

责任编辑 :申明仙

图书在版编目(CIP)数据

青少年百科全书/王茁芝编. - 延吉 :延边人民出版社, 2000.8

ISBN7 - 80648 - 479 - 5

I .青... II .王... III .科学知识 - 青少年读物

IV .Z228.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 43073 号

青少年百科全书

王茁芝 主编

延边人民出版社出版发行

北京潮运印刷厂印刷

850 × 1168 毫米 大 32 开 140 印张 3 000 千字

2006 年 2 月第 2 版 2006 年 2 月第 1 次印刷

ISBN7 - 80648 - 479 - 5/Z·59

印数 3000 套 定价 280.00 元

目 录

数学王国

什么叫集合	(3)
集合怎样表示	(5)
什么叫子集	(6)
什么叫交集	(8)
什么叫并集	(9)
什么叫差集	(10)
什么叫空集	(11)
什么叫等价集合	(12)
什么叫函数	(13)
什么叫自然数	(14)
为什么说“0”不是自然数	(16)
为什么三个连续自然数的乘积一定是 6 的倍数	(18)
为什么在三个连续自然数中，有的是两两互质， 有的却并非如此	(20)
为什么四个连续自然数相乘再加 1，就是 一个完全平方数	(22)
怎样确定两个自然数的积和商的位数	(24)
+、-、 $\times$ 、 $\div$ 这 4 个运算符号是怎样来的	(25)
常用的关系符号有哪些	(27)
数和数字有什么区别	(28)
基数和序数有什么区别	(29)

计数和记数有什么区别	(30)
计数和计量有什么区别	(31)
数的分级和数的分节有什么区别	(32)
为什么要建立进位制	(33)
为什么有了十进位制，还要有二进位制	(35)
什么是二进数和八进数	(37)
十进数和二进数怎样互相换算	(39)
十进数和八进数怎样互相换算	(40)
为什么时间和角度的单位采用六十进位制	(41)
什么是小九九	(42)
怎样确定一个大于 1 的整数有多少个约数	(43)
什么叫“筛法”	(45)
为什么十位数或个位数是 5 的两位数的 平方可以速算	(47)
为什么“首同末合十”“末同首合十”的 两个两位数相乘可以速算	(50)
为什么小数点对齐才能相加减	(52)
为什么小数相乘不需要对齐小数点	(53)
为什么除数是小数的除法要把除 数转化成整数后再除	(54)
为什么“0”不能作除数	(54)
求积的近似值和商的近似值有什么不同	(56)
为什么两数相除（除数不为零）不会得 到无限不循环小数	(57)
怎样把循环小数化为分数	(58)
无限小数、无限循环小数和 π 有什么区别	(61)

目 录

什么是准确数和近似数	(63)
什么叫有效数字	(64)
为什么 0.1 和 0.10 有时相等有时又不等	(65)
为什么有时会越乘积越小	(67)
为什么有时会越除商越大	(68)
数“e”	(69)
π 是超越数	(71)
什么是最小数原理	(73)
什么是孪生素数	(74)
什么是“亲和数”	(75)
什么样的数能组成勾股数	(77)
等差数列中的素数是怎样分布的	(79)
什么是圆周率	(81)
π^2 和 2π 有什么区别	(82)
什么是轴对称图形和中心对称图形	(83)
为什么周长一定的长方形中以正方形 (长 = 宽) 的面积为最大	(84)
为什么放大镜不能把“角”放大	(86)
为什么“圆的周长分成越来越多的等分时， 就会变成一条直线”的说法不科学	(88)
为什么叫“七巧板”	(90)
为什么一个纸圈只有一个面	(91)
为什么球面不能展成平面图形	(92)
什么是默比乌斯带	(93)
什么是黄金分割矩形	(94)
为什么车轮采用圆形	(95)

为什么热水瓶、水杯等都是圆柱形的	(97)
怎样巧算圆木堆垛	(99)
为什么铁栅栏门推拉起来非常轻松	(101)
为什么加固椅子的时候，要斜着钉一根木条	(102)
为什么这样设计最省料	(104)
为什么装满零件的箱子还能塞进一个零件	(105)
为什么用两支蜡烛能够计算出“断电”的时间	(106)
为什么“四年闰，百年不闰，四百年又闰”	(107)
为什么二月份不是 30 天	(107)
为什么已知 1992 年元旦是星期三，就能很快 推出 2000 年“六一”儿童节也是星期三	(109)
不翻日历，你能算出某一天是星期几吗	(110)
你知道数的概念的发展吗	(113)
虚数形成的历史	(114)
为什么小高斯算得这么快	(116)
为什么说巴比伦人最早认识了勾股组数	(118)
什么叫“抽屉原则”	(119)
什么是“中国剩余定理”	(121)
什么是“幻方”	(123)
什么是“百鸡问题”	(128)
长绳的妙用	(130)
三兄弟不和睦造成的麻烦	(131)
为什么把海王星叫做“笔尖上的星”	(132)
札波里的奇想	(133)

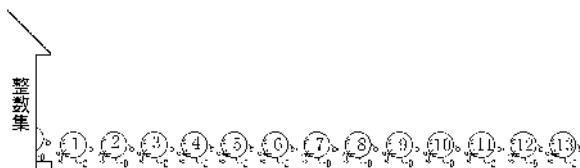
数学王国

什么叫集合

集合是数学最基本的概念之一。

把一些单独的物体合起来看成一个整体，就形成一个集合（或集）。例如：

一个学校的所有学生可以作为一个集合。



某飞机场上的所有飞机可以作为一个集合。

笼子里所有的小鸟可以作为一个集合。

所有自然数可以作为一个集合。

需要注意两点：

第一，集合是指这类事物的全体，而不是指个别事物。

第二，集合中包含的事物必须是确定的，即可以确切判断一个事物属于不属于这个集合。如“一切自然数”，它有确定的特征，可以组成一个集合。“一切大的数”这种说法没有表示出确定的界限；“骄傲的小花猫”，对此无法作出明确的判断，所以这些都不能分别组成一个集合。

集合一般用大写字母 A、B、C、M、N、W 等表示。

组成集合的各个物体，叫做这个集合的元素（或“元”）。例如：

一个学校的每个学生是这个学校学生集合的一个元素。

某机场的每架飞机是这个飞机场集合的一个元素。

笼子里的每只小鸟是笼子里小鸟集合的元素。

8 是自然数集合的一个元素。

必须注意：集合中的元素一定要相异的。如：1、2、3、4 这四个数可以组成一个集合，而不能由 1、1、1、2 组成一个集合，因为这里的 3 个 1 是同一个元素。

集合中的元素一般用小写字母 a、b、c、x、y 等表示。

1 个书包也可以作为一个集合，这个集合只有一个元素，就是这个书包。1 个人也可以作为一个集合，这个集合也只有一个元素，就是这个人。

只有一个元素的集合叫做单元素集。

集合中的元素可以是有限多个，也可以是无限多个，如自然数集，它的元素是无限多个。

由无限个元素所组成的集合叫做无限集。

一个学校的学生是有限的，所以一个学校学生的集合是有限集。

集合怎样表示

集合的表示法有三种。

列举法：把一个集合的所有元素一一列举出来，放在 $\{ \}$ 里面。例如：

全体自然数的集合用 M 来表示。

记作： $M = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

小于 5 的自然数集合用 B 表示。

记作： $B = \{1, 2, 3, 4\}$

描述法：用文字来描述一个集合的特征。

例如：全体自然数组成的集合用 M 表示。

记作： $M = \{\text{全体自然数}\}$

小于 5 的自然数组成的集合用 A 表示。

记作： $A = \{\text{小于 5 的自然数}\}$

除了上述表示法以外，还可以在一个集合的所有元素外面画一个圈，直观地表示这个集合。这种图叫韦恩图（韦恩是英国的一位逻辑学家）。小学数学课本就采用这种表示法。

若 x 是集合 A 中的一个元素，我们就说 x 属于集合 A 。用 $\in$ 表示“属于”，写作： $x \in A$ 。

例如：锐角三角形属于三角形集合，写作：锐角三角形 $\in \{\text{三角形}\}$ 。

反过来，若 x 不是集合 A 中的一个元素，我们就说 x 不属于集合 A ，用 $\notin$ 表示“不属于”，写作： $x \notin A$ 。

例如：正方形不属于三角形集合，写作：正方形 $\notin$ {三角形}。

什么叫子集

请看下面一组集合。

$$M = \{1, 2, 3\}$$

$$N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$W = \{2, 4, 3, 1\}$$

我们看到，集合 M 的每一个元素都是集合 N 的元素，我们就说集合 N 包含集合 M ， M 包含于 N ，写作： $N \supset M$ 或 $M \subset N$ （读作 N 包含 M ， M 包含于 N ），那么集合 M 叫做集合 N 的子集。

我们又看到，集合 W 的每一个元素都是集合 N 的元素，我们就说集合 N 包含集合 W ， W 包含于 N ，那么集合 W 是集合 N 的子集。

我们仔细观察集合 N 包含集合 M 与集合 N 包含集合 W 是有区别的。集合 M 的每一个元素都属于集合 N ，但集合 N 有一个元素不属于集合 M ，从而得出：

如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B ，但集合 B 至少有一个元素不属于集合 A ，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集。记作：

$A \subset B$ 或 $B \supset A$ (读作 A 包含于 B, B 包含 A)。例如：

$\{\text{一个班的学生}\} \supset \{\text{一个班的男学生}\}$

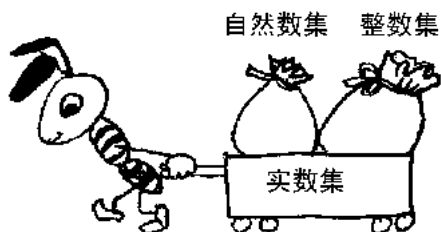
$\{10 \text{ 以内自然数}\} \subset \{\text{全体自然数}\}$

$\{\text{直角三角形}\} \subset \{\text{所有三角形}\}$

一个班的男学生是这个班学生的真子集。

10 以内自然数是全体自然数的真子集。

直角三角形是所有三角形的真子集。



我们又看到集合 W 的每一个元素都属于集合 N, 而集合 N 的每一个元素也属于集合 W, 从而得出：

如果集合 A 包含集合 B, 且集合 B 包含集合 A, 则集合 A 与 B 相等。即

如果 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$ 则 $A = B$

由此可见, 两个集合是否相等, 只要看它们是否由相同的元素组成, 而与元素的排列顺序无关。如：

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 2, 1\}$

$C = \{\text{小于 } 4 \text{ 的自然数}\}$

$D = \{6 \text{ 的约数, } 6 \text{ 除外}\}$

$A = B = C = D$

子集包括真子集与集合相等两种。

每个集合是这个集合本身的子集。空集也是任何一个集合的子集。

$A = \{a, b, c\}$ 集合 A 有 8 个子集, 即: $\emptyset \{a\} \{b\} \{c\} \{a, b\} \{a, c\} \{b, c\} \{a, b, c\}$

一个非空集合至少有两个子集, 即集合本身和空集。

在小学数学教材中渗透了一些子集思想。例如用韦恩图表示四边形的关系。

什么叫交集

由集合 A 和集合 B 的共同元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集。写作 $A \cap B$ 。

例如: $\{3, 6, 9, 12, 15\} \cap \{5, 10, 15, 20, 25\} = \{15\}$

又如: $E = \{a, b, c\} \quad F = \{c\}$

$E \cap F = \{c\}$

当 $F \subset E$ 时 $E \cap F = F$

当 F 是 E 的子集时, F 是 E 、 F 的交集。

如果集合 A 和集合 B (都不是空集), 没有共同的元素, 它们的交集是空集。

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{a, b, c\}$$

$$A \cap B = \{ \quad \} \quad \text{或} \quad A \cap B = \emptyset$$

我们就说 A 与 B 是不相交集。



在小学数学教材中渗透了一些交集的思想。例如韦恩图表示两个数的公约数和公倍数。

什么叫并集

两个集合 A、B 中的元素合在一起组成的新集合, 叫做 A 与 B 的并集 (若 A、B 有共同元素, 只列举一次)。写作 $A \cup B$ 。

$$\text{例如: } A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{4, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{又如: } E = \{a, b, c\} \quad F = \{d, e, c\}$$

注意: E、F 的公共元素 c 只算一次, 这与数的加法不同。

$$E \cup F = \{a, b, c, d, e\}$$

再如： $A = \{\triangle, \bigcirc, \square\}$ $B = \{\triangle, \square\}$

$A \cup B = \{\triangle, \bigcirc, \square\}$

当 $B \subset A$ $A \cup B = A$

B 是 A 的子集时，A 是 B、A 的并集。

从集合的观点来看，加法运算就是求两个不相交集的并集的基数。例如：

$$2 + 3 = 5$$

两个不相交集的基数都叫做加数，加法的运算符号叫做加号。加得的结果，即两个集的并集的基数，叫做和。

什么叫差集

两个集合 A、B，若集合 C 的所有元素属于 A 但不属于 B，C 就叫做 A 与 B 的补集。写作： $A - B$ 或 A/B 。

例如： $A = \{100 \text{ 以内的自然数}\}$

$B = \{\text{能被 } 5 \text{ 整除的自然数}\}$

$C = A - B = \{100 \text{ 以内不能被 } 5 \text{ 整除的自然数}\}$

在这里 A 不包含 B。

特殊情况，若集合 B 是集合 I 的子集，把集合 I 看作全集，那么 I 与 B 的差集 $I - B$ ，叫做 B 在 I 中的补集。写作： $\bar{B}$ 。

例如： $I = \{\text{全校的学生}\}$

$B = \{\text{全校的男生}\}$

$C = \{\text{全校的女生}\}$

$\overline{B} = I - B - C$

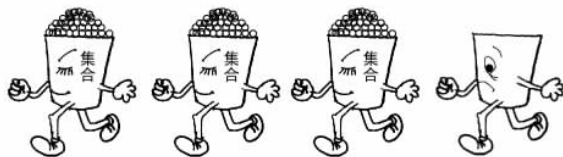
反过来, $\overline{C} = B$ 。

从集合的观点来看, 减法运算是已知两个集合(不相交)的并集的基数, 以及其中一个集合的基数, 求另一个集合的基数。也可以看作是求集合 I 与集合 B (B 必须是 A 的子集) 的差集的基数。

什么叫空集

集合可以没有元素。一个元素也没有的集合叫做空集。写作: $\emptyset$ 或 $\{\}$ 。

例如: 光华小学通知说: “数学不及格的同学在本星期六下午补考。” 五年级一班没有数学不及格的同学, 所以 “五年级一班数学不及格同学” 这个集合没有元素, 它就是一个 “空集”。



又如: 没有小于 1 的自然数, 因此小于 1 的自然数是一个空集。 $\emptyset = \{\text{小于 1 的自然数}\}$ 。

空集和 “0” 的概念不一样, 如小学数学第一册教材讲 “0”

的时候是这样讲的：圈里有 2 个茶杯，记作“2”，圈里有 1 个茶杯，记作“1”，圈里 1 个茶杯也没有，记作“0”，这里的“2”、“1”、“0”都指的是元素的个数，也就是基数，“基数为 0 的集合”叫空集。

空集和只含有一个元素 0 的集合也不一样，只含有一个元素 0 的集合是单元素集，记作： $\{0\}$ 。

什么叫等价集合

两个集合 A、B，如果集合 A 里的每个元素，都和集合 B 里一个唯一的元素对应；反过来，集合 B 里的每个元素，都和集合 A 里一个唯一的元素对应，我们就说这两个集合的元素是一一对应的。

两个集合 A、B，如果它们的元素一一对应，两个集合叫做等价集合。记作： $A \sim B$ 。例如：左手手指的集合和右手手指的集合是等价集合。

我们数数就是利用了等价集合的元素一一对应性质。例如：

{ ○ ○ ○ ○ ○ ○ }

{1 2 3 4 5 6 }

数到最后一个圆圈“6”，就是圆圈这个集合的元素的个数（这个集合的基数）是 6。

利用一一对应，可以比较两个集合的元素的个数。例如：

$\{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\}$ $\{\triangle\triangle\triangle\}$

$\{\triangle\triangle\triangle\}$ 相等 $\{\square\square\square\square\}$ $\square$ 比 $\triangle$ 多

对于有限集合，如果两个集合等价，那么它们的元素个数相等，对于无限集合来说，则不是这样。如：

自然数集合 = $\{1, 2, 3, \dots\}$

偶数集合 = $\{2, 4, 6, \dots\}$

很显然，偶数集合是自然数集合的真子集，因此，初看起来偶数集合里的元素“个数”要比自然数集合少，但是偶数集仍然可以和自然数集建立一一对应的关系，因而这两个无限集合是等价的。

由此可见，一个集合能否与它的真子集等价，是区别有限集合与无限集合的分界线。

什么叫函数

在某一过程中可以取不同数值的量，叫做变量，在这一过程中保持一定数值的量，叫做常量。表示常量的数叫做常数。

例如：一台抽水机每秒钟抽水 30 千克，那么抽水总量 y 和时间 x 之间有这样的关系： $y = 30x$ 。 x, y 都可以取不同的数值，都是变量，30 千克在抽水过程中保持不变的量。

对于自变量的每一个确定的值，另一个变量都有确定的值和它对应，这样的变量叫做自变量的函数。

如上例：时间 x 的值可以在 $x \geq 0$ 的范围内任意选取，对于 x 的每一个确定的值，抽水总量 y 都有唯一确定的值和它对应。

x (小时)	1	2	3	4	5	
y (千克)	30	60	90	120	150	

x 是自变量， y 是 x 的函数。

如果 y 是 x 的函数，一般可以记作： $y = f(x)$ 。

自变量的取值范围叫做函数的定义域。

在小学数学教材中渗透了函数知识。

$y = x + 5$ (一次函数)

$y = 6x$ (正比例函数)

$y = \frac{k}{x}$ (反比例函数)

$y = x^2$ (二次函数)

什么叫自然数

我们数物体时，用来表示物体个数的 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11.....叫做自然数。

在自然数中，1 是最小的。任何一个自然数都是由若干“1”组成的。所以，1 是自然数的单位。如果从 1 起，把自然数按照后面的一个数比前面的一个多“1”的顺序排列起来，就得到一

1 2 3 4 5·····



列数：

1、2、3、4、5……

这个由全体自然数依次排列成的一列数叫做自然数列。自然数列有以下性质：

- 一、自然数列是有始的，1 是自然数列最前面的一个数；
- 二、自然数列是有序的，即自然数列每一个数的后面都有一个而且只有一个后继数。

三、自然数列是无限的，即自然数列里不存在“最后”的

数。

为什么说“0”不是自然数

自然数是表示“有”的符号，是从数物体个数的过程中产生的，因此，它是对数量的肯定；而在实践中，常常会遇到一个物体也没有的情况，如房间里一个人也没有，盒子里一支笔也没有等等，“0”是表示“没有”的符号，是对数量的否定。

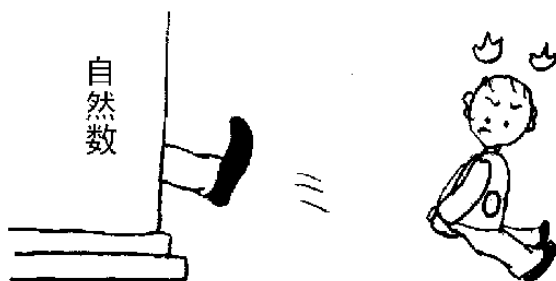
“0”是一个数，但不是自然数，它小于自然数1，也就小于一切自然数。

“没有”用“0”来表示，但是“0”不仅仅表示“没有”，在特定的条件下，“0”还含有特定的内容。

“0”既不是正数，也不是负数，它是仅有的一个中性数。“0”是正负数的分界，它对应于数轴上的一点，便决定了其它各点的位置。从“0”点起，在一条直线上的某一方面被定为正，而相反的方向则为负。因此，数轴上原点“0”比表示正负数的任何点都更为重要。

