^2-y^2)/r^2)\\ &= (3C_{2,2}/a^3)(a/r)\{[(1/r^2)(x^2-y^2)\cos 2L_m+\\ &\quad (2xy)\sin 2L_m]-2\tau[(1/r^2)(x^2-y^2)\sin 2L_m-\\ &\quad 2(xy/r^2)\cos 2L_m]-2\sigma_1(z/r)[(x/r)\sin(L_m+\omega_m)-\\ &\quad (y/r)\cos(L_m+\omega_m)]-2\sigma_2(z/r)[(x/r)\sin(L_m-\omega_m)-\\ &\quad (y/r)\cos(L_m-\omega_m)]\}.\end{aligned} \tag{9.71}$$

相应的轨道根数形式为

$$\begin{aligned}\Delta V_2(C_{2,2}) =& -(3C_{2,2}/a^3)(a/r)^3\{\tau[\sin(2L_m-2\Omega)(2\cos 2u+\sin^2(1-\\ &\cos 2u))-\cos(2L_m-2\Omega)(2\cos i\sin 2u)]+\sigma_1\sin i[\sin(L_m+\\ &\omega_m-\Omega)\sin 2u-\cos i\cos(L_m+\omega_m-\Omega)(1-\cos 2u)]+\end{aligned}$$

$$\sigma_2 \sin i[\sin(L_m-\omega_m-\Omega)\sin 2u-\cos i\cos(L_m-\omega_m-\Omega)(1-\cos 2u)]\}, \tag{9.72}$$

$$(\Delta V_{2,2})_l=-(3C_{2,2}/a^3)\sin i(1-e^2)^{-3/2}\{\tau\sin i[\sin(2L_m-2\Omega)]-\sigma_1\cos i[\cos(L_m+\omega_m-\Omega)]-\sigma_2\cos i[\cos(L_m-\omega_m-\Omega)]\}, \tag{9.73}$$

$$\begin{aligned}(\Delta V_{2,2})_s=&-(3C_{2,2}/a^3)\{\sin i[\tau\sin i\sin(2L_m-2\Omega)-\sigma_1\cos i\cos(L_m+\omega_m-\Omega)-\sigma_2\cos i\cos(L_m-\omega_m-\Omega)][(a/r)^3-(1-e^2)^{-3/2}]\\&+\tau[(2-\sin^2 i)\sin(2L_m-2\Omega)(a/r)^3\cos 2u-(2\cos i)\cos(2L_m-2\Omega)(a/r)^3\sin 2u]+\sigma_1\sin i[\sin(L_m+\omega_m-\Omega)(a/r)^3\sin 2u+\cos i\cos(L_m+\omega_m-\Omega)(a/r)^3\cos 2u]\\&+\sigma_2\sin i[\sin(L_m-\omega_m-\Omega)(a/r)^3\sin 2u+\cos i\cos(L_m-\omega_m-\Omega)(a/r)^3\cos 2u\}.\end{aligned} \tag{9.74}$$

（2）天平动引起的坐标系附加摄动解

根据天平动引起的附加摄动位 $\Delta V(C_{2,0})$ 和 $\Delta V(C_{2,2})$ 可知，对月球卫星轨道只有长、短周期影响. 在米级精度要求下，只要给出长周期变化项即可，至于短周期项，只有轨道半长径 a 需要考虑，这是由于沿迹根数 M 的精度要求所致.

采用与前面相同的拟平均根数法，很容易建立相应的摄动解，相应的长周期变化项为

$$\Delta\sigma_L(t)=\sigma_L(t)-\sigma_L(t_0), \tag{9.75}$$

对于 $C_{2,0}$ 的附加部分 $\sigma_L(t)$ 的具体形式如下：

$$a_L(t)=0, \tag{9.76}$$

$$e_L(t)=0, \tag{9.77}$$

$$i_L(t)=-(3J_2/2p^2)\cos i\times\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\cos(L_m-\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\cos(L_m+\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\cos(2L_m-\Omega_m-\Omega)\right], \tag{9.78}$$

$$\Omega_L(t)=-(3J_2/2p^2)\frac{\cos 2i}{\sin i}\times\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\sin(L_m-\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\sin(2L_m-\Omega_m-\Omega)\right], \tag{9.79}$$

$$\omega_L(t)=(3J_2/2p^2)\frac{\cos i}{\sin i}(1-5\sin^2 i)\times\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\sin(L_m-\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\sin(L_m+\omega_m-\Omega)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\sin(2L_m-\Omega_m-\Omega)\right], \tag{9.80}$$

$$M_{\mathrm{L}}(t)=-(9J_2/4p^2)\sqrt{1-e^2}\sin 2i\times\left[\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\sin(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)+\right.$$

$$\left.\frac{\sigma_2}{\alpha_2}\sin(L_{\mathrm{m}}+\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)+\frac{\sigma_3}{\alpha_3}\sin(2L_{\mathrm{m}}-\Omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right],\qquad(9.81)$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{n}(\dot{L}_{\mathrm{m}}-\dot{\omega}_{\mathrm{m}}-\dot{\Omega})=O(10^{-3})\\ \alpha_2=\dfrac{1}{n}(\dot{L}_{\mathrm{m}}+\dot{\omega}_{\mathrm{m}}-\dot{\Omega})=O(10^{-3})\\ \alpha_3=\dfrac{1}{n}(2\dot{L}_{\mathrm{m}}-\dot{\Omega}_{\mathrm{m}}-\dot{\Omega})=O(10^{-3})\end{cases}.\qquad(9.82)$$

对于 $C_{2,2}$ 的附加项部分，相应的结果如下：

$$a_{\mathrm{L}}(t)=0,\qquad(9.83)$$

$$e_{\mathrm{L}}(t)=0,\qquad(9.84)$$

$$i_{\mathrm{L}}(t)=-(3C_{2,2}/p^2)\times\left[\frac{2\tau}{\alpha 4}\sin i\sin(2L_{\mathrm{m}}-2\Omega)-\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\cos i\cos(L_{\mathrm{m}}+\right.$$

$$\left.\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)-\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\cos i\cos(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right],\qquad(9.85)$$

$$\Omega_{\mathrm{L}}(t)=(3C_{2,2}/p^2)\times\left[\frac{2\tau}{\alpha_4}\cos i\cos(2L_{\mathrm{m}}-2\Omega)+\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\frac{\cos 2i}{\sin i}\sin(L_{\mathrm{m}}+\omega_{\mathrm{m}}\right.$$

$$\left.-\Omega)+\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{\cos 2i}{\sin i}\sin(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right],\qquad(9.86)$$

$$\omega_{\mathrm{L}}(t)=-(3C_{2,2}/p^2)\times\left[\frac{\tau}{\alpha 4}(2-5\sin^2 i)\cos(2L_{\mathrm{m}}-2\Omega)+\right.$$

$$\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\frac{\cos i}{\sin i}(1-5\sin^2 i)\sin(L_{\mathrm{m}}+\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)+$$

$$\left.\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{\cos i}{\sin i}(1-5\sin^2 i)\sin(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right],\qquad(9.87)$$

$$M_{\mathrm{L}}(t)=(9C_{2,2}/p^2)\sqrt{1-e^2}\times\left[\frac{\tau}{\alpha 4}\sin^2 i\cos(2L_{\mathrm{m}}-2\Omega)+\right.$$

$$\frac{\sigma_1}{\alpha_2}\sin i\cos i\sin(L_{\mathrm{m}}+\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)+$$

$$\left.\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\sin i\cos i\sin(L_{\mathrm{m}}-\omega_{\mathrm{m}}-\Omega)\right],\qquad(9.88)$$

其中

$$\alpha_4=\frac{1}{n}(2\dot{L}_{\mathrm{m}}-2\dot{\Omega})=O(10^{-3}).\qquad(9.89)$$

为了使平近点角 M 达到同样的精度要求，如有需要，应考虑轨道

半长径 a 的短周期项，上述两部分（$C_{2,0}$ 和 $C_{2,2}$）附加摄动引起的 a 的短周期项为

$$a_s(t)=2a^2[(\Delta V_2)_s+(\Delta V_{2,2})_s]. \tag{9.90}$$

经数值验证表明，这里给出的月球物理天平动对月球卫星轨道影响的摄动分析解是正确的，其中 $C_{2,2}$ 项的影响要比 $C_{2,0}$ 项的影响小一个量级.

§9.5 月球卫星运动的轨道寿命与冻结轨道问题

众所周知，大气耗散作用是决定卫星轨道寿命的重要因素，就像人造地球卫星那样，特别是低轨卫星，由于大气耗散作用，轨道不断变小变圆，最终落入地球稠密大气层被烧毁而结束其轨道寿命. 但对于卫星轨道寿命问题，还有另一种动力学机制，即存在一种摄动作用，会使其轨道偏心率 e 增大（实为变幅较大的长周期项），导致其近星距 $r_p=a(1-e)\leqslant a_e$（中心天体赤道半径）而与中心天体相撞，结束其轨道寿命. 在这种动力学机制中，中心天体的动力学扁率 J_2 的大小起着决定性作用，相应的表现对于高轨卫星和低轨卫星有所不同.

1. 高轨卫星情况

无论是有或无大气的中心天体，对于它们的高轨卫星，耗散作用已不重要. 对于非耗散效应，如中心天体的扁率（J_2）和第三体质点引力，这两种重要的摄动源均为保守力摄动，相应的卫星轨道半长径 a 仅有微小的周期变化，而高轨卫星轨道偏心率 e 变化的幅度将是影响其轨道寿命的关键因素. 在保守力摄动下，尽管偏心率 e 没有长期变化，但可能有因小分母引起的变幅较大的长周期变化. 根据第四章和第五章分别给出的 J_2 项摄动和第三体引力摄动的摄动解，e 的长周期摄动项可分别写成如下形式：

$$\begin{aligned}[e_L(t)]_1 =& \mu a_e^2\left(\frac{3J_2}{2a^2}\right)\sin^2 i\left[\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i\right)^{-1}+\right.\\ &\left.\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{6(1+\sqrt{1-e^2})^2}\right]\left(\frac{e}{1-e^2}\right)\cos 2\omega,\end{aligned} \tag{9.91}$$

$$\begin{aligned}[e_L(t)]_2 =& -\frac{15}{16}\left(\frac{\mu' a^3}{\mu a'^3}\right)(1-e'^2)^{-3/2}\sin^2 i(e\sqrt{1-e^2})\times\\ &\left(\frac{n}{\dot\omega}\right)[\cos 2\omega+O(\sin i')].\end{aligned} \tag{9.92}$$

其中 μ 和 μ' 分别为中心天体和摄动天体的质心引力常数，$\dot\omega$ 是卫星轨道拱

线的进动速率,即摄动长期项的系数$(\omega_1+\omega_2)$,有

$$\left(\frac{\dot{\omega}}{n}\right)=\left[\left(\frac{3J_2a_e^2}{2a^2}\right)+\left(\frac{3}{4}\ \frac{\mu' a^3}{a'3}\right)\right]\left[\left(2-\frac{5}{2}\ \sin^2\ i\right)+O(e^2,e'^2,\sin^2\ i')\right]. \tag{9.93}$$

(9.92)式和(9.93)式右端的 $O(\sin i')$等项无需具体写出,因为摄动天体的 e'和 i'一般都较小,对讨论的问题无实质性影响. (9.91)～(9.93)式就是讨论高轨卫星轨道寿命的主要理论依据.

卫星近星距 r_p的变化,关键在于 e 的变幅. 从(9.91)式可看出,对于扁率摄动,e 的变化幅度主要取决于因子 J_2/a^2,对一特定的中心天体(J_2值确定),轨道越高,e 的变化幅度越小. 而第三体摄动效应却不同,从(9.92)式可看出,e 的变化幅度在很大程度上依赖于由(9.93)式表达的$\dot{\omega}$的大小. 对于低轨卫星,$\dot{\omega}$的大小取决于月球扁率 J_2,其值一般不太小. 对于高轨卫星,扁率摄动项减小,第三体引力摄动项增大,其临界值(亦即$\dot{\omega}$的最小值,相应 e 的变化出现小分母)对应上述两项摄动量级相等的情况,有

$$\frac{3J_2a_e^2}{2a^2}=\frac{3}{4}\ \frac{\mu'\ a^3}{a'^{\ 3}}. \tag{9.94}$$

由此可知,相应的卫星轨道半长径的临界值 a_c为

$$a_c=\left[2\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)\ \left(\frac{a'}{a_e}\right)^3\ J_2\right]^{1/5}\ a_e, \tag{9.95}$$

这里 a'是第三体“相对”中心天体的轨道半长径.

对于地球—卫星—月球系统,$a_c=8.2a_e$(地球赤道半径),而对于月球—卫星—地球系统,由于月球的 J_2值小,$a_c=2.2a_e$(月球赤道半径). 当高轨卫星的轨道半长径 a 接近 a_c时,e 的变幅会增大,有可能大到使卫星近星距 r_p减小到等于 a_e的状态,从而与地球或月球相撞. 文[13～15]中均有算例,像月球轨道器 $a_0=4.0a_e$,$e_0=0.20$,$i_0=85°$,运行不到 6 个恒星月,就因 e 增大,使 $r_p=a_e$从而落到月球上. 这种动力学机制相当于起着“保护”作用的中心天体的动力学扁率较小,卫星轨道还是被第三体质点引力效应周期性地拉扁,扁到一定程度即出现上述卫星与中心天体相撞的现象.

2. 月球低轨卫星的轨道寿命

尽管月球无大气,但在非球形引力作用下,低轨卫星的近月距 $r_p=a(1-e)$也会减小,当 $r_p=a_e$时,卫星将与月球相撞. 轨道半长径 a 在非球形引力作用下,只有振幅较小的短周期变化,主要源于月球动力学扁率 J_2 项摄动,变化量级只有 10^{-4},不会导致 r_p的明显变化. 显然,r_p有明显减小趋

势的原因是轨道偏心率 e 有振幅较大的长周期变化 Δe_{L}. 文[16]有过简单计算结果,文[17]讨论过简单的动力学机制,这里将进一步深入地讨论该问题.

在月球非球形引力和地球引力两种主要摄动源的作用下,消除短周期变化后,e 的长周期变化满足下列方程:

$$\frac{\mathrm{d}e_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}=n(1-e^2)\sum_{l\geqslant 3}\left(\frac{J_l}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{(l-2+\delta)/2}(-1)^{(l-\delta)/2}(l-2p)F(i)\left[\frac{1}{e}K(e)\right]I(\omega)-$$
$$n(1-e^2)\sum_{l=2}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{p_0^l}\right)\sum_{p=1}^{l-1}(l-2p)\ F_{\mathrm{lm}p}(i)\left[\frac{1}{e}K(e)\right]\Phi_{\mathrm{lm}p}(\omega,\theta)+$$
$$O(em'). \tag{9.96}$$

此方程的原始形式在前面 §9.4 中曾给出过,为了探讨月球低轨卫星的轨道寿命问题,这里又作了一些必要的改变.(9.96)式右端第一和第二大项分别为带谐项($J_l=-C_{l,0}$)和田谐项摄动,第三大项为地球引力摄动,含有 e 因子.方程中的 $n=a^{-3/2}$,采用符号 p_0 是为了与式中求和取值 p 区分开.有关表达式改变后的形式如下:

$$\delta=\frac{1}{2}[1-(-1)^l]=\begin{cases}1, l\ \text{奇},\\0, l\ \text{偶},\end{cases} \tag{9.97}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{e}K(e)=\displaystyle\sum_{\alpha(2)=(l-2p)}^{l-2}C_{lp\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}e^{\alpha}=\begin{cases}O(e^0), l\ \text{奇},\\O(e),\ l\ \text{偶},\end{cases}\\[2ex] C_{lp\alpha}=\begin{pmatrix}l-1\\\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\frac{1}{2}(\alpha-(l-2p))\end{pmatrix},\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{m!(m-n)!},\end{cases} \tag{9.98}$$

$$\begin{cases}F(i)=-\displaystyle\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\left(\frac{1}{2}\right)^{(2l-2p+2q-\delta_p)}C_{lpq}(\sin i)^{(l-2p+2q)},\\[2ex]\delta_p=\begin{cases}0, l-2p=0,\\1, l-2p\neq 0,\end{cases}\\[2ex] C_{lpq}=\begin{pmatrix}l\\p-q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2l-2p+2q\\l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{l-2p+2q}{q}\end{pmatrix}\end{cases} \tag{9.99}$$

$$I(\omega)=-1(1-\delta)\ \sin(l-2p)\omega+\delta\cos(l-2p)\omega. \tag{9.100}$$

田谐项摄动中的 $\Phi(\omega,\theta)$涉及的 $\theta=\Omega-S(t)$,$S(t)$是月固坐标系中 X 轴(即 ξ' 轴)方向的经度,随月球自转而变化.$\Phi(\omega,\theta)$的表达式和一般的倾角函数 $F_{\mathrm{lm}p}(i)$以及地球引力摄动项 $O(em')$,不再具体给出,因下面的讨论表明,可略去相应的两类摄动影响.

对(9.96)式作进一步分析,l 为奇数时,右函数中含有 $O(e^0)$因子,即以 $e^0\cos\omega$ 形式出现,l 为偶数时却含有 $O(e)$因子,是以 $e\sin 2\Omega$ 形式出现.而

考虑月球低轨卫星寿命时，相应的 e 肯定是小量，有 $e<0.1$. 事实上，对于平均高度为 100 km 的低轨卫星，只要 e 达到 0.05～0.06，即可使 r_p 接近 a_e 值，若 e 增大将会立即撞上月球. 因此，(9.96)式中只有对应 l 为奇数的摄动项值得考虑，但与奇次带谐项相比，田谐项影响要小一个量级. 故对于理论分析而言，只要保留(9.96)式中的奇次带谐摄动部分即可. 舍去的各种摄动项的影响，可在后面对相应的完整力模型进行模拟计算中去考察，实际计算结果将会证实上述简化的合理性. 在(9.96)式中只保留奇次带谐项摄动部分，但仅取其 $O(e^0)$ 项，对应求和中 $l-2p=1$ 的取值，从而简化成下列形式：

$$\frac{\mathrm{d}e_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}=\sin i\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)(l-1)(J_1/P_0^l)F^*(i)(n\cos\omega),\tag{9.101}$$

其中

$$\begin{cases}F^*(i)=\displaystyle\sum_{q=0}^{(l-1)/2}(-1)^q\left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}C_{lpq}^*(\sin^2 i)^q,\\ C_{lpq}^*=\begin{pmatrix}l\\(l-1)/2-q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l+2q+1\\l\end{pmatrix}\left(\dfrac{2q+1}{q},\right)\end{cases}\tag{9.102}$$

(9.101)式求和中 $l(2)$表示取值“步长”为 2，即 $l(2)=3,5,\cdots$. $\omega=\bar{\omega}(t)=\bar{\omega}_0+\omega_c(t-t_0)$，$\omega_c$ 是$\bar{\omega}(t)$的长期变率，如果仅取其由 J_2 项给出的一阶变率 ω_1，有

$$\omega_c=\omega_1=\frac{3J_2}{2p_0^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right).\tag{9.103}$$

积分(9.101)式给出 e 的长周期变化 Δe_l的表达式如下：

$$\Delta e_{\mathrm{L}}=e_{\mathrm{L}}(t)-e_{\mathrm{L}}(t_0)=\sin i\left\{\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\frac{(l-1)}{3p_0^l}\left(\frac{J_l}{J_2}\right)F^*(i)\right\}\cdot$$

$$[\sin\bar{\omega}(t)-\sin\bar{\omega}(t_0)]/\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right).\tag{9.104}$$

由此可以看出，e 的变幅主要取决于奇次带谐项系数 $J_{2l-1}(J\geqslant 2)$与 J_2 的相对大小以及倾角函数 $F^*(i)$的性质，有

$$|\Delta e_l|\sim O(J_{2l-1}/J_2)\cdot F^*(i).\tag{9.105}$$

对于地球卫星，由于

$$O(J_{2l-1}/J_2)=10^{-3},\tag{9.106}$$

相应的轨道偏心率的变幅很小，而月球卫星则不同，由于

$$O(J_{2l-1}/J_2)=10^{-1}.\tag{9.107}$$

故完全有可能使月球低轨卫星的轨道偏心率 e 增大到使 $r_p=a_e$的状态. 当

然，这还要取决于$(J_{2l-1}/J_2)F^*(i)$值的变化状况.

由于月球非球形引力位的特征，谐系数J_{2l-1}随阶l的升高并无明显地减小，由函数$(J_{2l-1}/J_2)F^*(i)$的特征，长周期变化Δe_l的模$|\Delta e_l|$随着不同的i值$(0°< i\leqslant 90°)$将出现多个极小与极大值，相应的r_p值将不会达到a_e或必然会达到a_e值，亦即月球低轨卫星的轨道寿命既取决于奇次带谐项的摄动影响，又与轨道的空间定向有关. 由于$\sin i$的特征，$90°\leqslant i<180°$的情况与$0°< i\leqslant 90°$的情况类似.

因有关低轨月球卫星的轨道寿命与冻结轨道有某种联系，下面首先作一理论分析，然后再作相应的数值验证.

3. 关于冻结轨道

与地球卫星类似，在月球非球形引力作用下，相应的平均系统(即消除轨道变化的短周期部分)可能存在一种特解(详见第4章§4.7)：

$$\bar{a}(t)=a_0,\quad \bar{e}(t)=e_0,\quad \bar{i}(t)=i_0,\bar{\omega}(t)=\omega_0=90°\text{ 或 }270°. \tag{9.108}$$

拱线不动，此即冻结轨道，此解对i_0无任何限制，对应不同的i_0有相应的e_0存在. 那么根据(9.104)式给出的Δe_l，对于平均高度为100 km的低轨卫星，是否存在某些轨道配置，通过冻结轨道的选择保持$r_p>a_e$使其不会与月球相撞呢？

首先考查冻结轨道的存在情况，同样由于月球引力场的特征，与地球卫星的冻结轨道状况亦有差别. 对于地球卫星，基本上由J_2和J_3两项即可确定冻结轨道解，而对月球卫星则不然，文[18]有过简单讨论，这里将进一步深入讨论. 对于平均轨道根数，仍记作a,e,i,ω，略去推导过程，下面将直接给出相应的冻结轨道解. 当a值给定的情况下，对于任一i值，冻结轨道对应的e值满足下列条件：

$$e=\pm\sin i\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\left(\frac{1}{2}\right)(l-1)\left(\frac{J_l}{J_2}\right)F^*(i)\left(\frac{n}{\omega_c}\right), \tag{9.109}$$

其中ω_c是ω的长期变率. 与上一段讨论e的长周期变化对应，若只取由J_2给出的一阶变率ω_1，则(9.109)式简化为下列形式：

$$e=\pm\sin i\left\{\sum_{l(2)\geqslant 3}(-1)^{(l-1)/2}\frac{(l-1)}{3p_0^l}\left(\frac{J_l}{J_l}\right)F^*(i)\right\}\bigg/\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right). \tag{9.110}$$

式中“+”号对应冻结轨道解$\omega\equiv\omega_0=90°$，“−”号对应$\omega_0=270°$，即前者对

应(9.110)式右端值(除前面的±外)为正,而后者则对应右端值为负.这一结果与地球卫星情况有差别,地球卫星的冻结轨道主要取决于 J_3 项,且总有 $\omega\equiv\omega_0=90°$,由类似的(9.110)式给出的偏心率 e 对不同的 i 值均很小,即 $e_0=O(10^{-3})$,而对于月球低轨卫星则不同,对不同的 i 值,冻结轨道解有两种可能,即 $\omega\equiv\omega_0=90°$或 $270°$,且相应的 e_0 值可能较大.

从(9.110)式和上一段给出的(9.104)式可以看出,在考虑主要摄动因素的前提下,冻结轨道解的 e 值与 e 的长周期变化幅度 $|\Delta e_L|$ 是相同的,而这一解是在平均系统中给出的,且仅在 i 变化的小邻域内才能保持,对于月球卫星,由于月球非球形引力位的特征,实际状况是 $\omega(t)$ 有明显的变化幅度.由此可知,当 $|\Delta e_L|$ 对应某些 i 值为极小时,即使冻结轨道不能保持(即 $\omega(t)$ 有大范围变化),也不会出现 e 有明显增大的可能,r_p 不会降至 a_e 值;相反,当 $|\Delta e_L|$ 对应某些 i 值为极大时,即使冻结轨道(此时对应解的 e 值较大)能基本保持(即 $\omega(t)$ 的变化范围不大),e 的变化也有可能使 r_p 降至 a_e 大小,结束其轨道寿命.也就是说,月球低轨卫星的轨道寿命并不依赖冻结轨道的选择(即轨道偏心率 e 和倾角 i 按条件(9.110)的选择),而主要取决于(9.104)式中所确定的 Δe_L 的模,这归结为月球非球形引力场的基本特征和卫星轨道倾角 i 的选择.我们将在下一段给出相应的模拟计算来证实月球低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系.

4. 模拟计算——理论分析的数值验证

为了验证理论分析的正确性,对低轨卫星(平均高度 100 km),可通过下列三种情况的计算来证实,即

(1) 根据分析解(9.104),扫描似地从 $i=0°.5$ 到 $179°.5$,间隔 $1°$,计算了对应的 $|\Delta e_L|$ 值,看极小

与极大的分布状况.

(2) 根据分析解(9.110)式,同样对 $i=0°.5\sim179°.5$,间隔 $1°$求出相应的冻结轨道解:e_0 和对应的 ω_0 值.

(3) 考虑主要摄动因素(月球非球形引力,地球引力和太阳引力),对完整的运动方程计算低轨卫星(取平均高度$\overline{h}=100$ km,$e_0=0.001$)随倾角 i_0 的不同,相应近月点高度 h_p 的变化情况,即轨道寿命与倾角 i 的关系.

上述第(3)部分的计算正是为了证实第(1)和第(2)两部分由分析解给出的结果的正确性,从而确定月球低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系,同时也进一步证实这种结果主要是由月球非球形引力场特征所决定的.

计算中,月球引力场模型采用了美国 JPL 的 LP75G 模型,前两部分对

引力场球谐展开式阶次 l 取 30～45,无实质性差别,第(3)部分是取完整的力模型,即 l 取到 75,m 取 $0\sim l$.

关于$|\Delta e_L|$,对应极小值有如下几个“稳定区”(即$|\Delta e_L|$值很小):

$$i=0°,\quad 27°,\quad 50°,\quad 77°,\quad 85°.$$

根据 $\sin i$ 的性质,在 90°～180°间有对应的“稳定区”,即 95°,103°,….

关于冻结轨道,与上述$|\Delta e_L|$的情况对应,对应“稳定区”的倾角 i_0,相应的冻结轨道解 e_0 的值均较小,而对应“不稳定区”的倾角 i_0,则相应的解 e_0 值均较大.表 9.1 列出了部分结果,对应 l 取 40.

根据上述结果,考虑完整力模型后,第(3)部分的计算应有如下预期结果,即在上述“稳定区”(即取 $i_0=0°,27°,\cdots$),低轨卫星的轨道寿命应很长,而相反,则轨道寿命应很短.为了节省篇幅表 9.2 列出了对 i 取值有一定间隔的结果.表中 $\min h_p=0.0$ 或接近 0.0,即表明与月球相撞,T_c 即为对应的轨道寿命值.对所有 i_0 值计算间隔均为 10 年,当在较短间隔内 $h_p=0.0$ 时计算结束.而在“稳定区”,如 $i_0=85°$和 95°,即使卫星运行 10 年近月点高度 h_p 也不会明显降低,极小值仍有 60 多公里高.图 9.4～图 9.7,分别为 $i_0=40°,90°$和 85°,95°时 h_p 随时间的变化状态,前者分别为 48 天和 172 天与月球相撞,后者 10 年期间的极小值还分别有 60 km 和 68 km 高.

上述数值结果一方面验证了理论分析的正确性,同时也给出了低轨卫星轨道寿命与倾角 i 的关系.但这些保持不与月球相撞的所谓“稳定区”的范围(对轨道倾角 i_0 值而言)都较小,考虑到各种因素(包括发射误差的影响),即使允许选择适当的倾角,也还要注意运行过程中的轨道控制(耗费较小能量的轨道机动).

最后说明两点:

(1) 低轨卫星的轨道寿命与轨道升交点 Ω 的初值无关,这一点从非球形引力位带谐项的性质不难看出,实际计算结果也证实了这一点,在上述第(3)种情况的计算中,改变 Ω 的不同初值,对计算结果 h_p 的变化无实质性影响.

(2) 月球卫星的冻结轨道难以保持,即使是那种特殊的冻结轨道,即临界倾角情况,$i=i_c=63°26'$,在采用实际力模型对应的第(3)种计算中,ω 仍在大范围内变化,未保持“冻结”.

表 9.1　冻结轨道解

i(deg)	ω(deg)	e	i(deg)	ω(deg)	e
0.5	90.0	0.002831	5.0	90.0	0.025923
1.0	90.0	0.005647	10.0	90.0	0.040836
27.0	90.0	0.005333	20.0	90.0	0.021863
28.0	270.0	0.002481	35.0	270.0	0.060784
49.5	270.0	0.007062	40.0	270.0	0.047442
50.0	90.0	0.000870	45.0	270.0	0.046151
75.0	270.0	0.009016	55.0	90.0	0.140493
76.0	270.0	0.002874	60.0	270.0	0.253887
77.0	270.0	0.005638	63.0	270.0	0.188417
85.0	270.0	0.001753	80.0	90.0	0.026043
95.0	270.0	0.001728	90.0	270.0	0.043215

表 9.2　月球低轨卫星轨道寿命的状况

i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)	i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)
1.0	2723.1	0.0362	33.9	60.0	88.2	0.0548	0.0
2.0	549.0	0.0414	24.6	61.0	88.1	0.0547	0.0
3.0	1852.7	0.0479	13.0	63.43	85.9	0.0545	0.0
4.0	273.2	0.0550	0.0	65.0	88.0	0.0546	0.0
5.0	49.5	0.0548	0.0	67.0	115.5	0.0547	0.0
7.5	42.9	0.0545	0.0	69.0	224.1	0.0523	3.9
10.0	42.5	0.0545	0.0	70.0	3347.5	0.0464	14.9
12.5	43.9	0.0547	0.0	71.0	3407.0	0.0406	25.5
15.0	43.9	0.0547	0.0	72.0	2453.3	0.0348	36.2
17.5	46.3	0.0548	0.0	73.0	1469.4	0.0333	39.0
20.0	77.0	0.0547	0.0	74.0	1498.4	0.0339	37.8
22.0	80.7	0.0532	3.2	75.0	1500.5	0.0340	37.8
24.0	80.0	0.0525	4.4	76.0	1449.0	0.0336	38.5
26.0	2543.1	0.0515	6.0	77.0	3383.8	0.0381	30.4
27.0	2219.9	0.0419	23.6	79.0	401.1	0.0544	0.0
28.0	2599.4	0.0264	52.1	80.0	320.6	0.0545	0.0
29.0	1404.4	0.0251	54.4	81.0	294.0	0.0545	0.0
30.0	2084.1	0.0453	17.3	82.0	294.7	0.0547	0.0

续　表

i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)	i(deg)	T_c(day)	Max e	Min h_p(km)
31.0	91.6	0.0547	0.0	83.0	403.2	0.0544	0.0
33.0	46.2	0.0547	0.0	84.0	2941.4	0.0419	23.0
35.0	44.5	0.0546	0.0	85.0	1711.7	0.0220	59.6
37.0	45.2	0.0546	0.0	86.0	3401.8	0.0414	23.6
39.0	47.4	0.0548	0.0	87.0	308.8	0.0523	4.0
40.0	47.9	0.0547	0.0	88.0	174.6	0.0542	0.3
41.0	48.4	0.0546	0.0	89.0	171.3	0.0545	0.0
43.0	48.3	0.0548	0.0	90.0	172.0	0.0545	0.0
45.0	49.7	0.0544	0.7	91.0	193.0	0.0546	0.0
47.0	72.7	0.0545	0.0	92.0	226.7	0.0546	0.0
49.0	177.9	0.0546	0.0	93.0	309.9	0.0546	0.0
50.0	2522.0	0.0545	0.0	94.0	1133.9	0.0392	28.1
51.0	1908.1	0.0337	38.5	95.0	1102.0	0.0172	68.3
52.0	211.9	0.0547	0.0	96.0	1557.2	0.0253	53.6
54.0	88.9	0.0546	0.0	97.0	1118.8	0.0464	14.5
56.0	83.1	0.0547	0.0	98.0	236.2	0.0546	0.0
58.0	84.6	0.0546	0.0				

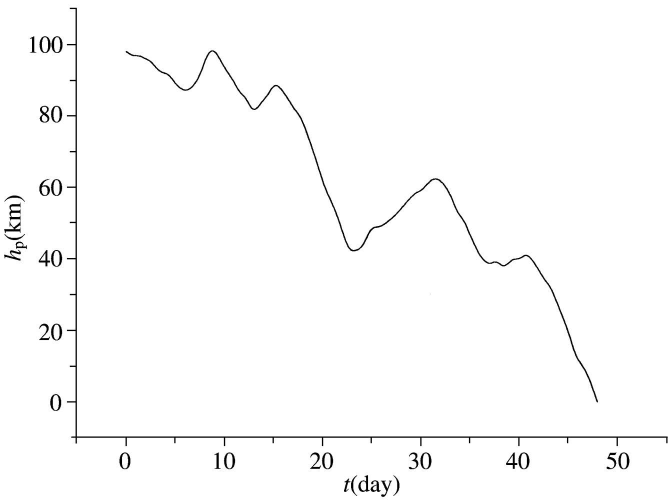

图 9.4　初始轨道倾角 $i_0=40°$的月球低轨卫星轨道寿命

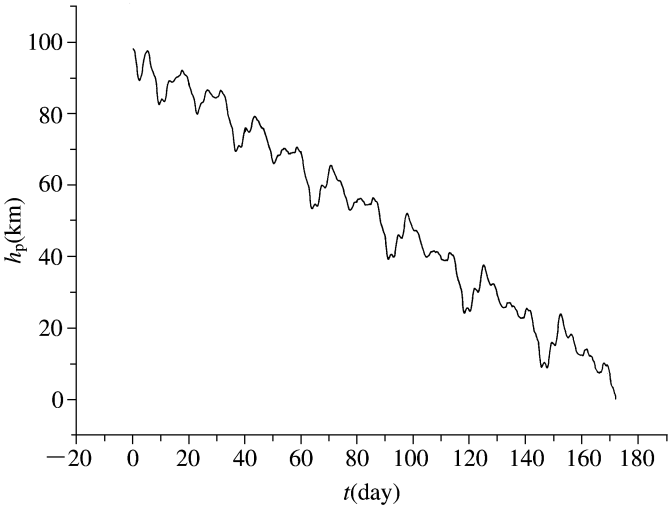

图 9.5　初始轨道倾角 $i_0 = 90°$的月球低轨卫星轨道寿命

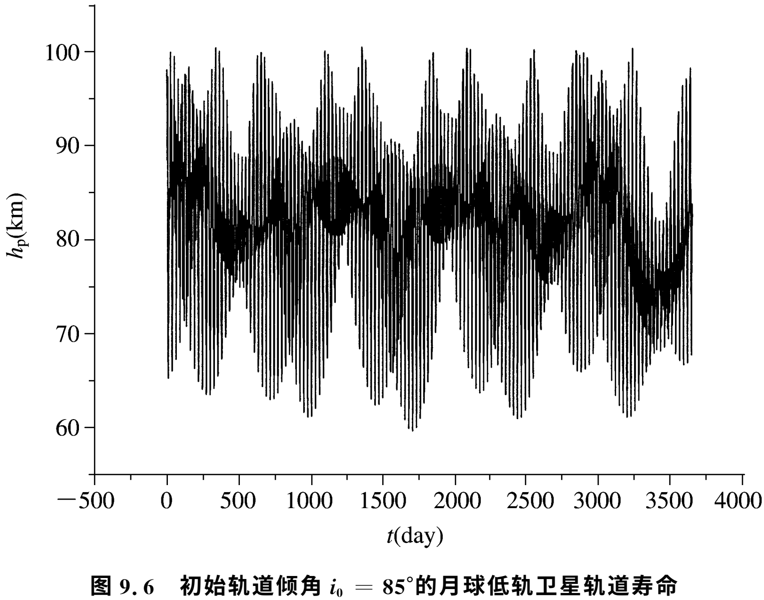

图 9.6　初始轨道倾角 $i_0 = 85°$的月球低轨卫星轨道寿命

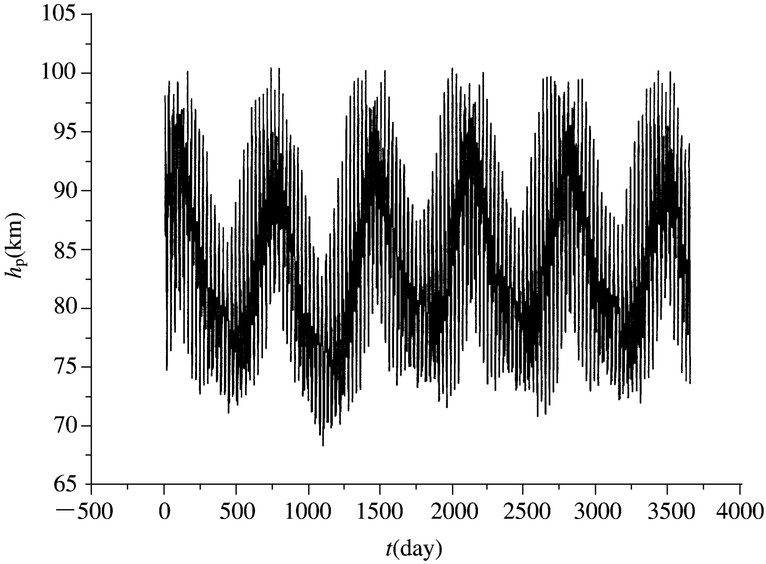

图 9.7 初始轨道倾角 $i_0=95°$的月球低轨卫星轨道寿命

参 考 文 献

［1］Koziel K. Physicsand Astronomy of the Moon. Ed. by Kopal Z. New York：Academic Press,1962

［2］Gappellari J O. Velez C E & Fuchs A J. Mathematical Theory of Goddard Trajectory Determination System. Goddard Space Flight Center，Greenbeit，Maryland. 1976，N76－24291－24302：3－31～ 3－32

［3］Eckhardt D H. Theory of the Libration of the Moon. The Moon and the Planets，1981,25：3～ 49

［4］Moons M. Physical Libration of the Moon. Celest. Mech. 1982，26（2）131～142

［5］Newhall X. X. Estimation of the Lunar Physical Libration. Celest. Mech. 1997,66(1)21～30

［6］Oesterwinter C. The Motion of a lunar satellite. Celest. Mech. 1970，1(3)：368～436

［7］Giacaglia G E O. Murphy J P. and Felsentreger T L. A Semi-Analytic Theory for the Motion of a lunar satellite. Celest. Mech. 1970，3(1)：3～66

［8］Brumberg V A. Evdokimova L S. and Kochina N G. Analytical Methods for the Orbits of Artificial Satellites of the Moon. 1971，3(2)：197～221

[9] Liu Lin and Wang Jia-song. An Analytic Solution of the Orbital of Lunar Satellites. Chin. Astron. Astrophys. 1998, 22(3): 328～351

[10] **刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京: 高等教育出版社**,1992

[11] **刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社**. 2000

[12] **张巍,刘林. 月球物理天平动对环月轨道器运动的影响. 天文学报**,2005,46(2): 196～206

[13] Marchal C. L. The Restricted Three-Body Problem Resisited. IAF - 99 - A. 7. 01, 50th International Astronautical Congress, 4 ～ 8 Oct 1999, Amsterdam, The Netherlands

[14] **王歆,刘林. 目标天体极轨卫星的轨道寿命. 宇航学报**. 2001,22(5): 62～65

[15] Wang Xin, Liu Lin, Another Mechanism of Restricting the Lifetime of Orbiting Satellites. Chin. Astron. Astrophys. 2002, 26(4): 489～496

[16] Meyer K W, Buglia J J, Desai P N. LifeTimes of Lunar Satellite Orbits. NASA Technical Paper 3394,1994

[17] Wang Xin, Liu Lin. Another Mechanism of Restricting the Lifetime of Orbiting Satellites (Continued). Chin. Astron. Astrophys. 2003, 27(1): 107～113

[18] **刘林,刘世元,王彦荣. 关于大行星(或月球)轨道器的冻结轨道. 飞行器测控学报**,2003,22(2): 19～24

第 10 章　航天器姿态动力学简介

§ 10.1　航天器姿态与姿态控制概述

航天器的轨道描述了航天器的质心运动，而航天器的姿态则是描述航天器绕其质心的运动，它们都是航天器状态的不同体现. 研究航天器状态（或相应的状态参数）的变化规律就是航天动力学的主要研究领域，研究质心的运动即航天器轨道力学，这正是前面各有关章节的内容，而研究航天器各部分相对其质心的运动，则称为航天器姿态动力学.

在空间运动的物体（可以是刚体、准刚体、弹性体、刚体与挠性体的混合系统等），不论是自然天体还是人造航天器，它们的运动都可分解为两个部分，作为一个等效质点的平运动和该物体各个部分在外力矩作用下绕其质心的转动运动. 对于航天器的运动而言，即轨道运动和姿态运动. 所谓姿态就是航天器各部分（以具体的固连坐标系来体现）相对某空间参考系（或观测者）的方位或指向的统称. 早在人造地球卫星上天之前，天体力学家就曾对最熟悉的两个自然天体（地球和月球）的姿态运动进行了深入的研究，分别建立了地球自转轴在空间指向变化的岁差章动理论和月球自转轴在空间摆动的物理天平动理论. 人造天体上天后，为了充分利用各种航天器执行特定的航天任务，对其姿态运动提出了许多新要求、新理论，促使航天器姿态与控制的研究工作蓬勃发展，研究内容已不是一个简单的刚体定点转动了.

航天器执行航天任务时通常对其定向都有预定的要求. 例如对地观测卫星要把星上的遥感仪器（照相机镜头等）对准地面，通信卫星的定向通信天线也应指向地面，各种空间望远镜（包括太阳探测仪和巡天探测仪）都应使相应的探测镜头对准预定的天体或天区，卫星进行变轨机动时，星体推力方向也应有预定的方向等等. 多数航天器上的观测仪器及推力器等相对星体指向是固定的，这就要求航天器对某参考物体（地球、被探测天体，或相应的参考系）有给定的方位和指向，即一定的姿态. 而且由于受到外力矩的影

响，姿态将会发生变化，为了保证航天器所承担的特定的探测任务，必须对姿态进行控制，使其保持姿态稳定.

航天器的姿态确定不仅是执行特定航天任务的要求，它与轨道确定亦有密切联系. 对于轨道变化中的非引力摄动效应，就与姿态有关，更确切地说，它需要了解有效截面 S 的变化规律 $S=S(t)$. 要保证达到高精度的定轨和预报要求（也是轨控的需要），必须提供相应的姿态信息，否则在定轨中只能将相应的航天器有效面质比（S/m）当作待估参数去处理，而简单的处理又不能达到高精度的要求.

§10.2 描述航天器姿态的几种坐标系

姿态通常是用两坐标系之间的相对转动关系来描述，因此有必要介绍描述姿态的几种坐标系，而且同一坐标系在不同领域中可能有不用的名称，我们尽量使其统一.

1. 地心惯性坐标系 $O-xyz$

这一坐标系就是本书前面各章在轨道力学中引用的历元地心天球坐标系，即历元平赤道地心系，目前采用的历元即 J2000. 这已为读者所熟知，不再介绍.

2. 航天器轨道坐标系 $S-x_o y_o z_o$

这里的轨道坐标系并不是轨道力学中所引用的那种混合坐标系（即坐标原点为地心，xy 平面为瞬时真赤道面，Ox 轴方向即历元平春分点方向），而是一种对航天器而言的“当地”坐标系. 坐标原点为航天器的质心 S，Sz_o 轴指向地心，即轨道力学中的反径向，Sx_o 轴在轨道面内垂直 Sz_o 指向运动方向，即轨道力学中所说的横向，Sy_o 轴与 Sz_o，Sx_o 轴构成右手正交坐标系统，Sy_o 轴方向就是轨道力学中轨道面法向的反向. 这种坐标系随着航天器的质心运动（即轨道运动）在空间是旋转的. 上述对地定向的三轴稳定卫星（如遥感卫星、通信卫星）的姿态就定义在这种坐标系中，常把 Sx_o，Sy_o 和 Sz_o 三轴分别称为滚动轴，俯仰轴和偏航轴.

对于这种坐标系，三个坐标轴方向的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{x}}_o$，$\hat{\boldsymbol{y}}_o$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}_o$ 可由航天器的轨道运动量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$（即地心位置矢量和速度矢量）来定义：

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{z}}_o = -\boldsymbol{r}/r = -\hat{\boldsymbol{r}}, \\ \hat{\boldsymbol{y}}_o = \dfrac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}|} = -\hat{\boldsymbol{w}}, \\ \hat{\boldsymbol{x}}_o = \hat{\boldsymbol{y}}_o \times \hat{\boldsymbol{z}}_o = \hat{\boldsymbol{t}} (\text{or} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}). \end{cases} \tag{10.1}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{r}}$,$\hat{\boldsymbol{t}}$(or　$\hat{\boldsymbol{\theta}}$)和 $\hat{w}$,即前各章常用到的径向、横向和轨道面法向单位矢量.

3. 航天器本体(自旋)坐标系 $S-x_by_bz_b$

坐标原点为航天器质心,Sx_b 轴为沿航天器纵轴方向指向航天器的前部,即航天器自旋转方向,Sy_b 轴在航天器纵对称面内,垂直于纵轴指向某特征点方向,Sz_b 轴即与 Sx_b,Sy_b 轴构成右手正交坐标系统.

4. 航天器惯性主轴坐标系 $S-x_ly_lz_l$

坐标原点仍为航天器质心,Sx_l,Sy_l,Sz_l 三个坐标轴方向即分别沿航天器三个惯性主轴方向. 航天器姿态动力学研究中常用这一坐标系.

§10.3　航天器姿态参数

描述航天器的轨道参数即六个轨道根数,而描述航天器的姿态参数即通常所说的一组欧拉角,亦称姿态角. 在航天器测控中,姿态角通常有两种定义:一种是航天器本体坐标系 $S-x_by_bz_b$ 相对于某一基准坐标系的一组欧拉角,这一定义常用于运载火箭发射段姿态角及载人飞船返回飞行时姿态角的描述;另一种是航天器本体坐标系相对于航天器轨道坐标系 $S-x_oy_oz_o$ 的一组欧拉角,这一定义常用于航天器在轨运行段姿态角的描述.

1. 第一类姿态角(φ,ψ,γ)及姿态矩阵的表达

如图 10.1 所示,由某一基准坐标系 $S-x_ty_tz_t$(以下记作 S_t),至本体坐标系 $S-x_by_bz_b$(以下记作 S_b)的转换依次为下面三次旋转:

(1) 绕 Oz_t 轴逆时针转一俯仰角 φ;

(2) 绕 Oy' 轴逆时针转一偏航角 ψ;

(3) 绕 Ox_b 轴逆时针转一滚动角 γ.

若分别记这两种坐标系 S_t 和 S_b 中的坐标矢量为 $\boldsymbol{R}_t$ 和 $\boldsymbol{R}_b$,则两者之间的转换关系(即坐标旋转关系)为

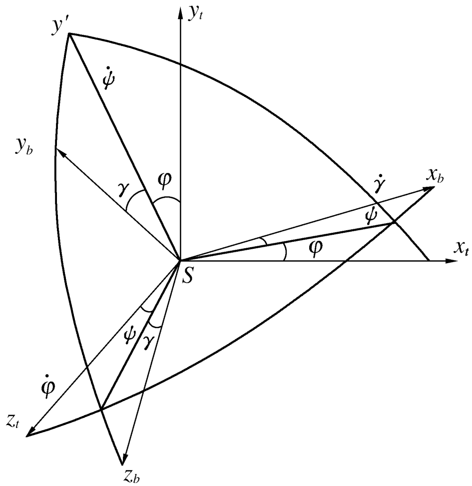

图 10.1　第一类姿态角的定义

$$\boldsymbol{R}_b = (A_{bt})\boldsymbol{R}_t, \tag{10.2}$$

$$\boldsymbol{R}_t = (A_{bt})^{-1}\boldsymbol{R}_b = (A_{bt})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_b. \tag{10.3}$$

其中转换矩阵(A_{bt})即这种定义下的姿态矩阵，有

$$(A_{bt}) = R_x(\gamma)R_y(\psi)R_z(\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi \\ -\cos\gamma\sin\varphi+\sin\gamma\sin\psi\cos\varphi & \cos\gamma\cos\varphi+\sin\gamma\sin\psi\sin\varphi & \sin\gamma\cos\psi \\ \sin\gamma\sin\varphi+\cos\gamma\sin\psi\cos\varphi & -\sin\gamma\cos\varphi+\cos\gamma\sin\psi\sin\varphi & \cos\gamma\cos\psi \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

当 φ,ψ,γ 均为小角度时，保留到一阶量，姿态矩阵(A_{bt})的简化形式为

$$(A_{bt}) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi & -\psi \\ -\varphi & 1 & \gamma \\ \psi & -\gamma & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.5}$$

2. 第二类姿态角(φ,φ,θ)及姿态矩阵的表达

如图 10.2 所示，由航天器轨道坐标系 S_o 至本体坐标系 S_b 的转换依次为下面三次旋转：

(1) 绕 Sz_o 轴逆时针转一偏航角 ψ；

(2) 绕 Sx'_o 轴逆时针转一滚动角 φ；

(3) 绕 Sy_b 轴逆时针转一俯仰角 θ.

若分别记这两种坐标系 S_o 和 S_b 中的坐标矢量为 $\boldsymbol{R}_o$ 和 $\boldsymbol{R}_b$，则有

$$\boldsymbol{R}_b = (A_{bo})\boldsymbol{R}_o, \tag{10.6}$$

$$\boldsymbol{R}_o = (A_{bo})^{-1}\boldsymbol{R}_b = (A_{bo})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_b. \tag{10.7}$$

这里的转换矩阵(A_{bo})即第二类姿态角定义对应的姿态矩阵，有

$$(A_{bo}) = R_y(\theta)R_x(\varphi)R_z(\psi)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\theta\sin\psi + \sin\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\theta\cos\varphi \\ -\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi \\ \sin\theta\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{10.8}$$

当 ψ,φ,θ 均为小角度时，保留到一阶量，姿态矩阵(A_{bo})有如下简化形式：

$$(A_{bt}) = \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.9}$$

上述姿态角即对应坐标轴的转动角，就称为欧拉角. 姿态参数还有另一种表示方法，即欧拉四元素表示法，下面介绍.

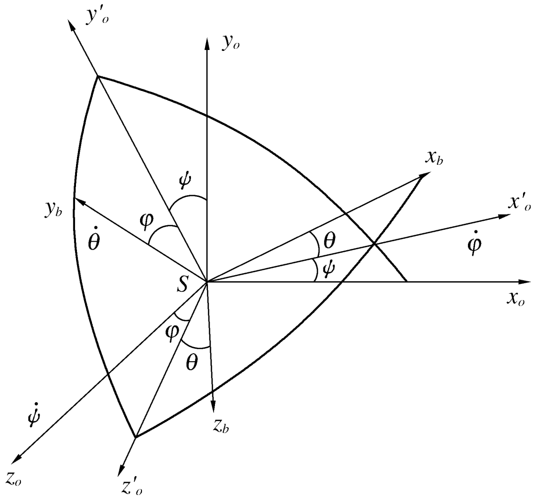

图 10.2　第二类姿态角的定义

3. 欧拉轴/角姿态参数——欧拉四元素

刚体绕固定点的任一位移（即由一坐标系到另一坐标系的旋转变换），可由绕通过此定点的某一轴（记为 e 轴）转动一个角度（记为 Φ）而得到，这从前面的两种姿态角的定义过程中亦可看出. 转轴 e 称为欧拉轴，转角 Φ 称

为欧拉角.

转轴 e 的单位矢量 e 在参考坐标系中的三个方向余弦(即三个分量) e_x, e_y, e_z 和转角 Φ 即称为欧拉轴/角姿态参数. 引进$\tilde{q}$:

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \sin \dfrac{\Phi}{2} \\ e_y \sin \dfrac{\Phi}{2} \\ e_z \sin \dfrac{\Phi}{2} \\ \cos \dfrac{\Phi}{2} \end{pmatrix}, \tag{10.10}$$

此即欧拉四元素. 这种姿态参数的表示在姿态动力学中也常会用到, 有关细节不再介绍.

§10.4 姿态运动方程与姿态动力学

1. 姿态运动方程

在上一节姿态角的定义中, 即通过刚体定点转动引入了欧拉角, 绕一固定轴 e 的转动, 亦可分解为先后绕一个参考坐标系的三个轴来实现. 转动角速度矢量记作 $\boldsymbol{\omega}$, 有

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \tag{10.11}$$

相应的角速度记作$\dot{\omega}$, 有

$$\dot{\omega} = \mathrm{d}\,\Phi / \mathrm{d}t = \dot{\Phi}. \tag{10.12}$$

常把欧拉角的变率(即对时间 t 的导数$\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\gamma}$或$\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}$)与转动角速度 $\boldsymbol{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$的这种运动关系称为姿态运动方程. 下面分别就上一节前两种姿态角(φ, ψ, γ)和(ψ, φ, θ)的定义给出相应的姿态运动方程.