在温度计上，“0”度是零上温度和零下温度的分界线。当气温是“0”摄氏度时，我们可以实实在在地感觉到它的存在，因此，不能说“0”度是“没有”温度。

“0”在记数中可以用来占位。在一个四位数中，千位是6，百位、十位、个位上没有数，就要用“0”来占位，写成6000，



这里的“0”既不能随意增添，也不能随意删去，增添了，使原数扩大若干倍，删去了，使原数缩小若干倍，造成错误。

“0”可以参加运算。任何数与0相加，它的值不变。即： $a + 0 = a$ ， $0 + a = a$ 。任何数减0，它的值不变。即： $a - 0 = a$ 。相同的两个数相减，差等于0。即： $a - a = 0$ 。任何数与0相乘，积等于0。即： $a \times 0 = 0$ ， $0 \times a = 0$ 。0被非零的数除，商等于0。即： $a \neq 0$ ， $0 \div a = 0$ 。

“0”是一个偶数，因为它能被2整除；“0”是任意自然数的倍数；“0”不能作除数，因为它作除数是无意义的，或是商不存在的，或是得不到确定的商；“0”可以作为刻度的起点；“0”的相反数还是0；“0”没有倒数；“0”和自然数都是整数。

随着数学知识的不断扩充，对“0”的认识也将更加全面。如引入绝对值的概念之后，“0”的绝对值等于0，即： $|0| = 0$ ；引入指数的概念之后，任何非零的数的0次幂等于1，即： $a \neq 0$ ， $a^0 = 1$ ……

为什么三个连续自然 数的乘积一定是 6 的倍数

自然数是人们在数物体的时候，用来表示物体个数的 1、2、3、4……“1”是自然数的单位，任何自然数都是由若干个“1”这个自然数的单位组成的。在自然数列里，每一个自然数后面的一个后继自然数都比前一个数多 1，如 4 是 3 的后继数，5 是 4 的后继数，3、4、5 便是连续自然数。

$$7 \times 8 \times 9 = 6 \times 84$$



由于在自然数列里，最小的数是“1”，每一个自然数后面都

有一个比前一个数多 1 的后继数，所以自然数列里的自然数是无限的，即没有最大的自然数，因此，连续的自然数也应该是无限的，三个连续的自然数的情况也应该是无限的。

我们再来研究一下三个连续的自然数有什么特别。

如 3、4、5；11、12、13；37、38、39；78、79、80；124、125、126……

在 3、4、5 这个连续自然数中，自然数 3 是 3 的倍数，自然数 4 是 2 的倍数，而含有 2 的倍数与 3 的倍数的数的乘积，必定是 6 的倍数。

在 11、12、13 这三个连续自然数中，虽然自然数 11、13 既不是 2 的倍数，又不是 3 的倍数，但是自然数 12 却是 6 的倍数，所以这三个连续自然数的乘积一定也是 6 的倍数。

在 37、38、39 这三个连续自然数中，自然数 38 是 2 的倍数，自然数 39 是 3 的倍数，所以这三个连续自然数的乘积一定是 6 的倍数。

在 78、79、80；124、125、126……中都能发现：至少有一个数是 2 的倍数和一个数是 3 的倍数；或者有一个数是 6 的倍数。

由此可以得出：三个连续自然数的乘积一定是 6 的倍数。

你如果不信，不妨自己试一试，看看这个结论对不对。

为什么在三个连续自然数中， 有的是两两互质，有的却并非如此

两个自然数，除了 1 以外没有其它公约数的，这两个数就称为互质数。如果三个数中的任意两个数都互质，就说这三个数是两两互质。如 13、15、17 这三个数，13 与 15、15 与 17、13 与 17 都是互质数，我们就说 13、15、17 这三个数是两两互质。

又如 16、25、81 这三个数，16 与 25、25 与 81、16 与 81 都是互质数，我们就说 16、25、81 这三个数是两两互质。

其实，两两互质不局限于三个数，在四个数、五个数……中，只要是任意两个数都互质，就说这几个数是两两互质。如 7、41、13、55、27 这五个数中，7 与 13、13 与 27、7 与 55、55 与 41、7 与 27、41 与 27 都是互质数，我们就说 7、41、13、55、27 这五个数是两两互质。

在三个连续自然数中为什么有的是两两互质，有的却不是呢？

在三个连续自然数中有着两种不同的情况，一种是：奇数、偶数、奇数。如 7、8、9；23、24、25；95、96、97……一种是：偶数、奇数、偶数。如 8、9、10…；34、35、36；128、129、130……

任何一个奇数都是不能被 2 整除的，所以两个连续的自然数

只有公约数 1，一定是互质数。

两个连续的奇数的差是 2。设 a 和 $a+2$ 是任意两个连续奇数， b 是它们的公约数，那么， a 和 $a+2$ 都是 b 的倍数。如果两个数都是某一个数 b 的倍数，那么这两个数的差也一定是 b 的倍数。两个连续的奇数的差是 2，显然 b 只有等于 1 或者 2 的这两种可能，但由于 b 是奇数的约数，因此， b 只能是 1，不应该是 2，因为奇数的约数不可能是偶数 2。这就证明了任意的两个连续的奇数 a 和 $a+2$ 是互质数。

由此得知，奇数、偶数、奇数这样三个连续自然数一定是两两互质。在 7、8、9 三个连续自然数中，7 与 8、8 与 9、7 与 9 都是互质数；在 95、96、97 三个连续自然数中，95 与 96、96 与 97、95 与 97 都是互质数。

但是，在偶数、奇数、偶数这样三个连续自然数中，尽管两个连续自然数一定是互质数，可两个连续的偶数至少有公约数 2，因为任何一个偶数都能被 2 整除，由此证明了任意的两个连续偶数有可能是互质数，即使不是连续的偶数也不可能是互质数。所以，在三个连续自然数中，属于偶数、奇数、偶数这种情况的，就不是两两互质。如在 8、9、10 三个连续自然数中，8 与 9、9 与 10 是互质数，8 与 10 则不是互质数；在 128、129、130 三个连续自然数中，128 与 129、129 与 130 是互质数，128 与 130 则不是互质数。

为什么四个连续自然数 相乘再加 1，就是一个完全平方数

求几个相同因数的积的运算，叫做乘方，假设 a 是相同因数，有 n 个这样的相同因数，即 $\overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^{n\uparrow} = a^n$ ， a^n 读做 a 的 n 次方。如果是 a 的二次方，即： $a \times a = a^2$ ，读做 a 的平方。

四个连续自然数相乘再加 1，可以得到一个完全平方数。

你看：

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$$

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$$

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361 = 19^2$$

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2$$

$$5 \times 6 \times 7 \times 8 + 1 = 1681 = 41^2$$

$$6 \times 7 \times 8 \times 9 + 1 = 3025 = 55^2$$

.....

$$10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1 = 17161 = 131^2$$

通过以上的算式，可以说明任意四个连续自然数把它们乘起来，所得的积加上 1，就能得到一个完全平方数是毫无疑问的事实。

这是为什么呢？它的根据是什么呢？这里要用代数知识来证明。

四个连续的自然数，相邻两个自然数必定相差 1。我们可以设最小的一个数是 a ， a 的后继数是 $(a+1)$ ， $(a+1)$ 的后继数是 $(a+2)$ ， $(a+2)$ 的后继数是 $(a+3)$ 。四个连续自然数相乘再加 1，列式为：

$$a(a+1)(a+2)(a+3) + 1$$

我们进行代数的运算

$$a(a+1)(a+2)(a+3) + 1$$

$$= a(a+3)(a+1)(a+2) + 1$$

$$= (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) + 1$$

$$= (a^2 + 3a)[(a^2 + 3a + 2)] + 1$$

$$= (a^2 + 3a)^2 + 2(a^2 + 3a) + 1$$

$$= (a^2 + 3a + 1)^2$$

a 是一个自然数， $(a^2 + 3a + 1)^2$ 不就是个自然数的完全平方吗？

如果最小的一个数 a 是自然数 8，代入 $(a^2 + 3a + 1)^2$ ， $(8^2 + 3 \times 8 + 1)^2 = 89^2$ ， 89^2 就是 $8 \times 9 \times 10 \times 11 + 1$ 的结果。

如果最小的一个数 a 是自然数 15，代入 $(a^2 + 3a + 1)^2$ ， $(15^2 + 3 \times 15 + 1)^2 = 271^2$ ，而 271^2 就是 $15 \times 16 \times 17 \times 18 + 1$ 的结果。

如果最小的一个数 a 是自然数 27，代入 $(a^2 + 3a + 1)^2$ ， $(27^2 + 3 \times 27 + 1)^2 = 811^2$ ， 811^2 就是 $27 \times 28 \times 29 \times 30 + 1$ 的结果。

通过上面的演算，说明不仅四个连续自然数相乘加 1 可以得到一个完全平方数，而且还可以很快地算出它到底是什么数的平方数。

根据同样的道理，四个连续偶数或四个连续奇数相乘再加

16，也是一个完全平方数。你如果有兴趣的话，可以试一试，然后再用代数运算来验证一下。

怎样确定两个 自然数的积和商的位数

两个自然数相乘，如果两个因数最高位的数的积等于或大于 10，或者积虽小于 10，但加上进位上来的数以后就等于或大于 10，那么它们的积的位数就等于两个因数的位数的和。例如 346×824 三位数乘以三位数，两个因数最高位上 3 和 8 相乘的积已超过 10，这两个因数相乘的积一定是六位数 ($3 + 3$)。又如 346×394 三位数乘以三位数，两个因数最高位上 3 和 3 相乘的积虽未超过 10，但加上进上来的数以后就等于或大于 10 了，所以这两位相乘的积一定也是六位数 ($3 + 3$)。

两个自然数相乘，如果两个因数最高位上的数的积小于 10，而且加上进位上来的数以后仍小于 10，那么这两个因数的积的位数就比这两个因数的位数的和少 1。例如 346×234 三位数乘以三位数，两个因数最高位上的 3 和 2 的乘积未超过 10，估计加上进位上来的数也不会超过 10，所以这两个数相乘的积一定是五位数 ($3 + 3 - 1$)。

两个自然数相除，商的位数等于被除数与除数位数的差，或者比这个差少 1。例如 $9261 \div 23$ ，被除数是四位数，除数是两位

数，被除数前两位“92”比除数23大，商一定是三位数（ $4 - 2 + 1$ ）。又如 $2254 \div 23$ ，被除数也是四位数，除数是两位数，但被除数前两位“22”比除数23小，商一定是两位数（ $4 - 2$ ）。也可以根据首次的商的数位来确定商的位数，如 $9261 \div 23$ ，首次商在百位上，商是三位数； $2254 \div 23$ ，首次商在十位上，商是两位数。

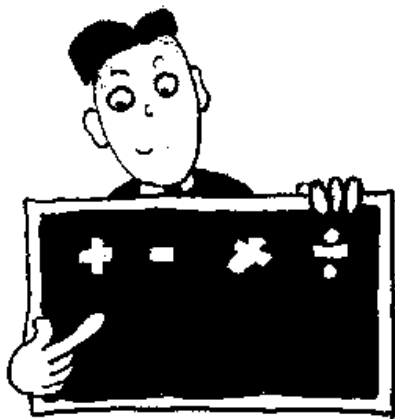
＋、－、×、÷ 这 4 个运算符号是怎样来的

这几个运算符号，是经过许多人许多次的改进和变化逐渐形成的，因而很难说是由谁发明的，应该说是世界各国数学家智慧的结晶。

古希腊和印度人最早把两个数写在一起表示加法，如 $5 + \frac{1}{3}$ 就写成 $5 \frac{1}{3}$ ，直到今天，我们从带分数的写法中还可以看到这种方法的遗迹。如果要表示两个数相减，就把这两个数写得离开一些，如 $5 - \frac{1}{3}$ 就写成 $5 \frac{1}{3}$ 。

后来，有人用拉丁字母 P 或 $\bar{P}$ 代表相加，如 $5 + \frac{1}{3}$ 写成 $5P \frac{1}{3}$ ；用拉丁字母 M 代表相减，如 $5 - \frac{1}{3}$ 写作 $5M \frac{1}{3}$ 。

中世纪后期，一些商人常在装货的容器上用画“+”字表示



重量略为超过一些，用画“-”字表示重量略有不足。十五世纪意大利画家和建筑家列奥纳多·达·芬奇在他的一些作品中也采用过“+”和“-”的符号。德国数学家维德曼也曾用“+”和“-”表示“多余”和“不足”。后来经过法国数学家韦达的大力宣传与提倡，这两个符号才开始普及，在加减运算中正式使用，并得到大家的公认，时间大约在 1360 年。

“×”、“÷”符号比“+”、“-”符号产生得晚一些，据说，17 世纪英国人奥特雷德第一个采用“×”表示相乘，但数学家莱布尼兹认为符号“×”与拉丁字母“x”很相似，所以曾反对使用，他赞成用“·”表示相乘。“·”这个符号是由数学家赫脱奥特首创的。后来“×”与“·”这两个符号同时使用，一些国家的课本中用“·”代替“×”。

中世纪时，阿拉伯数学相当发达，数学家阿尔·花拉子密曾

用一条线表示除法，如 a/b ， $\frac{a}{b}$ 表示 a 被 b 除的意思。1631 年英国人奥特雷德用 “:” 表示比或除，约翰·比尔曾用 “ $\div$ ” 表示除，人们推测，他大概是根据阿拉伯人的除号 “—” 与比的符号 “:” 合并转化而成的。但是，正式把 “ $\div$ ” 作为除法的运算符号，还是瑞士数学家哈纳。在苏联和德国出版的读物中，很少看到 “ $\div$ ”，一般都用 “:” 代替除号，实际上比的符号的用法与 “ $\div$ ” 号基本一致。

目前看来，用 “+”、“-” 来表示加或减的使用是极为普遍的，而 “ $\times$ ”、“ $\div$ ” 的使用则远没有 “+”、“-” 普遍，“ $\times$ ” 与 “ $\cdot$ ”、“ $\div$ ” 与 “:” 都同时并用，一直沿袭到今天。

常用的关系符号有哪些

通常使用的关系符号有 “=”、“ $\neq$ ”、“ $\approx$ ”、“ $>$ ”、“ $<$ ”、“ $\geq$ ”、“ $\leq$ ” 等。

“=” 是等号。巴比伦和埃及曾用过各种记号来表示相等。在中世纪，用来表示相等的记号有过很大的混乱。1540 年，英国数学家雷科德发表《智慧的磨刀石》书中用 “=” 表示相等，但当时，“=” 的两条线的长度常常被画得很长，雷科德曾说，他之所以选择两条等长的平行线作为等号，因为它们再相等不过了。“=” 直到 18 世纪才真正普及使用。

“ $\neq$ ” 是不等于号，“ $\approx$ ” 是约等于号，“ $\approx$ ” 也可以写成

“ $\doteq$ ”。由此可见，“ $\neq$ ”和“ $\approx$ ”都是由“ $=$ ”演变而来的。

“ $>$ ”是大于号，“ $<$ ”是小于号。1631年英国奥特雷德在《数学入门》一书中，创造了“ $>$ ”表示大于，“ $\geq$ ”表示大于和等于。“ $<$ ”表示小于，“ $\leq$ ”表示小于和等于。同年，英国哈里奥特在《分析术实例》一书中，创造了“ $>$ ”表示大于，“ $<$ ”表示小于。18世纪初，两种符号都有人使用，奥特雷德的符号被逐渐淘汰了。

“ $\geq$ ”是大于和等于号，“ $\leq$ ”是小于和等于号。“ $\geq$ ”和“ $\leq$ ”的使用是近代的事，是由“ $>$ ”和“ $<$ ”演变而来的。

数和数字有什么区别

用符号把计数的结果记录下来的叫做数。书面写数的方法称为记数法。自然数记数和自然数命名类似，因为不可能每一个自然数都给一个单独的符号，而最好是用尽可能少的几个符号，把所有数都能表示出来。

用来记数的符号叫做数字，或叫数码。阿拉伯数字使用方便，所以成为国际通用的数字。阿拉伯数字共有以下十个：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0。

十进制记数法用阿拉伯数字1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0来写数。同一个数字由于它在所记的数中的位置不同，所表示的数值也不同。也就是，每一个数字除了本身的值外，还有一个

“位置值”。例如 77，右边的 7 代表 7 个一，左边的 7 代表 7 个十。应用位值原则及十个数字，就可以写出任意自然数。如二千三百八十二写作 2382。

用十进制记数法记数，有时还采用下面的形式：用各个数位上的计算单位的和来表示一个数。例如：

$$3572 = 3 \text{ 千} + 5 \text{ 百} + 7 \text{ 拾} + 2 \text{ 个}$$

有时也把计数单位表示为 10 的幂的形式。例如：

$$3572 = 3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0 \quad (10^0 = 1)$$

把一个数记成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 a 大于或等于 1 而小于 10， n 比原数的整数位数小 1。这种记法是科学技术上常用的一种记数法，习惯上称为科学记数法。例如：

$$825000 = 8.25 \times 10^5。$$

基数和序数有什么区别

自然数有两重意义，一是表示数量的意义，即被数的物体有“多少个”。这种用法表示数量的自然数称为基数。例如，有 48 个同学做操。这个“48”就是基数，它表示做操学生的人数。自然数的另一种意义是表示次序的意义，即最后被数到的物体是排列中的“第几个”。这种用来表示物体次序的自然数，称为序数。例如，48 个同学做操时，如果按照从高到矮的次序排列成一行，进行报数：1，2，3……48。这里的“1”、“2”、“3”……“48”

就是序数，它们表示学生的身高在全班中的位置。

计数和记数有什么区别

计数就是数数。在计数时，无论按什么顺序去计数，只要没有遗漏，没有重复，所得的结果总是唯一的。例如，数一个班的学生人数，可以按年龄由小到大的次序去数，也可以按身高从矮到高的次序去数，结果总是一样的。在计数时，用其他事物代替要数的事物，计数的结果不变。例如，数一个班学生的人数，可以数这个班点名册上的姓名，姓名的个数也就是这个班学生的人数。计数时，最后出现的数就是数得的结果。由于生产或生活的需要，在计数过程中，逐渐形成了各种进位制度，如二进制、五进制、十进制、十二进制、十六进制、六十进制等。通用的是十进制计数法，其特点是满十进一，按照满十进一的规律，把 10 个一叫做“十”，10 个十叫做“百”，10 个百叫做“千”，10 个千叫做“万”，10 个万叫做“十万”，10 个十万叫做“百万”，10 个百万叫做“千万”，10 个千万叫做“亿”……一（个）、十、百、千、万、十万、百万、千万、亿……都是计数单位，相邻两个单位之间的进率都是 10。

用符号把计数的结果记录下来，叫做记数。古代有“结绳记数”，我们现在用数字记数，也叫写数。通用的是十进制记数法，是按位值原则用阿拉伯数字书写的。十进，即满十进一，位值原

则即同一个数字，由于它在所记数中的位置不同，所表示的数值也不同。例如 2，20，200，2000 中的“2”，分别表示 2 个一，2 个十，2 个百，2 个千，由这四个 2 所组成的数“2222”中，每一个“2”除了它本身的值外，还有一个“位置值”，各个不同的计数单位所占的位置叫做数位，与十进制计数单位相对应的数位是个位、十位、百位、千位、万位……一个多位数从右起第 1 位是个位，第 2 位是十位，第 3 位是百位，第 4 位是千位……2222 这个数，个位上的“2”表示 2 个一，十位上的“2”表示 2 个十，百位上的“2”表示 2 个百，千位上的“2”表示 2 个千。

计数和计量有什么区别

计数就是数数。

计量是把一个未知量和另一个约定的已知量作比较的过程。例如，要量一块布的长度，就要用一把有刻度的尺来量。有刻度的尺是已知量，待量的布的长度是未知量。用尺来量布的过程就是计量。