(1) 定点转动的第一种体现——对基准坐标系 S_t 旋转的角速度矢量$\boldsymbol{\omega}$在本体坐标系 S_b 中的表达记作

$$(\boldsymbol{\omega})_b = \begin{pmatrix} \omega_{xb} \\ \omega_{yb} \\ \omega_{zb} \end{pmatrix}, \tag{10.13}$$

上述转动是分解成三次转动完成的，相应的转动角速度为$\dot{\varphi},\dot{\psi},\dot{\gamma}$，根据图 10.1 不难给出

$$\begin{pmatrix}\omega_{xb}\\ \omega_{yb}\\ \omega_{zb}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+(A_{bt})\begin{pmatrix}-\dot{\psi}\sin\varphi\\ \dot{\psi}\cos\varphi\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}, \tag{10.14}$$

利用矩阵(A_{bt})的表达式(10.4)，即可得

$$\begin{cases}\omega_{xb}=\dot{\gamma}-\dot{\varphi}\sin\psi,\\ \omega_{yb}=\dot{\psi}\cos\gamma+\dot{\varphi}\sin\gamma\cos\psi,\\ \omega_{zb}=-\dot{\psi}\sin\gamma+\dot{\varphi}\cos\gamma\cos\psi.\end{cases} \tag{10.15}$$

由此亦可解出$\dot{\varphi},\dot{\psi},\dot{\gamma}$，有

$$\begin{cases}\dot{\varphi}=(\omega_{yb}\sin\gamma+\omega_{zb}\cos\gamma)/\cos\psi,\\ \dot{\psi}=\omega_{yb}\cos\gamma-\omega_{zb}\sin\gamma,\\ \dot{\gamma}=\omega_{xb}+(\omega_{yb}\sin\gamma+\omega_{zb}\cos\gamma)\tan\psi.\end{cases} \tag{10.16}$$

(2) 定点转动的第二种体现——本体坐标系 S_b 绕轨道坐标系 S_o 旋转的角速度矢量记为$\boldsymbol{\omega}_{bo}$，因 S_o 不是惯性坐标系，因此$\boldsymbol{\omega}_{bo}$是相对角速度矢量，在 S_b 坐标系中由下列形式表达：

$$(\boldsymbol{\omega}_{bo})_b=\begin{pmatrix}\omega_{xr}\\ \omega_{yr}\\ \omega_{zr}\end{pmatrix}. \tag{10.17}$$

根据图 10.2 不难看出

$$\begin{pmatrix}\omega_{xr}\\ \omega_{yr}\\ \omega_{zr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}+(A_{bo})\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\cos\psi\\ \dot{\varphi}\sin\psi\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}. \tag{10.18}$$

利用矩阵(A_{bo})的表达式(10.8)即可得

$$\begin{cases}\omega_{xr}=\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi,\\ \omega_{yr}=\dot{\theta}+\dot{\psi}\sin\varphi,\\ \omega_{zr}=\dot{\varphi}\sin\theta+\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi,\end{cases} \tag{10.19}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\omega_{yr}+(\omega_{xr}\sin\theta-\omega_{zr}\cos\theta)\tan\varphi,\\ \dot{\psi}=(-\omega_{xr}\sin\theta+\omega_{zr}\cos\theta)/\cos\varphi,\\ \dot{\varphi}=\omega_{xr}\cos\theta+\omega_{zr}\sin\theta,\end{cases}\tag{10.20}$$

记 S_b 绕惯性坐标系 S_t 旋转的绝对角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}_{bt}$，则有

$$\boldsymbol{\omega}_{bt}=\boldsymbol{\omega}_{bo}+\boldsymbol{\omega}_{ot},\tag{10.21}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{ot}$ 为 S_o 绕 S_t 旋转的角速度矢量，若记

$$(\boldsymbol{\omega}_{bt})_b=\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix},\tag{10.22}$$

通常它就是装在航天器上的陀螺仪的输出量. S_t 即对应前面 §10.2 中定义的地心惯性坐标系，因此有

$$(\boldsymbol{\omega}_{ot})_o=\begin{pmatrix}0\\ -\omega_0\\ 0\end{pmatrix}.\tag{10.23}$$

这里的 ω_0 即航天器的轨道角速度，严格而言，应有

$$\omega_0=\dot{f}+\dot{\omega}+\cos i\,\dot{\Omega}.\tag{10.24}$$

其中 $\dot{f}$，$\dot{\omega}$和$\dot{\Omega}$即前面几章轨道力学给出的包括摄动效应的航天器质心运动的角变率.

$$(\boldsymbol{\omega}_{bt})_b=(\boldsymbol{\omega})_{bo}+(A_{bo})(\boldsymbol{\omega}_o t)_o.\tag{10.25}$$

由此可给出

$$\boldsymbol{\omega}_{bt}=\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\omega_0(\cos\theta\sin\psi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi)\\ \dot{\theta}+\dot{\psi}\sin\varphi-\omega_0\cos\varphi\cos\psi\\ \dot{\varphi}\sin\theta+\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi-\omega_0(\sin\theta\sin\psi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi)\end{pmatrix},\tag{10.26}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\omega_y+(\omega_x\sin\theta-\omega_z\cos\theta)\tan\varphi+\omega_0\cos\psi/\cos\varphi,\\ \dot{\psi}=(\omega_z\cos\theta-\omega_x\sin\theta-\omega_0\sin\varphi\cos\psi)/\cos\varphi,\\ \dot{\varphi}=\omega_x\cos\theta+\omega_z\sin\theta+\omega_0\sin\psi,\end{cases}\tag{10.27}$$

对小姿态角有

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_y + \omega_0, \\ \dot{\psi} = \omega_z - \omega_0 \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega_x + \omega_0 \psi. \end{cases} \tag{10.28}$$

2. 姿态动力学

姿态动力学即研究航天器(作为刚体或刚体与绕性体的混合系统等)姿态角在外力矩的作用下的变化规律. 对应轨道力学中的 $\ddot{r}$ 即 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$. $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(\psi,\varphi,\theta;\dot{\psi},\dot{\varphi},\dot{\theta})$ 或 $\boldsymbol{\omega}(\varphi,\psi,\gamma;\dot{\varphi},\dot{\psi},\dot{\gamma})$. 这是航天器姿态动力学的主要内容,本书将不再深入阐明这类问题,作为基础内容可参阅该领域的相关书籍或教材[1~4].

参 考 文 献

[1] Wertz J R. Spacecraft Attitude Determination and Control. Holland: D. Reidel Publishing Company, 1978

[2] 刘延柱. 航天器姿态动力学. 北京: 国防工业出版社, 1995

[3] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998

[4] 屠善澄(主编). 卫星姿态动力学与控制(1). 北京: 宇航出版社, 1999

附录一　常用公式

球面三角公式

1. **正弦公式**：

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

2. **正弦公式**：

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$$

3. **五元素公式**：

$$\sin a\cos B = \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A$$

$$\sin A\cos b = \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos a$$

$$\sin A\cos B = \cos b\sin C - \sin B\cos c\cos A$$

公式中的 A,B,C **是球面三角形的三个角**，a,b,c **是相应的三个边**.

贝赛耳函数 $J_n(ne)$

$$J_1(e)=\frac{1}{2}e\left(1-\frac{1}{8}e^2+\frac{1}{192}e^4-\frac{1}{9216}e^6+\cdots\right)$$

$$J_2(2e)=\frac{1}{2}e^2\left(1-\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{24}e^4-\frac{1}{360}e^6+\cdots\right)$$

$$J_3(3e)=\frac{9}{16}e^3\left(1-\frac{9}{16}e^2+\frac{81}{640}e^4-\cdots\right)$$

$$J_4(4e)=\frac{2}{3}e^4\left(1-\frac{4}{5}e^2+\frac{4}{15}e^4-\cdots\right)$$

$$J_5(5e)=\frac{625}{768}e^5\left(1-\frac{25}{24}e^2+\cdots\right)$$

$$J_6(6e) = \frac{81}{80}e^6\left(1 - \frac{9}{7}e^2 + \cdots\right)$$

勒让德多项式 $P_l(\mu)$

$$P_0(\mu) = 1$$
$$P_1(\mu) = \mu$$
$$P_2(\mu) = \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}$$
$$P_3(\mu) = \frac{5}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu$$
$$P_4(\mu) = \frac{35}{8}\mu^4 - \frac{15}{4}\mu^2 + \frac{3}{8}$$
$$P_5(\mu) = \frac{63}{8}\mu^5 - \frac{35}{4}\mu^3 + \frac{15}{8}\mu$$
$$P_6(\mu) = \frac{231}{16}\mu^6 - \frac{315}{16}\mu^4 + \frac{105}{16}\mu^2 - \frac{5}{16}$$

缔合勒让德多项式 $P_{lm}(\mu)$

$$P_{1,1}(\mu) = (1 - \mu^2)^{1/2}$$
$$P_{2,1}(\mu) = 3\mu(1 - \mu^2)^{1/2}$$
$$P_{2,2}(\mu) = 3(1 - \mu^2)$$
$$P_{3,1}(\mu) = \left(\frac{15}{2}\mu^2 - \frac{3}{2}\right)(1 - \mu^2)^{1/2}$$
$$P_{3,2}(\mu) = 15\mu(1 - \mu^2)$$
$$P_{3,3}(\mu) = 15(1 - \mu^2)^{3/2}$$
$$P_{4,1}(\mu) = \left(\frac{35}{2}\mu^3 - \frac{15}{2}\mu\right)(1 - \mu^2)^{1/2}$$
$$P_{4,2}(\mu) = \left(\frac{105}{2}\mu^2 - \frac{15}{2}\right)(1 - \mu^2)$$
$$P_{4,3}(\mu) = 105\mu(1 - \mu^2)^{3/2}$$
$$P_{4,4}(\mu) = 105(1 - \mu^2)^2$$

一些函数的平均值

1. $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)} = 1$

2. $\overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^p \sin qf} = 0 \quad (p, q = 0, 1, 2, \cdots)$

3. $\overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^p \cos qf} = 0 \quad (p \geqslant 2, q \geqslant p-1)$

4. $\overline{\left(\dfrac{a}{r}\right)^p \cos qf} = (1-e^2)^{-(p-3/2)} \sum_{n(2)=q}^{(p-2)-\delta} \binom{p-2}{n} \binom{n}{\frac{1}{2}(n-q)} \left(\dfrac{e}{2}\right)^n$

$$\delta = \frac{1}{2}[1-(-1)^{p-q}], (p \geqslant 2, q < p-1)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2} = (1-e^2)^{-1/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 1)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} = (1-e^2)^{-3/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos f} = \frac{1}{2} e (1-e^2)^{-3/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 2)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4} = \left(1+\frac{1}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos f} = e(1-e^2)^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos 2f} = \frac{1}{4} e^2 (1-e^2)^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 3)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5} = \left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos f} = \frac{3}{2} e \left(1+\frac{1}{4}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 2f} = \frac{3}{4} e^2 (1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 3f} = \frac{1}{8} e^3 (1-e^2)^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 4)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6} = \left(1+3e^2+\frac{3}{8}e^4\right)(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos f} = 2e\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos 2f} = \frac{3}{2}e^2\left(1+\frac{1}{6}e^2\right)(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos 3f} = \frac{1}{2}e^3(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos 4f} = \frac{1}{16}e^4(1-e^2)^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos qf} = 0 \quad (q \geqslant 5)$$

5. $$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)\cos qf} = \left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q (q=0,1,2,\cdots)$$

6. $$\overline{\cos qf} = \left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q (1+q\sqrt{1-e^2}) \quad (q=0,1,2,\cdots)$$

$$\overline{\cos f} = -e$$

$$\overline{\cos 2f} = \frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2$$

$$\overline{\cos 3f} = -\frac{4}{e}\overline{\cos 2f}+3e$$

$$\overline{\cos 4f} = \frac{2}{e^2}(6-e^2)\overline{\cos 2f}-9$$

$$\overline{\cos 5f} = -\frac{4}{e^3}(8-3e^2)\overline{\cos 2f}+\frac{1}{e}(24-5e^2)$$

$$\overline{\cos 6f} = \frac{1}{e^4}(80-48e^2+3e^4)\overline{\cos 2f}-\frac{2}{e^2}(30-13e^2)$$

7. $$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p(f-M)\cos qf} = 0 \quad (p,q=0,1,2,\cdots)$$

8. $$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2(f-M)\sin qf} = -\frac{1}{q}\left(\frac{\overline{\cos 2f}}{\sqrt{1-e^2}}\right) \quad (q \geqslant 1)$$

9. $$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p(f-M)\sin qf} = (1-e^2)^{-(p-3/2)}\sum_{n=0}^{p-2}\sum_{m=0}^{n}\binom{p-2}{n}\binom{n}{m}\left(\frac{e}{2}\right)^n$$

$$\times\overline{\left\{-\frac{\cos(q+n-2m)f}{q+n-2m}\right\}}_{2m\neq q+n} \quad (p\geqslant 3, q\geqslant 1)$$

10. $\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^p\cos qf}$：

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)} = 1+\frac{1}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)\cos f} = -\frac{3}{2}e$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)\cos 2f} = \frac{3}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos f} = -2e\left(1 + \frac{1}{4}e^2\right)$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f} = \frac{5}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 3f} = -\frac{5}{2}e^3$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^3} = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^4} = 1 + 5e^2 + \frac{15}{8}e^4$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^5} = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^6} = 1 + \frac{21}{2}e^2 + \frac{105}{8}e^4 + \frac{35}{16}e^6$$

汉森系数 $X_p^{n,m}(e)(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, m = 0, 1, 2, \cdots)$

$$X_0^{n,0} = 1 + \frac{1}{4}n(n+1)e^2 + \frac{1}{64}n(n-2)(n^2-1)e^4 + \cdots$$

$$X_1^{n,0} = -\frac{1}{2}ne - \frac{1}{16}n(n^2-n-3)e^3 + \cdots$$

$$X_2^{n,0} = \frac{1}{8}n(n-3)e^2 + \frac{1}{96}n(n^3-6n^2-n+22)e^4 + \cdots$$

$$X_3^{n,0} = -\frac{1}{48}n(n^2-9n+17)e^3 + \cdots$$

$$X_4^{n,0} = \frac{1}{384}n(n^3-18n^2+95n-142)e^4 + \cdots$$

$$X_{-3}^{n,1} = \frac{1}{384}(n^4-10n^3+17n^2+28n-27)e^4 + \cdots$$

$$X_{-2}^{n,1} = -\frac{1}{48}(n^3-3n^2-4n+4)e^3 + \cdots$$

$$X_{-1}^{n,1} = \frac{1}{8}(n^2+n-1) + \frac{1}{96}(n^4-2n^3-4n^2+7n+2)e^4 + \cdots$$

$$X_0^{n,1}=-\frac{1}{2}(n+2)e-\frac{1}{16}n(n-1)(n+2)e^3+\cdots$$

$$X_1^{n,1}=1+\frac{1}{4}(n^2+n-4)e^2+\frac{1}{64}(n^4-2n^3-9n^2+2n+7)e^4+\cdots$$

$$X_2^{n,1}=-\frac{1}{2}(n-2)e-\frac{1}{16}(n^3-3n^2-12n+20)e^3+\cdots$$

$$X_3^{n,1}=\frac{1}{8}(n^2-7n+9)e^2+\frac{1}{96}(n^4-10n^3+2n^2+133n-162)e^4+\cdots$$

$$X_4^{n,1}=-\frac{1}{48}(n^3-15n^2+62n-64)e^3+\cdots$$

$$X_5^{n,1}=\frac{1}{384}(n^4-26n^3+221n^2-696n+625)e^4+\cdots$$

$$X_{-2}^{n,2}=\frac{1}{384}(n^4-2n^3-13n^2+6n+16)e^4+\cdots$$

$$X_{-1}^{n,2}=-\frac{1}{48}(n^3+3n^2-n-4)e^3+\cdots$$

$$X_0^{n,2}=\frac{1}{8}(n+2)(n+3)e^2+\frac{1}{96}(n-1)(n-2)(n+2)(n+3)e^4+\cdots$$

$$X_1^{n,2}=-\frac{1}{2}(n+4)e-\frac{1}{16}(n^3+3n^2-9n-28)e^3+\cdots$$

$$X_2^{n,2}=1+\frac{1}{4}(n^2+n-16)e^2+\frac{1}{64}(n^4-2n^3-33n^2+2n+220)e^4+\cdots$$

$$X_3^{n,2}=-\frac{1}{2}(n-4)e-\frac{1}{16}(n^3-5n^2-29n+108)e^3+\cdots$$

$$X_4^{n,2}=\frac{1}{8}(n^2-11n+26)e^2+\frac{1}{96}(n^4-14n^3+5n^2+436n-1036)e^4+\cdots$$

$$X_5^{n,2}=-\frac{1}{48}(n^3-21n^2+131n-236)e^3+\cdots$$

$$X_6^{n,2}=\frac{1}{384}(n^4-34n^3+395n^2-1826n+2760)e^4+\cdots$$

附录二 天文常数

IAU(1976)天文常数系统

单位:**米**(m)、**千克**(kg)**和秒**(s)**分别为国际单位系统**(SI)**中的长度、质量和时间单位**.

定义常数(defining constants)

1. **高斯引力常数**(Gaussian Gravitational Constant)

$k=0.01720209895$

2. **光速**(speed of light) $c=299792458\text{ms}^{-1}$

初始常数(primary constants)

3. **一天文单位的光行时间**(light-time for unit distance)

$\tau_A=499.004782\text{s}$

4. **地球赤道半径**(equatorial radius for earth) $a_e=6378140\text{m}$

5. **地球形状力学因子**(dynamical form-factor for earth)

$J_2=0.00108263$

6. **地心引力常数**(geocentric gravitational constant)

$GE=3.986005\times10^{14}\text{m}^3\text{s}^{-2}$

7. **引力常数**(constant of gravitation) $G=6.672\times10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$

8. **月球与地球质量比**(ratio of mass of moon to that of earth)

$\mu=0.01230002$

9. **黄经总岁差**(general precession in longitude, per Julian century, at standard epoch 2000) $\rho=5029''.0966$

10. **黄赤交角**(obliquity of the ecliptic，at standard epoch 2000)

$\varepsilon = 23°26'21''.448$

推导常数(derived constants)

11. **章动常数**(constant of nutation，at standard epoch 2000)

$N = 9''.2025$

12. **一天文单位的长度**(unit distance)　$c\tau_A = 1.49597870 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$

13. **太阳视差**(solar parallax)　$\arcsin(\alpha_c / A) = \pi_{\odot} = 8''.794148$

14. **光行差常数**(constant of aberration，for standard epoch 2000)

$\kappa = 20''.49552$

15. **地球扁率**(flattening factor for the earth)

$f = 0.00335281 = 1/298.257$

16. **日心引力常数**(heliocentric gravitational constant)

$A^3 k^2 / D^2 = GS = 1.32712438 \times 10^{20}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}$

17. **太阳与地球质量比**(ratio of mass of Sun to that of the earth)

$(GS)/(GE) = S/E = 332946.0$

18. **太阳与地月系质量比**(ratio of mass of sun to that of the earth＋moon)

$(S/E)/(1+\mu) = 328900.5$

19. **太阳质量**(mass of the sun)　$(GS)/G = S = 1.9891 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$

20. **行星质量系统**(system of planetary masses)　(**太阳质量**＝1)

Mercury	6023600	Jupiter	1047.355
Venus	408523.5	Saturn	3498.5
Earth＋Moon	328900.5	Uranus	22869
Mars	3098710	Neptune	19314
		Pluto	3000000

附录三　地球和月球引力场模型

通常一个地球引力场模型包括如下内容：

GE——地心引力常数，a_e——地球参考椭球体赤道半径，

$\bar{C}_{lm}$，$\bar{S}_{lm}$——地球引力位球谐展开式的归一化谐系数，

当引用某一地球引力场模型时，严格而言，地固坐标系中的测站坐标 R_e 应与该引力场模型所对应的地球参考椭球体相吻合，这在精密定轨中（特别是定轨精度要求较高的问题）应加以考虑，因为它涉及到地心坐标系的严格定义. 同样对于月球引力场亦如此，相应地有月心引力常数 GM，月球参考椭球体赤道半径 a_e 和引力位球谐展开式的归一化系数 $\bar{C}_{lm}$，$\bar{S}_{lm}$.

为了实际应用的需要，这里介绍被广泛引用的 JGM－3 和 WGS84 两种地球引力场模型以及 LP75G 和当今认为精度较高的 LP165 两种月球引力场模型，供读者参考. 原 JGM－3 模型为 70×70 阶次，WGS84 模型为 180×180 阶次，LP165 模型为 165×165 阶次，LP75G 模型为 75×75 阶次，这里分别只给到 20×20 阶次，如有需要，读者可以在相关网站上调用完整模型.

JGM－3　GE＝398600.44150 km^3/s^2　a_e＝6378.13630 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	－.48416954845647D－03	.00000000000000D＋00
3	0	.95717059088800D－06	.00000000000000D＋00
4	0	.53977706835730D－06	.00000000000000D＋00
5	0	.68658987986543D－07	.00000000000000D＋00
6	0	－.14967156178604D－06	.00000000000000D＋00
7	0	.90722941643232D－07	.00000000000000D＋00
8	0	.49118003174734D－07	.00000000000000D＋00
9	0	.27385060950085D－07	.00000000000000D＋00
10	0	.54130445738812D－07	.00000000000000D＋00

11	0	−.50161314595688D−07	.00000000000000D+00
12	0	.36382340623690D−07	.00000000000000D+00
13	0	.39946428731683D−07	.00000000000000D+00
14	0	−.21803861547203D−07	.00000000000000D+00
15	0	.31659510926189D−08	.00000000000000D+00
16	0	−.54302320884432D−08	.00000000000000D+00
17	0	.18108375059805D−07	.00000000000000D+00
18	0	.72691846007246D−08	.00000000000000D+00
19	0	−.35185503098098D−08	.00000000000000D+00
20	0	.18789986549777D−07	.00000000000000D+00
2	1	−.18698764000000D−09	.11952801000000D−08
3	1	.20301372055530D−05	.24813079825561D−06
4	1	−.53624355429851D−06	−.47377237061597D−06
5	1	−.62727369697705D−07	−.94194632134383D−07
6	1	−.76103580407274D−07	.26899818932629D−07
7	1	.28028652203689D−06	.94777317813313D−07
8	1	.23333751687204D−07	.58499274939368D−07
9	1	.14223025892714D−06	.21909618349376D−07
10	1	.83758832332671D−07	−.13155406539843D−06
11	1	.16107077738720D−07	−.27892152840701D−07
12	1	−.54191701336309D−07	−.42011775767675D−07
13	1	−.52966868261361D−07	.39876816447422D−07
14	1	−.19023751941501D−07	.27471826062722D−07
15	1	.12019048467803D−07	.81732671079927D−08
16	1	.27533499349817D−07	.33708199043727D−07
17	1	−.26388862396409D−07	−.29852855753504D−07
18	1	.42100167037216D−08	−.39075893145582D−07
19	1	−.69675014448630D−08	.15804850737353D−09
20	1	.83477675011261D−08	.62445294169285D−08
2	2	.24392607486563D−05	−.14002663975880D−05
3	2	.90470634127291D−06	−.61892284647849D−06
4	2	.35067015645938D−06	.66257134594268D−06
5	2	.65245910276353D−06	−.32333435244435D−06
6	2	.48327472124892D−07	−.37381591944355D−06
7	2	.32976022742410D−06	.93193696831045D−07
8	2	.80070663931587D−07	.65518559097464D−07
9	2	.22620642355843D−07	−.32174984962166D−07
10	2	−.93557925682843D−07	−.51415890584901D−07
11	2	.18429795461053D−07	−.98452117204370D−07

12	2	.13985738460573D−07	.31047769644313D−07
13	2	.56039125275397D−07	−.62699341300935D−07
14	2	−.36978966062445D−07	−.29891074898391D−08
15	2	−.21746272853228D−07	−.31733039621956D−07
16	2	−.22395294006315D−07	.26206613354644D−07
17	2	−.17378596994668D−07	.91967492974033D−08
18	2	.12828248866347D−07	.13586359979031D−07
19	2	.31435051572210D−07	−.43295479774308D−08
20	2	.20030448029487D−07	.14884470088576D−07
3	3	.72114493982309D−06	.14142039847354D−05
4	3	.99086890577441D−06	−.20098735484731D−06
5	3	−.45183704808780D−06	−.21495419346421D−06
6	3	.57020965757974D−07	.88894738008251D−08
7	3	.25050152675038D−06	−.21732010845254D−06
8	3	−.19251764331400D−07	−.86285836534248D−07
9	3	−.16106427897243D−06	−.74545464061438D−07
10	3	−.71967367073644D−08	−.15417988118535D−06
11	3	−.30560698007455D−07	−.14880309051227D−06
12	3	.38978520777770D−07	.24576580959940D−07
13	3	−.21817131948590D−07	.98208999077455D−07
14	3	.36809435839364D−07	.20313404379978D−07
15	3	.52403064668802D−07	.15159862310361D−07
16	3	−.35100789004467D−07	−.23241519967982D−07
17	3	.74225615337830D−08	.81946523724251D−08
18	3	−.37596675909359D−08	−.31090562993624D−08
19	3	−.98999933204207D−08	−.98821208438535D−09
20	3	−.59349949066768D−08	.35571151171055D−07
4	4	−.18848136742527D−06	.30884803690355D−06
5	4	−.29512339302196D−06	.49741427230934D−07
6	4	−.86228032619800D−07	−.47140511232148D−06
7	4	−.27554096307403D−06	−.12414151248516D−06
8	4	−.24435806439297D−06	.69857074850431D−07
9	4	−.82017366877872D−08	.20068093286841D−07
10	4	−.84335352395338D−07	−.78485346171790D−07
11	4	−.40024107782339D−07	−.63596530213449D−07
12	4	−.68419698187080D−07	.29543256059344D−08
13	4	−.14709372441845D−08	−.12613848786464D−07
14	4	.17120660369001D−08	−.20688044000643D−07
15	4	−.42162691446070D−07	.78270996909884D−08

16	4	.41218976739860D－07	.46056696976601D－07
17	4	.75202561280798D－08	.23381994870984D－07
18	4	.53092291040775D－07	.14596998830727D－08
19	4	.15826786807335D－07	－.56619376893577D－08
20	4	.54571747234651D－08	－.22410101198270D－07
5	5	.17483157769990D－06	－.66939293724911D－06
6	5	－.26711227171966D－06	－.53641016466390D－06
7	5	.16440038146411D－08	.18075335233506D－07
8	5	－.25498410010257D－07	.89090297494640D－07
9	5	－.16325061515924D－07	－.54271473247992D－07
10	5	－.49519740818054D－07	－.50292693577921D－07
11	5	.37435874567708D－07	.49828631680041D－07
12	5	.31107075527266D－07	.76387883124312D－08
13	5	.58253125415417D－07	.65845648968111D－07
14	5	.29899462450133D－07	－.16857910838411D－07
15	5	.13450895846697D－07	.89823349629886D－08
16	5	－.13495263575727D－07	－.16788507060889D－08
17	5	－.17058052594159D－07	.53532065621805D－08
18	5	.73144220359351D－08	.24650351136750D－07
19	5	.12058223792869D－07	.27204444064611D－07
20	5	－.11452318388930D－07	－.69350775864877D－08
6	6	.95016518338557D－08	－.23726147889522D－06
7	6	－.35884263307918D－06	.15177808443426D－06
8	6	－.65859353864388D－07	.30892064157956D－06
9	6	.62833186922410D－07	.22267731094919D－06
10	6	－.37418833736693D－07	－.79464218274958D－07
11	6	－.14607814055515D－08	.34173161230373D－07
12	6	.33244194680361D－08	.39368833484484D－07
13	6	－.35311988740442D－07	－.60583315297552D－08
14	6	－.19400981730092D－07	.24129594129965D－08
15	6	.33463386220823D－07	－.37752532132562D－07
16	6	.14321054650520D－07	－.34445359251626D－07
17	6	－.13466610011002D－07	－.28274837436151D－07
18	6	.13377839989187D－07	－.15660996065894D－07
19	6	－.23850062007699D－08	.17951659591478D－07
20	6	.11565401097341D－07	－.42341732002092D－09
7	7	.13795170564076D－08	.24128594080773D－07
8	7	.67262701848734D－07	.74813196768710D－07
9	7	－.11815885217629D－06	－.96899385839989D－07

10	7	.82084062520783D−08	−.31491358401092D−08
11	7	.47061824740183D−08	−.89777235057051D−07
12	7	−.18603106541747D−07	.35570829249166D−07
13	7	.27063649200290D−08	−.77110578914500D−08
14	7	.36851132631493D−07	−.42223645889740D−08
15	7	.59912701354866D−07	.60561923271514D−08
16	7	−.78129662206869D−08	−.85101432520645D−08
17	7	.24011119637881D−07	−.58835543868363D−08
18	7	.65285877114871D−08	.62802630165493D−08
19	7	.73677859122170D−08	−.86648481719498D−08
20	7	−.20301510228149D−07	−.12995889226393D−09
8	8	−.12397061395498D−06	.12044100668766D−06
9	8	.18798426954722D−06	−.30154440657902D−08
10	8	.40467841871077D−07	−.91916682734371D−07
11	8	−.61406031069251D−08	.24572254505200D−07
12	8	−.25702477402668D−07	.16666794464624D−07
13	8	−.98871787586478D−08	−.97289371617499D−08
14	8	−.34866852918353D−07	−.14888414788683D−07
15	8	−.31989552416364D−07	.22270913883120D−07
16	8	−.21537842269728D−07	.52475750400288D−08
17	8	.37624561866834D−07	.37609560359427D−08
18	8	.31066116434825D−07	.24701340656902D−08
19	8	.31052189073581D−07	−.10462608847168D−07
20	8	.49222031305630D−08	.40671618436594D−08
9	9	−.47724821923178D−07	.96585577630797D−07
10	9	.12540250252277D−06	−.37736477753688D−07
11	9	−.31455516227675D−07	.42040713688155D−07
12	9	.41793077711655D−07	.25324579908954D−07
13	9	.24753630054781D−07	.45359257720667D−07
14	9	.32376638778215D−07	.28698212550741D−07
15	9	.13026722024257D−07	.37876413704166D−07
16	9	−.22776715289243D−07	−.38923887453334D−07
17	9	.32904899760425D−08	−.28585766401852D−07
18	9	−.19183123559344D−07	.36144387200323D−07
19	9	.30304661637596D−08	.64515566536913D−08
20	9	.18043912553397D−07	−.58648713867232D−08
10	10	.10038233131398D−06	−.23809404447193D−07
11	10	−.52129308588537D−07	−.18302278002235D−07
12	10	−.61693847120949D−08	.30986262918955D−07

13	10	.40892147458611D−07	−.37098943421354D−07
14	10	.38838489462067D−07	−.14646502936917D−08
15	10	.10311330752350D−07	.14956329195217D−07
16	10	−.12128710021123D−07	.12064635993103D−07
17	10	−.43040778296981D−08	.18038443987682D−07
18	10	.55661560255618D−08	−.45953868313856D−08
19	10	−.33377489589393D−07	−.70901793078301D−08
20	10	−.32549034672400D−07	−.57601831992074D−08
11	11	.46226945974065D−07	−.69592513786019D−07
12	11	.11320827288384D−07	−.63442255448454D−08
13	11	−.44739074565513D−07	−.48328920607274D−08
14	11	.15356539462914D−07	−.39038503109732D−07
15	11	−.95174491849600D−09	.18716336667474D−07
16	11	.19265835183290D−07	−.29747575202741D−08
17	11	−.15725519114554D−07	.11020868227887D−07
18	11	−.76424753587140D−08	.21171513660315D−08
19	11	.16080720197723D−07	.11000317328808D−07
20	11	.14562762720820D−07	−.18929751298295D−07
12	12	−.23492752269341D−08	−.10959426553406D−07
13	12	−.31410021346477D−07	.88106349374406D−07
14	12	.85046646166088D−08	−.30921727740280D−07
15	12	−.32728991604536D−07	.15719776528914D−07
16	12	.19697742559399D−07	.69145092797783D−08
17	12	.28689128789402D−07	.20744069700771D−07
18	12	−.29603019974536D−07	−.16192464661794D−07
19	12	−.29886557263191D−08	.93096798788415D−08
20	12	−.64092154083751D−08	.18154220942612D−07
13	13	−.61211341074230D−07	.68408785690868D−07
14	13	.32166747135071D−07	.45200081199389D−07
15	13	−.28288960926564D−07	−.42943958526004D−08
16	13	.13837330189163D−07	.99393104764339D−09
17	13	.16603066738893D−07	.20304808678395D−07
18	13	−.63799330347466D−08	−.34979730312351D−07
19	13	−.74465515090790D−08	−.28398303854051D−07
20	13	.27323490539213D−07	.70325129662091D−08
14	14	−.51783436366944D−07	−.50135706089731D−08
15	14	.53044811279796D−08	−.24442484622690D−07
16	14	−.19125929084628D−07	−.38860160731499D−07
17	14	−.14060794103232D−07	.11375705343040D−07

18	14	—.80028321553151D—08	—.13078375035713D—07
19	14	—.45294320737346D—08	—.13113452689000D—07
20	14	.11894377026580D—07	—.14472233857738D—07
15	15	—.19227532557760D—07	—.47043717740296D—08
16	15	—.14460511250623D—07	—.32699102984228D—07
17	15	.53318558273089D—08	.53871007251714D—08
18	15	—.40535566922307D—07	—.20249426822391D—07
19	15	—.17838458615368D—07	—.14105916172496D—07
20	15	—.25832737678316D—07	—.76580241490690D—09
16	16	—.37529424659874D—07	.35911038341162D—08
17	16	—.30061016811586D—07	.37240886096084D—08
18	16	.10670913840544D—07	.69654369110866D—08
19	16	—.21421212413032D—07	—.69574508679338D—08
20	16	—.12063704641516D—07	.33001883992357D—09
17	17	—.34064108542158D—07	—.19733214905988D—07
18	17	.36003191941618D—08	.45103760547938D—08
19	17	.29105753067619D—07	—.15152537147995D—07
20	17	.44347248372820D—08	—.13703405459961D—07
18	18	.26206060973410D—08	—.10810058406326D—07
19	18	.34714340290441D—07	—.94385774554964D—08
20	18	.14916632182652D—07	—.98369291535446D—09
19	19	—.23708581999978D—08	.47796091478955D—08
20	19	—.29626245297233D—08	.10959649647533D—07
20	20	.40445840955309D—08	—.12346618337924D—07

WGS84 $GE = 398600.4418\ \mathrm{km^3/s^2}$ $a_e = 6378.1370\ \mathrm{km}$

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	—0.48416685D—03	0.00000000D+00
3	0	0.95706390D—06	0.00000000D+00
4	0	0.53699587D—06	0.00000000D+00
5	0	0.71092048D—07	0.00000000D+00
6	0	—0.15064821D—06	0.00000000D+00
7	0	0.85819217D—07	0.00000000D+00
8	0	0.42979835D—07	0.00000000D+00
9	0	0.33173231D—07	0.00000000D+00
10	0	0.50931575D—07	0.00000000D+00
11	0	—0.58114696D—07	0.00000000D+00
12	0	0.34073235D—07	0.00000000D+00

13	0	0.48159534D−07	0.00000000D+00
14	0	−0.25559279D−07	0.00000000D+00
15	0	−0.55534001D−08	0.00000000D+00
16	0	0.96352958D−08	0.00000000D+00
17	0	0.27418160D−07	0.00000000D+00
18	0	0.10196218D−07	0.00000000D+00
19	0	−0.11009860D−07	0.00000000D+00
20	0	0.25008019D−07	0.00000000D+00
2	1	0.00000000D+00	0.00000000D+00
2	2	0.24395796D−05	−0.13979548D−05
3	1	0.20318729D−05	0.25085759D−06
3	2	0.90666113D−06	−0.62102428D−06
3	3	0.71770352D−06	0.14152388D−05
4	1	−0.53548044D−06	−0.47420394D−06
4	2	0.34797519D−06	0.65579158D−06
4	3	0.99172321D−06	−0.19912491D−06
4	4	−0.18686124D−06	0.30953114D−06
5	1	−0.64185265D−07	−0.92492959D−07
5	2	0.65184984D−06	−0.32007416D−06
5	3	−0.44903639D−06	−0.21328272D−06
5	4	−0.29719055D−06	0.53213480D−07
5	5	0.17523221D−06	−0.67059456D−06
6	1	−0.74180259D−07	0.32780040D−07
6	2	0.51824409D−07	−0.35866634D−06
6	3	0.53370577D−07	0.61334720D−08
6	4	−0.88694856D−07	−0.47260945D−06
6	5	−0.26818820D−06	−0.53491073D−06
6	6	0.10237832D−07	−0.23741002D−06
7	1	0.27905196D−06	0.94231346D−07
7	2	0.32873832D−06	0.88835092D−07
7	3	0.24940240D−06	−0.21223369D−06
7	4	−0.27123034D−06	−0.12696607D−06
7	5	0.10246290D−08	0.17321672D−07
7	6	−0.35843745D−06	0.15202633D−06
7	7	−0.20991457D−08	0.22805664D−07
8	1	0.18889342D−07	0.47856967D−07
8	2	0.73553952D−07	0.47867693D−07
8	3	−0.12132459D−07	−0.83461853D−07
8	4	−0.24208264D−06	0.71603924D−07

8	5	－0.24966587D－07	0.87751047D－07
8	6	－0.65093424D－07	0.30904202D－06
8	7	0.66323292D－07	0.74661766D－07
8	8	－0.12372281D－06	0.12210258D－06
9	1	0.14747969D－06	0.23894354D－07
9	2	0.22052093D－07	－0.26876665D－07
9	3	－0.16256047D－06	－0.85928431D－07
9	4	－0.17193827D－07	0.26077030D－07
9	5	－0.16902791D－07	－0.50337365D－07
9	6	0.65717910D－07	0.22275858D－06
9	7	－0.11648016D－06	－0.97298769D－07
9	8	0.18896045D－06	－0.31026222D－08
9	9	－0.48275744D－07	0.96381072D－07
10	1	0.88706517D－07	－0.12536457D－06
10	2	－0.82375203D－07	－0.38280049D－07
10	3	－0.13137371D－07	－0.15553732D－06
10	4	－0.87424319D－07	－0.79215732D－07
10	5	－0.53980821D－07	－0.46294947D－07
10	6	－0.42371448D－07	－0.79680607D－07
10	7	0.83736045D－08	－0.25636582D－08
10	8	0.41239589D－07	－0.92269095D－07
10	9	0.12539514D－06	－0.37687117D－07
10	10	0.10124370D－06	－0.24874984D－07
11	1	0.95375839D－08	－0.22094828D－07
11	2	0.21716225D－07	－0.10224810D－06
11	3	－0.30023695D－07	－0.13422019D－06
11	4	－0.30407161D－07	－0.69823333D－07
11	5	0.35104609D－07	0.49175170D－07
11	6	－0.37911105D－08	0.36848522D－07
11	7	0.25774039D－08	－0.88658395D－07
11	8	－0.71396627D－08	0.23243077D－07
11	9	－0.30246313D－07	0.41776400D－07
11	10	－0.53424279D－07	－0.18716766D－07
11	11	0.47514858D－07	－0.70415796D－07
12	1	－0.60609926D－07	－0.38189082D－07
12	2	0.74200188D－08	0.24640620D－07
12	3	0.42149817D－07	0.32189594D－07
12	4	－0.64346831D－07	－0.25364931D－08
12	5	0.33126200D－07	－0.40658586D－09

12	6	0.86981502D−08	0.36711094D−07
12	7	−0.16598048D−07	0.34475954D−07
12	8	−0.26843700D−07	0.17838309D−07
12	9	0.42293015D−07	0.27107811D−07
12	10	−0.44237357D−08	0.30823394D−07
12	11	0.96462514D−08	−0.60711291D−08
12	12	−0.30878714D−08	−0.10932316D−07
13	1	−0.47921675D−07	0.34957177D−07
13	2	0.48705121D−07	−0.63933232D−07
13	3	−0.17219549D−07	0.82465794D−07
13	4	−0.92616056D−08	−0.98249479D−09
13	5	0.58545255D−07	0.66075856D−07
13	6	−0.28548757D−07	−0.13018250D−07
13	7	0.10048687D−07	−0.12672050D−07
13	8	−0.12236037D−07	−0.11680475D−07
13	9	0.25798630D−07	0.46771958D−07
13	10	0.42112066D−07	−0.35203559D−07
13	11	−0.44423472D−07	−0.63137559D−08
13	12	−0.31610688D−07	0.86378230D−07
13	13	−0.61019573D−07	0.68712423D−07
14	1	−0.10581256D−07	0.22739082D−07
14	2	−0.32588467D−07	−0.45984585D−08
14	3	0.33411750D−07	0.72271094D−08
14	4	0.34163340D−08	−0.23062568D−07
14	5	0.21777499D−07	−0.44340974D−08
14	6	−0.23022045D−07	0.79137357D−08
14	7	0.39355808D−07	−0.52187212D−08
14	8	−0.31866053D−07	−0.16609601D−07
14	9	0.30182993D−07	0.23942248D−07
14	10	0.36008306D−07	−0.43924872D−09
14	11	0.16006347D−07	−0.40475033D−07
14	12	0.79810549D−08	−0.31068551D−07
14	13	0.33446421D−07	0.44622344D−07
14	14	−0.52174166D−07	−0.48789452D−08
15	1	0.77027909D−08	0.12667983D−07
15	2	−0.13310361D−07	−0.25570239D−07
15	3	0.53469109D−07	0.21540830D−07
15	4	−0.35485140D−07	−0.38325971D−08
15	5	0.80670670D−08	0.95367405D−08

15	6	0.28835774D−07	−0.29584853D−07
15	7	0.55297561D−07	0.12688881D−07
15	8	−0.26866012D−07	0.28508669D−07
15	9	0.15229368D−07	0.40242957D−07
15	10	0.78226264D−08	0.16482104D−07
15	11	−0.45323941D−08	0.16379211D−07
15	12	−0.34310516D−07	0.13248557D−07
15	13	−0.27865470D−07	−0.51124016D−08
15	14	0.58007239D−08	−0.24830947D−07
15	15	−0.18756974D−07	−0.53745848D−08
16	1	0.16657011D−07	0.32088971D−07
16	2	−0.22051986D−07	0.26286204D−07
16	3	−0.29514849D−07	−0.95827659D−08
16	4	0.37621131D−07	0.55477548D−07
16	5	−0.10479239D−07	−0.27382338D−08
16	6	0.97407454D−08	−0.43087957D−07
16	7	−0.12168169D−07	−0.56636996D−08
16	8	−0.25034024D−07	0.22895737D−08
16	9	−0.17908785D−07	−0.29938908D−07
16	10	−0.10129689D−07	0.12404473D−07
16	11	0.19053980D−07	−0.17354590D−08
16	12	0.18888013D−07	0.46949615D−08
16	13	0.15158142D−07	−0.17410596D−09
16	14	−0.19416172D−07	−0.38724225D−07
16	15	−0.14400649D−07	−0.33151819D−07
16	16	−0.40920912D−07	0.23449430D−08
17	1	−0.17492372D−07	−0.29004434D−07
17	2	−0.24972136D−07	0.52345300D−08
17	3	0.75958226D−08	0.13161951D−07
17	4	−0.35567936D−08	0.29108859D−07
17	5	−0.16440517D−07	0.15666155D−07
17	6	−0.29053420D−08	−0.41239945D−07
17	7	0.30327591D−07	−0.54652615D−08
17	8	0.26828952D−07	−0.69634040D−08
17	9	−0.74685923D−09	−0.31300568D−07
17	10	−0.10536220D−08	0.18628074D−07
17	11	−0.13049234D−07	0.13662390D−07
17	12	0.32820228D−07	0.17654374D−07
17	13	0.17049873D−07	0.19279770D−07

17	14	−0.14027974D−07	0.11214602D−07
17	15	0.56624501D−08	0.56527252D−08
17	16	−0.32153542D−07	0.33341657D−08
17	17	−0.37961677D−07	−0.17192537D−07
18	1	0.85717760D−08	−0.32887288D−07
18	2	0.11021506D−07	0.96877203D−08
18	3	−0.78128408D−08	−0.16263649D−07
18	4	0.50107239D−07	−0.35094534D−08
18	5	−0.35408518D−08	0.26790491D−07
18	6	0.12489735D−07	−0.12526195D−07
18	7	0.14813821D−07	−0.18829836D−08
18	8	0.35285229D−07	0.13368789D−08
18	9	−0.24544444D−07	0.25745394D−07
18	10	0.84106552D−09	−0.44929528D−08
18	11	−0.92784417D−08	0.11278314D−08
18	12	−0.29997564D−07	−0.13762992D−07
18	13	−0.61616779D−08	−0.34022737D−07
18	14	−0.77166667D−08	−0.13392253D−07
18	15	−0.38973604D−07	−0.20668220D−07
18	16	0.10273437D−07	0.69198054D−08
18	17	0.33491685D−08	0.54056479D−08
18	18	0.11121796D−08	−0.94806182D−08
19	1	−0.78038897D−08	−0.10955201D−07
19	2	0.32332353D−07	0.42071678D−08
19	3	−0.91228010D−08	−0.55932845D−08
19	4	0.19091610D−07	−0.12713298D−07
19	5	0.14937350D−07	0.13014332D−07
19	6	−0.80825838D−08	0.24601857D−07
19	7	0.93869167D−08	−0.65383900D−08
19	8	0.31905603D−07	−0.62494067D−08
19	9	0.54433641D−08	0.64645032D−08
19	10	−0.34557189D−07	−0.72672139D−08
19	11	0.92637732D−08	0.73094973D−08
19	12	−0.10667096D−07	0.12169099D−07
19	13	−0.81139968D−08	−0.30216212D−07
19	14	−0.54501014D−08	−0.13327961D−07
19	15	−0.18328337D−07	−0.13873813D−07
19	16	−0.23275873D−07	−0.66988140D−08
19	17	0.30387596D−07	−0.15039250D−07

19	18	0.34106265D−07	−0.76175619D−08
19	19	−0.17274425D−08	0.25989338D−08
20	1	0.59665339D−08	−0.79800572D−08
20	2	0.14911085D−07	0.16645861D−07
20	3	−0.16271296D−09	0.33562815D−07
20	4	0.94176628D−08	−0.23750287D−07
20	5	−0.11339236D−07	−0.14341921D−07
20	6	0.14119805D−07	−0.28530016D−08
20	7	−0.27298042D−07	−0.37844129D−08
20	8	0.38489401D−08	0.54767756D−08
20	9	0.20478593D−07	0.52391740D−10
20	10	−0.25203296D−07	−0.73475808D−09
20	11	0.18615023D−07	−0.20030349D−07
20	12	−0.47849719D−08	0.13733707D−07
20	13	0.26975872D−07	0.44620950D−08
20	14	0.10796764D−07	−0.12763697D−07
20	15	−0.26288771D−07	0.52729036D−09
20	16	−0.99274819D−08	−0.36128778D−09
20	17	0.43953910D−08	−0.11345533D−07
20	18	0.15890733D−07	−0.30863268D−08
20	19	−0.36173742D−08	0.10165417D−07
20	20	0.55214181D−08	−0.13903843D−07

LP165 GM=4902.801056 km^3/s^2 a_e=1738.0 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	−.9089018075060000E−04	.0000000000000000E+00
3	0	−.3203591400300000E−05	.0000000000000000E+00
4	0	.3197309571720000E−05	.0000000000000000E+00
5	0	−.2157038206820000E−06	.0000000000000000E+00
6	0	.3765780618660000E−05	.0000000000000000E+00
7	0	.5622211787280000E−05	.0000000000000000E+00
8	0	.2346499680120000E−05	.0000000000000000E+00
9	0	−.3555033829560000E−05	.0000000000000000E+00
10	0	−.9311407332660000E−06	.0000000000000000E+00
11	0	−.9753318167379999E−06	.0000000000000000E+00
12	0	−.1937398344200000E−05	.0000000000000000E+00
13	0	.2721141561420000E−06	.0000000000000000E+00
14	0	.3240726700950000E−06	.0000000000000000E+00

15	0	—.5300068616220000E—07	.0000000000000000E+00
16	0	.4091171538200000E—06	.0000000000000000E+00
17	0	—.1054609176910000E—05	.0000000000000000E+00
18	0	—.3845560724660000E—06	.0000000000000000E+00
19	0	—.1966435801860000E—07	.0000000000000000E+00
20	0	.5287156625770000E—06	.0000000000000000E+00
2	1	—.2722032361590000E—08	—.7575182920830000E—09
2	2	.3463549937220000E—04	.1672949053830000E—07
3	1	.2632744012180000E—04	.5464363089820000E—05
3	2	.1418817932940000E—04	.4892036500480000E—05
3	3	.1228605894470000E—04	—.1785448081640000E—05
4	1	—.5996601830150000E—05	.1661934519470000E—05
4	2	—.7081806926970000E—05	—.6783627172690000E—05
4	3	—.1362298338130000E—05	—.1344347228710000E—04
4	4	—.6025778735830000E—05	.3939637195380000E—05
5	1	—.1019195653760000E—05	—.4109254150730000E—05
5	2	.4376608114970000E—05	.1084099769880000E—05
5	3	.4497767875950000E—06	.8700841208620000E—05
5	4	.2783424136030000E—05	.5938802393300000E—07
5	5	.3119625893770000E—05	—.2760966271960000E—05
6	1	.1531984393890000E—05	—.2576600639760000E—05
6	2	—.4352218123230000E—05	—.2187448015220000E—05
6	3	—.3270051634600000E—05	—.3469143028430000E—05
6	4	.3697821857860000E—06	—.4068810656300000E—05
6	5	.1404474618350000E—05	—.1033170188970000E—04
6	6	—.4704301085460000E—05	.7236008813510000E—05
7	1	.7552259234450000E—05	—.1296522202330000E—06
7	2	—.6631948361600000E—06	.2384789067160000E—05
7	3	.5826787994770001E—06	.2355772260700000E—05
7	4	—.9266265301300000E—06	.7915736546610000E—06
7	5	—.2719477973700000E—06	.1126877878840000E—05
7	6	—.9928857241339999E—06	.1107954866840000E—05
7	7	—.1788466088650000E—05	—.1616507107160000E—05
8	1	—.6088981217920000E—07	.1112544861480000E—05
8	2	.2994777877990000E—05	.1925832475840000E—05
8	3	—.1880012181150000E—05	.9535825505100000E—06
8	4	.3373519721590000E—05	—.4560565395690000E—06
8	5	—.1125272717320000E—05	.2925714953190000E—05
8	6	—.1543301441280000E—05	—.2248184271110000E—05

8	7	—.1591465180010000E—05	.3222090972550000E—05
8	8	—.2530697259120000E—05	.2140620023560000E—05
9	1	.1980425673460000E—05	.7896372030830000E—07
9	2	.1991028324820000E—05	—.1449221144130000E—05
9	3	—.2018621239890000E—05	.2234057350360000E—05
9	4	—.1895934358830000E—05	—.1385064502050000E—05
9	5	—.1484569053750000E—05	—.3699324303180000E—05
9	6	—.2278199888880000E—05	—.3071527334340000E—05
9	7	—.4066701007940000E—05	.1112438015330000E—06
9	8	—.1241792211950000E—05	—.2128975363780000E—05
9	9	—.8972926651360000E—06	.2457973274100000E—05
10	1	.8160652991070000E—06	—.9872542654059999E—06
10	2	.2411616832230000E—06	—.2693731057550000E—06
10	3	.3965613950090000E—06	.7644820480930000E—06
10	4	—.3571289581480000E—05	.1545132947240000E—05
10	5	.7258951500910000E—06	—.3686516029930000E—06
10	6	—.1959496357290000E—06	—.1819040410420000E—05
10	7	—.3838466073530000E—05	—.8052902373150000E—06
10	8	—.3411017972900000E—05	.2582534198110000E—05
10	9	—.4785783138070000E—05	—.1225243946800000E—06
10	10	.9238929016380000E—06	—.1702128574050000E—05
11	1	—.1203799652080000E—06	.6173266667270000E—06
11	2	.7426226109460000E—06	—.1942686167330000E—05
11	3	.4257220709970000E—06	.7909629921760000E—06
11	4	—.9539676434430001E—06	.2130971124690000E—05
11	5	.1524913492910000E—06	.2561492060700000E—05
11	6	.4865214681670000E—06	—.1359116333550000E—05
11	7	—.7139970510720001E—07	—.3162700313200000E—05
11	8	—.2233134538440000E—05	—.4713142784160000E—06
11	9	—.2435260078030000E—05	.4904209545970000E—06
11	10	—.4706932854420000E—05	—.1473099267880000E—06
11	11	—.2889982063860000E—05	—.1740752542340000E—05
12	1	—.5840281328970000E—06	.1600803415350000E—05
12	2	—.1559756907250000E—06	.1507492473180000E—05
12	3	.8176232978290000E—06	—.4016586322740000E—05
12	4	.9200105654750000E—06	—.5116840362370000E—06
12	5	—.1613291576740000E—06	.8527110768970000E—06
12	6	.8663826957830000E—06	.6962375776900000E—06
12	7	.2177719876460000E—05	—.8594204978010000E—06

12	8	.4644822522870000E－06	－.1931266868990000E－05
12	9	－.1275697709060000E－05	.1099264569920000E－05
12	10	－.3051832609090000E－05	－.1407867333810000E－05
12	11	－.8820185953780000E－06	－.2938683597320000E－06
12	12	.3241211015000000E－06	.1220662771710000E－05
13	1	.1124374627630000E－05	－.1052120815490000E－06
13	2	－.3525023069470000E－05	.5102794043790000E－06
13	3	－.3150182721000000E－06	－.1479723660330000E－05
13	4	.8326676975230000E－06	－.6892403004050000E－06
13	5	－.1337547583460000E－05	.1314298665750000E－05
13	6	.1326377626870000E－06	.1552649198560000E－05
13	7	.1355060596540000E－06	－.9776914266179999E－06
13	8	－.3350336778860000E－06	－.1485146656430000E－05
13	9	－.2907586170900000E－06	.3899815898970000E－06
13	10	－.6121863430540000E－06	.5600355713980000E－06
13	11	－.1258454356380000E－05	.4401012500280000E－06
13	12	－.7419750516520000E－06	－.1598312733260000E－05
13	13	.2473266154300000E－05	－.2645625441230000E－05
14	1	.6605886153930000E－06	－.6102080115560000E－06
14	2	.5237129141790000E－06	.3893599535420000E－06
14	3	.6761555983020000E－06	.2699002370410000E－07
14	4	－.4055805840340000E－06	－.2587974145560000E－05
14	5	－.8820159199920000E－06	－.1152684066890000E－06
14	6	－.5168935258780000E－06	.1493864899430000E－05
14	7	－.6698062571250000E－06	.8749406071470000E－06
14	8	.2056416633160000E－07	.8920163207590000E－06
14	9	.1741653826860000E－06	－.1213280253010000E－05
14	10	－.6611552322000000E－06	.5558230274330000E－06
14	11	－.2180453219110000E－05	.1765626024610000E－05
14	12	－.1528712322610000E－05	－.4686885744510000E－06
14	13	－.1161871319260000E－06	－.9512518551550000E－06
14	14	－.5993342422150000E－06	.1085405659060000E－05
15	1	－.7720237886770000E－06	.3416825217100000E－06
15	2	－.1734087692300000E－06	.7107531875800000E－06
15	3	－.1328024730080000E－05	－.7072224883850000E－06
15	4	－.1122880254730000E－05	－.1287530690790000E－05
15	5	－.1578202291340000E－06	－.7717380981580000E－06
15	6	.5016702309120000E－07	－.3322975407980000E－06
15	7	.1155400728180000E－05	.1852235408190000E－05