测量长度要用尺，除了常见的长条形尺以外，还有卷尺、游标卡尺、千分尺等，形状和用处完全不同。游标卡尺测长度，可以准确到 0.1 毫米；千分尺测长度，可以准确到 0.01 毫米。

测量容量常用的有量杯、量瓶等。

测量质（重）量的工具就更多了。菜市场上有木杆秤，商店

柜台上有案秤，地上有台秤，工厂里使用的是大地秤，还有称火车的轨道衡。钢铁厂里把钢水倒进钢包内，重量达几吨到几十吨，加上 1000 多度的高温，要马上知道钢水的准确重量，不是一般的秤所能胜任的，就要用电子秤，它可以避免浇铸钢锭时造成短锭报废或余钢回炉的浪费现象。

另外，如计时用的钟表，测定温度的各种温度计，家庭用的电度表、水表等等都是计量工具。

数的分级和数的分节有什么区别

按照我国的习惯，读数采用四位分级，即从个位起，每四个计数单位为一级。个位、十位、百位、千位叫做个级；万位、十万位、百万位、千万位叫做万级；亿位、十亿位、百亿位、千亿位叫做亿级。按照以上分级原则，读四位以内的数，可以顺着位次，从高位读起。例如，2874 读作二千八百七十四。读四位以上的数，先从右向左四位分级，顺次读出各级里的数和它们的级名。如， $\frac{3472563002}{\text{亿级 万级 个级}}$ 读作三十四亿七千二百五十六万三千零二。一个数末尾的“0”不读，每一级末尾的“0”也不读。如， $\frac{108000}{\text{万级 个级}}$ 读作十万八千。其次数位上，不论连续有几个“0”，均只读一个零。例如， $\frac{10080005}{\text{万级 个级}}$ 读作一千零八万零五。

由于国际上许多国家没有万这个名称，因此，他们读、写数

的原则不是四位分级，而是三位分节。为了读写多位数时容易辨认数位，并和国际习惯一致，我国在写数时，也采用从右到左每三位加“，”的方法，也就是将数位每三位分一节。“，”叫做分节号。例如：432，607，005。为了帮助你在分节记数中很快辨认万位和亿位，请你牢记“二节万在中，三节亿当头”。

为什么要建立进位制

人类早期，为了数猎物、果实等物体的需要，逐渐产生了数。人的手指是最早的计数工具。随着生产力的不断发展，人们在实践中接触的数目越来越多，也越来越大，因而需要给所有自然数命名。但是自然数有无限多个，如果对于每一个自然数都给一个独立的名称，不仅不方便，而且也不可能，因而产生了用不太多的数字符号来表示任意自然数的要求，于是，在产生记数符号的过程中，逐渐形成了不同的进位制度。可能由于人们常用十个手指来计数的缘故，多数民族都采用了“满十进一”的十进制。

按照十进制计数法，我国是这样给自然数命名的。自然数列的前九个数各给以单独的名称，即：一、二、三、四、五、六、七、八、九；按照“满十进一”规定计数单位。10个一叫做十，10个十叫做百，10个百叫做千，10个千叫做万，10个万叫做十万，10个十万叫做百万，10个百万叫做千万，10个千万叫做万

万，再给以新的名称叫做亿，亿以上又有十亿，百亿，千亿等等。这样，每四个计数单位组成一级，个、十、百、千级称为个级，万、十万、百万、千万称为万级，亿、十亿、百亿、千亿称为亿级等等。



其他自然数的命名，都由前九个数和计数单位组合而成。例如，一个数含有 3 个千、4 个百、5 个十、6 个一，就称作三千四百五十六。并且规定，除个级外，每一级的级名只在这一级的末尾给出。例如，一个数含有 5 个百万，2 个十万，6 个万，就称作五百二十六万。

世界上许多国家的命数法不是四位一级，而是三位一级，10 个千不给新的名称，就叫十千，到千千才给新的名称——密（译音），这样从低到高，依次是：个、十、百（是个级）；千、十

千、百千（是千级）；密、十密、百密（是密级）等。

为什么有了十进 位制，还要有二进位制

用十进位制来记数和运算，是大家都习惯和熟悉的事。十进位制采用“满十进一”的“十进”计数、读数、写数的方法，即相邻的两个单位间的进率是十，有十个记数符号：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9，把它们写在不同的数位上，数字所代表的数值就不同。所以，用十个数字与位置相结合，就可以写出一切自然数，是世界各个国家通常使用的一种进位制。

为什么有了十进位制以后，还要有二进位制呢？二进位制是什么样的，它有什么特别呢？

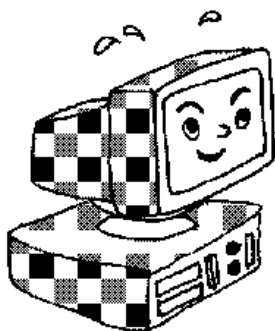
二进位制是“满二进一”，写一个二进位制的数只有0和1两个数字，根据位值原则，“一”至“十”各数的写法如下：

一记作 1， 二记作 10，
三记作 11， 四记作 100，
五记作 101， 六记作 110，
七记作 111， 八记作 1000，
九记作 1001， 十记作 1010，

用0和1这两个数字，也可以写出任何数值的数来。

由于二进位制只有两个基本数0和1，这就优于十个数字的

0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	10	11	100	101	110	111



十进制制，只要找到有两种稳定状态的元件，就可以用来表示二进制制的数了，在自然界中具有两种稳定状态的元件是很多的，如开关的“开”和“关”，纸带有“有孔”和“无孔”。只需“通电”和“断电”两种信号来表示 0 和 1，所以，二进制制被广泛应用于电子计算机中。

采用二进制制还能使计算简单化。如果用二进制制做加法，对每一位来说只可能有 4 种情况： $0+0=0$ ， $0+1=1$ ， $1+0=1$ ， $1+1=10$ 。而十进制制做加法，情况就要复杂得多， $0+0$ ， $0+1$ ， $0+2$ ，…… $1+0$ ， $1+1$ ，… $2+0$ ， $2+1$ ， $2+2$ ，…… $3+0$ ， $3+1$ ， $3+2$ ，…… $9+0$ ， $9+1$ ，…… $9+9$ 等 100 种情况。做减法、乘法、除法也同样是二进制制只有几种情况，十进制制有近百种

情况。在四则运算中，满足四种情况自然优于满足一百种情况，由于算法简单，也就使电子计算机的运算器结构简单一些。

因此，二进位制的产生，是因为它具有一定的有利条件和适应现代化建设的需要。

十进位制和二进位制是两种不同的进位制。平时，人们习惯使用的是十进位制的数，而电子计算机运算是用二进位制的数，当电子计算机运算后得到二进位制的数以后，人们仍将用十进位制数把它表示出来，所以，两种不同的进位制之间是可以进行换算的，关于这个问题，以后有机会我们再作介绍，你不妨自己试着先研究研究。实际上，电子计算机里也配备有将两种进位制进行换算的程序，这是人类智慧的结晶。

什么是二进数和八进数

用几进制写出的数，我们就简称它是几进数，用十进数写出的数，就叫做十进数。二进数和八进数，就是分别用二进制、八进制写出的数。

在一种进位制中，某一单位满一定个数就组成一个相邻较高的单位，这个一定的个数就叫做这种进位制的底数。例如，十进制的底数是 10，八进制的底数是 8，二进制的底数是 2。进位制的底数是 1 以外的任何自然数。

每一种进位制都可以按照位值原则来记数。由于每种进位制

底数不同，所用数字个数也不同。十进制要用包括 0 在内的十个数字；八进制要用包括 0 在内的八个数字，即 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 和 0；二进制只用 1 和 0 两个数字。由于二进制只有两个数字，决定了它的运算法则比较简单，并且由于 1 和 0 可以与开和关，有孔和无孔等建立对应，所以二进制广泛应用于电子计算机中。但是，用二进制记数位数比较多，使用很不方便，因此，在编制计算机的解题程序和在设计控制台的实际工作中，在二进制的基础上，有的采用八进制。

为了标明是哪个进位制中的数，一般在数的右下角注出进位制的底数。十进数除特殊需要以外，一般不注出底数。

用二进制记数的原则是“满二进一”，例如，零写作 $(0)_2$ ，一写作 $(1)_2$ ，二写作 $(10)_2$ ，三写作 $(11)_2$ ，四写作 $(100)_2$ ，五写作 $(101)_2$ ，六写作 $(110)_2$ ，七写作 $(111)_2$ ，八写作 $(1000)_2$ 。

因为二进制是满二进一，所以二进数的各个数位上的计数单位是：从右边起，第一位是一 (2^0) ，第二位是二 (2^1) ，第三位是四 (2^2) ，第四位是八 (2^3) ，第五位上是十六 (2^4) ……

用八进制记数的原则是“满八进一”，例如八写作 $(10)_8$ ，九写作 $(11)_8$ ，六十四写作 $(100)_8$ 。

因为八进制是满八进一，所以，八进数的各个数位上的计数单位是：从右边起，第一位是一 (8^0) ，第二位是八 (8^1) ，第三位是六十四 (8^2) ，第四位是五百一十二 (8^3) ……

十进数和二进制怎样互相换算

要把一个十进数化成二进制，根据满二进一的原则，用底数 2 去除这个十进数，所得的余数是二进制的第一位数；第二次用 2 去除第一次除得的商，所得的余数是二进制的第二位数；第三次是用 2 去除第二次除得的商，所得的余数是二进制的第三位数……继续除下去，直到商 0 余 1 为止，最后所得的余数就是二进制最左边的一位上的数。

例如，把 79 化成二进制。

$$79 \div 2 = 39 \dots 1 \text{ (余数 1 是二进制的第一位数)}$$

$$39 \div 2 = 19 \dots 1 \text{ (余数 1 是二进制的第二位数)}$$

$$19 \div 2 = 9 \dots 1 \text{ (余数 1 是二进制的第三位数)}$$

$$9 \div 2 = 4 \dots 1 \text{ (余数 1 是二进制的第四位数)}$$

$$4 \div 2 = 2 \dots 0 \text{ (余数 0 是二进制的第五位数)}$$

$$2 \div 2 = 1 \dots 0 \text{ (余数 0 是二进制的第六位数)}$$

$$1 \div 2 = 0 \dots 1 \text{ (余数 1 是二进制的第七位数)}$$

按简头顺序写，就得：

$$79 = (1001111)_2$$

要把一个二进制化成十进数，先将二进制写成底数 2 的幂的和的形式，再按照十进数的计算法则算出结果，就是这个二进制化成的十进数。

例如，把 $(1100101)_2$ 化成十进制数。

$$\begin{aligned}(1100101)_2 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \\ &\times 2^0 = 64 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 = 101\end{aligned}$$

十进制数和八进制数怎样互相换算

要把一个十进制数化成八进制数，根据满八进一的原则，用底数 8 去除这个十进制数，所得的余数是八进制数的第一位数；第二次用 8 去除第一次除得的商，所得的余数是八进制数的第二位数；第三次用 8 去除第二次除得的商，所得的余数是八进制数的第三位数……继续除下去，直到商 0 为止，最后所得的余数就是八进制数最左边的一位上的数。

例如，把 461 化成八进制数。

$$461 = (715)_8$$

要把一个八进制数化成十进制数，先将八进制数写成底数 8 的幂的和的形式，再按照十进制数的计算法则算出结果，就是这个八进制数化成的十进制数。

$$\text{例如，} (205)_8 = 2 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 5 \times 8^0 = 133$$

为什么时间和角 度的单位采用六十进位制

时间的基本单位是“小时”，角度的基本单位是“度”。从表面看来，两者之间没有什么关系，可是，为什么它们都分成分、秒等名称相同的低级单位呢？为什么又都采用六十进位制呢？我们仔细研究一下，就可以发现，这两种量之间有着密切的联系。我们的祖先在研究天文和历法的时候，观察地球自转的角度是和时间紧密联系在一起的。因为历法需要较高的精确度，时间单位“小时”和角度单位“度”都嫌太大，必须进一步研究它们的低级单位。

因为 60 有 12 个约数，它能使 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{6}$ …… 都能成为它的整倍数。以 $\frac{1}{60}$ 作单位，那么 $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$ ，即 30 个 $\frac{1}{60}$ ； $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ ，即 20 个 $\frac{1}{60}$ ； $\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$ ，即 15 个 $\frac{1}{60}$ ； $\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$ ，即 12 个 $\frac{1}{60}$ ； $\frac{1}{6} = \frac{10}{60}$ ，即 10 个 $\frac{1}{60}$ …… 等，说明六十进位制有它的好处。数学上习惯地把 1 小时的 $\frac{1}{60}$ 和 1 度的 $\frac{1}{60}$ 的单位称作 1 分，用符号 “'” 来表示；把 1 分的 $\frac{1}{60}$ 的单位称作 1 秒，用符号 “''” 来表示。如果是 5 分 31 秒，可以记作 5'31''；48 度 15 分 23 秒，可以记作 48°15'23''。

$$1 \times 1 = 1$$

才变成和现代用的一样，即从“一一如一”起到“九九八十一”止。元代朱世杰著《算学启蒙》一书所载的 45 句口诀，就是从“一一”到“九九”，并称为九数法。

由于我国语言都是单音节，九九口诀非常简捷方便，是我国特有的提高乘、除计算能力的一种方法。

现在用的乘法口诀有两种，一种是 45 句的，通常称为小九九，还有一种是 81 句的，通常称为大九九。

怎样确定一个大 于 1 的整数有多少个约数

在数学竞赛中，经常出现一个数有多少个约数的题目。怎样很快确定它们约数的个数呢？我们先来讨论 108 共有几个约数。如果我们把 108 的约数一个不落地写出来，再数一数，是能找到答案的。为达到这个目的，先将 108 分解质因数， $108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$ ，下面把 108 的约数从小到大写出来，依次为 1、2、3、4、6、9、12、18、27、36、54、108，共 12 个。这 12 个约数还可下面数阵的形式列出。

1	3	3^2	3^3
2	2×3	2×3^2	2×3^3
2^2	$2^2 \times 3$	$2^2 \times 3^2$	$2^2 \times 3^3$

这个数阵的规律是先将只有 2 的约数写成一竖列，把只含有 3 的约数写成一横行，然后把竖列、横行中的一些数的积写在相应的位置上，这样得到的数阵包含了原数的所有的约数。

在上面的数阵中，每列有 3 个约数，有 4 列 $3 \times 4 = 12$ ，所以一共有 12 个约数。但当数较大时，这样做很麻烦，有没有别的好方法呢？我们观察等式 $108 = 2^2 \times 3^3$ ，如果把式子中的指数 2 与 3 分别加 1，得 3 和 4，而 3×4 正好是 12，与 108 约数个数相同。



因此，一个大于 1 的整数的约数的个数，等于它的质因数分解式中每个质因数的指数加 1 的连乘积。又如 45000 有多少个约数？

$$\text{因为 } 45000 = 2^3 \times 3^2 \times 5^4$$

而 $(3+1) \times (2+1) \times (4+1) = 60$ ，所以 45000 有 60 个约数。

什么叫“筛法”

“筛法”是一种求质数的方法。是公元前 300 年左右由古希腊著名数学家埃拉托色尼提出的，所以，也叫埃拉托色尼筛法。

埃拉托色尼把自然数 1、2、3、4……写在一块涂了一层白蜡的板上，将去掉数的地方用工具刺成小孔，很像一个筛子。因为用它把有的合数都筛掉，留下的都是质数，所以，人们把这种求质数的方法叫做“筛法”。

筛法的根据是：对于一个正整数 N ，如果不能被小于或等于 N 的任何一个正整数所整除，那么这个数 N 必定是质数。

具体的做法是：（以 100 以内的质数的筛选为例）先把 1 到 100 这一百个数依次排列（如下表）。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	...	...						

1 不是质数也不是合数，先划去或圈上。

① 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12……

留下 2，把 2 后面所有 2 的倍数都划去，凡是 2 的倍数都是偶数，也就是把 2 后面的所有偶数划去；

① 2, 3, 4~~h~~, 5, 6~~h~~, 7, 8~~h~~, 9, 10~~h~~, 11, 12~~h~~, 13, 14~~h~~

.....

留下 3，把 3 后面所有 3 的倍数都划去；

① , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
h, 16.....

留下 5，把 5 后面的所有 5 的倍数都划去，也就是把 5 后面
所有个位是 0 和 5 的数都划去；

① , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,
16.....

留下 7，把 7 后面所有 7 的倍数都划去；

如此继续做下去，一直筛到 100 以内的合数全部划尽。

下面的表就是筛去全部合数后 ,得到的 100 以内的质数。

①	2	3	4h	5	6h	7	8h	9h	10h	
11	12h	13	14h	15h	16h	17	18h	19	20h	
21h	22h	23	24h	25h	26h	27h	28h	29	30h	
31	32h	33h	34h	35h	36h	37	38h	39h	40h	
41	42h	43	44h	45h	46h	47	48h	49h	50h	
51h	52h	53	54h	55h	56h	57h	58h	59	60h	
61	62h	63h	64h	65h	66h	67	68h	69h	70h	
71	72h	73	74h	75h	76h	77h	78h	79	80h	
81h	82h	83	84h	85h	86h	87h	88h	89	90h	
91h	92h	93h	94h	95h	96h	97	98h	99h	100h	

100 以内质数有：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97 共 25 个。

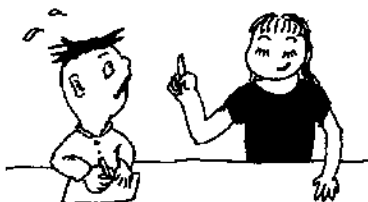
为什么十位数或个位数 是 5 的两位数的平方可以速算

我们不用笔算，就能很快说出一个十位数是 5 或个位数是 5 的两位数的平方数来。

如 56 的平方数是 3136，57 的平方数是 3249，53 的平方数是

2809，59 的平方数是 3481，这些数都是十位数是 5 的两位数的平方数。

$$35 \times 35 = 3 \times (3+1) \boxed{25} = 1225$$



又如 35 的平方数是 1225，65 的平方数是 4225，75 的平方数是 5625，95 的平方数是 9025，这些数都是个位数是 5 的两位数的平方数。

为什么算得这么快呢？只要掌握速算方法就可以很快算出它们的平方数。

十位数是 5 的两位数的平方数的速算法是：十位数 5 的平方加上个位数，后面接着写个位数的平方数，如果个位数平方不满十，后面接着写一个 0，再写个位数的平方数。

如 56 的平方数是 $5^2 + 6$ ，后面接着写 6^2 ，所以 $56^2 = 3136$ 。

53 的平方数是 $5^2 + 3$ ，后面接着写 0，再加写 3^2 ，所以 $53^2 = 2809$ 。

个位数是 5 的两位数的平方数的速算法是：十位数乘以十

位数加 1，后面接着写 5^2 。

如 35 的平方数 $3 \times (3 + 1)$ ，后面接着写 5^2 ，所以 $35^2 = 1225$ 。

75 的平方数是 $7 \times (7 + 1)$ ，后面接着写 5^2 ，所以 $75^2 = 5625$ 。

那么速算方法的根据又是什么呢？

有一个代数公式： $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

如果一个十位数是 5 的两位数都可以写成 $50 + a$ ， a 代表个位数，这个两位数的平方可以写成：

$$\begin{aligned}(50 + a)^2 &= 2500 + 2 \times 50 \times a + a^2 \\&= 2500 + 100a + a^2 \\&= (25 + a) \times 100 + a^2 \\&= (5^2 + a) \times 100 + a^2\end{aligned}$$

$(5^2 + a) \times 100 + a^2$ 表示用十位数 5 的平方与个位数的和乘以 100，得到平方数有多少个百，再加上个位数的平方数，便得到这个两位数的平方数，这就是十位数是 5 的两位数的平方数的速算方法的依据。