15	8	.1495030529990000E−05	.2243594932260000E−05
15	9	.1020601945100000E−06	−.1551459288920000E−05
15	10	−.2733730968390000E−06	−.5146112634660000E−07
15	11	−.1470527070930000E−05	−.1347845965970000E−05
15	12	−.1315958044460000E−05	−.3397817428330000E−06
15	13	−.3415724782220000E−06	.3040255512600000E−06
15	14	.6412529709410000E−06	.5481518253720000E−06
15	15	.5484614417000000E−06	.7010126995500000E−06
16	1	−.9730736334240000E−07	.8760174976920000E−06
16	2	.1649803094150000E−05	.3447923814940000E−07
16	3	−.1028543757360000E−06	.4279054459510000E−06
16	4	.4759886265690000E−06	.4784594724110000E−06
16	5	.9327815906229999E−06	−.5278125821530000E−06
16	6	.1038815565900000E−05	−.1023391217820000E−05
16	7	−.3509818646270000E−06	−.7329585679150000E−06
16	8	−.1209647724210000E−06	.3061781356220000E−07
16	9	−.1024878692720000E−05	−.1175313551420000E−05
16	10	.2041068982310000E−06	.5738832768160000E−06
16	11	.4353588214120000E−07	.1142697506150000E−05
16	12	−.1370427536750000E−05	.7981123576490000E−06
16	13	−.7515455438780000E−06	−.1582987773040000E−06
16	14	−.6985530034730000E−06	−.3951607972970000E−07
16	15	−.2725916962020000E−06	−.1055944928880000E−05
16	16	−.9090919669600000E−06	−.7862566594060000E−06
17	1	.8001655103230000E−06	.8782566135379999E−07
17	2	−.1712007938030000E−06	−.1044625395330000E−05
17	3	−.2171003772770000E−06	−.5318728899250000E−06
17	4	.1160294301800000E−05	.2208046994200000E−05
17	5	.3987135221710000E−06	−.8546560303970000E−06
17	6	.6100249367180000E−06	−.1495046622310000E−05
17	7	−.1625341936850000E−05	−.1107516297980000E−05
17	8	−.2118351672660000E−06	−.1518974822660000E−06
17	9	.5294629225970000E−06	.1560931339170000E−05
17	10	.7207737799020000E−06	.8858944398520000E−06
17	11	.9778883897600000E−06	−.6317056739230000E−06
17	12	.4578423147650000E−06	.5004761917360000E−07
17	13	.1526580059470000E−06	−.3422108737150000E−06
17	14	.9390029879520000E−06	.1431458214660000E−06
17	15	−.7398523706930000E−07	.1442972353860000E−07

17	16	−.2779658584330000E−06	−.2124792147220000E−06
17	17	−.4026973925480000E−06	.1352327272470000E−05
18	1	.1926985450180000E−06	−.5716667989280000E−07
18	2	−.4151803997590000E−06	−.7264058323630000E−06
18	3	.8788234066590000E−06	.5810458034470000E−06
18	4	−.8002493519270000E−06	.1146864632710000E−05
18	5	−.3246103503840000E−06	−.2858696150670000E−07
18	6	−.1762576111470000E−05	.9779780361339999E−06
18	7	−.1428877959440000E−06	−.8132546628140000E−06
18	8	.6678620054120000E−06	−.2270994680460000E−06
18	9	.5781241734200000E−06	−.1086143171510000E−05
18	10	.1626016781020000E−06	−.6413377613150000E−06
18	11	.1190190743410000E−06	−.1444990699210000E−05
18	12	.1162238473580000E−05	.4620652564480000E−06
18	13	−.7025354729210000E−06	−.2565078450200000E−06
18	14	−.1817876603890000E−06	−.6252496023590000E−06
18	15	−.8722606631480000E−07	−.8552186526090001E−06
18	16	.8724747507420000E−06	−.9751565128220000E−06
18	17	.1081594958580000E−05	−.4332237965390000E−06
18	18	−.1373957205930000E−06	−.1686674948910000E−06
19	1	−.4962928104700000E−06	.1917539727470000E−06
19	2	.3651286187540000E−06	−.3673868976850000E−06
19	3	−.8249886032800000E−06	.9885468299320000E−06
19	4	−.8331456066520000E−06	−.1037532326060000E−05
19	5	−.3714267370040000E−07	.1324756958540000E−05
19	6	−.3679863543070000E−07	.3340065002820000E−06
19	7	.1112462470960000E−05	.3538153590430000E−06
19	8	.5104515087760000E−06	.5192526970870000E−06
19	9	−.1241929032180000E−06	.6804512884750001E−07
19	10	−.7518310037950000E−06	.2782982975350000E−06
19	11	.1576977903700000E−06	−.1512294300270000E−06
19	12	.1010532037040000E−06	−.2539218556640000E−06
19	13	.3236778837630000E−06	.2241057468460000E−05
19	14	−.5106295327520000E−06	.9103019298270000E−06
19	15	.2707786692730000E−06	−.8208149539350000E−06
19	16	−.9938800617160001E−08	.5428874480650000E−06
19	17	−.9249821463870000E−06	−.1061551211170000E−05
19	18	.1295087300260000E−05	−.1808490986950000E−06
19	19	.4720716663120000E−06	.3193301283800000E−06

20	1	.3894448791540000E−07	−.4924662151670000E−06
20	2	.5320781393890000E−06	−.9724343925050000E−07
20	3	.4795674989210000E−06	−.1013862739060000E−06
20	4	.7911426889650000E−06	−.5826422488420000E−06
20	5	.1032475949640000E−06	−.4802322718710000E−06
20	6	−.4967702461450000E−06	.6156993178970000E−06
20	7	−.5917336942650000E−06	−.5440186106280000E−06
20	8	.4394005454530000E−06	.7440623649730000E−07
20	9	−.8740155543430000E−07	.4561833749100000E−06
20	10	.2363632395670000E−06	−.3577749840430000E−06
20	11	.1078498413240000E−06	.6724504086650000E−06
20	12	.4238152938270000E−07	−.9979542738770000E−06
20	13	.7649646933020000E−06	.6510063091450000E−06
20	14	.2532428383590000E−06	−.1196064334020000E−06
20	15	−.1514037158300000E−06	−.3487143338680000E−06
20	16	.8958333299660000E−06	.5275250186460000E−06
20	17	.9625883397650000E−06	−.1247076248830000E−05
20	18	.5334360431180000E−06	−.6462366596580000E−06
20	19	−.2960788071070000E−06	.5625790924100000E−06
20	20	.2891714060370000E−07	−.3845058951180000E−06

LP75G GM=4902.800269 km^3/s^2 a_e=1738.0 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	−9.097597054210000E−005	0.000000000000000E+000
3	0	−3.183542106800000E−006	0.000000000000000E+000
4	0	3.178911477220000E−006	0.000000000000000E+000
5	0	−2.598128665700000E−007	0.000000000000000E+000
6	0	3.862362237690000E−006	0.000000000000000E+000
7	0	5.673730303420000E−006	0.000000000000000E+000
8	0	2.350818244330000E−006	0.000000000000000E+000
9	0	−3.459677611820000E−006	0.000000000000000E+000
10	0	−1.162187595170000E−006	0.000000000000000E+000
11	0	−1.122060225360000E−006	0.000000000000000E+000
12	0	−1.993940508440000E−006	0.000000000000000E+000
13	0	5.335673682490000E−008	0.000000000000000E+000
14	0	6.529893913960000E−007	0.000000000000000E+000
15	0	1.379472017340000E−007	0.000000000000000E+000
16	0	6.140345051670000E−007	0.000000000000000E+000

17	0	−7.316768211000000E−007	0.000000000000000E+000
18	0	−7.963555191070000E−007	0.000000000000000E+000
19	0	−1.708184071290000E−007	0.000000000000000E+000
20	0	1.889746863020000E−007	0.000000000000000E+000
2	1	−2.787424863160000E−008	1.346500394100000E−008
2	2	3.469384675580000E−005	3.874557098790000E−009
3	1	2.640550219430000E−005	5.433798078170000E−006
3	2	1.425486482600000E−005	4.873210144190000E−006
3	3	1.231660825460000E−005	−1.762221618120000E−006
4	1	−5.957953926760000E−006	1.580416408210000E−006
4	2	−7.126854293940000E−006	−6.703750167050000E−006
4	3	−1.426159152840000E−006	−1.341306955010000E−005
4	4	−6.058053501810000E−006	3.932360886960000E−006
5	1	−9.706725251770001E−007	−4.092759279110000E−006
5	2	4.327085115670000E−006	1.180489184620000E−006
5	3	4.704928178100000E−007	8.581592621140000E−006
5	4	2.867118598810000E−006	5.436530651620000E−009
5	5	3.153796293720000E−006	−2.732379244810000E−006
6	1	1.606770785950000E−006	−2.609838782330000E−006
6	2	−4.428366933000000E−006	−2.224562307790000E−006
6	3	−3.181276672490000E−006	−3.597443010970000E−006
6	4	3.385214865400000E−007	−3.877510759460000E−006
6	5	1.320671642850000E−006	−1.026635800450000E−005
6	6	−4.724599832850000E−006	7.158528514860000E−006
7	1	7.402394498450000E−006	−7.391355640760000E−008
7	2	−7.886758626890000E−007	2.463355780280000E−006
7	3	6.313586687910000E−007	2.402631664010000E−006
7	4	−1.041115234040000E−006	9.433175866000000E−007
7	5	−1.904117763140000E−007	7.744473376149999E−007
7	6	−9.410796162420000E−007	9.627107226450000E−007
7	7	−1.798733612810000E−006	−1.499673891900000E−006
8	1	−1.263665574520000E−007	1.224588885430000E−006
8	2	3.080413650600000E−006	1.795771324480000E−006
8	3	−1.716144309890000E−006	8.710748131120000E−007
8	4	3.378218792540000E−006	−6.488694738840000E−007
8	5	−1.028981501020000E−006	2.693995119970000E−006
8	6	−1.715973337390000E−006	−1.666664637720000E−006
8	7	−1.567877284290000E−006	3.461847890700000E−006
8	8	−2.495616144060000E−006	1.959047270730000E−006

9	1	1.827344344790000E－006	－6.868306544890000E－009
9	2	2.047258759110000E－006	－1.574281578320000E－006
9	3	－2.045366543490000E－006	2.385501163000000E－006
9	4	－2.095433476750000E－006	－1.326347834400000E－006
9	5	－1.576167343320000E－006	－3.263541895340000E－006
9	6	－2.293056533220000E－006	－2.709252928600000E－006
9	7	－3.811433323860000E－006	－7.721245997770000E－007
9	8	－1.322550367020000E－006	－2.489325281490000E－006
9	9	－9.265323286480000E－007	2.680076538770000E－006
10	1	6.116292813110000E－007	－8.630213931860000E－007
10	2	4.703876511630000E－007	－1.997850659170000E－007
10	3	3.463288315010000E－007	8.825761251030000E－007
10	4	－3.554771394730000E－006	1.366165394590000E－006
10	5	9.927541901910001E－007	－4.208394352740000E－007
10	6	－1.831950698460000E－008	－2.581898846260000E－006
10	7	－3.943633160490000E－006	－1.370087446170000E－006
10	8	－3.702174394320000E－006	3.727484309750000E－006
10	9	－4.643303532260000E－006	3.117782321540000E－007
10	10	9.348219821670000E－007	－1.930224356780000E－006
11	1	8.946547434720000E－008	5.371169857310000E－007
11	2	1.025667863810000E－006	－2.131111244030000E－006
11	3	2.427240922300000E－007	7.111486883020000E－007
11	4	－8.752650228640000E－007	1.985331681500000E－006
11	5	9.732230132490000E－008	2.801003812590000E－006
11	6	1.176616474500000E－007	－1.293291028030000E－006
11	7	－3.011692192540000E－007	－2.092922413220000E－006
11	8	－1.949052474150000E－006	2.788973351950000E－007
11	9	－2.206214561910000E－006	－7.977445728960000E－007
11	10	－4.855748008210000E－006	－5.486507891650000E－007
11	11	－2.896682159260000E－006	－1.547569525170000E－006
12	1	－5.501398554130000E－007	1.535800205670000E－006
12	2	－1.715770107430000E－007	1.719478809850000E－006
12	3	5.246725904510000E－007	－3.821881117670000E－006
12	4	9.542920939870000E－007	－3.007893532040000E－007
12	5	－2.450273448510000E－007	1.123098819770000E－006
12	6	9.829088190369999E－007	2.941920930520000E－007
12	7	2.699319958030000E－006	－9.854500468790000E－007
12	8	6.782920624260000E－007	－3.205489384850000E－006
12	9	－1.696618819270000E－006	2.570470446200000E－007

12	10	−3.125085022600000E−006	−1.686092977550000E−007
12	11	−7.784133460800000E−007	−9.871814240119999E−009
12	12	3.106689225440000E−007	1.103716129670000E−006
13	1	1.477359737450000E−006	5.766168565050000E−008
13	2	−3.451114376760000E−006	5.365380488970000E−007
13	3	−4.619521847910000E−007	−1.738600624270000E−006
13	4	1.187601134430000E−006	−8.504962826020000E−007
13	5	−1.241052452730000E−006	8.318507177180000E−007
13	6	2.290357668000000E−007	1.085895206310000E−006
13	7	−4.682825496200000E−008	−3.480665940930000E−007
13	8	−9.926979393150000E−007	−1.306760208750000E−006
13	9	−4.114971456270000E−007	1.678111585610000E−006
13	10	−1.520296417610000E−007	1.390932173800000E−006
13	11	−1.394024383430000E−006	−5.447817921810000E−007
13	12	−7.196726900810000E−007	−1.701517968470000E−006
13	13	2.433631425560000E−006	−2.592383720590000E−006
14	1	1.063949855330000E−006	−6.742021381690000E−007
14	2	1.559510526380000E−007	2.207155062590000E−007
14	3	6.027377909510000E−007	6.413136072350000E−008
14	4	−2.487079324090000E−007	−2.358910619360000E−006
14	5	−1.325704609190000E−006	3.248680973010000E−009
14	6	−7.442441847439999E−007	2.267092652960000E−006
14	7	−7.292098010560000E−007	1.523152513680000E−006
14	8	2.041927938460000E−007	3.026388320070000E−008
14	9	9.029774379850000E−007	−1.381225572410000E−006
14	10	−6.981579446990000E−007	−5.496705374189999E−007
14	11	−2.455109480300000E−006	1.083393371820000E−006
14	12	−1.230737639500000E−006	1.434183631130000E−007
14	13	−3.270665412180000E−007	−1.032520774770000E−006
14	14	−4.763166024390000E−007	1.086977920810000E−006
15	1	−9.713279025940000E−007	4.644258822240000E−007
15	2	−4.674531429950000E−007	8.707120384330000E−007
15	3	−1.164582241810000E−006	−6.088006166490000E−007
15	4	−1.014253496160000E−006	−1.349478331290000E−006
15	5	−2.422389629580000E−007	−1.061034856260000E−006
15	6	6.345010679490000E−007	−4.989180134420000E−007
15	7	1.427662298150000E−006	8.557585022180000E−007
15	8	1.484821403180000E−006	1.544412821940000E−006
15	9	2.410633974770000E−008	−5.474118368990000E−007

15	10	−9.459274331500000E−007	−4.984830869090000E−008
15	11	−1.216697224930000E−006	−5.684071832849999E−007
15	12	−1.415292711500000E−006	1.170851358090000E−007
15	13	−6.750529508580000E−007	6.000369232800000E−008
15	14	1.039464251220000E−006	7.507875241750000E−007
15	15	3.217120901060000E−007	6.905878057970000E−007
16	1	−2.966737905840000E−008	1.017332644500000E−006
16	2	1.522319779360000E−006	−3.181030630430000E−007
16	3	1.653645873710000E−007	2.635500419510000E−007
16	4	5.744319590950000E−007	3.300713522970000E−007
16	5	8.245193183690000E−007	−6.033196517710000E−007
16	6	1.019209768250000E−006	−5.503186120820000E−007
16	7	−1.082386641560000E−006	−4.495745603280000E−007
16	8	−3.529278174590000E−007	1.068382023240000E−006
16	9	−9.268755534280000E−007	−6.175857389340000E−007
16	10	1.178507322640000E−007	−3.881971183090000E−007
16	11	5.546113088210000E−007	1.455075442250000E−006
16	12	−1.834005752320000E−006	3.274964935070000E−007
16	13	−1.988747933720000E−007	−3.296652824070000E−007
16	14	−4.965531737870000E−007	−3.712659845400000E−008
16	15	−7.883382608060000E−007	−1.326760250960000E−006
16	16	−5.938689575020000E−007	−7.858535195810000E−007
17	1	2.116559218210000E−007	−1.190591471390000E−007
17	2	−3.549486846610000E−007	−1.115635275870000E−006
17	3	5.197204163200000E−008	−1.210909303430000E−007
17	4	8.836361551490000E−007	2.240086563630000E−006
17	5	1.055900798740000E−007	−5.195236097080000E−007
17	6	7.363185473490000E−007	−1.251820263630000E−006
17	7	−1.520746883900000E−006	−1.813716175420000E−006
17	8	6.284613401890000E−007	−6.051678014250000E−007
17	9	6.356542902110000E−007	6.626604176420000E−007
17	10	6.195314272340000E−007	6.260186836820000E−007
17	11	1.253099734610000E−006	4.939021677260000E−008
17	12	9.979679578560000E−008	−6.041320066530000E−007
17	13	7.849882868210000E−007	−4.913399499440000E−008
17	14	4.774119119030000E−008	1.316907252090000E−011
17	15	−6.179483059800000E−009	6.673786720910000E−008
17	16	2.139917003930000E−007	6.985513243050000E−008
17	17	−7.340569301230000E−007	1.351921622940000E−006

18	1	−2.939232877460000E−007	−1.791992442250000E−008
18	2	3.681712787890000E−009	−5.929323923170000E−007
18	3	1.084604643740000E−006	4.663708035090000E−007
18	4	−1.006311344380000E−006	8.155933224190000E−007
18	5	1.717142658860000E−008	5.559148378050000E−008
18	6	−1.408664071770000E−006	4.946770506740000E−007
18	7	−2.757287337310000E−007	−1.114277332090000E−006
18	8	5.462196177760000E−007	6.098271645140000E−007
18	9	−2.034141170980000E−007	−5.046815098170000E−007
18	10	1.672836017330000E−007	−7.622638600300000E−008
18	11	4.350337243880000E−008	−1.526119695270000E−006
18	12	7.774209116990000E−007	2.408929716530000E−007
18	13	−4.026890051440000E−007	6.004928791050000E−007
18	14	−8.713336036350000E−007	−9.151280313240000E−007
18	15	8.739223611600000E−007	−4.021844559160000E−007
18	16	5.145610403190000E−007	−9.775415631200001E−007
18	17	7.122549200460000E−007	−7.375357702700000E−007
18	18	1.364298238910000E−007	−1.478974106020000E−007
19	1	−4.265413225510000E−007	−2.041403943800000E−008
19	2	7.010992519180000E−007	−5.580989492460000E−007
19	3	−8.761222234600000E−007	1.048198452360000E−006
19	4	−9.989769320870001E−007	−8.972057276190000E−007
19	5	−3.292151518360000E−008	1.636334136940000E−006
19	6	−4.011072109200000E−007	2.950857546570000E−007
19	7	7.738210212440000E−007	8.309818024120000E−007
19	8	7.184985595650000E−007	7.480782315700000E−007
19	9	−9.134694145010000E−008	−7.571692502990000E−007
19	10	−1.891924925940000E−007	−2.718354981470000E−007
19	11	8.044955022190001E−008	−3.113635924590000E−007
19	12	5.075880835970000E−007	7.163969571360000E−008
19	13	7.090964086380000E−007	1.973524917850000E−006
19	14	−8.946883113090000E−007	6.690756371569999E−008
19	15	8.930503522890000E−007	−4.410896054100000E−007
19	16	−7.607906575750000E−007	−1.596182288620000E−007
19	17	−3.563976685460000E−007	−1.121314888990000E−006
19	18	1.518471790690000E−006	1.315961885150000E−007
19	19	3.178441090500000E−007	2.401289733060000E−007
20	1	−1.596363355050000E−007	−6.205105103550000E−007
20	2	8.877093528550000E−007	4.117266397190000E−007

20	3	2.781341386780000E−007	5.538790777980000E−010
20	4	5.385796471500000E−007	−6.530311998320000E−007
20	5	2.962904638650000E−007	−5.250884408670000E−007
20	6	−3.660316802120000E−007	2.181956908420000E−007
20	7	−1.871961196030000E−007	−6.580656007390000E−007
20	8	6.823427686450000E−007	−2.353013521360000E−007
20	9	−4.058612997790000E−007	3.971438264710000E−007
20	10	3.884981434910000E−007	3.129934747400000E−007
20	11	−1.439095038700000E−007	1.078642232210000E−006
20	12	1.589228718740000E−007	−1.186388378930000E−006
20	13	2.484273599290000E−008	2.480106254130000E−007
20	14	−4.385086058210000E−008	4.421067147560000E−007
20	15	3.503010708860000E−007	2.635021152700000E−007
20	16	4.665475637160000E−007	9.217077117479999E−008
20	17	1.335401996820000E−006	−4.573369436020000E−007
20	18	−6.938845157080000E−008	−6.261993566860000E−007
20	19	−4.652085498200000E−007	2.595654913560000E−007
20	20	5.409545735560000E−008	−2.122709255110000E−007

附录三　地球和月球引力场模型

通常一个地球引力场模型包括如下内容：

GE——地心引力常数，a_e——地球参考椭球体赤道半径

$\bar{C}_{lm}$，$\bar{S}_{lm}$——地球引力位球谐展开式的归一化谐系数

当引用某一地球引力场模型时，严格而言，地固坐标系中的测站坐标 $\vec{R}_e$ 应与该引力场模型所对应的地球参考椭球体相吻合，这在精密定轨中（特别是定轨精度要求较高的问题）应加以考虑，因为它涉及到地心坐标系的严格定义．同样对于月球引力场亦如此，相应地有月心引力常数 GM，月球参考椭球体赤道半径 a_e 和引力位球谐展开式的归一化系数 $\bar{C}_{lm}$，$\bar{S}_{lm}$．

为了实际应用的需要，这里介绍被广泛引用的 JGM－3 和 WGS84 两种地球引力场模型以及 LP75G 和当今认为精度较高的 LP165 两种月球引力场模型，供读者参考．原 JGM－3 模型为 70×70 阶次，WGS84 模型为 180×180 阶次，LP165 模型为 165×165 阶次，LP75G 模型为 75×75 阶次，这里分别只给到 20×20 阶次，如有需要，读者可以在网上调用完整模型．

JGM－3　GE＝398600.44150 km^3/s^2　a_e＝6378.13630 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	－.48416954845647D－03	.00000000000000D＋00
3	0	.95717059088800D－06	.00000000000000D＋00
4	0	.53977706835730D－06	.00000000000000D＋00
5	0	.68658987986543D－07	.00000000000000D＋00
6	0	－.14967156178604D－06	.00000000000000D＋00
7	0	.90722941643232D－07	.00000000000000D＋00
8	0	.49118003174734D－07	.00000000000000D＋00
9	0	.27385060950085D－07	.00000000000000D＋00
10	0	.54130445738812D－07	.00000000000000D＋00
11	0	－.50161314595688D－07	.00000000000000D＋00

12	0	.36382340623690D-07	.00000000000000D+00
13	0	.39946428731683D-07	.00000000000000D+00
14	0	-.21803861547203D-07	.00000000000000D+00
15	0	.31659510926189D-08	.00000000000000D+00
16	0	-.54302320884432D-08	.00000000000000D+00
17	0	.18108375059805D-07	.00000000000000D+00
18	0	.72691846007246D-08	.00000000000000D+00
19	0	-.35185503098098D-08	.00000000000000D+00
20	0	.18789986549777D-07	.00000000000000D+00
2	1	-.18698764000000D-09	.11952801000000D-08
3	1	.20301372055530D-05	.24813079825561D-06
4	1	-.53624355429851D-06	-.47377237061597D-06
5	1	-.62727369697705D-07	-.94194632134383D-07
6	1	-.76103580407274D-07	.26899818932629D-07
7	1	.28028652203689D-06	.94777317813313D-07
8	1	.23333751687204D-07	.58499274939368D-07
9	1	.14223025892714D-06	.21909618349376D-07
10	1	.83758832332671D-07	-.13155406539843D-06
11	1	.16107077738720D-07	-.27892152840701D-07
12	1	-.54191701336309D-07	-.42011775767675D-07
13	1	-.52966868261361D-07	.39876816447422D-07
14	1	-.19023751941501D-07	.27471826062722D-07
15	1	.12019048467803D-07	.81732671079927D-08
16	1	.27533499349817D-07	.33708199043727D-07
17	1	-.26388862396409D-07	-.29852855753504D-07
18	1	.42100167037216D-08	-.39075893145582D-07
19	1	-.69675014448630D-08	.15804850737353D-09
20	1	.83477675011261D-08	.62445294169285D-08
2	2	.24392607486563D-05	-.14002663975880D-05
3	2	.90470634127291D-06	-.61892284647849D-06
4	2	.35067015645938D-06	.66257134594268D-06
5	2	.65245910276353D-06	-.32333435244435D-06
6	2	.48327472124892D-07	-.37381591944355D-06
7	2	.32976022742410D-06	.93193696831045D-07
8	2	.80070663931587D-07	.65518559097464D-07
9	2	.22620642355843D-07	-.32174984962166D-07
10	2	-.93557925682843D-07	-.51415890584901D-07
11	2	.18429795461053D-07	-.98452117204370D-07
12	2	.13985738460573D-07	.31047769644313D-07

13	2	.56039125275397D−07	−.62699341300935D−07
14	2	−.36978966062445D−07	−.29891074898391D−08
15	2	−.21746272853228D−07	−.31733039621956D−07
16	2	−.22395294006315D−07	.26206613354644D−07
17	2	−.17378596994668D−07	.91967492974033D−08
18	2	.12828248866347D−07	.13586359979031D−07
19	2	.31435051572210D−07	−.43295479774308D−08
20	2	.20030448029487D−07	.14884470088576D−07
3	3	.72114493982309D−06	.14142039847354D−05
4	3	.99086890577441D−06	−.20098735484731D−06
5	3	−.45183704808780D−06	−.21495419346421D−06
6	3	.57020965757974D−07	.88894738008251D−08
7	3	.25050152675038D−06	−.21732010845254D−06
8	3	−.19251764331400D−07	−.86285836534248D−07
9	3	−.16106427897243D−06	−.74545464061438D−07
10	3	−.71967367073644D−08	−.15417988118535D−06
11	3	−.30560698007455D−07	−.14880309051227D−06
12	3	.38978520777770D−07	.24576580959940D−07
13	3	−.21817131948590D−07	.98208999077455D−07
14	3	.36809435839364D−07	.20313404379978D−07
15	3	.52403064668802D−07	.15159862310361D−07
16	3	−.35100789004467D−07	−.23241519967982D−07
17	3	.74225615337830D−08	.81946523724251D−08
18	3	−.37596675909359D−08	−.31090562993624D−08
19	3	−.98999933204207D−08	−.98821208438535D−09
20	3	−.59349949066768D−08	.35571151171055D−07
4	4	−.18848136742527D−06	.30884803690355D−06
5	4	−.29512339302196D−06	.49741427230934D−07
6	4	−.86228032619800D−07	−.47140511232148D−06
7	4	−.27554096307403D−06	−.12414151248516D−06
8	4	−.24435806439297D−06	.69857074850431D−07
9	4	−.82017366877872D−08	.20068093286841D−07
10	4	−.84335352395338D−07	−.78485346171790D−07
11	4	−.40024107782339D−07	−.63596530213449D−07
12	4	−.68419698187080D−07	.29543256059344D−08
13	4	−.14709372441845D−08	−.12613848786464D−07
14	4	.17120660369001D−08	−.20688044000643D−07
15	4	−.42162691446070D−07	.78270996909884D−08
16	4	.41218976739860D−07	.46056696976601D−07