如果一个个位数是 5 的两位数都可以写成 $10a + 5$ ， a 代表十位数。这个两位数的平方可以写成：

$$\begin{aligned}(10a + 5)^2 &= (10a)^2 + 2 \times 10a \times 5 + 25 \\&= 100a^2 + 100a + 25 \\&= a(a + 1) \times 100 + 5^2\end{aligned}$$

$a(a + 1) \times 100 + 5^2$ 表示用十位数乘以十位数与 1 的和，再乘以 100 得到平方数有多少个百，再加上个位数 5 的平方 25，便

得到这个两位数的平方数，这就是个位数是 5 的两位数的平方数的速算方法的依据。

为什么“首同末合十”“末同首合十”的两个两位数相乘可以速算

两个两位数相乘，它们的十位数相同，个位数的和是 10，称作“首同末合十”，如 43×47 ， 26×24 ， 58×52 等。

两个两位数相乘，它们的个位数相同，十位数的和是 10，称作“末同首合十”，如 43×63 ， 26×86 ， 58×58 等。

“首同末合十”“末同首合十”的两个两位数相乘可以不用笔算，掌握了速算方法，便可以迅速口算出相乘的积来。

“首同末合十”的速算方法是：先用十位数乘以比它多 1 的数，所得结果作为积的前两位数，两个个位数相乘作为积的后两位数。

$$\begin{aligned} \text{如 } 43 \times 47 &= 4 \times (4 + 1) \times 100 + 3 \times 7 \\ &= 2000 + 21 \\ &= 2021 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26 \times 24 &= 2 \times (2 + 1) \times 100 + 6 \times 4 \\ &= 600 + 24 = 624 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 58 \times 52 &= 5 \times (5 + 1) \times 100 + 8 \times 2 \\ &= 3000 + 16 = 3016 \end{aligned}$$

“末同首合十”的速算方法是：先用十位数相乘的积加上一个个位数，所得的结果作为积的前两位数，个位数的平方作为积的后两位数，如果个位数平方不满十，积的十位上用“0”占位。

$$\begin{aligned}\text{如 } 43 \times 63 &= (4 \times 6 + 3) \times 100 + 3^2 \\ &= 2700 + 9\end{aligned}$$

$$= 2709$$

$$\begin{aligned}26 \times 86 &= (2 \times 8 + 6) \times 100 + 6^2 \\ &= 2200 + 36\end{aligned}$$

$$= 2236$$

$$\begin{aligned}58 \times 58 &= (5 \times 5 + 8) \times 100 + 8^2 \\ &= 3300 + 64\end{aligned}$$

$$= 3364$$

那么速算方法的根据又是什么呢？

“首同末合十”是这样推导出来的：

设两个两位数的十位数是 a ，个位数分别是 b 和 c ，而且 $b + c = 10$ ，这两个两位数相乘，可以写成：

$$\begin{aligned}&(10a + b)(10a + c) \\ &= 100a^2 + 10ab + 10ac + bc \\ &= 100a^2 + 10a(b + c) + bc \\ &= 100a^2 + 100a + bc \\ &= a(a + 1) \times 100 + bc\end{aligned}$$

$a(a + 1) \times 100 + bc$ 表示用十位数乘以比它多 1 的数，再乘以 100，得到相乘的积有多少个百，再加上个位数的积，便是这两个两位数相乘的结果。

“末同首合十”是这样推导出来的：

设两个两位数的个位数都是 c ，十位数分别是 a 和 b ，而且 $a + b = 10$ 。这两个两位数相乘可以写成：

$$\begin{aligned} & (10a + c)(10b + c) \\ &= 100ab + 10ac + 10bc + c^2 \\ &= 100ab + 10c(a + b) + c^2 \\ &= 100ab + 100c + c^2 \\ &= (ab + c) \times 100 + c^2 \end{aligned}$$

$(ab + c) \times 100 + c^2$ 表示用十位数相乘的积加上一个个位数，所得结果乘以 100，便是相乘的积有多少个百，再加上个位数的平方，就是这两个两位数相乘的结果。

为什么小数点对齐才能相加减

在计算加、减法时，都要相同计数单位才能相加减。在整数中，从右边起，第一位是个位，第二位是十位，第三位是百位……因此，在计算整数加减法的竖式中，只要末位对齐，相同数位就对齐了，相同计数单位也就能相加减了。在小数中，小数点的左边是整数部分，第一位是个位，第二位是十位，第三位是百位……，小数点右边是小数部分，第一位是十分位，第二位是百分位，第三位是千分位……在计算小数加、减法的竖式中，只要小数点对齐，相同数位就对齐了，相同计数单位也就同样能相加

减了，而不必考虑小数的末位是不是一定对齐，因为相加减的两个小数，小数的位数不一定相同，如 $2.15 + 4.327$ 第一个加数两位小数，末位是百分位，第二个加数是三位小数，末位是千分位，如果末位对齐，5 个百分之一和 7 个千分之一怎么能相加呢？因此在小数加减中，小数点对齐才能相加减。

为什么小数相乘 不需要对齐小数点

小数乘法是利用因数变化引起积的变化规律进行计算的。如 1.83×1.5 ，先转化成整数乘法 183×15 ，第一个因数扩大 100 倍，第二个因数扩大 10 倍，积扩大 1000 倍。 $183 \times 15 = 2745$ 要求 1.83 乘以 1.5 的积就要把 183 乘以 15 的积 2745 缩小 1000 倍即 2.745，积 2.745 的小数位数正好是两个因数 1.83 和 1.5 小数位数之和。

因此计算小数乘法，先按照整数乘法的法则算出积，再看因数中一共有几位小数，就从积的右边起数出几位，点上小数点。在相乘过程中不需要对齐小数点。

为什么除数是小数的除法 要把除数转化成整数后再除

除数是小数的除法，不容易直接看出商几，要根据被除数和除数扩大同数倍，商不变的性质，先移动除数的小数点，使它变成整数；除数的小数点向右移动几位，被除数的小数点也向右移动几位（位数不够的，在被除数的末尾用“0”补足）；然后按照除数是整数的除法进行计算。如 $4.68 \div 1.2 = 46.8 \div 12 = 3.9$ 。如果利用商不变性质，把被除数变成整数，如 $4.68 \div 1.2 = 468 \div 120 = 3.9$ 在被除数的小数位数比除数多时，是可以的，但扩大同数倍后数目比较大，算起来比较麻烦。被除数的小数位数比除数少，就不容易直接看出商几了，如 $46.8 \div 0.12 = 468 \div 1.2$ 。因此除数是小数的除法要把除数转化成整数后再除。

为什么“0”不能作除数

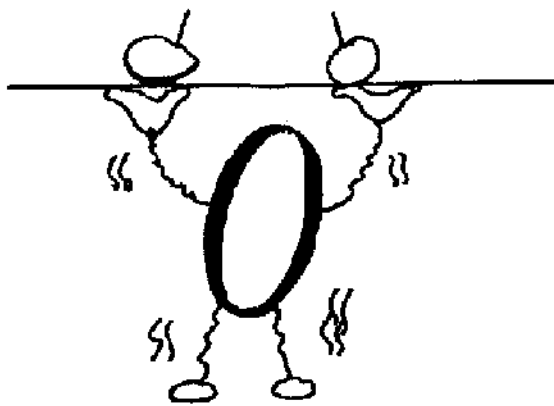
在四则计算中，减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算。

为什么不能用“0”作除数？我们可以分两种情况加以说明。

一种情况是：当除数是“0”，而被除数不是“0”，如 $7 \div 0$ ，

$12 \div 0$, $4260 \div 0$ 等。那就是要求出与“0”相乘的积不等于“0”的“商”来, $0 \times ? = 7$, $0 \times ? = 12$, $0 \times ? = 4260$ 。因为, 任何数与“0”相乘的积都是“0”, 所以, 在这种情况下, 商是不存在的, 除法计算没有结果。

另一种情况是: 当除数是“0”, 而且被除数也是“0”, 如 $0 \div 0$ 。那就是要求出与“0”相乘的积等于“0”的“商”来, $0 \times ? = 0$ 。因为, 任何数与“0”相乘的积都是“0”, 所以, 在这种情况下, 不能得到一个确定的商, 商可以是任何数, 即商有无限多个。



我们知道, 规定一种运算, 它的运算结果必须是存在的, 而且应该是唯一确定的。但是, 当除数为“0”时, 被除数不是“0”, 商是不存在的; 当除数为“0”时, 被除数也是“0”, 商得不到一个确定的数。因此, 必须明确规定“0”不能作除数。

因为有了“0”不能作除数这条规定以后，在除法的基本性质中，被除数和除数同时乘以或除以相同的数（零除外），商不变。在分数的基本性质中，一个分数的分子和分母同时乘以或除以相同的数（零除外），分数的大小不变。在比的基本性质中，比的前项和后项同时乘以或者同时除以相同的数（零除外），比值不变。“零除外”这三个字在完整表述除法、分数、比的基本性质时不能丢。

由此说明，在除法里，“0”不能作除数；对于分数来说，就是分母不能是“0”；对于比来说，就是比的后项不能是“0”。

当然，应该强调的是，除法中的除数、分数中的分母、比的后项这三者不是一回事。“比”、“分数”和“除法”之间尽管有着上述的一些联系，但它们毕竟是三个不同的概念。“比”是指两个数（或量）的倍数关系，“分数”是一个数，“除法”是一种运算。

总之，“0”不能作除数的这一规定是有根据的，也是十分重要的，希望大家在理解的基础上能正确地进行应用。

求积的近似值和 商的近似值有什么不同

求积的近似值时，先按小数乘以一般计算方法得出完整的积，再按要求用四舍五入法求出积的近似值。如 $49.2 \times 0.72 \approx$

35.42 (保留两位小数)。

求商的近似值，只要除到比要求保留小数位数多一位，根据这一位用四舍五入法求出商的近似值。如 $15.6 \div 35 \approx 0.45$ (保留两位小数)。

为什么两数相除（除数不为零）不会得到无限不循环小数

在两数相除时，因为余数重复出现，所以商就会重复出现，是一个循环小数。如， $58.6 \div 11$ 在这个除法里，因为余数重复出现 3 和 8，所以商就会重复出现 2 和 7。因此， $58.6 \div 11 = 5.32727\ldots$

在有余数除法中，余数一定要比除数小，比如除数是 11，余数可能是 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10，因此在相除过程中，余数一定会有重复出现的情况，所以商一定不会得到无限不循环小数。商一定是无限循环小数或者是有限小数。

怎样把循环小数化为分数

$$\text{因为 } \frac{1}{9} = 0.1111\ldots = 0.\dot{1}$$

$$\frac{1}{99} = 0.010101\ldots = 0.\dot{01}$$

$$\frac{1}{999} = 0.001001001\ldots = 0.\dot{001}$$

所以纯循环小数 $0.\dot{1}$ 、 $0.\dot{01}$ 、 $0.\dot{001}$ ……化成分数分别是 $\frac{1}{9}$ 、

$$\frac{1}{99}、\frac{1}{999}\ldots$$

纯循环小数分数：

例如，把 $0.\dot{7}$ 、 $0.\dot{23}$ 化成分数。

$$\text{方法 1：} 0.\dot{7} = 0.777\ldots$$

$$= 0.111\ldots \times 7$$

$$= 0.\dot{1} \times 7 = \frac{1}{9} \times 7 = \frac{7}{9}$$

$$0.\dot{23} = 0.2323\ldots$$

$$= 0.0101\ldots \times 23$$

$$= 0.\dot{01} \times 23$$

$$= \frac{1}{99} \times 23 = \frac{23}{99}$$

$$\text{方法 2：} 0.\dot{7} \times 10 = 7.777\ldots \quad (1)$$

$$0.\dot{7} \times 1 = 0.777\ldots (2)$$

$$(1) - (2) \quad 0.\dot{7} \times 9 = 7$$

$$, \quad 0.\dot{7} = \frac{7}{9}$$

$$0.\dot{23} \times 100 = 23.2323\ldots (1)$$

$$0.\dot{23} \times 1 = 0.2323\ldots (2)$$

$$(1) - (2) \quad 0.\dot{23} \times 99 = 23$$

$$, \quad 0.\dot{23} = \frac{23}{99}$$

从上面的例题可以得出：

纯循环小数可以化成一个分数，这个分数的分子就是一个循环节里的数字所组成的数，分母的各位数字都是9，9的个数和一个循环节的位数相同。

混循环小数化分数：

例如：把0.47、0.309化成分数。

方法1：0.47 = 0.4777.....

$$= 0.4 + 0.0777\ldots$$

$$= 0.4 + 0.777\ldots \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{7}{9} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{7}{90} = \frac{4 \times 9 + 7}{90}$$

$$= \frac{4 \times 10 - 4 + 7}{90}$$

$$\frac{6}{9} = 0.66666 \dots$$



$$= \frac{47 - 4}{90} = \frac{43}{90}$$

$$0.\dot{3}09 = 0.30909\dots$$

$$= 0.3 + 0.0090909\dots$$

$$= 0.3 + 0.0909\dots \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{9}{99} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{9}{990}$$

$$= \frac{3 \times 99 + 9}{990}$$

$$= \frac{3 \times 100 - 3 + 9}{990}$$

$$= \frac{309 - 3}{990} = \frac{306}{990}$$

$$= \frac{17}{55}$$

方法 2 : $0.\dot{4}7 \times 100 = 47.777\ldots (1)$

$0.4\dot{7} \times 10 = 4.777\ldots (2)$

(1) - (2) 得 $0.\dot{4}7 \times 90 = 43$

, $0.\dot{4}7 = \frac{47 - 4}{90} = \frac{43}{90}$

$0.\dot{3}09 \times 1000 = 309.090909\ldots (1)$

$0.30\dot{9} \times 10 = 3.090909\ldots (2)$

(1) - (2) 得 : $0.\dot{3}09 \times 990 = 306$

, $0.\dot{3}09 = \frac{309 - 3}{990} = \frac{306}{990} = \frac{17}{55}$

从上面例题可以得出 :

混循环小数可以化成一个分数, 这个分数的分子就是小数点右边的第一个数字到第一个循环节末位的数字所组成的数, 减去不循环数字所组成的数, 所得的差。分数的分母是数字 9 后面带数字 0 所组成的数, 其中 9 的个数等于循环节的位数, 0 的个数等于不循环部分的位数。

无限小数、无限循环小数和 π 有什么区别

在小数除法中, 有时能够除尽, 也就是说, 得到的商的小数

位数是有限的，例如 $1.26 \div 0.3 = 4.2$ ；有时也遇到除不尽的情况。例如，计算 $10 \div 3$ 在这个除法里，因为余数重复出现 1，所以商就重复出现 3，总也除不尽。因此 $10 \div 3 = 3.333\ldots$ 这样除得的商的位数是无限的，而且也是按照十进位制的位值原则写成的数，这样的数也叫做小数。

小数部分的位数是有限的小数，叫做有限小数。小数部分的位数是无限的小数，叫做无限小数。无限小数有两种情况：一种是循环小数，一种是无限不循环小数，也叫无理数。

一个小数，从小数部分的某一位起，一个数字或者几个数字不断地重复出现，这样的小数叫做循环小数。循环小数的小数部分中，依次不断重复出现的数字叫做循环节。

例如，

$0.888\ldots$ 是循环小数，8 是它的一个循环节；

$3.14848\ldots$ 是循环小数，48 是它的一个循环节；

为了书写方便，一个循环小数只写出不循环部分和第一个循环节，并在这个循环节的最左和最右的数字上面各记一个点，这个点叫做循环点。例如： $0.888\ldots$ 记作 $0.\dot{8}$ ； $3.14848\ldots$ 记作 $3.1\dot{4}8$ 。

循环节从小数点后的第一位就开始的循环小数，叫做纯循环小数。小数点后面有一位或几位数字不循环的循环小数，叫做混循环小数。例如， $0.\dot{8}$ ， $4.\dot{3}8$ ， $7.\dot{1}28$ 都是纯循环小数； $3.1\dot{4}8$ ， $0.0\dot{3}6$ 都是混循环小数。

π (圆周率) 是一个无限不循环小数, 到 1989 年已有人利用巨型电子计算机把 π 的值算到小数点以后的 5.3687 亿位。

什么是准确数和近似数

人们在计数和计算过程中, 有时得到的是与实际数值完全符合的数, 这种数叫做准确数。例如一班有学生 46 人, $7 + 2 = 9$, 这里的“46”、“9”都是准确数。有时得到的是与实际数值大体符合, 比较接近真实数值的数, 这样的数叫做近似数。例如我们在测量物体的长度、重量时, 由于测量工具的限制, 必然会产生误差, 所得的结果都是近似数。例如用最小刻度“厘米”的尺去量课桌面的长, 知道它的长不足 52 厘米; 用最小刻度“毫米”的尺去量课桌面的长, 知道它的长不足 519 毫米。这里的“52”、“519”都是近似数。

我们对大的数目在进行统计时, 一般也只需要用它的近似数来表示。例如平常说一个城市有 50 万人, 一个钢铁厂去年产钢 120 万吨。这里的“50 万”、“120 万”都是近似数。

我们在进行计算时也常常遇到近似数。例如: $1 \div 3 \approx 0.33$, $2 \div 7 \approx 0.285714$, 这里的“0.33”、“0.285714”都是近似数。

求近似数的方法, 一般有以下三种。

四舍五入法。这是最常用的求近似数的方法。用这种方法求一个数的近似数, 主要是看它省略的尾数最高位上的数是小于

“5”的，就把尾数舍去（称为四舍），这样得到的近似值叫不足近似值；如果省略的尾数最高位上的数大于或等于“5”，把尾数略去后，要向前一位进一（称为五入），这样得到的近似值叫过剩近似值。例如 $22 \div 7 = 3.142857\ldots$ 用四舍五入法保留两位小数得 $22 \div 7 \approx 3.14$ （四舍），用四舍五入法保留三位小数得 $22 \div 7 \approx 3.143$ （五入）。

进一法。在解决实际问题中，有时把一个数的尾数省略后，不管尾数最高位上的数是几，都要向前一位进1。例如把400千克粮食装进麻袋，如果每条麻袋最多装75千克，至少需要多少条麻袋？ $400 \div 75 = 5.33\ldots$ 就是说：400千克粮食装5条麻袋后，还剩25千克，这25千克还需要一条麻袋，所以一共需要6条麻袋。即 $400 \div 75 = 5.33\ldots \approx 6$ （条）。

去尾法。在解决实际问题中，有时把一个数的尾数省略后，不管尾数最高位上的数得几，都不需要向它的前一位进1。例如，每条床单需要2.1米布，有60米布，可以做多少条床单？ $60 \div 2.1 = 28.571428\ldots$ 或 $60 \div 2.1$ 商28余1.2，这说明60米布做了28条床单后，还剩下1.2米，这余下的1.2米不够做一条床单，所以只能做28条，这时要用去尾法。就是： $60 \div 2.1 = 28.571428\ldots \approx 28$ （条）。

什么叫有效数字

一个近似数，如果准确数与近似数的差不超过它最末一位的

半个单位，那么，从左边第一个不是零的数字起，到右边取得的最后一个数字止，所有的数字都叫做这个近似数的有效数字。例如，近似数 5.4 有两个有效数字 5 和 4；近似数 5.40 有三个有效数字，即 5、4、0。

当一个近似数是整十、整百、整千……的数时，通常写成 $a \times 10^n$ ($1 \leq a \leq 10$, n 是整数的形式)。这样根据有效数字就可以确定近似数的精确度。例如，用四舍五入法把 2800.4 分别

精确到个位： $2800.4 \approx 2800 = 2.800 \times 10^3$ （表示有 4 个有效数字）

精确到十位： $2800.4 \approx 2800 = 2.80 \times 10^3$ （表示有 3 个有效数字）

精确到百位： $2800.4 \approx 2800 = 2.8 \times 10^3$ （表示有 2 个有效数字）

为什么 0.1 和 0.10 有时相等有时又不等

当 0.1 和 0.10 是准确数时，在小数末尾添上或去掉 0，小数的大小不变。如铅笔单价 0.1 元，0.1 元表示 1 角；铅笔单价 0.10 元，0.10 元也表示 1 角，所以 0.1 和 0.10 相等。

当 0.1 和 0.10 是近似数时，它们就不相等了。因为近似数 0.1 取值范围是 0.05 到 0.14 之间（也就是从 0.05 到 0.14，保留

一位小数，约等于 0.1)，近似数 0.10 的取值范围是 0.095 到 0.104 之间（也就是从 0.095 到 0.104 保留两位小数，约等于 0.10），两者的精确度（近似数接近准确数的程度）不一样，保留一位小数，表示精确到十分之一，保留两位小数，表示精确到百分之一。例如， $0.116 \div 1.2 = 0.0966\ldots$ 。如果保留一位小数， $0.116 \div 1.2 \approx 0.1$ ；如果保留两位小数， $0.116 \div 1.2 \approx 0.10$ ，显然

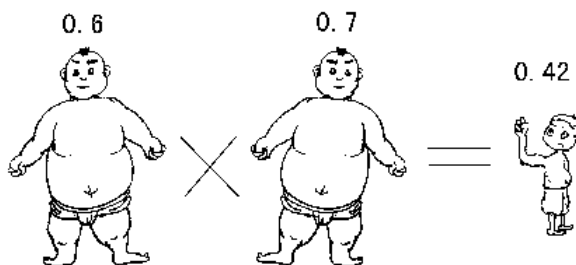
0.1
0.10



0.10 比 0.1 更接近准确数。所以，近似数小数末尾不能随意添上 0 或去掉 0，近似数 0.1 和 0.10 是不相等的。

为什么有时会越乘积越小

乘法是求几个相同加数和的简便算法，一般来说，越乘越大，也就是积大于被乘数。但有时也会出现越乘越小，也就是积小于被乘数的情况。请看下例。



每千克毛线 32 元，2 千克多少元？ 2.25 ($2\frac{1}{4}$) 千克多少

元？ 0.25 ($\frac{1}{4}$) 千克多少元？

根据 单价 $\times$ 数量 = 总价

列式是 $32 \times 2 = 64$ (元)

$32 \times 2.25 = 72$ (元)

或 $32 \times 2\frac{1}{4} = 72$ (元)

$32 \times 0.25 = 8$ (元)

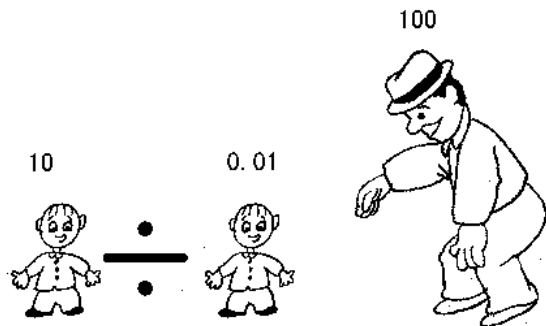
或 $32 \times \frac{1}{4} = 8$ (元)

从上面看出：乘数大于 1，积大于被乘数；乘数小于 1，积小于被乘数。联系实际来想， 0.25 ($\frac{1}{4}$) 千克不是 1 千克，其总价当然比 32 元少了。

因此，当乘数是纯小数或真分数时，积小于被乘数，也就是越乘越小。

为什么有时会越除商越大

除法是已知两个因数的积和其中一个因数，求另一个因数。一般来说是越除越小，商小于被除数。但有时也会出现越除越大，即商大于被除数的情况。请看下例。



2 千克毛线 64 元，1 千克多少元？

2.25 ($2\frac{1}{4}$) 千克毛线 72 元, 1 千克多少元? 0.25 ($\frac{1}{4}$) 千克毛线 8 元, 1 千克多少元?

根据 总价 $\div$ 数量 = 单价

列式是 $64 \div 2 = 32$ (元)

$72 \div 2.25 = 32$ (元)

或 $72 \div 2\frac{1}{4} = 32$ (元)

$8 \div 0.25 = 32$ (元)

或 $8 \div \frac{1}{4} = 32$ (元)

从上面看出: 除数大于 1, 商小于被除数; 除数小于 1, 商大于被除数。

联系实际来想, 0.25 ($\frac{1}{4}$) 千克不是 1 千克, 其价是 8 元, 1 千克的价当然要比 8 元多了。

因此, 当除数是纯小数或真分数时, 商大于被除数, 也就是越除越大。

数 “e”

数 e 在数学、物理学、天文学和其他科学部门中都有很大的作用。下面举的一些问题, 在进行数学考察的时候必须用到这个数:

气压公式 (气压随高度的不同而变化),

欧拉公式，
物体冷却的规律，
放射性衰变和地球的年龄，
空气中摆锤的摆动，
计算火箭速度的齐奥尔科夫斯基公式，
线圈中的电磁振荡，
细胞的增殖，
.....

这类问题举不胜举。

在高等数学上起着很大的作用，也许，所起的作用并不小于著名的数 π 。数 e 是一个无理数，约为 2.7183.....它不能用有限位的数字正确地表示出来，而只能利用下面的级数

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

计算它的近似值，显然可以达到任何准确程度。

另外：

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

这式子当 n 无限地增大的时候的极限就是 e 。把 e 当做对数的底有很多好处，这种对数表叫“自然对数”表，而且在科学和技术上得到广泛的应用。

数 e 常常出现在完全预料不到的地方。例如，看这么一个题目：

已知数 a ，把它分若干部分，如果各部分的乘积要最大，应该怎样分法？

我们已经知道，诸数的和不变的时候，要使它们的乘积最大，必须各数相等。显然，数 a 必须分成相等的若干部分。可是究竟分成几部分呢？分做两部分、三部分、十部分吗？用高等数学的方法可以证明，当分成的每一部分和 1 最接近的时候，乘积就是最大。

例如，10 必须分做这么多的相等部分，使得各部分尽可能地接近于 2.718……要求这些部分的份数，应该求商。

$$\frac{10}{2.718\ldots} = 3.678\ldots$$

因为把一个数分成 3.678 个相等的部分是说不通的，所以不得不把商数取最接近的整数 4。因此，我们可以得出 10 的各部分的最大乘积，如果各部分都等于 $\frac{10}{4}$ ，就是 2.5 的话，显然 $(2.5)^4 = 39.0625 > (\frac{10}{3})^3 = 37.03 > (\frac{10}{5})^2 = 32$

π 是超越数

1706 年琼斯第一次用记号 π 来表示圆周率， π 取自希腊语“圆周”的第一个字母。后来由于欧拉在《无穷分析导论》（1748 年）中采用该符号而得以普及。1761 年，兰伯特证明了 π 为无理数；1882 年，林德曼证明了 π 是超越数。

超越数就是，对于数 x_0 ，如果不存在这样一个整系数多项式 $f(x)$ ，使 x_0 是方程 $f(x) = 0$ 的一个根，则称 x_0 是超越数。



π 的计算和理论研究反映了一个民族的数学水平，对于古代人民来说， π 的计算是一件复杂繁重的工作。约公元前 240 年，阿基米德计算出的结果相当于 3.14；约公元 150 年，托勒密得出的结果为 3.1415926；公元 480 年，祖冲之得出的结果为 3.141592；由此可见，在古代，我国的伟大数学家祖冲之贡献卓越。

随着时间的推移，社会不断发展， π 的计算成果已达到了相当的程度，摘要如下：

约 1610 年，鲁道夫，精确到小数点后第 35 位；

1630 年，格林贝尔格，39 位；

1699 年，夏普，利用无穷级数，精确到小数点后第 71 位；

1706 年，梅钦，利用他自己给出的一种级数，精确到小数点后第 100 位；

1844 年，达瑟，200 位；
1873 年，香克斯，707 位；
1948 年，弗格森、伦奇，808 位；
1949 年，马利兰德，利用电子计算机，2037 位；
1967 年，吉劳及其合作者，50 万位；
1987 年，美国，利用巨型电脑，2936 万位。

什么是最小数原理

最小数原理是一个极为简单、极为重要而又易被人们忽视的原理。

一班学生，必有身高最小的学生。一筐苹果，必有最大的苹果。这个事实如此的明显，甚至是简单到了不必一提的地步。其实，这就是最小数原理的具体例子。

最小数原理：设 N 是全体自然数组成的集合， M 是 N 的一个非空子集，则 M 中必有最小数。

该原理对于 M 是整数集、有理数集或实数集的有限非空子集，结论又是明显的，因此还有如下的原理。

1. 设 R 是全体实数组成的集合， T 是 R 的有限非空子集，则 T 中必有最小数。

2. 设 R 是全体实数组成的集合， T 是 R 的有限非空子集，则 T 中必有最大数。

最小数原理虽然十分简单，但它说明了在集合中存在着最小数或最大数这样的事实，因此在一些涉及到存在性的命题中，这个原理大有用武之地。在国内外数学竞赛中应用这个原理的题目也屡见不鲜。下面给出一道例题，可见原理在解题中的作用。

平面上有 n 个点，它们不全在一条直线上，证明一定有一条恰好通过其中的两个点的直线。

证：过任意两点连线为 L ，对每一条直线 L ，必有线外的点， L 外的点 A 到 L 的距离为 $d(L, A)$ 。不难想象， $d(L, A)$ 的个数是有限个的，由最小数原理，必有一个最小的距离 $d(L_0, A_0) = d_0$ 。下面证明了 L_0 上恰好有二个点。反证，假设 L_0 上有 3 个给定的 A_1, A_2, A_3 ，点 A_0 到 L_0 的垂线垂足记为 H ， A_1, A_2, A_3 至少有二点在 H 的同侧（或一点与 H 重合，一边一点），并设 A_1 靠 H 较近些，此时连 A_0A_2 这条线为 L_1 ，则有 $d(L_1, A_1) < (L_0, A_0)$ ，这与 d_0 最小矛盾。（其它情况同理可证）

此题看来没什么出奇的地方，证明也不难。但在人们没有注意最小数原理用于证明此题时，该题曾是一道“难题”，好长时间得不到证明。而用最小数原理证明这个题，又显得该题如此容易。可见最小数原理的作用是很大的，值得我们特别重视。

什么是孪生素数

孪生素数是指两个相差为 2 的素数对。例如 3 和 5，11 和

13, 101 和 103 等等。孪生素数又称为双生素数。

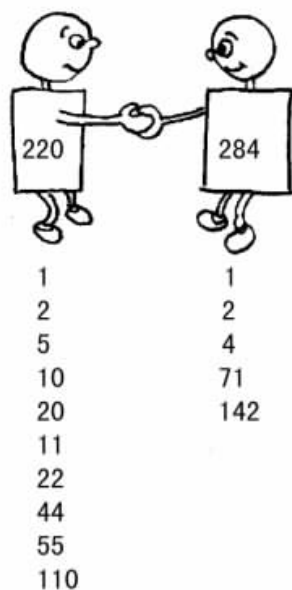
1849 年, 数学家波林那克猜想: 孪生素数有无穷多个。这就是所谓的“孪生素数猜想”。我国数学家曾对证明这一猜想做了许多贡献。尤其是 1973 年陈景润证明了: 存在无穷多个素数 P , 使得 $P+2$ 为不超过 2 个素数之积。这一结论十分接近孪生素数猜想的解, 构成“筛法”理论光辉的一顶点。1976 年, 威廉斯和蔡恩克发现了当时所知的最大的孪生素数为 $76 \times 3^{169} \pm 1$ 。1979 年, 伯莱发现了目前所知的最大的孪生素数对为 $297 \times 2^{546} \pm 1$ 。1982 年 3 月, 美国新泽西州的环球计算机服务公司提供 25000 美元奖金, 悬赏解决孪生素数猜想, 曾经轰动一时。然而, 至今仍没人领走这笔奖金。

孪生素数猜想是哥德巴赫猜想的姊妹猜想, 它的难度和解决哥德巴赫猜想的难度是等同的。数学家们认为, 仅就目前的已知数学方法, 要想解决这个难题几乎是不可能的。甚至有的数学家认为, 到目前为止还看不出可以沿着什么途径, 利用什么方法来解决它。

什么是“亲和数”

传说在公元前 500 多年, 古希腊的克罗托那城中, 毕达哥拉斯学派正在讨论“数对于万物的作用”, 一位学者问“在我们交朋友时, 存在数的作用吗?” 伟大的数学家毕达哥拉斯答道: “朋

友是你灵魂的情影，要像 220 与 284 一样亲密。”他的话使人感



到蹊跷，接着他宣布：神默示我们，220 的全部真因子之和 $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$ 恰好等于 284，而 284 的全部真因子之和 $1 + 2 + 4 + 71 + 142$ 又恰好等于 220，它们是一对奇妙的“亲和数”。毕达哥拉斯的妙喻，简直使学者们惊呆了，不过在此后的一段漫长的时间里，人们知道的亲和数就只有这一对。

直到公元七世纪，在古老的巴格达城中，出现了一位伟大的博学者泰比特·伊本柯拉。他是医生、哲学家和天文学家，并且酷爱数学，他对亲和数的特性潜心思索，竟惊人地发现了一个求

亲和数的公式。即 $a = 3 \cdot 2^x - 1$, $b = 3 \cdot 2^{x-1} - 1$, $c = 9 \cdot 2^{2x-1} - 1$, 这里 x 是大于 1 的正整数, 则当 a 、 b 和 c 为素数时, $2^x a b$ 和 $2^x c$ 是一对亲和数, 同时给出了公式的证明, 并验证当 $x = 2$ 时, 求得的亲和数就是 220 和 284。然而令人惋惜的是泰比特·伊本柯拉并没有给出新的亲和数。

又过了 700 多年, 法国数学家费尔马在 1636 年再度独立地证明了泰比特·伊本柯拉公式并且给出了第二对亲和数 17296 和 18416。继而另一位数学大师笛卡尔在给一位朋友的信中又确切地给出了第三对亲和数 9363584 和 9437056。这新的发现震动了数学界, 吸引了许多数学家像寻宝一样投身于这场“寻数”的竞争。

直至 1750 年, 诞生在瑞士国土上的伟大数学奇才欧拉宣布: 他一举求出如 2620 和 2924, 5020 和 5564, 6232 和 6368 等六十对亲和数 (一说五十九对), 使他在寻数竞争中独占鳌头。

又过了一百多年, 奇迹出现了, 1866 年, 一位年仅十六岁的孩子竟正确地指出, 前辈们丢掉了第二对较小的亲和数 1184 和 1210, 这戏剧性的发现使数学家们大为惊讶, 据 20 世纪 70 年代统计, 人们已经找出一千二百多对亲和数, 数学真是一个深不可测的海洋, 它蕴藏着无穷无尽的奥妙。

什么样的数能组成勾股数

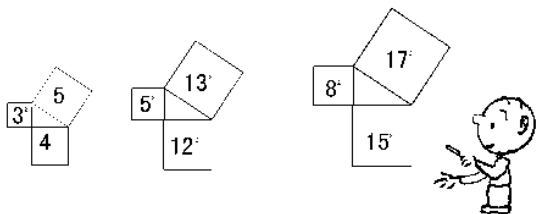
如果三个正整数合于勾股定理, 那么就称这三个数为一组勾

股数。3、4、5 是最简单的一组勾股数，因为它们合于勾股定理： $3^2 + 4^2 = 5^2$ 。

在中学数学里不仅涉及勾股定理及其逆定理的许多数学问题的解答要用到勾股数，不少涉及代数、立体几何、解析几何、三角函数的问题也需要用到勾股定理，所以奇妙的勾股数在许多问题中起到很大的作用。掌握一些勾股数的知识很有必要。

3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25; 9, 40, 41.....

观察这些勾股数组成的规律发现，第一个数是奇数，第二个数是第一个数的平方减 1 再除以 2。第三个数是第二个数加 1，也就是第一个数的平方加 1 再除以 2。



结论：如果 n 是一个奇数，且 $n \geq 3$ ，那么

n 、 $\frac{n^2 - 1}{2}$ 、 $\frac{n^2 + 1}{2}$ 就是一组勾股数。

证明： $n^2 + \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2 = \frac{4n^2 + n^4 - 2n^2 + 1}{4} = \left(\frac{n^2 + 1}{2}\right)^2$

， n 、 $\frac{n^2 - 1}{2}$ 、 $\frac{n^2 + 1}{2}$ 是一组勾股数。

这样，我们任意给出一个奇数 11、13..... 同学们就可写出各组勾股数来。

又如简单的勾股数：

4, 3, 5; 6, 8, 10; 8, 15, 17; 10, 24, 26.....

观察这些勾股数组成的规律发现, 第一个数是偶数, 第二个数是第一个数的一半的平方减 1, 第三个数是第一个数一半的平方加 1。

结论: 如果 m 是一个偶数, 且 $m \geq 4$, 那么,

$m, (\frac{m}{2})^2 - 1, (\frac{m}{2})^2 + 1$, 就是一组勾股数。

证明: $m^2 + [(\frac{m}{2})^2 - 1]^2 = \frac{m^4 + 8m^2 + 16}{16} = (\frac{m^2 + 4}{4})^2 = [(\frac{m}{2})^2 + 1]^2$

, $m, (\frac{m}{2})^2 - 1, (\frac{m}{2})^2 + 1$ 是一组勾股数。

这样, 任意给出一个偶数 10、12..... 读者就可以写出各组勾股数来。

如果 a, b, c 是一组勾股数, 那么 Na, Nb, Nc 也是勾股数。
 N 为自然数且 $N \geq 2$ 。

这样, 如果 3、4、5 是一组勾股数, 运用上面的结论, 就可得出 6、8、10; 9、12、15; 12、16、20..... 都是勾股数。

等差数列中的 素数是怎样分布的

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, ..., 487 都为 $4m + 3$ 形式的素数。由此, 我们自然联想到一个问题, 即有此形式的素数是否有

无限多个？回答是肯定的。

形如 $4m+3$ 的素数个数无限。

证 用反证法。若形如 $4m+3$ 的素数个数只有有限个，记为

$P_1, P_2, \dots, P_n, 3 = P_1 < P_2 < \dots < P_n$ 。令

$N = 4P_2P_3\dots P_n + P_1$,

显然， N 为 $4m+3$ 形式的数。若 N 为素数，这与假设矛盾。若 N 为合数， N 一定有一个 $4K+3$ 的素因子（因为 $4K+1$ 的数相乘亦为 $4K+1$ 形式的数），设为 P 。根据上面假设 P 必为全体素数 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 中的一个。但由于 $P_i + N, 1 \leq i \leq n$ ，所以 $P \neq P_i, 1 \leq i \leq n$ ，这就矛盾了。所以形如 $4m+3$ 的素数一定有无限多个。

另外，我们发现 $5, 13, 17, 29, \dots, 10006721$ 都为形如 $4m+1$ 的素数，同样亦能证明形如 $4m+1$ 的素数个数为无限多个。对此问题，狄里赫里证明了下面的一般定理：

设 L, K 为两个互素的自然数，则形如 $L + Kn$ 的素数的个数是无限多个。

对等差数列中素数分布研究是一个十分困难但又非常重要的问题，它是研究哥德巴赫猜想的基本工具。怎样表示在等差数列中（即 $1 + kn$ ）不超过 x 的素数个数，已经得出了一个重要的定理，它是经过许多数学家的努力才得到的，是研究哥德巴赫猜想的基本定理。这里不再介绍了。

什么是圆周率

圆的周长和它的直径的比值叫做圆周率，用字母 π 表示。

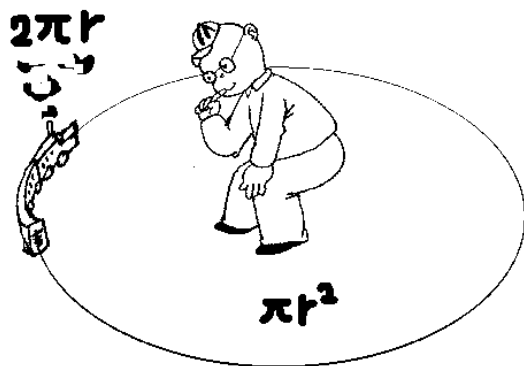
很早以前，人们就开始研究圆周率到底等于多少。后来数学家们逐渐发现圆周率是一个无限不循环小数。现在人们已经能用计算机算出它的小数点后面上亿位。 $\pi = 3.141592653\dots$ 但在实际应用中并不需要这么多位小数。我们在计算时，一般只取它的近似值， $\pi \approx 3.14$ 。