17	4	.75202561280798D−08	.23381994870984D−07
18	4	.53092291040775D−07	.14596998830727D−08
19	4	.15826786807335D−07	−.56619376893577D−08
20	4	.54571747234651D−08	−.22410101198270D−07
5	5	.17483157769990D−06	−.66939293724911D−06
6	5	−.26711227171966D−06	−.53641016466390D−06
7	5	.16440038146411D−08	.18075335233506D−07
8	5	−.25498410010257D−07	.89090297494640D−07
9	5	−.16325061515924D−07	−.54271473247992D−07
10	5	−.49519740818054D−07	−.50292693577921D−07
11	5	.37435874567708D−07	.49828631680041D−07
12	5	.31107075527266D−07	.76387883124312D−08
13	5	.58253125415417D−07	.65845648968111D−07
14	5	.29899462450133D−07	−.16857910838411D−07
15	5	.13450895846697D−07	.89823349629886D−08
16	5	−.13495263575727D−07	−.16788507060889D−08
17	5	−.17058052594159D−07	.53532065621805D−08
18	5	.73144220359351D−08	.24650351136750D−07
19	5	.12058223792869D−07	.27204444064611D−07
20	5	−.11452318388930D−07	−.69350775864877D−08
6	6	.95016518338557D−08	−.23726147889522D−06
7	6	−.35884263307918D−06	.15177808443426D−06
8	6	−.65859353864388D−07	.30892064157956D−06
9	6	.62833186922410D−07	.22267731094919D−06
10	6	−.37418833736693D−07	−.79464218274958D−07
11	6	−.14607814055515D−08	.34173161230373D−07
12	6	.33244194680361D−08	.39368833484484D−07
13	6	−.35311988740442D−07	−.60583315297552D−08
14	6	−.19400981730092D−07	.24129594129965D−08
15	6	.33463386220823D−07	−.37752532132562D−07
16	6	.14321054650520D−07	−.34445359251626D−07
17	6	−.13466610011002D−07	−.28274837436151D−07
18	6	.13377839989187D−07	−.15660996065894D−07
19	6	−.23850062007699D−08	.17951659591478D−07
20	6	.11565401097341D−07	−.42341732002092D−09
7	7	.13795170564076D−08	.24128594080773D−07
8	7	.67262701848734D−07	.74813196768710D−07
9	7	−.11815885217629D−06	−.96899385839989D−07
10	7	.82084062520783D−08	−.31491358401092D−08

11	7	.47061824740183D−08	−.89777235057051D−07
12	7	−.18603106541747D−07	.35570829249166D−07
13	7	.27063649200290D−08	−.77110578914500D−08
14	7	.36851132631493D−07	−.42223645889740D−08
15	7	.59912701354866D−07	.60561923271514D−08
16	7	−.78129662206869D−08	−.85101432520645D−08
17	7	.24011119637881D−07	−.58835543868363D−08
18	7	.65285877114871D−08	.62802630165493D−08
19	7	.73677859122170D−08	−.86648481719498D−08
20	7	−.20301510228149D−07	−.12995889226393D−09
8	8	−.12397061395498D−06	.12044100668766D−06
9	8	.18798426954722D−06	−.30154440657902D−08
10	8	.40467841871077D−07	−.91916682734371D−07
11	8	−.61406031069251D−08	.24572254505200D−07
12	8	−.25702477402668D−07	.16666794464624D−07
13	8	−.98871787586478D−08	−.97289371617499D−08
14	8	−.34866852918353D−07	−.14888414788683D−07
15	8	−.31989552416364D−07	.22270913883120D−07
16	8	−.21537842269728D−07	.52475750400288D−08
17	8	.37624561866834D−07	.37609560359427D−08
18	8	.31066116434825D−07	.24701340656902D−08
19	8	.31052189073581D−07	−.10462608847168D−07
20	8	.49222031305630D−08	.40671618436594D−08
9	9	−.47724821923178D−07	.96585577630797D−07
10	9	.12540250252277D−06	−.37736477753688D−07
11	9	−.31455516227675D−07	.42040713688155D−07
12	9	.41793077711655D−07	.25324579908954D−07
13	9	.24753630054781D−07	.45359257720667D−07
14	9	.32376638778215D−07	.28698212550741D−07
15	9	.13026722024257D−07	.37876413704166D−07
16	9	−.22776715289243D−07	−.38923887453334D−07
17	9	.32904899760425D−08	−.28585766401852D−07
18	9	−.19183123559344D−07	.36144387200323D−07
19	9	.30304661637596D−08	.64515566536913D−08
20	9	.18043912553397D−07	−.58648713867232D−08
10	10	.10038233131398D−06	−.23809404447193D−07
11	10	−.52129308588537D−07	−.18302278002235D−07
12	10	−.61693847120949D−08	.30986262918955D−07
13	10	.40892147458611D−07	−.37098943421354D−07

14	10	.38838489462067D−07	−.14646502936917D−08
15	10	.10311330752350D−07	.14956329195217D−07
16	10	−.12128710021123D−07	.12064635993103D−07
17	10	−.43040778296981D−08	.18038443987682D−07
18	10	.55661560255618D−08	−.45953868313856D−08
19	10	−.33377489589393D−07	−.70901793078301D−08
20	10	−.32549034672400D−07	−.57601831992074D−08
11	11	.46226945974065D−07	−.69592513786019D−07
12	11	.11320827288384D−07	−.63442255448454D−08
13	11	−.44739074565513D−07	−.48328920607274D−08
14	11	.15356539462914D−07	−.39038503109732D−07
15	11	−.95174491849600D−09	.18716336667474D−07
16	11	.19265835183290D−07	−.29747575202741D−08
17	11	−.15725519114554D−07	.11020868227887D−07
18	11	−.76424753587140D−08	.21171513660315D−08
19	11	.16080720197723D−07	.11000317328808D−07
20	11	.14562762720820D−07	−.18929751298295D−07
12	12	−.23492752269341D−08	−.10959426553406D−07
13	12	−.31410021346477D−07	.88106349374406D−07
14	12	.85046646166088D−08	−.30921727740280D−07
15	12	−.32728991604536D−07	.15719776528914D−07
16	12	.19697742559399D−07	.69145092797783D−08
17	12	.28689128789402D−07	.20744069700771D−07
18	12	−.29603019974536D−07	−.16192464661794D−07
19	12	−.29886557263191D−08	.93096798788415D−08
20	12	−.64092154083751D−08	.18154220942612D−07
13	13	−.61211341074230D−07	.68408785690868D−07
14	13	.32166747135071D−07	.45200081199389D−07
15	13	−.28288960926564D−07	−.42943958526004D−08
16	13	.13837330189163D−07	.99393104764339D−09
17	13	.16603066738893D−07	.20304808678395D−07
18	13	−.63799330347466D−08	−.34979730312351D−07
19	13	−.74465515090790D−08	−.28398303854051D−07
20	13	.27323490539213D−07	.70325129662091D−08
14	14	−.51783436366944D−07	−.50135706089731D−08
15	14	.53044811279796D−08	−.24442484622690D−07
16	14	−.19125929084628D−07	−.38860160731499D−07
17	14	−.14060794103232D−07	.11375705343040D−07
18	14	−.80028321553151D−08	−.13078375035713D−07

19	14	－.45294320737346D－08	－.13113452689000D－07
20	14	.11894377026580D－07	－.14472233857738D－07
15	15	－.19227532557760D－07	－.47043717740296D－08
16	15	－.14460511250623D－07	－.32699102984228D－07
17	15	.53318558273089D－08	.53871007251714D－08
18	15	－.40535566922307D－07	－.20249426822391D－07
19	15	－.17838458615368D－07	－.14105916172496D－07
20	15	－.25832737678316D－07	－.76580241490690D－09
16	16	－.37529424659874D－07	.35911038341162D－08
17	16	－.30061016811586D－07	.37240886096084D－08
18	16	.10670913840544D－07	.69654369110866D－08
19	16	－.21421212413032D－07	－.69574508679338D－08
20	16	－.12063704641516D－07	.33001883992357D－09
17	17	－.34064108542158D－07	－.19733214905988D－07
18	17	.36003191941618D－08	.45103760547938D－08
19	17	.29105753067619D－07	－.15152537147995D－07
20	17	.44347248372820D－08	－.13703405459961D－07
18	18	.26206060973410D－08	－.10810058406326D－07
19	18	.34714340290441D－07	－.94385774554964D－08
20	18	.14916632182652D－07	－.98369291535446D－09
19	19	－.23708581999978D－08	.47796091478955D－08
20	19	－.29626245297233D－08	.10959649647533D－07
20	20	.40445840955309D－08	－.12346618337924D－07

WGS84　GE＝398600.4418 km^3/s^2　a_e＝6378.1370 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	－0.48416685D－03	0.00000000D＋00
3	0	0.95706390D－06	0.00000000D＋00
4	0	0.53699587D－06	0.00000000D＋00
5	0	0.71092048D－07	0.00000000D＋00
6	0	－0.15064821D－06	0.00000000D＋00
7	0	0.85819217D－07	0.00000000D＋00
8	0	0.42979835D－07	0.00000000D＋00
9	0	0.33173231D－07	0.00000000D＋00
10	0	0.50931575D－07	0.00000000D＋00
11	0	－0.58114696D－07	0.00000000D＋00
12	0	0.34073235D－07	0.00000000D＋00
13	0	0.48159534D－07	0.00000000D＋00

14	0	−0.25559279D−07	0.00000000D+00
15	0	−0.55534001D−08	0.00000000D+00
16	0	0.96352958D−08	0.00000000D+00
17	0	0.27418160D−07	0.00000000D+00
18	0	0.10196218D−07	0.00000000D+00
19	0	−0.11009860D−07	0.00000000D+00
20	0	0.25008019D−07	0.00000000D+00
2	1	0.00000000D+00	0.00000000D+00
2	2	0.24395796D−05	−0.13979548D−05
3	1	0.20318729D−05	0.25085759D−06
3	2	0.90666113D−06	−0.62102428D−06
3	3	0.71770352D−06	0.14152388D−05
4	1	−0.53548044D−06	−0.47420394D−06
4	2	0.34797519D−06	0.65579158D−06
4	3	0.99172321D−06	−0.19912491D−06
4	4	−0.18686124D−06	0.30953114D−06
5	1	−0.64185265D−07	−0.92492959D−07
5	2	0.65184984D−06	−0.32007416D−06
5	3	−0.44903639D−06	−0.21328272D−06
5	4	−0.29719055D−06	0.53213480D−07
5	5	0.17523221D−06	−0.67059456D−06
6	1	−0.74180259D−07	0.32780040D−07
6	2	0.51824409D−07	−0.35866634D−06
6	3	0.53370577D−07	0.61334720D−08
6	4	−0.88694856D−07	−0.47260945D−06
6	5	−0.26818820D−06	−0.53491073D−06
6	6	0.10237832D−07	−0.23741002D−06
7	1	0.27905196D−06	0.94231346D−07
7	2	0.32873832D−06	0.88835092D−07
7	3	0.24940240D−06	−0.21223369D−06
7	4	−0.27123034D−06	−0.12696607D−06
7	5	0.10246290D−08	0.17321672D−07
7	6	−0.35843745D−06	0.15202633D−06
7	7	−0.20991457D−08	0.22805664D−07
8	1	0.18889342D−07	0.47856967D−07
8	2	0.73553952D−07	0.47867693D−07
8	3	−0.12132459D−07	−0.83461853D−07
8	4	−0.24208264D−06	0.71603924D−07
8	5	−0.24966587D−07	0.87751047D−07

8	6	－0.65093424D－07	0.30904202D－06
8	7	0.66323292D－07	0.74661766D－07
8	8	－0.12372281D－06	0.12210258D－06
9	1	0.14747969D－06	0.23894354D－07
9	2	0.22052093D－07	－0.26876665D－07
9	3	－0.16256047D－06	－0.85928431D－07
9	4	－0.17193827D－07	0.26077030D－07
9	5	－0.16902791D－07	－0.50337365D－07
9	6	0.65717910D－07	0.22275858D－06
9	7	－0.11648016D－06	－0.97298769D－07
9	8	0.18896045D－06	－0.31026222D－08
9	9	－0.48275744D－07	0.96381072D－07
10	1	0.88706517D－07	－0.12536457D－06
10	2	－0.82375203D－07	－0.38280049D－07
10	3	－0.13137371D－07	－0.15553732D－06
10	4	－0.87424319D－07	－0.79215732D－07
10	5	－0.53980821D－07	－0.46294947D－07
10	6	－0.42371448D－07	－0.79680607D－07
10	7	0.83736045D－08	－0.25636582D－08
10	8	0.41239589D－07	－0.92269095D－07
10	9	0.12539514D－06	－0.37687117D－07
10	10	0.10124370D－06	－0.24874984D－07
11	1	0.95375839D－08	－0.22094828D－07
11	2	0.21716225D－07	－0.10224810D－06
11	3	－0.30023695D－07	－0.13422019D－06
11	4	－0.30407161D－07	－0.69823333D－07
11	5	0.35104609D－07	0.49175170D－07
11	6	－0.37911105D－08	0.36848522D－07
11	7	0.25774039D－08	－0.88658395D－07
11	8	－0.71396627D－08	0.23243077D－07
11	9	－0.30246313D－07	0.41776400D－07
11	10	－0.53424279D－07	－0.18716766D－07
11	11	0.47514858D－07	－0.70415796D－07
12	1	－0.60609926D－07	－0.38189082D－07
12	2	0.74200188D－08	0.24640620D－07
12	3	0.42149817D－07	0.32189594D－07
12	4	－0.64346831D－07	－0.25364931D－08
12	5	0.33126200D－07	－0.40658586D－09
12	6	0.86981502D－08	0.36711094D－07

12	7	−0.16598048D−07	0.34475954D−07
12	8	−0.26843700D−07	0.17838309D−07
12	9	0.42293015D−07	0.27107811D−07
12	10	−0.44237357D−08	0.30823394D−07
12	11	0.96462514D−08	−0.60711291D−08
12	12	−0.30878714D−08	−0.10932316D−07
13	1	−0.47921675D−07	0.34957177D−07
13	2	0.48705121D−07	−0.63933232D−07
13	3	−0.17219549D−07	0.82465794D−07
13	4	−0.92616056D−08	−0.98249479D−09
13	5	0.58545255D−07	0.66075856D−07
13	6	−0.28548757D−07	−0.13018250D−07
13	7	0.10048687D−07	−0.12672050D−07
13	8	−0.12236037D−07	−0.11680475D−07
13	9	0.25798630D−07	0.46771958D−07
13	10	0.42112066D−07	−0.35203559D−07
13	11	−0.44423472D−07	−0.63137559D−08
13	12	−0.31610688D−07	0.86378230D−07
13	13	−0.61019573D−07	0.68712423D−07
14	1	−0.10581256D−07	0.22739082D−07
14	2	−0.32588467D−07	−0.45984585D−08
14	3	0.33411750D−07	0.72271094D−08
14	4	0.34163340D−08	−0.23062568D−07
14	5	0.21777499D−07	−0.44340974D−08
14	6	−0.23022045D−07	0.79137357D−08
14	7	0.39355808D−07	−0.52187212D−08
14	8	−0.31866053D−07	−0.16609601D−07
14	9	0.30182993D−07	0.23942248D−07
14	10	0.36008306D−07	−0.43924872D−09
14	11	0.16006347D−07	−0.40475033D−07
14	12	0.79810549D−08	−0.31068551D−07
14	13	0.33446421D−07	0.44622344D−07
14	14	−0.52174166D−07	−0.48789452D−08
15	1	0.77027909D−08	0.12667983D−07
15	2	−0.13310361D−07	−0.25570239D−07
15	3	0.53469109D−07	0.21540830D−07
15	4	−0.35485140D−07	−0.38325971D−08
15	5	0.80670670D−08	0.95367405D−08
15	6	0.28835774D−07	−0.29584853D−07

15	7	0.55297561D−07	0.12688881D−07
15	8	−0.26866012D−07	0.28508669D−07
15	9	0.15229368D−07	0.40242957D−07
15	10	0.78226264D−08	0.16482104D−07
15	11	−0.45323941D−08	0.16379211D−07
15	12	−0.34310516D−07	0.13248557D−07
15	13	−0.27865470D−07	−0.51124016D−08
15	14	0.58007239D−08	−0.24830947D−07
15	15	−0.18756974D−07	−0.53745848D−08
16	1	0.16657011D−07	0.32088971D−07
16	2	−0.22051986D−07	0.26286204D−07
16	3	−0.29514849D−07	−0.95827659D−08
16	4	0.37621131D−07	0.55477548D−07
16	5	−0.10479239D−07	−0.27382338D−08
16	6	0.97407454D−08	−0.43087957D−07
16	7	−0.12168169D−07	−0.56636996D−08
16	8	−0.25034024D−07	0.22895737D−08
16	9	−0.17908785D−07	−0.29938908D−07
16	10	−0.10129689D−07	0.12404473D−07
16	11	0.19053980D−07	−0.17354590D−08
16	12	0.18888013D−07	0.46949615D−08
16	13	0.15158142D−07	−0.17410596D−09
16	14	−0.19416172D−07	−0.38724225D−07
16	15	−0.14400649D−07	−0.33151819D−07
16	16	−0.40920912D−07	0.23449430D−08
17	1	−0.17492372D−07	−0.29004434D−07
17	2	−0.24972136D−07	0.52345300D−08
17	3	0.75958226D−08	0.13161951D−07
17	4	−0.35567936D−08	0.29108859D−07
17	5	−0.16440517D−07	0.15666155D−07
17	6	−0.29053420D−08	−0.41239945D−07
17	7	0.30327591D−07	−0.54652615D−08
17	8	0.26828952D−07	−0.69634040D−08
17	9	−0.74685923D−09	−0.31300568D−07
17	10	−0.10536220D−08	0.18628074D−07
17	11	−0.13049234D−07	0.13662390D−07
17	12	0.32820228D−07	0.17654374D−07
17	13	0.17049873D−07	0.19279770D−07
17	14	−0.14027974D−07	0.11214602D−07

17	15	0.56624501D−08	0.56527252D−08
17	16	−0.32153542D−07	0.33341657D−08
17	17	−0.37961677D−07	−0.17192537D−07
18	1	0.85717760D−08	−0.32887288D−07
18	2	0.11021506D−07	0.96877203D−08
18	3	−0.78128408D−08	−0.16263649D−07
18	4	0.50107239D−07	−0.35094534D−08
18	5	−0.35408518D−08	0.26790491D−07
18	6	0.12489735D−07	−0.12526195D−07
18	7	0.14813821D−07	−0.18829836D−08
18	8	0.35285229D−07	0.13368789D−08
18	9	−0.24544444D−07	0.25745394D−07
18	10	0.84106552D−09	−0.44929528D−08
18	11	−0.92784417D−08	0.11278314D−08
18	12	−0.29997564D−07	−0.13762992D−07
18	13	−0.61616779D−08	−0.34022737D−07
18	14	−0.77166667D−08	−0.13392253D−07
18	15	−0.38973604D−07	−0.20668220D−07
18	16	0.10273437D−07	0.69198054D−08
18	17	0.33491685D−08	0.54056479D−08
18	18	0.11121796D−08	−0.94806182D−08
19	1	−0.78038897D−08	−0.10955201D−07
19	2	0.32332353D−07	0.42071678D−08
19	3	−0.91228010D−08	−0.55932845D−08
19	4	0.19091610D−07	−0.12713298D−07
19	5	0.14937350D−07	0.13014332D−07
19	6	−0.80825838D−08	0.24601857D−07
19	7	0.93869167D−08	−0.65383900D−08
19	8	0.31905603D−07	−0.62494067D−08
19	9	0.54433641D−08	0.64645032D−08
19	10	−0.34557189D−07	−0.72672139D−08
19	11	0.92637732D−08	0.73094973D−08
19	12	−0.10667096D−07	0.12169099D−07
19	13	−0.81139968D−08	−0.30216212D−07
19	14	−0.54501014D−08	−0.13327961D−07
19	15	−0.18328337D−07	−0.13873813D−07
19	16	−0.23275873D−07	−0.66988140D−08
19	17	0.30387596D−07	−0.15039250D−07
19	18	0.34106265D−07	−0.76175619D−08

19	19	－0.17274425D－08	0.25989338D－08
20	1	0.59665339D－08	－0.79800572D－08
20	2	0.14911085D－07	0.16645861D－07
20	3	－0.16271296D－09	0.33562815D－07
20	4	0.94176628D－08	－0.23750287D－07
20	5	－0.11339236D－07	－0.14341921D－07
20	6	0.14119805D－07	－0.28530016D－08
20	7	－0.27298042D－07	－0.37844129D－08
20	8	0.38489401D－08	0.54767756D－08
20	9	0.20478593D－07	0.52391740D－10
20	10	－0.25203296D－07	－0.73475808D－09
20	11	0.18615023D－07	－0.20030349D－07
20	12	－0.47849719D－08	0.13733707D－07
20	13	0.26975872D－07	0.44620950D－08
20	14	0.10796764D－07	－0.12763697D－07
20	15	－0.26288771D－07	0.52729036D－09
20	16	－0.99274819D－08	－0.36128778D－09
20	17	0.43953910D－08	－0.11345533D－07
20	18	0.15890733D－07	－0.30863268D－08
20	19	－0.36173742D－08	0.10165417D－07
20	20	0.55214181D－08	－0.13903843D－07

LP165　GM＝4902.801056 km^3/s^2　a_e＝1738.0 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	－.9089018075060000E－04	.0000000000000000E＋00
3	0	－.3203591400300000E－05	.0000000000000000E＋00
4	0	.3197309571720000E－05	.0000000000000000E＋00
5	0	－.2157038206820000E－06	.0000000000000000E＋00
6	0	.3765780618660000E－05	.0000000000000000E＋00
7	0	.5622211787280000E－05	.0000000000000000E＋00
8	0	.2346499680120000E－05	.0000000000000000E＋00
9	0	－.3555033829560000E－05	.0000000000000000E＋00
10	0	－.9311407332660000E－06	.0000000000000000E＋00
11	0	－.9753318167379999E－06	.0000000000000000E＋00
12	0	－.1937398344200000E－05	.0000000000000000E＋00
13	0	.2721141561420000E－06	.0000000000000000E＋00
14	0	.3240726700950000E－06	.0000000000000000E＋00
15	0	－.5300068616220000E－07	.0000000000000000E＋00

16	0	.4091171538200000E−06	.0000000000000000E+00
17	0	−.1054609176910000E−05	.0000000000000000E+00
18	0	−.3845560724660000E−06	.0000000000000000E+00
19	0	−.1966435801860000E−07	.0000000000000000E+00
20	0	.5287156625770000E−06	.0000000000000000E+00
2	1	−.2722032361590000E−08	−.7575182920830000E−09
2	2	.3463549937220000E−04	.1672949053830000E−07
3	1	.2632744012180000E−04	.5464363089820000E−05
3	2	.1418817932940000E−04	.4892036500480000E−05
3	3	.1228605894470000E−04	−.1785448081640000E−05
4	1	−.5996601830150000E−05	.1661934519470000E−05
4	2	−.7081806926970000E−05	−.6783627172690000E−05
4	3	−.1362298338130000E−05	−.1344347228710000E−04
4	4	−.6025778735830000E−05	.3939637195380000E−05
5	1	−.1019195653760000E−05	−.4109254150730000E−05
5	2	.4376608114970000E−05	.1084099769880000E−05
5	3	.4497767875950000E−06	.8700841208620000E−05
5	4	.2783424136030000E−05	.5938802393300000E−07
5	5	.3119625893770000E−05	−.2760966271960000E−05
6	1	.1531984393890000E−05	−.2576600639760000E−05
6	2	−.4352218123230000E−05	−.2187448015220000E−05
6	3	−.3270051634600000E−05	−.3469143028430000E−05
6	4	.3697821857860000E−06	−.4068810656300000E−05
6	5	.1404474618350000E−05	−.1033170188970000E−04
6	6	−.4704301085460000E−05	.7236008813510000E−05
7	1	.7552259234450000E−05	−.1296522202330000E−06
7	2	−.6631948361600000E−06	.2384789067160000E−05
7	3	.5826787994770001E−06	.2355772260700000E−05
7	4	−.9266265301300000E−06	.7915736546610000E−06
7	5	−.2719477973700000E−06	.1126877878840000E−05
7	6	−.9928857241339999E−06	.1107954866840000E−05
7	7	−.1788466088650000E−05	−.1616507107160000E−05
8	1	−.6088981217920000E−07	.1112544861480000E−05
8	2	.2994777877990000E−05	.1925832475840000E−05
8	3	−.1880012181150000E−05	.9535825505100000E−06
8	4	.3373519721590000E−05	−.4560565395690000E−06
8	5	−.1125272717320000E−05	.2925714953190000E−05
8	6	−.1543301441280000E−05	−.2248184271110000E−05
8	7	−.1591465180010000E−05	.3222090972550000E−05

8	8	—.2530697259120000E—05	.2140620023560000E—05
9	1	.1980425673460000E—05	.7896372030830000E—07
9	2	.1991028324820000E—05	—.1449221144130000E—05
9	3	—.2018621239890000E—05	.2234057350360000E—05
9	4	—.1895934358830000E—05	—.1385064502050000E—05
9	5	—.1484569053750000E—05	—.3699324303180000E—05
9	6	—.2278199888880000E—05	—.3071527334340000E—05
9	7	—.4066701007940000E—05	.1112438015330000E—06
9	8	—.1241792211950000E—05	—.2128975363780000E—05
9	9	—.8972926651360000E—06	.2457973274100000E—05
10	1	.8160652991070000E—06	—.9872542654059999E—06
10	2	.2411616832230000E—06	—.2693731057550000E—06
10	3	.3965613950090000E—06	.7644820480930000E—06
10	4	—.3571289581480000E—05	.1545132947240000E—05
10	5	.7258951500910000E—06	—.3686516029930000E—06
10	6	—.1959496357290000E—06	—.1819040410420000E—05
10	7	—.3838466073530000E—05	—.8052902373150000E—06
10	8	—.3411017972900000E—05	.2582534198110000E—05
10	9	—.4785783138070000E—05	—.1225243946800000E—06
10	10	.9238929016380000E—06	—.1702128574050000E—05
11	1	—.1203799652080000E—06	.6173266667270000E—06
11	2	.7426226109460000E—06	—.1942686167330000E—05
11	3	.4257220709970000E—06	.7909629921760000E—06
11	4	—.9539676434430001E—06	.2130971124690000E—05
11	5	.1524913492910000E—06	.2561492060700000E—05
11	6	.4865214681670000E—06	—.1359116333550000E—05
11	7	—.7139970510720001E—07	—.3162700313200000E—05
11	8	—.2233134538440000E—05	—.4713142784160000E—06
11	9	—.2435260078030000E—05	.4904209545970000E—06
11	10	—.4706932854420000E—05	—.1473099267880000E—06
11	11	—.2889982063860000E—05	—.1740752542340000E—05
12	1	—.5840281328970000E—06	.1600803415350000E—05
12	2	—.1559756907250000E—06	.1507492473180000E—05
12	3	.8176232978290000E—06	—.4016586322740000E—05
12	4	.9200105654750000E—06	—.5116840362370000E—06
12	5	—.1613291576740000E—06	.8527110768970000E—06
12	6	.8663826957830000E—06	.6962375776900000E—06
12	7	.2177719876460000E—05	—.8594204978010000E—06
12	8	.4644822522870000E—06	—.1931266868990000E—05