早在 2000 年前，中国的古代数学著作《周髀算经》中就有“周三径一”的说法，意思是说圆的周长是直径长度的 3 倍。

在 1700 多年前，我国魏晋时期数学家刘徽曾用割圆术求出圆周率是 3.141024。在 1500 年前，中国的一位伟大的数学家和天文学家祖冲之计算出圆周率应在 3.1415926 和 3.1415927 之间，成为世界上第一个把圆周率的值计算精确到 6 位小数的人。他还用分数 $\frac{22}{7}$ 和 $\frac{355}{113}$ 作为圆周率的近似值，分别叫做约率（比较粗略些）和密率（比较精密些）。他的这项伟大成就比欧洲数学家的计算结果要早 1000 年。

πr^2 和 $2\pi r$ 有什么区别

πr^2 和 $2\pi r$ 都有数字 2，都有字母 π 、 r ，但是所代表的含义是完全不相同的。 πr^2 是求圆面积的公式， $2\pi r$ 是求圆周长的公式。



因为圆周长是直径的 π 倍，直径是半径的 2 倍，所以圆周长 = 半径 $\times 2 \times \pi$ ，半径用 r 表示，又根据乘法交换律得圆周长 = $2\pi r$ 。

把圆分成若干等分，剪开后把这些近似等腰三角形拼成一个近似的平行四边形，如果分的份数越多，每一份就越细，拼成的图形就会越接近长方形。这个长方形的长就是圆周长的一半，这个长方形的宽就是圆的半径 (r)。

因为 长方形面积 = 长 $\times$ 宽

所以 圆的面积 = $\frac{\text{圆的周长}}{2} \times \text{半径}$

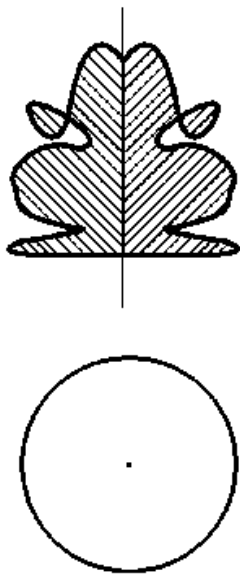
$$= \frac{2\pi r}{2} \times r = \pi r^2$$

$2r$ 表示 r 的 2 倍，即圆的直径。 r^2 表示 r 的 r 倍，实际上表示边长是 r 的正方形，圆的面积是这个正方形面积的 π 倍（ πr^2 ）。两者是完全不同的。

什么是轴对称 图形和中心对称图形

如果一个图形沿一条直线对折，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线是它的对称轴。例如，等腰三角形是一个轴对称图形，它的底边的垂直平分线就是它的对称轴。又如，线段、角、等边三角形、正方形、长方形、菱形、等腰梯形和圆等都是轴对称图形。

如果一个图形绕一个点旋转 180° 后，能够和原图互相重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点是它的对称中心。例如，在平行四边形 ABCD 中，对角线 AC 和 BD 的交点是 O。如果图形绕 O 点旋转 180° ，那么 A 点转到 C 点的位置，同时 B 点和 D 点也互换了位置，整个图形仍和原来的图形重合。所以平行四边形是中心对称图形，O 点是对称中心。正方形、长方形、菱形（对称中心都是对角线的交点）和圆（对称中心是圆心）都是中



心对称图形。

为什么周长一定的长方形中 以正方形（长 = 宽）的面积为最大

要解答这个问题，先来研究这样一道题。“两个数的和为198，这两个数的积最大的是多少？”

和为198的两个数（整数或分数）有无穷多组，将每一组的积计算出来再比较是不可能，我们先通过特例来寻求积的变化规

律。

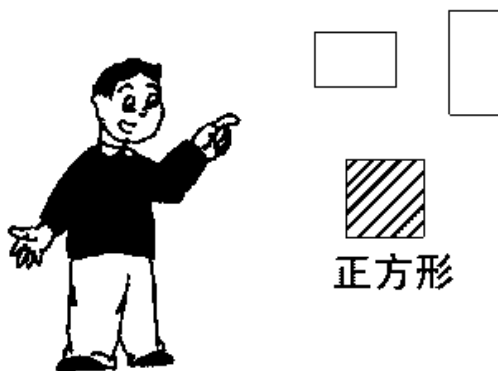
如果两个数都是自然数，积的情况如下：

$$197 \times 1 = 197$$

$$196 \times 2 = 392$$

$$195 \times 3 = 585$$

$$194 \times 4 = 776 \dots\dots$$



可以猜想，当和为 198 的两个数越接近时，它们的积越大，也许 99×99 是最大的积。

事实上，和为 198 的两个数，一定可以写成： $99 + a$ 与 $99 - a$ ($0 \leq a \leq 99$)，而 $(99 + a) \times (99 - a) = 99^2 - a^2$

可见，当 $a = 0$ 时，积最大，即 99×99 积最大。因此，周长一定的长方形，以正方形（长 = 宽）的面积最大。如：

周长是 24 厘米的长方形，其面积有：

$$11 \times 1 = 11 \text{ (平方厘米)}$$

$$10 \times 2 = 20 \text{ (平方厘米)}$$

$$9 \times 3 = 27 \text{ (平方厘米)}$$

$$8 \times 4 = 32 \text{ (平方厘米)}$$

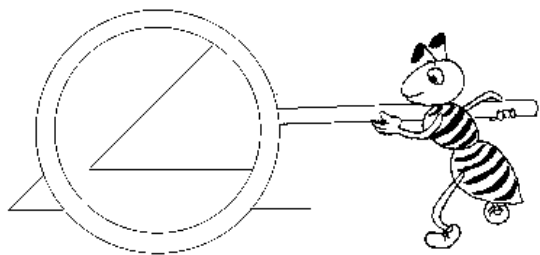
$$7 \times 5 = 35 \text{ (平方厘米)}$$

$$6 \times 6 = 36 \text{ (平方厘米)}$$

周长是 24 厘米的长方形中，以边长为 6 厘米的正方形的面积最大。

为什么放大镜 不能把“角”放大

我们常常看到一些上了年纪的人，看书读报、做针线活时，要戴老花眼镜，因为老花镜片可以把书报上的字和画以及针线活上的针脚放大，把原本用肉眼看起来模糊的东西，通过镜片变得清晰可见了，说明镜片有放大的作用。



放大镜就是专门用来放大的，它可以把任何东西根据需要放大几倍、十几倍甚至几十倍，如果要放大几百、几千倍，甚至几万、几十万、几百万倍，还有专用的光学显微镜和电子显微镜。

放大不是变形，原来这个字怎么写的，放大以后还是这么写，只不过是按比例把字放大了，如“十”字，放大以后仍是“十”字。

有人问，放大镜下的“角”被放大了，为什么又说放大镜不能把“角”放大？

首先要搞清楚“什么是角？”“角的大小含义是什么？”“角”是由一点所引出的两条射线组成的。如 $\angle AOB$ ，就是由“O”点引出两条射线OA和OB组成的。“角”的大小，是指同一点所引出的两条射线张开的程度，可以用量角器度量角的大小是多少度。30度的角比40度的角小，比25度的角大，所以角的大小是指角的度数大小。

在放大镜下，角有没有被放大呢？我们要从角的度数来考虑，如果角的度数放大了，那么角就放大了，如果角的度数没有改变，那么角就没有放大。事实是，一个45度角，在放大镜下，它仍然是一个45度的角。虽然放大镜使两条射线变得粗了，可是，两条射线张开的程度丝毫没有变化。所以，放大镜只能把东西的各部分成比例地放大，而形状不会改变。在数学上，把原来的图形和放大后的图形称为“相似形”，相似形中对应的角是相等的。其实道理很简单，一个小正方形在放大镜下成了一个大正方形，它的四个角原来是直角，放大以后仍然都是直角。也就是说，放大镜下，图形是放大了，但“角”是不会被放大镜放大的。

为什么“圆的周长分成越来越多的等分时，就会变成一条直线”的说法不科学

圆的周长是一条曲线，它的长度等于圆的直径与圆周率 π 相乘的积，这是大家早就知道的。如果有一条线段长为 a ，我们把它分成相等的几份，然后以每一等分的长当作直径，向同一侧画一个半圆，把这些半圆的首尾连接起来就是一条曲线，让我们一起来做下面这个实验。

把线段 a 分成 2 等分，其中的每一等分的长当作直径，向同一侧画两个半圆，两个半圆恰好是一个整圆的周长，它等于 $\pi \times$

$$\frac{a}{2} = \frac{\pi a}{2} ;$$

把线段 a 分成 4 等分，然后以每一等分的长当作直径，向同一侧画了 4 个半圆，这四个半圆接起来所组成的曲线的总长度是

$$\frac{\pi \times \frac{a}{4}}{2} \times 4 = \frac{a}{8} \pi 4 = \frac{\pi a}{2} ;$$

把线段分成 8 等分，然后以每一等分的长当作直径，向同一侧画了 8 个半圆，这八个半圆接起来所组成的曲线的总长度是

$$\frac{\pi \times \frac{a}{8}}{2} \times 8 = \frac{\pi a}{16} \times 8 = \frac{\pi a}{2} ;$$

把线段 a 分成 16 等分，然后以每一等分的长当作直径，向同一侧画了 16 个半圆，这十六个半圆连接起来所组成的曲线的

$$\text{总长度是 } \frac{\pi \times \frac{a}{16}}{2} \times 16 = \frac{\pi a}{32} \times 16 = \frac{\pi a}{2};$$

如果我们把线段 a 分成 32 等分、64 等分、128 等分、256 等分……每次都以一个等分的长当作直径，画出许许多多的半圆，那么每一次将这些半圆接起来所组成的曲线的总长度一定都是

$\frac{\pi a}{2}$ ，这已经是通过上面的实验和计算所证明的事实。我们可以这样想象，当线段 a 等分的份数无限增大，每一等分将越来越小时，以它为直径画出的半圆的高度也会越来越小，几乎要靠近线段 a 了，这无数多的半圆的总长度仍然是 $\frac{\pi a}{2}$ ，这也是没有疑问

的。 $\frac{\pi a}{2} = \frac{\pi}{2} \times a \approx \frac{3.14}{2} \times a = 1.57a$ ，一条永远等于线段 a 的 1.57

倍的曲线，它会越来越靠近这条线段，但它永远不可能成为一条直线。由此得出，“圆的周长分成越来越多的等分时，曲线就会变成一条直线”的说法是不科学的。但是为什么人们会有这种错觉呢？这是一种想象，再加上视觉上的误差。一条“曲折”越来越多的曲线，远远一看，就会误认为它是一条直线。所以，通过想象和直观的基础上得出的结论，并不一定完全正确，还必须得以验证，才能获得可靠的结论。

为什么叫“七巧板”

“七巧板”是把一个正方形，按一定的要求分割成如下七块：五块是三角形，其中两块大的，一块中等大小，两块小的；还有一块是平行四边形，一块是正方形。

利用这七块板，可以拼出各种图形，这对于丰富想象，发展思维，启迪智慧，都是有积极效果的，把这七块板称作使人心灵手巧的“七巧板”是再合适不过了。

“七巧板”又名“益智图”，是我国劳动人民发明的。它广泛流传于世界各地，外国人也十分重视它，在研究科学技术发展史的一些专著里，也经常谈到“七巧板”，欧美人把它叫做“唐图”，意思是中国发明的拼图板。据说，美国作家埃德加·爱伦·坡就特意用象牙作原料，精制了一副“七巧板”；法国的拿破仑在流放生活中，也曾用“七巧板”的拼摆作为消遣。

从数学史专家们的研究，发现“七巧板”的发明年代并不很古老。从发明到现在，用“七巧板”搭出的图形真可谓成百上千。有些专家还将它与电子计算机、程序设计技术结合起来进行研究，取得了可喜的成果。

为什么一个纸圈只有一个面

谁都知道，一张纸一般总有正反两个面。我们把一张长条形纸的正反两个面分别涂上红色和黄色，并在这张纸的正反两面的中间各画一条直线，然后把纸条的两端用胶水粘合起来，使黄色的一面在外面，红色的一面在里面。

如果我们捉一只爬虫放在黄色的一面让它爬行，但规定不许超过边线，那么，这只虫子爬来爬去总是在黄色的这一面；如果我们把这只爬虫放在红色的一面让它爬行，仍然规定不许超过边线，那么，这只虫子总是在红色的这一面爬来爬去。

现在，我们用同样一张长条形的纸，正反两个面也分别涂上红、黄两种不同的颜色，在这张纸的正反两面的中间也各画一条直线，不同的是，在胶水粘合时，把其中一端翻一个身，使红的一面向外，与另一端黄色的一面粘合在一起。

这样的纸图，已经无法分清谁在里面，谁是外面了。爬虫不需要过边线，就能由红色的面爬到黄色的面上，再由黄色的面爬到红色的面上。实际上，这样粘合的纸圈变成只有一个面了。为什么一个纸圈只有一个面？它的关键在于粘合成纸圈的方法不同，你不妨自己粘一个试试。

更令人惊奇的是，如果我们用剪子沿着纸圈面中间的直线剪去，纸圈不但不会一个分成两个，而是变成了一个更大一点的纸

圈，这个纸圈仍然只有一个面；如果再用剪子沿着纸圈面的中间剪去，就会剪出两个串在一起的纸圈，这实在是太有趣了。不信的话，你可以自己动手剪一剪，如果继续沿着纸圈面的中间剪去，又该是什么样的呢？想想剪剪，剪剪看看，一定很有意思。这就是著名的莫比乌斯圈。

为什么球面不能展成平面图形

我们知道：圆柱、圆锥、圆台的侧面面积，可以利用它们在平面内的展开图来求出。由于球面不能展成平面图形，所以球的表面积公式无法用此法求出。

为什么球面不能展成平面图形呢？我们作如下说明。

圆柱、圆锥、圆台的侧面可以看成由一条直线（或线段）运动生成，球面是不能通过直线运动生成的。换言之，圆柱、圆锥、圆台的侧面存在直线，而在球面上没有一条直线存在。所以球面不能展成平面图形。我们把能够展成平面图形的曲面称为直纹面，圆柱、圆锥、圆台的侧面都是直纹面。

若在平面上随意剪下一块，例如矩形或扇形，就可以既不叠皱，也不撕破地吻合在圆柱或圆锥的侧面上。而在平面上无论你剪下任何形状的一块，都无法既不叠皱也不撕破地贴在球面上。事实上，如果我们在剪下的矩形、扇形或某一形状上，过任意一点，沿任意方向作相交于该点的直线段 a 、 b 、 c ... 将这些画有线

段 a 、 b 、 c ... 的矩形、扇形贴在圆柱、圆锥侧面上， a 、 b 、 c ... 的长度均不变。而将画有线段 a 、 b 、 c ... 的某形状往球面上贴，或者贴不上去，或者“贴”上去了，则某些方向上的线段 c 或 d ... 的长度就变了。因为只有使某些线段重合一部分，或者拉长、或撕断才能贴在球的表面上去。两个曲面（平面是曲面的特殊情况）可以互相贴合的充要条件是这两个曲面等距。所谓等距是指两曲面间建立了一一对应关系，且对应曲线长度相等。平面与球面是建立不了等距关系的，所以球面不能展成平面图形。

什么是默比乌斯带

默比乌斯带是拓扑学家们的杰作之一。它使人感到古怪的是：只有一侧的曲面。

它的制作是极为简单的。我们把一个双侧环带随意在一处剪开，然后扭转一半，即 180° 。再粘合到一起来形成封闭的环，就得到了默比乌斯带。

但如果描述为没有“另一侧”，这是很难理解和想象的。但做起来却很容易，你可随意从一处开始涂色（不离开这面）最终你将会发现默比乌斯带都被你涂上了颜色，也就说明这的确是一个单侧面的带子。

默比乌斯具有各种意想不到的性质，有人称之为“魔术般的变化”。如果我们把默比乌斯带沿中线剪开，出乎意料地得到了

一条双侧带子而不是两条。数学家对这种奇妙的现象解释为：一条默比乌斯带只有一条边，剪开却使它增加了第二条边与另一侧。如果把默比乌斯带沿三等分线剪开将使你又获新奇之感。剪刀将环绕纸带子走整整两圈，但只是一次连续的剪开，剪的结果是两条卷绕在一起的纸条，其中的一条是双侧纸圈，另一条则是新的默比乌斯带。你看，这真是一个奇妙的带子。

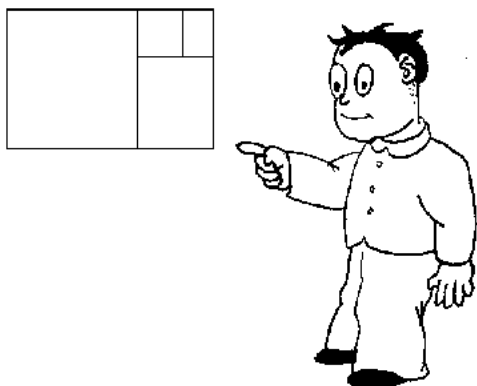
什么是黄金分割矩形

提起黄金分割知道的人很多。一点分两条线段的比大致是 $1:1.618$ ，这点就叫黄金分割点。但提起黄金分割矩形，知道的人就少多了。

先说一下黄金分割矩形的几何做法，以正方形 $ABCD$ 的边 AB 的中点 H 为圆心， HC 为半径画弧交 AB 延长线于一点 E ，过 E 点作 $EF \perp AE$ 交 DC 延长线于 F ，矩形 $AEFD$ 就是黄金分割矩形。满足 $AD:AE = 1:1.618$ 。

黄金分割矩形有一个不同寻常的性质，如果去掉图形中原来的正方形留下来的仍然是一个黄金分割矩形。

黄金分割矩形是看上去令人十分舒服的图形之一。早在公元前 5 世纪，希腊的建筑家们就知道了它的协调平衡的性质，并应用到自己的设计中。雅典的巴特农神殿的“人字墙”，几乎是一个极其准确的黄金分割矩形。



黄金分割矩形也被大量地应用到现代建筑中，建筑师们说：“数学使人们生活变得舒适了。”

黄金分割矩形也成为画家们的“几何消遣”，我们在《圣杰罗姆》这幅达·芬奇未完成的油画中，看到了包围着圣杰罗姆躯体的一个黄金分割图形。

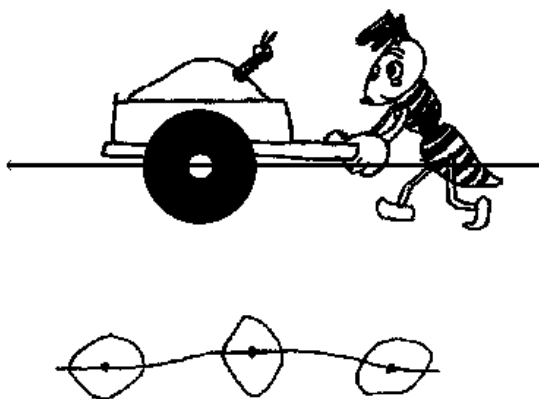
一位艺术家声称：法国印象派画家舍勒特，“用黄金分割原理来画他的每一幅画”。

为什么车轮采用圆形

有人说，因为圆是没棱没角的，能够滚动，所以车轮采用圆

形。这话虽然没有错，但这只是根据人们的感觉和经验所作的解释，并没有从圆的特征和性质上来加以说明。

那么圆究竟有什么特征呢？让我们用圆规在纸上画圆，圆规有两条腿，用它一条腿的“尖”先扎在纸上，固定一点，这一点就是这个圆的圆心，另一条腿与它保持一定的距离，围绕圆心旋转一周，画出来的一条曲线就是这个圆的圆周。为什么画出的这条线“首尾相接”呢？这是因为从圆周上的任何一点到圆心的距离都是相等的，这相等的距离就是圆的半径。车轮采用圆形，车轴安在圆心上，当车轮在地上滚动的时候，车轴与地面总是保持相等的距离，这是因为同圆内的半径相等。这样，车厢里坐着的人或车上装载的货物总是能平平稳稳地被车子拉着往前走，可以设想一下，如果车轮不是圆形的，采用椭圆形、方形、三角形，这就是说车轴到车轮的距离不是等长，那么这种车子还能不能行走呢？



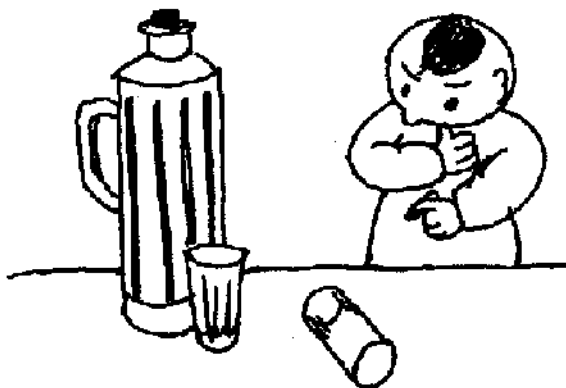
正因为车轮是圆的，所以它向前滚动的时候比较省力。你做过滚铁环的游戏吗？用一个带柄的弯钩管好铁环滚动的方向，只要铁环始终保持与地面垂直的位置，铁环就能毫不费力地向前滚动。你穿过旱冰鞋吗？旱冰鞋底上有轮子，穿着它可以自由自在地滑行在地面上。利用车轮是圆的，滚动起来省力这个性质，人们在搬运重物时，也常常故意在重物下面放置圆柱形的物体，使重物轻松地向前移动。装卸大型的圆柱形汽油桶时，人们让它横卧在地上，然后利用它自身能滚动的特点，推着走就可以了，遇到下坡路，就更加省力，你不推，它都会自动地向前滚动。在日常生活中，这样的事例很多，你只要稍加注意就会发现。

人们对圆的认识是很早很早以前的事了，这是大自然给予的启示。人们看到天上的太阳和月半的月亮都是圆形的，便开始学着画圆，可是要画出一个标准的圆来，确实很不容易。直到在实践中悟出一个圆的半径都是相等的这个特点以后，人们才发明了画圆的工具。从考古工作者对地下挖掘出来的古代实物中看到，我们的祖先不仅能画圆，而且还能够利用圆的特征和性质，制造出许多圆形的物品和器具，用圆形美化自己的生活。

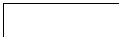
为什么热水瓶、 水杯等都是圆柱形的

热水瓶、水杯等都是装液体的容器，你如果注意观察的话，

就一定会发现，装液体的容器，往往都是圆柱形的，如汽油桶、牛奶瓶、易拉罐等，装粉末状的物体也一般采用圆柱形的容器，如咖啡、奶粉等，这是有原因的。



生产容器的单位，都希望能用最少的材料，制造特定容积的容器，或者说，用同样多的材料，做成容积最大的容器。

我们在学习周长和面积这部分几何初步知识时，都知道面积相等的几何图形，它们的周长并不一定相等，举一个简单的例子，一个正方形和一个长方形的面积都是 4 平方厘米，如图 、，正方形的周长是 $2 \times 4 = 8$ （厘米），长方形的周长是 $(4 + 1) \times 2 = 10$ （厘米），同样的道理，周长相等的几何图形，面积并不相同。如周长同是 9.42 厘米的正方形、正三角形、圆，它们的面积是不相同的。正方形的面积是 $(9.42 \div 4)^2 = 5.546025 \approx 5.55$ （平方厘米）；正三角形的面积是 $9.42 \div 3 = 3.14$ （厘米）， $3.14 \times 2.72 \div 2 = 4.27$ （平方厘米）；圆的面积是 $(9.42 \div 3.14 \div 2)^2 \times 3.14 = 7.065$ （平方厘米）。由此可见，周长相同的情况下，

圆的面积最大，正方形和正三角形的面积都比圆面积小，如果容器的高度一样，用同样多的材料做容器，容积最大的就是圆柱形了。所以，热水瓶、水杯等装液体的容器大都要做成圆柱形的。

那么，有没有比圆柱形更为节省的形状呢？有的，根据计算得出，在用同样多的材料做的一些容器中，球形的容器的容积要比圆柱形的还大。这就是说，做成球形的容器会比圆柱形的容器更节省材料。但是，球形的容器非常容易滚动，放不稳，它的盖子也难以制作，所以并不实用。我们在日常生活中见到一些吊装的容器，如放卫生球、放香料用的，有些就是球形的。

为什么放固体的容器不做成圆柱形的呢？因为固体的东西装在圆柱形的容器中，不好码放，如饼干、冰糖块等放在里面会有很多空隙，虽然做圆柱形容器比较省材料，但是装固体的东西并不节省地方，所以通常把固体的东西装在长方体的容器内。如果是粉末状的固体物品，装在容器里很节省地方，一般就采用圆柱形的容器了。

总之，不同形态的物体放置在不同形状容器里，怎样做更好，要考虑到各种条件和各种需要，这里面还真有许多学问呢！

怎样巧算圆木堆垛

在货栈或仓库里，物品的码放都是很有次序的，这样不仅整齐美观，取用方便，而且也易于统计。

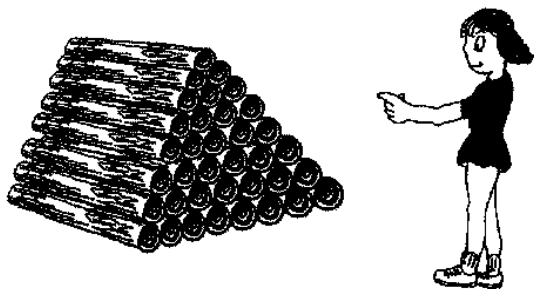
有一堆长短粗细相同的圆木堆放在露天仓库里，按以下规律排列：最下边一层是 10 根，以后每一层比下一层少一根，最上边一层是 1 根，这堆圆木一共有多少根？

有的同学说，圆木堆垛的横截面是一个三角形，底层是 10

根，高是 10 层，列式为： $10 \times 10 \div 2 = 50$ （根），这堆圆木共 50 根。

也有同学说，圆木堆垛的横截面是一个梯形，下底层是 10 根，上顶层是 1 根，高是 10 层，列式为： $(10 + 1) \times 10 \div 2 = 55$ （根），这堆圆木共 55 根。

这两个答案哪个对呢？让我们来分析一下。



假如你在这堆圆木旁边，再并排地放上同样的一堆，只是上下倒置，每一层的根数，恰好是底层与顶层根数的和，底层是 10 根，顶层是 1 根，每一层的根数是 $10 + 1 = 11$ （根），一共是 10 层， $11 \times 10 = 110$ （根），这 110 根是两堆圆木的总根数，原来的这堆圆木的根数就是这两堆圆木总根数的一半， $110 \div 2 = 55$ （根）。由此说明，认为“这堆圆木共 50 根”的答案是错误的。错误的根本原因在于，不应该把圆木堆垛的横截面看成为三角形，虽然它的上底很短，数值很小，是“1”，但它毕竟不是“0”，只有当梯形的上底逐渐缩短，数值成为“0”时，梯形就转化成三角形了。

一般的计算公式是：

$$\frac{(\text{底层根数} + \text{顶层根数}) \times \text{层数}}{2} = \text{总根数}$$

如果有一堆钢管堆放在地上，第一层是 8 根，底层是 20 根，

每层仍是依次减少一根，要求这堆钢管总数是多少根？也可以用这个公式来计算：

$$\frac{(\text{底层根数} + \text{顶层根数}) \times \text{层数}}{2} \\ = \frac{(20 + 8) \times 13}{2} = 182 \text{ (根)}, \text{这堆钢管总数是 } 182 \text{ 根。}$$

“巧算圆木堆垛”的方法还可以推广到其它圆柱形物体的计算上去，如铅笔厂计算铅笔的支数、水泥管厂计算水泥管数等。除此以外，你能不能用这种巧算的方法去计算：101 + 102 + 103 + … + 198 + 199 + 200 的和呢？把 101 看作顶层的数，200 看作底层的数，100 个数是层数，列式为：

$$\frac{(101 + 200) \times 100}{2} = 15050。 \text{其实，这道题还可以这样算：}$$

$150.5 \times 100 = 15050$ ，你猜猜，这又是怎么想的呢？

为什么铁栅栏门 推拉起来非常轻松

有一种用铁条做成的门，开和关都很方便。轻轻一推，铁栅栏门就像松紧带似地挤拢在一起，变得很窄，轻轻地一拉，铁栅栏门又像网子似地伸开，变得很宽。你仔细地进行观察，如果除了发现门的顶部和底部都装有滑轮，可以使大门的关启变得格外轻松之外，还发现使铁门能宽能窄，能拢能伸，能轻松关启的根本原因是由于铁门的构造的话，那就找到了解答这个问题的关键。

原来铁门是由一个个的菱形（即四条边相等的平行四边形）组成。四条边长一定的四边形，它的形状并不固定，四边形的这

种性质，叫做四边形的不稳定性，我们在学习四边形的时候，对它的这个性质一定已经有所认识。

聪明的工人叔叔，正是利用这种性质，制成了能够推拢和拉开的铁大门。

把这种性质合理地应用，不只是制作成关启起来非常轻松的铁栅栏门。

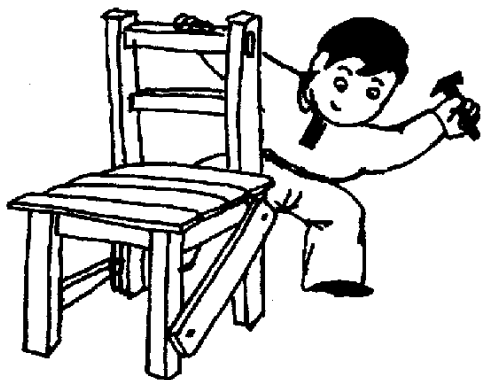
你们也许见过，有一种装货的大卡车，在它的身后还挂着一节装货的车箱，连接卡车与车箱的往往是菱形结构的链子；一种盛东西的网兜，用塑料绳或线绳编织而成，不用的时候，收拢在一起，伸开可以装不少东西；有一种可以合拢和伸开的自行车筐，不用的时候，合拢在一起是一个很扁的长方体，不占地方，要用的时候，打开成为一个能装东西的车筐，极大地方便了人们的生活。

只要我们留意观察，还一定会发现许多利用“四边形不稳定”的这一性质，合理地为工农业生产和人们日常生活服务的事例。

为什么加固椅子 的时候，要斜着钉一根木条

当我们坐的椅子或凳子出现摇晃，稍不注意就可能会连人带椅子都摔倒时，那就一定要想个办法，把椅子加固好，然后再继续使用。

怎么加固好呢？如果你把木条顺着摇晃的椅子腿钉去，那么过不了多少天，仍然会摇晃起来。如果你把木条斜着钉，使之与椅子腿、托座位面的横条木相交成为一个三角形，在相交处钉上



钉子，这样修理之后，椅子就不会摇晃了。如果你在钉钉子时，每处钉三枚，让它们也分布成三角形（如，），那么，椅子就会更加结实了。

为什么同样的木条，采取不同的钉法就会产生截然不同的效果呢？为什么钉子也要注意布局呢？

这是因为三角形有一种特殊的性质，只要三条边的长度确定了，那么，三角形的形状与大小就不可能再有所改变，这种性质我们称它为三角形的稳定性，我们在学习三角形的时候，对它的这个特殊性质已经有所认识。在建筑桥梁和房顶时，常常用一个个三角形构成支架，正是利用了三角形具有稳定性的这一特点；往墙上钉两个三角架，就可以固定住一块存放物品的木板；在农村，院子的栅栏门往往要斜着钉一根木条；在郊外野营时，用三根木棍（或树枝）扎在一起就能搭成一个吊锅用的支架。

让我们运用学到的几何知识，使之更多更好地为人类生活服务。

为什么这样设计最省料

在我们周围经常见到汽油桶、罐头盒、茶缸等容器，可是你考虑过吗？它们都是按省料原则来设计尺寸的。

比如，某工厂要生产一批容积为 V 的有盖圆桶。若桶壁厚度一定，那么底半径和高具有怎样的比例才能最省料？

设圆桶的底面半径为 x ，高为 y ，则容积为：

$$V = \pi x^2 y$$

$$, y = \frac{V}{\pi x^2} \quad (1)$$

而圆桶的全表面积为：

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$$

$$= 2 \left(\pi x^2 + \frac{V}{x} \right) \quad (2)$$

下面我们考虑，使全面积 S 最小时， x 与 y 就具有什么关系？

数学中有这样的定理：三个正数乘积一定，则当它们相等时，三数之和取最小值。(2) 式化为：

$$S = 2\pi x^2 + \frac{V}{x} + \frac{V}{x}$$

$$2\pi x^2 \cdot \frac{V}{x} \cdot \frac{V}{x} = 2\pi V^2 \quad (\text{为定值})$$

$$, 2\pi x^2 = \frac{V}{x} \text{ 时, } S \text{ 有最小值}$$

$$, x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad (3)$$

$$\text{将 } x \text{ 值代入 (1) 得 } y = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad (4)$$

比较 (3) 与 (4), 可得 $y = 2x$

这就是说, 当有盖圆桶的高等于底面直径时, 所用的材料最省。我们常见的罐头盒、汽油桶等, 都是按这个比例设计的。

为什么装满零件 的箱子还能塞进一个零件

某包装工人要把一批圆形零件装箱, 他把 40 个零件放进一个箱子里刚好装满, 一点也不松动。但他计算一下后发现, 如果每个箱子再能放进一个零件, 那么将节省很大一笔钱。你能帮他忙吗?

这个问题表面看来是根本办不到的。因为零件在箱子里可谓“充分饱和”。要想再放进一个零件, 必须重新安排结构, 对于圆形零件的“紧凑”摆法也只有“三圆两两外切”这一情况可试了。一经试验立刻获得成功。

这种摆法我们只计算一下长度就可以了。设圆形零件的半径为 r , 则相邻的两行的圆心距离为 $\sqrt{3}r$, 这样 9 行零件的总长度为 $(8\sqrt{3} + 2)r$ 。前面一种摆法总长度为 $16r$ 。

把两个长度比较一下:

$$8\sqrt{3} + 2 < 8 \times 1.74 + 2 = 15.92 < 16$$

由此可见, 后一种摆法不但能放进 41 个零件, 还略有余地呢!

为什么用两支蜡烛 能够计算出“断电”的时间

小聪每天晚上都温习功课，他正在聚精会神地解方程，忽然房间里的电灯熄灭了：保险丝烧断了，他马上点燃了书桌上备用的两支蜡烛，继续解方程，直到电灯修复。

忽然，小聪脑袋闪出一个念头：我是否可以根据两支蜡烛的燃烧程度断定断电的时间。

他回想和观察了一下条件：

1. 虽不知道蜡烛的原始长度但他记得两支蜡烛是一样长短。
2. 粗的一支能用 5 小时，细的一支能用 4 小时。
3. 残烛的长度一支等于另一支的 4 倍。

他得意起来：这不正是一道解方程的习题吗。不到一刻钟，他的练习本上就得出了“断电”时间：3 小时 45 分钟。

你知道他是怎样解决这个问题吗？

只需要列一个简单的方程式。用 x 表示点燃蜡烛的小时数，每一小时燃粗蜡烛长度的 $\frac{1}{5}$ 、细蜡烛长度的 $\frac{1}{4}$ 。因此，粗蜡烛残余部分的长度应是 $1 - \frac{x}{5}$ ，细蜡烛残余部分应是 $1 - \frac{x}{4}$ 。我们知道两烛长度相等并知细烛余部的 4 倍即 $4(1 - \frac{x}{4})$ 等于粗烛残余长度 $1 - \frac{x}{5}$ 。

$$\text{即有 } 4(1 - \frac{x}{4}) = 1 - \frac{x}{5}$$

解方程得 $x = 3\frac{3}{4}$ 所以，两烛点燃了 3 小时 45 分钟，亦是断

电时间。

为什么“四年闰， 百年不闰，四百年又闰”

我们居住的地球总是绕着太阳旋转的。地球绕太阳转一圈需要 365 天 5 小时 48 分 46 秒。为了方便，一年定为 365 天，叫做平年。这样，每过 4 年差不多就要多出 1 天来，把这天加在 2 月里，这一年就有 366 天，叫做闰年，因此规定公元年份是 4 的倍数的定为闰年，这就是“四年闰”。但这样计算，到一百年又超过了，每四百年中有 97 个闰年，因此规定公元年份是整百数的必须是 400 的倍数才是闰年，如 1900 年不是闰年，2000 年是闰年，这就是“百年不闰，四百年又闰”。

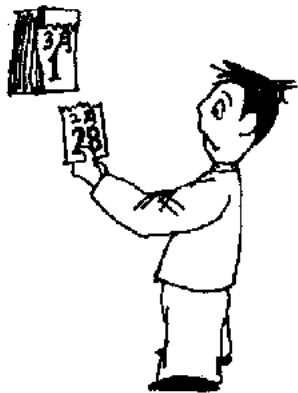
为什么二月份不是 30 天

规定二月份在平年是 28 天，在闰年是 29 天，实在是没有什么科学道理可讲。传说有这样一个故事：

古代罗马帝国有个皇帝，他的名字叫儒略凯撒。他规定每年十二个月中，逢单月，即一、三、五、七……月，是 31 天；逢双月，即二、四、六、八……月，是 30 天。这样合起来一年一共是 366 天，比平年 365 天多了一天，怎么办？需要设法从一年内的某一个月内扣除一天，究竟从哪个月里扣呢？当时，他们认为二月份是一个“不吉利”的月份，因此，决定这一天从二月份

里扣除，这样一来，平年的二月份是 29 天，闰年的二月份仍然是 30 天。

不久后，有个名叫奥古斯都的人继承了皇位。奥古斯都当了皇帝以后，发现儒略凯撒是七月份生的，七月份刚好是大月，31 天，而他自己却是八月份生的，这个月是小月，30 天。他心里很不愉快，为了显示自己与儒略凯撒同样“了不起”，他就决定把八月份也改为 31 天，成了大月，并且随即将九月和十一月这两个逢单数的月份，由大月改为小月，即将 31 天均改为 30 天，而将十月和十二月这两个逢双数的月份，由小月改为大月，即将 30 天均改为 31 天。结果一合计，全年又变为 366 天，比平年 365 天还是多了一天，怎么办？于是将多的这一天照样从所谓“不吉利”的二月份里扣除，这样一来，平年的二月份是 28 天，闰年的二月份是 29 天。



故事仅仅是个传说，传说的故事不一定真实可信，但不管怎

么讲，二月份的确不是 30 天。认为二月份是个“不吉利”的月份，是毫无根据的。当然我们谁也不会相信，也不应该相信。

对我们来说，只要记住一年有十二个月，其中一月、三月、五月、七月、八月、十月、十二月是大月，每月 31 天，四月、六月、九月、十一月是小月，每月 30 天，二月平年 28 天，闰年 29 天，大家都能按这样的规定，不发生差错地计算日子，就可以了。