12	9	—.1275697709060000E—05	.1099264569920000E—05
12	10	—.3051832609090000E—05	—.1407867333810000E—05
12	11	—.8820185953780000E—06	—.2938683597320000E—06
12	12	.3241211015000000E—06	.1220662771710000E—05
13	1	.1124374627630000E—05	—.1052120815490000E—06
13	2	—.3525023069470000E—05	.5102794043790000E—06
13	3	—.3150182721000000E—06	—.1479723660330000E—05
13	4	.8326676975230000E—06	—.6892403004050000E—06
13	5	—.1337547583460000E—05	.1314298665750000E—05
13	6	.1326377626870000E—06	.1552649198560000E—05
13	7	.1355060596540000E—06	—.9776914266179999E—06
13	8	—.3350336778860000E—06	—.1485146656430000E—05
13	9	—.2907586170900000E—06	.3899815898970000E—06
13	10	—.6121863430540000E—06	.5600355713980000E—06
13	11	—.1258454356380000E—05	.4401012500280000E—06
13	12	—.7419750516520000E—06	—.1598312733260000E—05
13	13	.2473266154300000E—05	—.2645625441230000E—05
14	1	.6605886153930000E—06	—.6102080115560000E—06
14	2	.5237129141790000E—06	.3893599535420000E—06
14	3	.6761555983020000E—06	.2699002370410000E—07
14	4	—.4055805840340000E—06	—.2587974145560000E—05
14	5	—.8820159199920000E—06	—.1152684066890000E—06
14	6	—.5168935258780000E—06	.1493864899430000E—05
14	7	—.6698062571250000E—06	.8749406071470000E—06
14	8	.2056416633160000E—07	.8920163207590000E—06
14	9	.1741653826860000E—06	—.1213280253010000E—05
14	10	—.6611552322000000E—06	.5558230274330000E—06
14	11	—.2180453219110000E—05	.1765626024610000E—05
14	12	—.1528712322610000E—05	—.4686885744510000E—06
14	13	—.1161871319260000E—06	—.9512518551550000E—06
14	14	—.5993342422150000E—06	.1085405659060000E—05
15	1	—.7720237886770000E—06	.3416825217100000E—06
15	2	—.1734087692300000E—06	.7107531875800000E—06
15	3	—.1328024730080000E—05	—.7072224883850000E—06
15	4	—.1122880254730000E—05	—.1287530690790000E—05
15	5	—.1578202291340000E—06	—.7717380981580000E—06
15	6	.5016702309120000E—07	—.3322975407980000E—06
15	7	.1155400728180000E—05	.1852235408190000E—05
15	8	.1495030529990000E—05	.2243594932260000E—05

15	9	.1020601945100000E－06	－.1551459288920000E－05
15	10	－.2733730968390000E－06	－.5146112634660000E－07
15	11	－.1470527070930000E－05	－.1347845965970000E－05
15	12	－.1315958044460000E－05	－.3397817428330000E－06
15	13	－.3415724782220000E－06	.3040255512600000E－06
15	14	.6412529709410000E－06	.5481518253720000E－06
15	15	.5484614417000000E－06	.7010126995500000E－06
16	1	－.9730736334240000E－07	.8760174976920000E－06
16	2	.1649803094150000E－05	.3447923814940000E－07
16	3	－.1028543757360000E－06	.4279054459510000E－06
16	4	.4759886265690000E－06	.4784594724110000E－06
16	5	.9327815906229999E－06	－.5278125821530000E－06
16	6	.1038815565900000E－05	－.1023391217820000E－05
16	7	－.3509818646270000E－06	－.7329585679150000E－06
16	8	－.1209647724210000E－06	.3061781356220000E－07
16	9	－.1024878692720000E－05	－.1175313551420000E－05
16	10	.2041068982310000E－06	.5738832768160000E－06
16	11	.4353588214120000E－07	.1142697506150000E－05
16	12	－.1370427536750000E－05	.7981123576490000E－06
16	13	－.7515455438780000E－06	－.1582987773040000E－06
16	14	－.6985530034730000E－06	－.3951607972970000E－07
16	15	－.2725916962020000E－06	－.1055944928880000E－05
16	16	－.9090919669600000E－06	－.7862566594060000E－06
17	1	.8001655103230000E－06	.8782566135379999E－07
17	2	－.1712007938030000E－06	－.1044625395330000E－05
17	3	－.2171003772770000E－06	－.5318728899250000E－06
17	4	.1160294301800000E－05	.2208046994200000E－05
17	5	.3987135221710000E－06	－.8546560303970000E－06
17	6	.6100249367180000E－06	－.1495046622310000E－05
17	7	－.1625341936850000E－05	－.1107516297980000E－05
17	8	－.2118351672660000E－06	－.1518974822660000E－06
17	9	.5294629225970000E－06	.1560931339170000E－05
17	10	.7207737799020000E－06	.8858944398520000E－06
17	11	.9778883897600000E－06	－.6317056739230000E－06
17	12	.4578423147650000E－06	.5004761917360000E－07
17	13	.1526580059470000E－06	－.3422108737150000E－06
17	14	.9390029879520000E－06	.1431458214660000E－06
17	15	－.7398523706930000E－07	.1442972353860000E－07
17	16	－.2779658584330000E－06	－.2124792147220000E－06

17	17	−.4026973925480000E−06	.1352327272470000E−05
18	1	.1926985450180000E−06	−.5716667989280000E−07
18	2	−.4151803997590000E−06	−.7264058323630000E−06
18	3	.8788234066590000E−06	.5810458034470000E−06
18	4	−.8002493519270000E−06	.1146864632710000E−05
18	5	−.3246103503840000E−06	−.2858696150670000E−07
18	6	−.1762576111470000E−05	.9779780361339999E−06
18	7	−.1428877959440000E−06	−.8132546628140000E−06
18	8	.6678620054120000E−06	−.2270994680460000E−06
18	9	.5781241734200000E−06	−.1086143171510000E−05
18	10	.1626016781020000E−06	−.6413377613150000E−06
18	11	.1190190743410000E−06	−.1444990699210000E−05
18	12	.1162238473580000E−05	.4620652564480000E−06
18	13	−.7025354729210000E−06	−.2565078450200000E−06
18	14	−.1817876603890000E−06	−.6252496023590000E−06
18	15	−.8722606631480000E−07	−.8552186526090001E−06
18	16	.8724747507420000E−06	−.9751565128220000E−06
18	17	.1081594958580000E−05	−.4332237965390000E−06
18	18	−.1373957205930000E−06	−.1686674948910000E−06
19	1	−.4962928104700000E−06	.1917539727470000E−06
19	2	.3651286187540000E−06	−.3673868976850000E−06
19	3	−.8249886032800000E−06	.9885468299320000E−06
19	4	−.8331456066520000E−06	−.1037532326060000E−05
19	5	−.3714267370040000E−07	.1324756958540000E−05
19	6	−.3679863543070000E−07	.3340065002820000E−06
19	7	.1112462470960000E−05	.3538153590430000E−06
19	8	.5104515087760000E−06	.5192526970870000E−06
19	9	−.1241929032180000E−06	.6804512884750001E−07
19	10	−.7518310037950000E−06	.2782982975350000E−06
19	11	.1576977903700000E−06	−.1512294300270000E−06
19	12	.1010532037040000E−06	−.2539218556640000E−06
19	13	.3236778837630000E−06	.2241057468460000E−05
19	14	−.5106295327520000E−06	.9103019298270000E−06
19	15	.2707786692730000E−06	−.8208149539350000E−06
19	16	−.9938800617160001E−08	.5428874480650000E−06
19	17	−.9249821463870000E−06	−.1061551211170000E−05
19	18	.1295087300260000E−05	−.1808490986950000E−06
19	19	.4720716663120000E−06	.3193301283800000E−06
20	1	.3894448791540000E−07	−.4924662151670000E−06

20	2	.5320781393890000E－06	－.9724343925050000E－07
20	3	.4795674989210000E－06	－.1013862739060000E－06
20	4	.7911426889650000E－06	－.5826422488420000E－06
20	5	.1032475949640000E－06	－.4802322718710000E－06
20	6	－.4967702461450000E－06	.6156993178970000E－06
20	7	－.5917336942650000E－06	－.5440186106280000E－06
20	8	.4394005454530000E－06	.7440623649730000E－07
20	9	－.8740155543430000E－07	.4561833749100000E－06
20	10	.2363632395670000E－06	－.3577749840430000E－06
20	11	.1078498413240000E－06	.6724504086650000E－06
20	12	.4238152938270000E－07	－.9979542738770000E－06
20	13	.7649646933020000E－06	.6510063091450000E－06
20	14	.2532428383590000E－06	－.1196064334020000E－06
20	15	－.1514037158300000E－06	－.3487143338680000E－06
20	16	.8958333299660000E－06	.5275250186460000E－06
20	17	.9625883397650000E－06	－.1247076248830000E－05
20	18	.5334360431180000E－06	－.6462366596580000E－06
20	19	－.2960788071070000E－06	.5625790924100000E－06
20	20	.2891714060370000E－07	－.3845058951180000E－06

LP75G　GM＝4902.800269 km^3/s^2　a_e＝1738.0 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	－9.097597054210000E－005	0.000000000000000E＋000
3	0	－3.183542106800000E－006	0.000000000000000E＋000
4	0	3.178911477220000E－006	0.000000000000000E＋000
5	0	－2.598128665700000E－007	0.000000000000000E＋000
6	0	3.862362237690000E－006	0.000000000000000E＋000
7	0	5.673730303420000E－006	0.000000000000000E＋000
8	0	2.350818244330000E－006	0.000000000000000E＋000
9	0	－3.459677611820000E－006	0.000000000000000E＋000
10	0	－1.162187595170000E－006	0.000000000000000E＋000
11	0	－1.122060225360000E－006	0.000000000000000E＋000
12	0	－1.993940508440000E－006	0.000000000000000E＋000
13	0	5.335673682490000E－008	0.000000000000000E＋000
14	0	6.529893913960000E－007	0.000000000000000E＋000
15	0	1.379472017340000E－007	0.000000000000000E＋000
16	0	6.140345051670000E－007	0.000000000000000E＋000
17	0	－7.316768211000000E－007	0.000000000000000E＋000

18	0	−7.963555191070000E−007	0.000000000000000E+000
19	0	−1.708184071290000E−007	0.000000000000000E+000
20	0	1.889746863020000E−007	0.000000000000000E+000
2	1	−2.787424863160000E−008	1.346500394100000E−008
2	2	3.469384675580000E−005	3.874557098790000E−009
3	1	2.640550219430000E−005	5.433798078170000E−006
3	2	1.425486482600000E−005	4.873210144190000E−006
3	3	1.231660825460000E−005	−1.762221618120000E−006
4	1	−5.957953926760000E−006	1.580416408210000E−006
4	2	−7.126854293940000E−006	−6.703750167050000E−006
4	3	−1.426159152840000E−006	−1.341306955010000E−005
4	4	−6.058053501810000E−006	3.932360886960000E−006
5	1	−9.706725251770001E−007	−4.092759279110000E−006
5	2	4.327085115670000E−006	1.180489184620000E−006
5	3	4.704928178100000E−007	8.581592621140000E−006
5	4	2.867118598810000E−006	5.436530651620000E−009
5	5	3.153796293720000E−006	−2.732379244810000E−006
6	1	1.606770785950000E−006	−2.609838782330000E−006
6	2	−4.428366933000000E−006	−2.224562307790000E−006
6	3	−3.181276672490000E−006	−3.597443010970000E−006
6	4	3.385214865400000E−007	−3.877510759460000E−006
6	5	1.320671642850000E−006	−1.026635800450000E−005
6	6	−4.724599832850000E−006	7.158528514860000E−006
7	1	7.402394498450000E−006	−7.391355640760000E−008
7	2	−7.886758626890000E−007	2.463355780280000E−006
7	3	6.313586687910000E−007	2.402631664010000E−006
7	4	−1.041115234040000E−006	9.433175866000000E−007
7	5	−1.904117763140000E−007	7.744473376149999E−007
7	6	−9.410796162420000E−007	9.627107226450000E−007
7	7	−1.798733612810000E−006	−1.499673891900000E−006
8	1	−1.263665574520000E−007	1.224588885430000E−006
8	2	3.080413650600000E−006	1.795771324480000E−006
8	3	−1.716144309890000E−006	8.710748131120000E−007
8	4	3.378218792540000E−006	−6.488694738840000E−007
8	5	−1.028981501020000E−006	2.693995119970000E−006
8	6	−1.715973337390000E−006	−1.666664637720000E−006
8	7	−1.567877284290000E−006	3.461847890700000E−006
8	8	−2.495616144060000E−006	1.959047270730000E−006
9	1	1.827344344790000E−006	−6.868306544890000E−009

9	2	2.047258759110000E−006	−1.574281578320000E−006
9	3	−2.045366543490000E−006	2.385501163000000E−006
9	4	−2.095433476750000E−006	−1.326347834400000E−006
9	5	−1.576167343320000E−006	−3.263541895340000E−006
9	6	−2.293056533220000E−006	−2.709252928600000E−006
9	7	−3.811433323860000E−006	−7.721245997770000E−007
9	8	−1.322550367020000E−006	−2.489325281490000E−006
9	9	−9.265323286480000E−007	2.680076538770000E−006
10	1	6.116292813110000E−007	−8.630213931860000E−007
10	2	4.703876511630000E−007	−1.997850659170000E−007
10	3	3.463288315010000E−007	8.825761251030000E−007
10	4	−3.554771394730000E−006	1.366165394590000E−006
10	5	9.927541901910001E−007	−4.208394352740000E−007
10	6	−1.831950698460000E−008	−2.581898846260000E−006
10	7	−3.943633160490000E−006	−1.370087446170000E−006
10	8	−3.702174394320000E−006	3.727484309750000E−006
10	9	−4.643303532260000E−006	3.117782321540000E−007
10	10	9.348219821670000E−007	−1.930224356780000E−006
11	1	8.946547434720000E−008	5.371169857310000E−007
11	2	1.025667863810000E−006	−2.131111244030000E−006
11	3	2.427240922300000E−007	7.111486883020000E−007
11	4	−8.752650228640000E−007	1.985331681500000E−006
11	5	9.732230132490000E−008	2.801003812590000E−006
11	6	1.176616474500000E−007	−1.293291028030000E−006
11	7	−3.011692192540000E−007	−2.092922413220000E−006
11	8	−1.949052474150000E−006	2.788973351950000E−007
11	9	−2.206214561910000E−006	−7.977445728960000E−007
11	10	−4.855748008210000E−006	−5.486507891650000E−007
11	11	−2.896682159260000E−006	−1.547569525170000E−006
12	1	−5.501398554130000E−007	1.535800205670000E−006
12	2	−1.715770107430000E−007	1.719478809850000E−006
12	3	5.246725904510000E−007	−3.821881117670000E−006
12	4	9.542920939870000E−007	−3.007893532040000E−007
12	5	−2.450273448510000E−007	1.123098819770000E−006
12	6	9.829088190369999E−007	2.941920930520000E−007
12	7	2.699319958030000E−006	−9.854500468790000E−007
12	8	6.782920624260000E−007	−3.205489384850000E−006
12	9	−1.696618819270000E−006	2.570470446200000E−007
12	10	−3.125085022600000E−006	−1.686092977550000E−007

12	11	−7.784133460800000E−007	−9.871814240119999E−009
12	12	3.106689225440000E−007	1.103716129670000E−006
13	1	1.477359737450000E−006	5.766168565050000E−008
13	2	−3.451114376760000E−006	5.365380488970000E−007
13	3	−4.619521847910000E−007	−1.738600624270000E−006
13	4	1.187601134430000E−006	−8.504962826020000E−007
13	5	−1.241052452730000E−006	8.318507177180000E−007
13	6	2.290357668000000E−007	1.085895206310000E−006
13	7	−4.682825496200000E−008	−3.480665940930000E−007
13	8	−9.926979393150000E−007	−1.306760208750000E−006
13	9	−4.114971456270000E−007	1.678111585610000E−006
13	10	−1.520296417610000E−007	1.390932173800000E−006
13	11	−1.394024383430000E−006	−5.447817921810000E−007
13	12	−7.196726900810000E−007	−1.701517968470000E−006
13	13	2.433631425560000E−006	−2.592383720590000E−006
14	1	1.063949855330000E−006	−6.742021381690000E−007
14	2	1.559510526380000E−007	2.207155062590000E−007
14	3	6.027377909510000E−007	6.413136072350000E−008
14	4	−2.487079324090000E−007	−2.358910619360000E−006
14	5	−1.325704609190000E−006	3.248680973010000E−009
14	6	−7.442441847439999E−007	2.267092652960000E−006
14	7	−7.292098010560000E−007	1.523152513680000E−006
14	8	2.041927938460000E−007	3.026388320070000E−008
14	9	9.029774379850000E−007	−1.381225572410000E−006
14	10	−6.981579446990000E−007	−5.496705374189999E−007
14	11	−2.455109480300000E−006	1.083393371820000E−006
14	12	−1.230737639500000E−006	1.434183631130000E−007
14	13	−3.270665412180000E−007	−1.032520774770000E−006
14	14	−4.763166024390000E−007	1.086977920810000E−006
15	1	−9.713279025940000E−007	4.644258822240000E−007
15	2	−4.674531429950000E−007	8.707120384330000E−007
15	3	−1.164582241810000E−006	−6.088006166490000E−007
15	4	−1.014253496160000E−006	−1.349478331290000E−006
15	5	−2.422389629580000E−007	−1.061034856260000E−006
15	6	6.345010679490000E−007	−4.989180134420000E−007
15	7	1.427662298150000E−006	8.557585022180000E−007
15	8	1.484821403180000E−006	1.544412821940000E−006
15	9	2.410633974770000E−008	−5.474118368990000E−007
15	10	−9.459274331500000E−007	−4.984830869090000E−008

15	11	－1.216697224930000E－006	－5.684071832849999E－007
15	12	－1.415292711500000E－006	1.170851358090000E－007
15	13	－6.750529508580000E－007	6.000369232800000E－008
15	14	1.039464251220000E－006	7.507875241750000E－007
15	15	3.217120901060000E－007	6.905878057970000E－007
16	1	－2.966737905840000E－008	1.017332644500000E－006
16	2	1.522319779360000E－006	－3.181030630430000E－007
16	3	1.653645873710000E－007	2.635500419510000E－007
16	4	5.744319590950000E－007	3.300713522970000E－007
16	5	8.245193183690000E－007	－6.033196517710000E－007
16	6	1.019209768250000E－006	－5.503186120820000E－007
16	7	－1.082386641560000E－006	－4.495745603280000E－007
16	8	－3.529278174590000E－007	1.068382023240000E－006
16	9	－9.268755534280000E－007	－6.175857389340000E－007
16	10	1.178507322640000E－007	－3.881971183090000E－007
16	11	5.546113088210000E－007	1.455075442250000E－006
16	12	－1.834005752320000E－006	3.274964935070000E－007
16	13	－1.988747933720000E－007	－3.296652824070000E－007
16	14	－4.965531737870000E－007	－3.712659845400000E－008
16	15	－7.883382608060000E－007	－1.326760250960000E－006
16	16	－5.938689575020000E－007	－7.858535195810000E－007
17	1	2.116559218210000E－007	－1.190591471390000E－007
17	2	－3.549486846610000E－007	－1.115635275870000E－006
17	3	5.197204163200000E－008	－1.210909303430000E－007
17	4	8.836361551490000E－007	2.240086563630000E－006
17	5	1.055900798740000E－007	－5.195236097080000E－007
17	6	7.363185473490000E－007	－1.251820263630000E－006
17	7	－1.520746883900000E－006	－1.813716175420000E－006
17	8	6.284613401890000E－007	－6.051678014250000E－007
17	9	6.356542902110000E－007	6.626604176420000E－007
17	10	6.195314272340000E－007	6.260186836820000E－007
17	11	1.253099734610000E－006	4.939021677260000E－008
17	12	9.979679578560000E－008	－6.041320066530000E－007
17	13	7.849882868210000E－007	－4.913399499440000E－008
17	14	4.774119119030000E－008	1.316907252090000E－011
17	15	－6.179483059800000E－009	6.673786720910000E－008
17	16	2.139917003930000E－007	6.985513243050000E－008
17	17	－7.340569301230000E－007	1.351921622940000E－006
18	1	－2.939232877460000E－007	－1.791992442250000E－008

18	2	3.681712787890000E－009	－5.929323923170000E－007
18	3	1.084604643740000E－006	4.663708035090000E－007
18	4	－1.006311344380000E－006	8.155933224190000E－007
18	5	1.717142658860000E－008	5.559148378050000E－008
18	6	－1.408664071770000E－006	4.946770506740000E－007
18	7	－2.757287337310000E－007	－1.114277332090000E－006
18	8	5.462196177760000E－007	6.098271645140000E－007
18	9	－2.034141170980000E－007	－5.046815098170000E－007
18	10	1.672836017330000E－007	－7.622638600300000E－008
18	11	4.350337243880000E－008	－1.526119695270000E－006
18	12	7.774209116990000E－007	2.408929716530000E－007
18	13	－4.026890051440000E－007	6.004928791050000E－007
18	14	－8.713336036350000E－007	－9.151280313240000E－007
18	15	8.739223611600000E－007	－4.021844559160000E－007
18	16	5.145610403190000E－007	－9.775415631200001E－007
18	17	7.122549200460000E－007	－7.375357702700000E－007
18	18	1.364298238910000E－007	－1.478974106020000E－007
19	1	－4.265413225510000E－007	－2.041403943800000E－008
19	2	7.010992519180000E－007	－5.580989492460000E－007
19	3	－8.761222234600000E－007	1.048198452360000E－006
19	4	－9.989769320870001E－007	－8.972057276190000E－007
19	5	－3.292151518360000E－008	1.636334136940000E－006
19	6	－4.011072109200000E－007	2.950857546570000E－007
19	7	7.738210212440000E－007	8.309818024120000E－007
19	8	7.184985595650000E－007	7.480782315700000E－007
19	9	－9.134694145010000E－008	－7.571692502990000E－007
19	10	－1.891924925940000E－007	－2.718354981470000E－007
19	11	8.044955022190001E－008	－3.113635924590000E－007
19	12	5.075880835970000E－007	7.163969571360000E－008
19	13	7.090964086380000E－007	1.973524917850000E－006
19	14	－8.946883113090000E－007	6.690756371569999E－008
19	15	8.930503522890000E－007	－4.410896054100000E－007
19	16	－7.607906575750000E－007	－1.596182288620000E－007
19	17	－3.563976685460000E－007	－1.121314888990000E－006
19	18	1.518471790690000E－006	1.315961885150000E－007
19	19	3.178441090500000E－007	2.401289733060000E－007
20	1	－1.596363355050000E－007	－6.205105103550000E－007
20	2	8.877093528550000E－007	4.117266397190000E－007
20	3	2.781341386780000E－007	5.538790777980000E－010

20	4	5.385796471500000E－007	－6.530311998320000E－007
20	5	2.962904638650000E－007	－5.250884408670000E－007
20	6	－3.660316802120000E－007	2.181956908420000E－007
20	7	－1.871961196030000E－007	－6.580656007390000E－007
20	8	6.823427686450000E－007	－2.353013521360000E－007
20	9	－4.058612997790000E－007	3.971438264710000E－007
20	10	3.884981434910000E－007	3.129934747400000E－007
20	11	－1.439095038700000E－007	1.078642232210000E－006
20	12	1.589228718740000E－007	－1.186388378930000E－006
20	13	2.484273599290000E－008	2.480106254130000E－007
20	14	－4.385086058210000E－008	4.421067147560000E－007
20	15	3.503010708860000E－007	2.635021152700000E－007
20	16	4.665475637160000E－007	9.217077117479999E－008
20	17	1.335401996820000E－006	－4.573369436020000E－007
20	18	－6.938845157080000E－008	－6.261993566860000E－007
20	19	－4.652085498200000E－007	2.595654913560000E－007
20	20	5.409545735560000E－008	－2.122709255110000E－007

LP165 GM=4902.801056 km^3/s^2 a_e=1738.0 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$
2	0	-.9089018075060000E-04	.0000000000000000E+00
3	0	-.3203591400300000E-05	.0000000000000000E+00
4	0	.3197309571720000E-05	.0000000000000000E+00
5	0	-.2157038206820000E-06	.0000000000000000E+00
6	0	.3765780618660000E-05	.0000000000000000E+00
7	0	.5622211787280000E-05	.0000000000000000E+00
8	0	.2346499680120000E-05	.0000000000000000E+00
9	0	-.3555033829560000E-05	.0000000000000000E+00
10	0	-.9311407332660000E-06	.0000000000000000E+00
11	0	-.9753318167379999E-06	.0000000000000000E+00
12	0	-.1937398344200000E-05	.0000000000000000E+00
13	0	.2721141561420000E-06	.0000000000000000E+00
14	0	.3240726700950000E-06	.0000000000000000E+00
15	0	-.5300068616220000E-07	.0000000000000000E+00
16	0	.4091171538200000E-06	.0000000000000000E+00
17	0	-.1054609176910000E-05	.0000000000000000E+00
18	0	-.3845560724660000E-06	.0000000000000000E+00
19	0	-.1966435801860000E-07	.0000000000000000E+00
20	0	.5287156625770000E-06	.0000000000000000E+00
2	1	-.2722032361590000E-08	-.7575182920830000E-09
2	2	.3463549937220000E-04	.1672949053830000E-07
3	1	.2632744012180000E-04	.5464363089820000E-05
3	2	.1418817932940000E-04	.4892036500480000E-05
3	3	.1228605894470000E-04	-.1785448081640000E-05
4	1	-.5996601830150000E-05	.1661934519470000E-05
4	2	-.7081806926970000E-05	-.6783627172690000E-05
4	3	-.1362298338130000E-05	-.1344347228710000E-04
4	4	-.6025778735830000E-05	.3939637195380000E-05
5	1	-.1019195653760000E-05	-.4109254150730000E-05
5	2	.4376608114970000E-05	.1084099769880000E-05
5	3	.4497767875950000E-06	.8700841208620000E-05
5	4	.2783424136030000E-05	.5938802393300000E-07
5	5	.3119625893770000E-05	-.2760966271960000E-05
6	1	.1531984393890000E-05	-.2576600639760000E-05
6	2	-.4352218123230000E-05	-.2187448015220000E-05
6	3	-.3270051634600000E-05	-.3469143028430000E-05

6	4	.3697821857860000E−06	−.4068810656300000E−05
6	5	.1404474618350000E−05	−.1033170188970000E−04
6	6	−.4704301085460000E−05	.7236008813510000E−05
7	1	.7552259234450000E−05	−.1296522202330000E−06
7	2	−.6631948361600000E−06	.2384789067160000E−05
7	3	.5826787994770001E−06	.2355772260700000E−05
7	4	−.9266265301300000E−06	.7915736546610000E−06
7	5	−.2719477973700000E−06	.1126877878840000E−05
7	6	−.9928857241339999E−06	.1107954866840000E−05
7	7	−.1788466088650000E−05	−.1616507107160000E−05
8	1	−.6088981217920000E−07	.1112544861480000E−05
8	2	.2994777877990000E−05	.1925832475840000E−05
8	3	−.1880012181150000E−05	.9535825505100000E−06
8	4	.3373519721590000E−05	−.4560565395690000E−06
8	5	−.1125272717320000E−05	.2925714953190000E−05
8	6	−.1543301441280000E−05	−.2248184271110000E−05
8	7	−.1591465180010000E−05	.3222090972550000E−05
8	8	−.2530697259120000E−05	.2140620023560000E−05
9	1	.1980425673460000E−05	.7896372030830000E−07
9	2	.1991028324820000E−05	−.1449221144130000E−05
9	3	−.2018621239890000E−05	.2234057350360000E−05
9	4	−.1895934358830000E−05	−.1385064502050000E−05
9	5	−.1484569053750000E−05	−.3699324303180000E−05
9	6	−.2278199888880000E−05	−.3071527334340000E−05
9	7	−.4066701007940000E−05	.1112438015330000E−06
9	8	−.1241792211950000E−05	−.2128975363780000E−05
9	9	−.8972926651360000E−06	.2457973274100000E−05
10	1	.8160652991070000E−06	−.9872542654059999E−06
10	2	.2411616832230000E−06	−.2693731057550000E−06
10	3	.3965613950090000E−06	.7644820480930000E−06
10	4	−.3571289581480000E−05	.1545132947240000E−05
10	5	.7258951500910000E−06	−.3686516029930000E−06
10	6	−.1959496357290000E−06	−.1819040410420000E−05
10	7	−.3838466073530000E−05	−.8052902373150000E−06
10	8	−.3411017972900000E−05	.2582534198110000E−05
10	9	−.4785783138070000E−05	−.1225243946800000E−06
10	10	.9238929016380000E−06	−.1702128574050000E−05
11	1	−.1203799652080000E−06	.6173266667270000E−06
11	2	.7426226109460000E−06	−.1942686167330000E−05

11	3	.4257220709970000E−06	.7909629921760000E−06
11	4	−.9539676434430001E−06	.2130971124690000E−05
11	5	.1524913492910000E−06	.2561492060700000E−05
11	6	.4865214681670000E−06	−.1359116333550000E−05
11	7	−.7139970510720001E−07	−.3162700313200000E−05
11	8	−.2233134538440000E−05	−.4713142784160000E−06
11	9	−.2435260078030000E−05	.4904209545970000E−06
11	10	−.4706932854420000E−05	−.1473099267880000E−06
11	11	−.2889982063860000E−05	−.1740752542340000E−05
12	1	−.5840281328970000E−06	.1600803415350000E−05
12	2	−.1559756907250000E−06	.1507492473180000E−05
12	3	.8176232978290000E−06	−.4016586322740000E−05
12	4	.9200105654750000E−06	−.5116840362370000E−06
12	5	−.1613291576740000E−06	.8527110768970000E−06
12	6	.8663826957830000E−06	.6962375776900000E−06
12	7	.2177719876460000E−05	−.8594204978010000E−06
12	8	.4644822522870000E−06	−.1931266868990000E−05
12	9	−.1275699709060000E−05	.1099264569920000E−05
12	10	−.3051832609090000E−05	−.1407867333810000E−05
12	11	−.8820185953780000E−06	−.2938683597320000E−06
12	12	.3241211015000000E−06	.1220662771710000E−05
13	1	.1124374627630000E−05	−.1052120815490000E−06
13	2	−.3525023069470000E−05	.5102794043790000E−06
13	3	−.3150182721000000E−06	−.1479723660330000E−05
13	4	.8326676975230000E−06	−.6892403004050000E−06
13	5	−.1337547583460000E−05	.1314298665750000E−05
13	6	.1326377626870000E−06	.1552649198560000E−05
13	7	.1355060596540000E−06	−.9776914266179999E−06
13	8	−.3350336778860000E−06	−.1485146656430000E−05
13	9	−.2907586170900000E−06	.3899815898970000E−06
13	10	−.6121863430540000E−06	.5600355713980000E−06
13	11	−.1258454356380000E−05	.4401012500280000E−06
13	12	−.7419750516520000E−06	−.1598312733260000E−05
13	13	.2473266154300000E−05	−.2645625441230000E−05
14	1	.6605886153930000E−06	−.6102080115560000E−06
14	2	.5237129141790000E−06	.3893599535420000E−06
14	3	.6761555983020000E−06	.2699002370410000E−07
14	4	−.4055805840340000E−06	−.2587974145560000E−05
14	5	−.8820159199920000E−06	−.1152684066890000E−06

14	6	−.5168935258780000E−06	.1493864899430000E−05
14	7	−.6698062571250000E−06	.8749406071470000E−06
14	8	.2056416633160000E−07	.8920163207590000E−06
14	9	.1741653826860000E−06	−.1213280253010000E−05
14	10	−.6611552322000000E−06	.5558230274330000E−06
14	11	−.2180453219110000E−05	.1765626024610000E−05
14	12	−.1528712322610000E−05	−.4686885744510000E−06
14	13	−.1161871319260000E−06	−.9512518551550000E−06
14	14	−.5993342422150000E−06	.1085405659060000E−05
15	1	−.7720237886770000E−06	.3416825217100000E−06
15	2	−.1734087692300000E−06	.7107531875800000E−06
15	3	−.1328024730080000E−05	−.7072224883850000E−06
15	4	−.1122880254730000E−05	−.1287530690790000E−05
15	5	−.1578202291340000E−06	−.7717380981580000E−06
15	6	.5016702309120000E−07	−.3322975407980000E−06
15	7	.1155400728180000E−05	.1852235408190000E−05
15	8	.1495030529990000E−05	.2243594932260000E−05
15	9	.1020601945100000E−06	−.1551459288920000E−05
15	10	−.2733730968390000E−06	−.5146112634660000E−07
15	11	−.1470527070930000E−05	−.1347845965970000E−05
15	12	−.1315958044460000E−05	−.3397817428330000E−06
15	13	−.3415724782220000E−06	.3040255512600000E−06
15	14	.6412529709410000E−06	.5481518253720000E−06
15	15	.5484614417000000E−06	.7010126995500000E−06
16	1	−.9730736334240000E−07	.8760174976920000E−06
16	2	.1649803094150000E−05	.3447923814940000E−07
16	3	−.1028543757360000E−06	.4279054459510000E−06
16	4	.4759886265690000E−06	.4784594724110000E−06
16	5	.9327815906229999E−06	−.5278125821530000E−06
16	6	.1038815565900000E−05	−.1023391217820000E−05
16	7	−.3509818646270000E−06	−.7329585679150000E−06
16	8	−.1209647724210000E−06	.3061781356220000E−07
16	9	−.1024878692720000E−05	−.1175313551420000E−05
16	10	.2041068982310000E−06	.5738832768160000E−06
16	11	.4353588214120000E−07	.1142697506150000E−05
16	12	−.1370427536750000E−05	.7981123576490000E−06
16	13	−.7515455438780000E−06	−.1582987773040000E−06
16	14	−.6985530034730000E−06	−.3951607972970000E−07
16	15	−.2725916962020000E−06	−.1055944928880000E−05

16	16	−.9090919669600000E−06	−.7862566594060000E−06
17	1	.8001655103230000E−06	.8782566135379999E−07
17	2	−.1712007938030000E−06	−.1044625395330000E−05
17	3	−.2171003772770000E−06	−.5318728899250000E−06
17	4	.1160294301800000E−05	.2208046994200000E−05
17	5	.3987135221710000E−06	−.8546560303970000E−06
17	6	.6100249367180000E−06	−.1495046622310000E−05
17	7	−.1625341936850000E−05	−.1107516297980000E−05
17	8	−.2118351672660000E−06	−.1518974822660000E−06
17	9	.5294629225970000E−06	.1560931339170000E−05
17	10	.7207737799020000E−06	.8858944398520000E−06
17	11	.9778883897600000E−06	−.6317056739230000E−06
17	12	.4578423147650000E−06	.5004761917360000E−07
17	13	.1526580059470000E−06	−.3422108737150000E−06
17	14	.9390029879520000E−06	.1431458214660000E−06
17	15	−.7398523706930000E−07	.1442972353860000E−07
17	16	−.2779658584330000E−06	−.2124792147220000E−06
17	17	−.4026973925480000E−06	.1352327272470000E−05
18	1	.1926985450180000E−06	−.5716667989280000E−07
18	2	−.4151803997590000E−06	−.7264058323630000E−06
18	3	.8788234066590000E−06	.5810458034470000E−06
18	4	−.8002493519270000E−06	.1146864632710000E−05
18	5	−.3246103503840000E−06	−.2858696150670000E−07
18	6	−.1762576111470000E−05	.9779780361339999E−06
18	7	−.1428877959440000E−06	−.8132546628140000E−06
18	8	.6678620054120000E−06	−.2270994680460000E−06
18	9	.5781241734200000E−06	−.1086143171510000E−05
18	10	.1626016781020000E−06	−.6413377613150000E−06
18	11	.1190190743410000E−06	−.1444990699210000E−05
18	12	.1162238473580000E−05	.4620652564480000E−06
18	13	−.7025354729210000E−06	−.2565078450200000E−06
18	14	−.1817876603890000E−06	−.6252496023590000E−06
18	15	−.8722606631480000E−07	−.8552186526090001E−06
18	16	.8724747507420000E−06	−.9751565128220000E−06
18	17	.1081594958580000E−05	−.4332237965390000E−06
18	18	−.1373957205930000E−06	−.1686674948910000E−06
19	1	−.4962928104700000E−06	.1917539727470000E−06
19	2	.3651286187540000E−06	−.3673868976850000E−06
19	3	−.8249886032800000E−06	.9885468299320000E−06

19	4	-.8331456066520000E-06	-.1037532326060000E-05
19	5	-.3714267370040000E-07	.1324756958540000E-05
19	6	-.3679863543070000E-07	.3340065002820000E-06
19	7	.1112462470960000E-05	.3538153590430000E-06
19	8	.5104515087760000E-06	.5192526970870000E-06
19	9	-.1241929032180000E-06	.6804512884750001E-07
19	10	-.7518310037950000E-06	.2782982975350000E-06
19	11	.1576977903700000E-06	-.1512294300270000E-06
19	12	.1010532037040000E-06	-.2539218556640000E-06
19	13	.3236778837630000E-06	.2241057468460000E-05
19	14	-.5106295327520000E-06	.9103019298270000E-06
19	15	.2707786692730000E-06	-.8208149539350000E-06
19	16	-.9938800617160001E-08	.5428874480650000E-06
19	17	-.9249821463870000E-06	-.1061551211170000E-05
19	18	.1295087300260000E-05	-.1808490986950000E-06
19	19	.4720716663120000E-06	.3193301283800000E-06
20	1	.3894448791540000E-07	-.4924662151670000E-06
20	2	.5320781393890000E-06	-.9724343925050000E-07
20	3	.4795674989210000E-06	-.1013862739060000E-06
20	4	.7911426889650000E-06	-.5826422488420000E-06
20	5	.1032475949640000E-06	-.4802322718710000E-06
20	6	-.4967702461450000E-06	.6156993178970000E-06
20	7	-.5917336942650000E-06	-.5440186106280000E-06
20	8	.4394005454530000E-06	.7440623649730000E-07
20	9	-.8740155543430000E-07	.4561833749100000E-06
20	10	.2363632395670000E-06	-.3577749840430000E-06
20	11	.1078498413240000E-06	.6724504086650000E-06
20	12	.4238152938270000E-07	-.9979542738770000E-06
20	13	.7649646933020000E-06	.6510063091450000E-06
20	14	.2532428383590000E-06	-.1196064334020000E-06
20	15	-.1514037158300000E-06	-.3487143338680000E-06
20	16	.8958333299660000E-06	.5275250186460000E-06
20	17	.9625883397650000E-06	-.1247076248830000E-05
20	18	.5334360431180000E-06	-.6462366596580000E-06
20	19	-.2960788071070000E-06	.5625790924100000E-06
20	20	.2891714060370000E-07	-.3845058951180000E-06

LP75G GM = 4902.800269 km^3/s^2 a_e = 1738.0 km

l	m	$\bar{C}_{lm}$	$\bar{S}_{lm}$

2	0	－9.097597054210000E－005	0.000000000000000E＋000
3	0	－3.183542106800000E－006	0.000000000000000E＋000
4	0	3.178911477220000E－006	0.000000000000000E＋000
5	0	－2.598128665700000E－007	0.000000000000000E＋000
6	0	3.862362237690000E－006	0.000000000000000E＋000
7	0	5.673730303420000E－006	0.000000000000000E＋000
8	0	2.350818244330000E－006	0.000000000000000E＋000
9	0	－3.459677611820000E－006	0.000000000000000E＋000
10	0	－1.162187595170000E－006	0.000000000000000E＋000
11	0	－1.122060225360000E－006	0.000000000000000E＋000
12	0	－1.993940508440000E－006	0.000000000000000E＋000
13	0	5.335673682490000E－008	0.000000000000000E＋000
14	0	6.529893913960000E－007	0.000000000000000E＋000
15	0	1.379472017340000E－007	0.000000000000000E＋000
16	0	6.140345051670000E－007	0.000000000000000E＋000
17	0	－7.316768211000000E－007	0.000000000000000E＋000
18	0	－7.963555191070000E－007	0.000000000000000E＋000
19	0	－1.708184071290000E－007	0.000000000000000E＋000
20	0	1.889746863020000E－007	0.000000000000000E＋000
2	1	－2.787424863160000E－008	1.346500394100000E－008
2	2	3.469384675580000E－005	3.874557098790000E－009
3	1	2.640550219430000E－005	5.433798078170000E－006
3	2	1.425486482600000E－005	4.873210144190000E－006
3	3	1.231660825460000E－005	－1.762221618120000E－006
4	1	－5.957953926760000E－006	1.580416408210000E－006
4	2	－7.126854293940000E－006	－6.703750167050000E－006
4	3	－1.426159152840000E－006	－1.341306955010000E－005
4	4	－6.058053501810000E－006	3.932360886960000E－006
5	1	－9.706725251770001E－007	－4.092759279110000E－006
5	2	4.327085115670000E－006	1.180489184620000E－006
5	3	4.704928178100000E－007	8.581592621140000E－006
5	4	2.867118598810000E－006	5.436530651620000E－009
5	5	3.153796293720000E－006	－2.732379244810000E－006
6	1	1.606770785950000E－006	－2.609838782330000E－006
6	2	－4.428366933000000E－006	－2.224562307790000E－006
6	3	－3.181276672490000E－006	－3.597443010970000E－006
6	4	3.385214865400000E－007	－3.877510759460000E－006
6	5	1.320671642850000E－006	－1.026635800450000E－005
6	6	－4.724599832850000E－006	7.158528514860000E－006

7	1	7.402394498450000E−006	−7.391355640760000E−008
7	2	−7.886758626890000E−007	2.463355780280000E−006
7	3	6.313586687910000E−007	2.402631664010000E−006
7	4	−1.041115234040000E−006	9.433175866000000E−007
7	5	−1.904117763140000E−007	7.744473376149999E−007
7	6	−9.410796162420000E−007	9.627107226450000E−007
7	7	−1.798733612810000E−006	−1.499673891900000E−006
8	1	−1.263665574520000E−007	1.224588885430000E−006
8	2	3.080413650600000E−006	1.795771324480000E−006
8	3	−1.716144309890000E−006	8.710748131120000E−007
8	4	3.378218792540000E−006	−6.488694738840000E−007
8	5	−1.028981501020000E−006	2.693995119970000E−006
8	6	−1.715973337390000E−006	−1.666664637720000E−006
8	7	−1.567877284290000E−006	3.461847890700000E−006
8	8	−2.495616144060000E−006	1.959047270730000E−006
9	1	1.827344344790000E−006	−6.868306544890000E−009
9	2	2.047258759110000E−006	−1.574281578320000E−006
9	3	−2.045366543490000E−006	2.385501163000000E−006
9	4	−2.095433476750000E−006	−1.326347834400000E−006
9	5	−1.576167343320000E−006	−3.263541895340000E−006
9	6	−2.293056533220000E−006	−2.709252928600000E−006
9	7	−3.811433323860000E−006	−7.721245997770000E−007
9	8	−1.322550367020000E−006	−2.489325281490000E−006
9	9	−9.265323286480000E−007	2.680076538770000E−006
10	1	6.116292813110000E−007	−8.630213931860000E−007
10	2	4.703876511630000E−007	−1.997850659170000E−007
10	3	3.463288315010000E−007	8.825761251030000E−007
10	4	−3.554771394730000E−006	1.366165394590000E−006
10	5	9.927541901910001E−007	−4.208394352740000E−007
10	6	−1.831950698460000E−008	−2.581898846260000E−006
10	7	−3.943633160490000E−006	−1.370087446170000E−006
10	8	−3.702174394320000E−006	3.727484309750000E−006
10	9	−4.643303532260000E−006	3.117782321540000E−007
10	10	9.348219821670000E−007	−1.930224356780000E−006
11	1	8.946547434720000E−008	5.371169857310000E−007
11	2	1.025667863810000E−006	−2.131111244030000E−006
11	3	2.427240922300000E−007	7.111486883020000E−007
11	4	−8.752650228640000E−007	1.985331681500000E−006
11	5	9.732230132490000E−008	2.801003812590000E−006

11	6	1.176616474500000E−007	−1.293291028030000E−006
11	7	−3.011692192540000E−007	−2.092922413220000E−006
11	8	−1.949052474150000E−006	2.788973351950000E−007
11	9	−2.206214561910000E−006	−7.977445728960000E−007
11	10	−4.855748008210000E−006	−5.486507891650000E−007
11	11	−2.896682159260000E−006	−1.547569525170000E−006
12	1	−5.501398554130000E−007	1.535800205670000E−006
12	2	−1.715770107430000E−007	1.719478809850000E−006
12	3	5.246725904510000E−007	−3.821881117670000E−006
12	4	9.542920939870000E−007	−3.007893532040000E−007
12	5	−2.450273448510000E−007	1.123098819770000E−006
12	6	9.829088190369999E−007	2.941920930520000E−007
12	7	2.699319958030000E−006	−9.854500468790000E−007
12	8	6.782920624260000E−007	−3.205489384850000E−006
12	9	−1.696618819270000E−006	2.570470446200000E−007
12	10	−3.125085022600000E−006	−1.686092977550000E−007
12	11	−7.784133460800000E−007	−9.871814240119999E−009
12	12	3.106689225440000E−007	1.103716129670000E−006
13	1	1.477359737450000E−006	5.766168565050000E−008
13	2	−3.451114376760000E−006	5.365380488970000E−007
13	3	−4.619521847910000E−007	−1.738600624270000E−006
13	4	1.187601134430000E−006	−8.504962826020000E−007
13	5	−1.241052452730000E−006	8.318507177180000E−007
13	6	2.290357668000000E−007	1.085895206310000E−006
13	7	−4.682825496200000E−008	−3.480665940930000E−007
13	8	−9.926979393150000E−007	−1.306760208750000E−006
13	9	−4.114971456270000E−007	1.678111585610000E−006
13	10	−1.520296417610000E−007	1.390932173800000E−006
13	11	−1.394024383430000E−006	−5.447817921810000E−007
13	12	−7.196726900810000E−007	−1.701517968470000E−006
13	13	2.433631425560000E−006	−2.592383720590000E−006
14	1	1.063949855330000E−006	−6.742021381690000E−007
14	2	1.559510526380000E−007	2.207155062590000E−007
14	3	6.027377909510000E−007	6.413136072350000E−008
14	4	−2.487079324090000E−007	−2.358910619360000E−006
14	5	−1.325704609190000E−006	3.248680973010000E−009
14	6	−7.442441847439999E−007	2.267092652960000E−006
14	7	−7.292098010560000E−007	1.523152513680000E−006
14	8	2.041927938460000E−007	3.026388320070000E−008

14	9	9.029774379850000E−007	−1.381225572410000E−006
14	10	−6.981579446990000E−007	−5.496705374189999E−007
14	11	−2.455109480300000E−006	1.083393371820000E−006
14	12	−1.230737639500000E−006	1.434183631130000E−007
14	13	−3.270665412180000E−007	−1.032520774770000E−006
14	14	−4.763166024390000E−007	1.086977920810000E−006
15	1	−9.713279025940000E−007	4.644258822240000E−007
15	2	−4.674531429950000E−007	8.707120384330000E−007
15	3	−1.164582241810000E−006	−6.088006166490000E−007
15	4	−1.014253496160000E−006	−1.349478331290000E−006
15	5	−2.422389629580000E−007	−1.061034856260000E−006
15	6	6.345010679490000E−007	−4.989180134420000E−007
15	7	1.427662298150000E−006	8.557585022180000E−007
15	8	1.484821403180000E−006	1.544412821940000E−006
15	9	2.410633974770000E−008	−5.474118368990000E−007
15	10	−9.459274331500000E−007	−4.984830869090000E−008
15	11	−1.216697224930000E−006	−5.684071832849999E−007
15	12	−1.415292711500000E−006	1.170851358090000E−007
15	13	−6.750529508580000E−007	6.000369232800000E−008
15	14	1.039464251220000E−006	7.507875241750000E−007
15	15	3.217120901060000E−007	6.905878057970000E−007
16	1	−2.966737905840000E−008	1.017332644500000E−006
16	2	1.522319779360000E−006	−3.181030630430000E−007
16	3	1.653645873710000E−007	2.635500419510000E−007
16	4	5.744319590950000E−007	3.300713522970000E−007
16	5	8.245193183690000E−007	−6.033196517710000E−007
16	6	1.019209768250000E−006	−5.503186120820000E−007
16	7	−1.082386641560000E−006	−4.495745603280000E−007
16	8	−3.529278174590000E−007	1.068382023240000E−006
16	9	−9.268755534280000E−007	−6.175857389340000E−007
16	10	1.178507322640000E−007	−3.881971183090000E−007
16	11	5.546113088210000E−007	1.455075442250000E−006
16	12	−1.834005752320000E−006	3.274964935070000E−007
16	13	−1.988747933720000E−007	−3.296652824070000E−007
16	14	−4.965531737870000E−007	−3.712659845400000E−008
16	15	−7.883382608060000E−007	−1.326760250960000E−006
16	16	−5.938689575020000E−007	−7.858535195810000E−007
17	1	2.116559218210000E−007	−1.190591471390000E−007
17	2	−3.549486846610000E−007	−1.115635275870000E−006

17	3	5.197204163200000E−008	−1.210909303430000E−007
17	4	8.836361551490000E−007	2.240086563630000E−006
17	5	1.055900798740000E−007	−5.195236097080000E−007
17	6	7.363185473490000E−007	−1.251820263630000E−006
17	7	−1.520746883900000E−006	−1.813716175420000E−006
17	8	6.284613401890000E−007	−6.051678014250000E−007
17	9	6.356542902110000E−007	6.626604176420000E−007
17	10	6.195314272340000E−007	6.260186836820000E−007
17	11	1.253099734610000E−006	4.939021677260000E−008
17	12	9.979679578560000E−008	−6.041320066530000E−007
17	13	7.849882868210000E−007	−4.913399499440000E−008
17	14	4.774119119030000E−008	1.316907252090000E−011
17	15	−6.179483059800000E−009	6.673786720910000E−008
17	16	2.139917003930000E−007	6.985513243050000E−008
17	17	−7.340569301230000E−007	1.351921622940000E−006
18	1	−2.939232877460000E−007	−1.791992442250000E−008
18	2	3.681712787890000E−009	−5.929323923170000E−007
18	3	1.084604643740000E−006	4.663708035090000E−007
18	4	−1.006311344380000E−006	8.155933224190000E−007
18	5	1.717142658860000E−008	5.559148378050000E−008
18	6	−1.408664071770000E−006	4.946770506740000E−007
18	7	−2.757287337310000E−007	−1.114277332090000E−006
18	8	5.462196177760000E−007	6.098271645140000E−007
18	9	−2.034141170980000E−007	−5.046815098170000E−007
18	10	1.672836017330000E−007	−7.622638600300000E−008
18	11	4.350337243880000E−008	−1.526119695270000E−006
18	12	7.774209116990000E−007	2.408929716530000E−007
18	13	−4.026890051440000E−007	6.004928791050000E−007
18	14	−8.713336036350000E−007	−9.151280313240000E−007
18	15	8.739223611600000E−007	−4.021844559160000E−007
18	16	5.145610403190000E−007	−9.775415631200001E−007
18	17	7.122549200460000E−007	−7.375357702700000E−007
18	18	1.364298238910000E−007	−1.478974106020000E−007
19	1	−4.265413225510000E−007	−2.041403943800000E−008
19	2	7.010992519180000E−007	−5.580989492460000E−007
19	3	−8.761222234600000E−007	1.048198452360000E−006
19	4	−9.989769320870001E−007	−8.972057276190000E−007
19	5	−3.292151518360000E−008	1.636334136940000E−006
19	6	−4.011072109200000E−007	2.950857546570000E−007

19	7	7.738210212440000E−007	8.309818024120000E−007
19	8	7.184985595650000E−007	7.480782315700000E−007
19	9	−9.134694145010000E−008	−7.571692502990000E−007
19	10	−1.891924925940000E−007	−2.718354981470000E−007
19	11	8.044955022190001E−008	−3.113635924590000E−007
19	12	5.075880835970000E−007	7.163969571360000E−008
19	13	7.090964086380000E−007	1.973524917850000E−006
19	14	−8.946883113090000E−007	6.690756371569999E−008
19	15	8.930503522890000E−007	−4.410896054100000E−007
19	16	−7.607906575750000E−007	−1.596182288620000E−007
19	17	−3.563976685460000E−007	−1.121314888990000E−006
19	18	1.518471790690000E−006	1.315961885150000E−007
19	19	3.178441090500000E−007	2.401289733060000E−007
20	1	−1.596363355050000E−007	−6.205105103550000E−007
20	2	8.877093528550000E−007	4.117266397190000E−007
20	3	2.781341386780000E−007	5.538790777980000E−010
20	4	5.385796471500000E−007	−6.530311998320000E−007
20	5	2.962904638650000E−007	−5.250884408670000E−007
20	6	−3.660316802120000E−007	2.181956908420000E−007
20	7	−1.871961196030000E−007	−6.580656007390000E−007
20	8	6.823427686450000E−007	−2.353013521360000E−007
20	9	−4.058612997790000E−007	3.971438264710000E−007
20	10	3.884981434910000E−007	3.129934747400000E−007
20	11	−1.439095038700000E−007	1.078642232210000E−006
20	12	1.589228718740000E−007	−1.186388378930000E−006
20	13	2.484273599290000E−008	2.480106254130000E−007
20	14	−4.385086058210000E−008	4.421067147560000E−007
20	15	3.503010708860000E−007	2.635021152700000E−007
20	16	4.665475637160000E−007	9.217077117479999E−008
20	17	1.335401996820000E−006	−4.573369436020000E−007
20	18	−6.938845157080000E−008	−6.261993566860000E−007
20	19	−4.652085498200000E−007	2.595654913560000E−007
20	20	5.409545735560000E−008	−2.122709255110000E−007