为什么已知 1992 年元旦是星期三，就能很快推出 2000 年“六一”儿童节是星期四

由于每一星期有 7 天，即星期数是 7 进位的。例如今天是星期四，那么 8 天后应该是星期五，也就是今天的星期数再加上 8 除以 7 所得的余数。

可以这样想：从 1992 年元旦到 2000 年元旦这八年中，有 1992 年和 1996 年是闰年（二月是 29 天），这两年各是 366 天，其余 6 年每年 365 天。366 除以 7 的余数是 2，365 除以 7 的余数是 1。2000 年的 1 月份是 31 天，2 月份是 29 天，3 月份是 31 天，4 月份是 30 天，5 月份是 31 天，这些天数除以 7 的余数分别是：3、1、3、2、3，以上余数的和是 $2 \times 2 + 1 \times 6 + 3 + 1 + 3 + 2 + 3 = 22$ ，22 除以 7 的余数为 1，所以 2000 年“六一”儿童节是星期四。

不翻日历，你能 算出某一天是星期几吗

如果我们知道 1991 年的国庆节是星期二，要问 1992 年的元旦是星期几？这并不难。我们可以这样想：从国庆节到元旦共有 $30 + 30 + 31 + 1 = 92$ （天），用 92 除以 7 余 1，1991 年的国庆节是星期二，所以 1992 年元旦是星期三。

2000 年 4 月 6 日星期几



再如，我们知道 1992 年的元旦是星期三，那么 1992 年的

“六一”儿童节是星期几？我们可以这样想，从元旦到“六一”共有： $30 + 29 + 31 + 30 + 31 + 1 = 152$ （天），用 152 除以 7 余 5，1992 年元旦是星期三，所以 1992 年的“六一”儿童节是星期一。

以上的算法，都是根据前一个日子是星期几，然后算出中间间隔的天数，再用间隔的天数除以 7，如果正好整除，没有余数，那么要求的后一个日子与前一个日子的星期数相同；如果没有整除，有余数，那么余数是几，就依据前一个日子是星期几，往后推算几天，就能得到要求的后一个日子为星期几。

如果你想知道随便哪一天是星期几，既没有提供前一个日子是星期几，或者后一个日子是星期几，不翻日历，你能算出来吗？这就很困难了，如果你掌握了下面这个公式，按照公式去计算，就能化难为易了。

这个公式是：

$$S = x - 1 + \left[\frac{x-1}{4} \right] - \left[\frac{x-1}{100} \right] + \left[\frac{x-1}{400} \right] + c$$

公式里的 x 是表示公元的年数，三个分数 $\frac{x-1}{4}$ 、 $\frac{x-1}{100}$ 、 $\frac{x-1}{400}$

计算时，只要商的整数部分，余数略去，如 $\frac{1992-1}{4} = \frac{1991}{4}$ ，1991 除以 4 得 497……3，只要商 497，余数 3 略去不算；又如 $\frac{1992-1}{100} = 1991 \div 100 = 19……91$ ，只要商 19，余数 91 略去不算。

c 是从这一年的元旦算到要求的这一天为止，包括这一天在内的总天数，如求这一年的“五一”劳动节是星期几， c 就等于 $31 + 28$ （闰年 29 天） $+ 31 + 30 + 1$ 的天数。求出 S 以后，再用 7 除，如果正好除尽，这一天一定是星期日；如果余数是 1，那么这一天是星期一；如果余数是 2，这一天就是星期二，依此类推。

现在我们用公式先试做一道题，算完以后可以翻开日历核查一下，看看对不对。

1992 年 10 月 1 日是星期几？

$$\begin{aligned} S &= 1992 - 1 + \left[\frac{1992 + 1}{4} \right] - \left[\frac{1992 - 1}{100} \right] + \left[\frac{1992 - 1}{400} \right] + \\ &\quad (31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 1) \\ &= 1991 + 497 - 19 + 4 + 275 \\ &= 2748 \end{aligned}$$

$$2748 \div 7 = 392 \dots 4$$

余数是 4，所以 1992 年 10 月 1 日是星期四。

1949 年 10 月 1 日是我们伟大的中华人民共和国成立的日子，这一天是星期几？

$$\begin{aligned} S &= 1949 - 1 + \left[\frac{1949 + 1}{4} \right] - \left[\frac{1949 - 1}{100} \right] + \left[\frac{1949 - 1}{400} \right] + \\ &\quad (31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 1) \\ &= 1948 + 487 - 19 + 4 + 274 \\ &= 2694 \end{aligned}$$

$$2694 \div 7 = 384 \dots 6$$

余数是 6，所以 1949 年 10 月 1 日是星期六。

1927 年 8 月 1 日是中国共产党领导的人民军队创建的日子，这一天是星期几？

$$\begin{aligned} S &= 1927 - 1 + \left[\frac{1927 - 1}{4} \right] - \left[\frac{1927 - 1}{100} \right] + \left[\frac{1927 - 1}{400} \right] + \\ &\quad (31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 1) \\ &= 1926 + 481 - 19 + 4 + 213 \\ &= 2605 \end{aligned}$$

$$2605 \div 7 = 372 \dots 1$$

余数是 1，所以 1927 年 8 月 1 日是星期一。

你知道数的概念的发展吗

数的概念是从实践中产生和发展起来的。早在原始社会末期，由于计数的需要，人们就建立起自然数的概念。

随着生产和科学的发展，数的概念也得到发展。

为了表示各种具有相反意义的量以及满足记数法的要求，人们引进了零及负数，把自然数看作正整数，把正整数、零、负整数合并在一起，构成整数。

为了解决测量、分配中遇到的将某些量进行等分的问题，人们又引进了有理数，规定它们就是一切形如 $\frac{m}{n}$ 的数。其中 m 是整数， n 是自然数。这样，就把整数扩大为有理数。显然整数包含于有理数。如果把整数看作分母为 1 的分数，那么有理数实际上就是分数。

每一个有理数都可以表示成整数、有限小数或循环不为 0 的循环小数；反过来，整数、有限小数或循环节不为 0 的循环小数也都是有理数。如果把整数、有限小数都看作循环节为 0 的循环小数，那么有理数实际上也就是循环小数。

为了解决有些量与量之间的比值（例如用正方形的边长去度量它的对角线所得结果）不能用有理数表示的矛盾，人们又引进了无理数。所谓无理数，就是无限不循环小数。有理数与无理数合并在一起，构成实数。因为有理数都可看作循环小数（包括整数，有限小数），无理数都是无限不循环小数，所以实数就是小数。

漫长的数的概念发展，就是千百年来人类生产与科学的发

展史。实数概念的产生经过相当长的时间，可以解决几乎所有的生产实践中的数学问题。然而直到在解方程中，像 $x^2 = -1$ 无法解下去时，人们才开始怀疑实数概念是否应继续发展。直到十六世纪，人们开始引进一个新数 i ，叫虚数单位，并明确规定 $i^2 = -1$ ，这才使数的概念发展到复数。至此，数的发展史方能比较完满的告一段落。

虚数形成的历史

1484 年，舒开（生卒年月不详，法国学者）在《算术三篇》一书中，解二次方程： $4 + x^2 = 3x$ 得根为 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 4}$ ，他声明这根是不可定的。

1545 年，卡尔丹（1501—1576，意大利数学家）在他所著《大法》一书中，列出并解出“把 10 分成两部分，使这两部分的积为 40”的问题，方程是 $x(10 - x) = 40$ ，他求得的根为 $5 + \sqrt{-15}$ 与 $5 - \sqrt{-15}$ 。在同一本书中，卡尔丹发表了他的解一元三次方程 $x^3 + px + q = 0$ （ p, q 都是实数）的著名公式

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

但根据这个公式解方程时，却产生了一个当时意料不到的困难，例如在解方程 $x^3 = 15x + 4$ 时由上面公式得：

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

可是这个方程显然可以为 4 和另外两个实数值所满足，这一切令人十分困惑，以致卡尔丹说：一定有一种新型的数存在。

1637 年笛卡尔（1596—1659，法国数学家）在《几何学》一



书中，第一次给出虚数的名称。

1777 年欧拉（1707—1783，瑞士数学家）在递交给彼德堡科学院的论文《微分公式》中首次使用 i 表示 -1 。

真正作出虚数合理解释的是未塞尔（1745—1818 年，挪威学者）。1797 年，未塞尔向丹麦科学院递交了论文《方向的解析表示——特别应用于平面与球面多边形的测定》中将虚数问题又大大推进了一步，而后高斯（1777—1855，德国数学家）又将虚数作了规定，复数的概念也日趋完成。他主张用实数对 (a, b) 来表示 $a + bi$ ，又经过近百年的概念发展日趋完整： $a + bi$ 表示复数，是当今用数的全体。这里 a, b 是实数， $b = 0$ 时表示全体实数， $b \neq 0$ 时表示虚数， $a = 0, b \neq 0$ 时表示纯虚数，这样完整的复数概念得以圆满完成。在这个复数范围内六则运算皆可完成，并且随着生产的发展，复数在数学和其他有关科学技术中日益起着巨大的作用，并且在 19 世纪中叶以后，对复数的研究已逐渐发展成为一个庞大的数学分支——复变函数论。

为什么小高斯算得这么快

被人们誉为“数学之王”的德国数学家高斯（1777—1855）幼年时代就聪明过人。在上小学时，有一天，数学老师出了一道题让同学们计算：

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = ?$$

老师出完题后，全班同学都埋头苦算，小高斯却很快地把写有答案的石板交给了老师，老师认为这个年仅 10 岁的学生一定是瞎写了一个答案，连看也没看一眼，过了很长时间，当同学们都陆续地把写有答案的石板交上时，老师才把目光转向高斯的答案板，使老师大为吃惊的是，小高斯的答案 5050 完全正确，高斯为什么算得又快又准呢？

首先，让我们来观察下列一串数：

$$1, 2, 3, \dots, 99, 100$$

可以发现这样一个规律：

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 49 + 52 = 50 + 51$$

也就是说：和这列数首末两端距离相等的每两个数的和都等于首末两数的和。观察到这个规律后，就可以得出计算方法。

我们用字母 S 表示从 1 开始连续 100 个自然数的和，就有下面两个式子同时成立：

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$$

两式相加可得：

$$S + S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1)$$

$$\begin{aligned}
 2S &= \underbrace{101 + 101 + 101 \dots \dots + 101 + 101 + 101}_{\text{共100个101}} \\
 &= 101 \times 100 \\
 S &= \frac{101 \times 100}{2} = 5050
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &1+2+3+4+\dots+99+100 \\
 &1+100=101 \\
 &2+99=101 \\
 &3+98=101 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \quad \longrightarrow \quad 55 \text{ 个}$$



至此，我们已经明白了小高斯算题的奥秘了。小高斯算的这道题实际上是一道等差数列求和。他找到了这样一种简便的算法：只要用第一个数（首项）1 与最后一个数（末项）100 相加求和，再乘以这列数的个数（项数）100，最后除以 2，就得到所求的结果。

如果首项用 a_1 表示，末项用 a_n 表示，项数用 n 表示，我们就可以得到等差数列求和公式：

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

今后看到一个具体的等差数列，只要找到首项 a_1 ，末项 a_n ，以及项数 n ，就可以直接利用公式求出等差数列的和。

例如，有 100 个数：

$$a_1, a_2, \dots, a_{99}, a_{100}$$

第一个数 $a_1 = 7$ ，从 a_2 开始，后一个数比前一个数多 2，求这 100 个数的和。

这样分析：由于这一列数是一个等差数列，所以可以利用等差数列求和公式，但必须先求出末项 a_{100} ，这就要利用等差数列通项公式。

因为首项 $a_1 = 7$ ，项数 $n = 100$ ，公差 $d = 2$ ，所以， $a_{100} = a_1 + 99d = 7 + 99 \times 2 = 205$

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \dots + a_{99} + a_{100} \\ &= \frac{(7 + 205) \times 100}{2} = 10600 \end{aligned}$$

为什么说巴比伦人最早认识了勾股组数

勾股组数到底是哪一个国家的哪一个人最早发现的，有许多说法。现在，最有力的证据是 1945 年发现的，距今大约 3000 多年前的一份数学手稿，是古巴比伦人留下的，约在公元前 1900 年到公元前 1600 年间，这份手稿据说被保存在美国哥伦比亚大学，这份手稿上有下列 15 组勾股组数。即：

(1) 119, 120, 169; (2) 3367, 3456, 4825;

(3) 4601, 4800, 6649; (4) 12709, 13500, 18541;

(5) 65, 72, 97; (6) 319, 360, 481;

(7) 2291, 2700, 3541; (8) 799, 960,

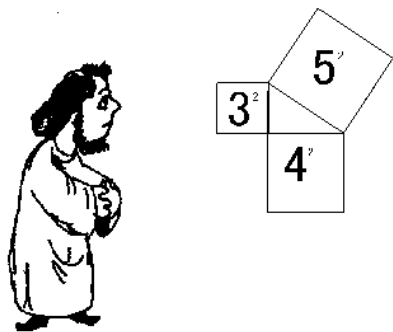
1249 ;

(9) 481 , 600 , 769 ; (10) 4961 , 6480 ,
8161 ;

(11) 45 , 60 , 75 ; (12) 1679 , 2400 ,
2929 ;

(13) 161 , 240 , 289 ; (14) 1771 , 2700 ,
3229 ;

(15) 56 , 90 , 106。

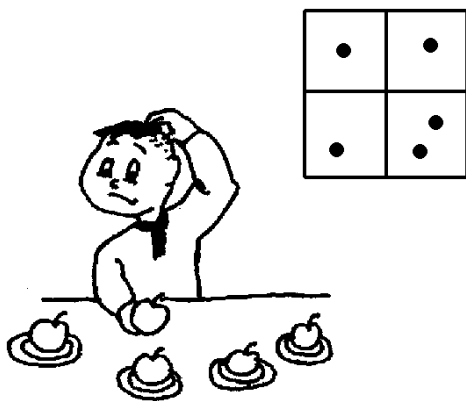


古巴比伦人，在 3000 多年前，取得这样辉煌的成就，因此勾股组数，应是古巴比伦人最早发现和研究的。

什么叫“抽屉原则”

有一群鸽子飞进比鸽子数少的鸽子笼里，那么至少有一只笼子里有两只或更多的鸽子。有时也说成，若干个苹果放入少于苹果个数的抽屉中，那么至少有一个抽屉中有两个或更多的苹果。

因此，这一原则俗称抽屉原则，也称为鸽子笼原理，或狄利克雷（德国数学家）原则。



抽屉原则可用简单形式表述为：如果 $(m+1)$ 个物件，放进 m 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里有两个或更多的物件。这用反证法就非常容易证明。因为，如果不是这样，每个抽屉里顶多只有一个物件，那么物件总数至多为 m 件，而实际上是 $(m+1)$ 件，产生了矛盾，由此说明了原来的结论是正确的。

抽屉原则是证明关于一个排列或一些现象存在的问题时，是很有用处的。

例如，全校有 367 名学生，至少有两人的生日是同一天。

平年是 365 天，闰年是 366 天。从 1 月 1 日到 12 月 31 日，做 366 个抽屉。让每个同学把自己的生日写在卡片上，再把卡片按月日对号，投入抽屉。结果怎样？可能每个抽屉里都有卡片，也可能有些抽屉空着，有些抽屉里有不少卡片。但不论怎样变

化，至少有一个抽屉里放的卡片起码是两张，因此，至少有两人的生日是在同一天。

又如，有 3 个不同的自然数，至少有两个数的和是偶数。

自然数中不是奇数就是偶数。做奇数、偶数两个抽屉，把 3 个数写在卡片上，投入抽屉，则至少有两个数在同一个抽屉内。这些数可能同是奇数，也可能同是偶数。但是，不论哪一种情况，同抽屉中的两个数的和必定是偶数。

再如，有 9 个苹果，放入 5 个抽屉，则至少有两个抽屉放得一样多。

五个抽屉按 0、1、2、3、4 编号，如果所放的苹果数与抽屉的编号相同，那么一共放了 $0+1+2+3+4=10$ （个），要使苹果总数符合题意（9 个苹果），必须拿出 1 个。不论怎样拿，拿出 1 个苹果以后，就有两个抽屉放得一样多。请看：

$$\text{拿走 1 个苹果后，各抽屉苹果数（共 9 个）} \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right.$$

所以，把 9 个苹果放入 5 个抽屉中，至少有两个抽屉放得一样多。

由此可见，利用抽屉原则，我们可以做出许多有趣的判断和推理。

什么是“中国剩余定理”

在我国古代算书《孙子算经》中，记载着这样一个问题：

“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”

这个问题通常称为“孙子定理”，民间俗称“韩信点兵”，国外的书籍上把这个定理叫做“中国剩余定理”。这个问题是世界数学史上闻名的问题，涉及到数论中一次同余式组的解法，即求被3除余2，被5除余3，被7除余2的最小正整数。

孙子定理的解法，在明代程大位的《算法统宗》一书里，用一首歌谣的形式表达出来，现摘抄于下：

“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，
七子团圆正半月，除百零五便得知。”

我国古书中的这首歌谣，实际上是就特殊情况给出了一次同余式组解的定理。在1247年，南宋时期数学家秦九韶著《数书九章》，首创“大衍求一术”，给出了一次同余式组的一般求解方法。在欧洲，直到18世纪，瑞士数学家欧拉、法国数学家拉格朗日等，才对一次同余式组进行研究。德国数学家高斯，在1801年出版的《算术探究》中，才明确地写出了一次同余式组的求解定理。过了70多年后，人们才发现，中国孙子的解法符合高斯的求解定理，从而在西方数学著作中，将一次同余式组的求解定理被誉为“中国剩余定理”。

这个问题按今天的话说，就是：

“有一堆物品，把它三个三个地数，剩下两个；把它五个五个地数，剩下三个；把它七个七个地数，剩下两个，问这堆物品（至少）有多少个？”

按《孙子算经》的解法是：

先求出能被5与7整除而被3除余1的数得： $5 \times 7 \times 2 = 70$ ，则被3除余2的数为： $70 \times 2 = 140$ ；能被3与7整除而被5除余1的数得： $3 \times 7 = 21$ ，则被5除余3的数为： $21 \times 3 = 63$ ；能被3与5整除而被7除余1的数得： $3 \times 5 = 15$ ，则被7除余2的数为：

$15 \times 2 = 30$ 。再把三数相加得 $140 + 63 + 30 = 233$ ，233 符合题目的要求，但不是最小数，所以从 233 中减去 3，5，7 三个数相乘积的 2 倍，即： $233 - 3 \times 5 \times 7 \times 2 = 23$ 。23 便是符合题目要求的得数。

简单地说，就是：用 3 数的剩余乘 70，用 7 数的剩余乘 21，用 5 数的剩余乘 15，所得的结果就是所求的。即： $70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 = 233$

$$233 - 105 \times 2 = 23$$

所以，这个问题所求的最小正整数解是 23。

解答这个问题的方法不是一种，下面再介绍两种。

题目要求“三三数之”或“七七数之”均“剩二”，因为 3 与 7 是互质数，所以它们的最小公倍数是 21，要使它符合余 2 的要求，将 21 加上 2 得 23，23 除以 5 正好余 3，也符合“五五数之剩三”的条件，列式为： $3 \times 7 + 2 = 23$ 。

根据“三三数之剩二”的条件，可以在 2 上连续加 3，使它符合“五五数之剩三”的条件， $2 + 3 + 3 = 8$ 。然后在 8 上连续加 3 与 5 的最小公倍数 15，使它符合“七七数之剩二”的条件， $8 + 15 = 23$ 。23 已全部符合题目要求。

什么是“幻方”

公元前 2000 多年，夏禹治水，据说从洛水中浮起一只大乌龟，它的背上有个奇特的图案。后来人们就称它为“洛书”。实际上，它就是将 1~9 这九个数排成纵行、横行各有 3 个数，并使同一行、同一列和同一对角线上的每三个数的和都是 15。汉朝徐岳写的《数术记遗》中，就讲到一种“九宫算”的图形，宋

朝著名数学家杨辉把它称为“纵横图”，国外叫做“幻方”。

关于“九宫”的填法，杨辉在《续古摘奇算法》一书中，有这样四句话：“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出。”

意思是：先将 1~9 九个数依次斜排，然后将上 1 与下 9 两数对调，将左 7 与右 3 两数对调，然后将四面中间的数（2、4、6、8）向外挺出就成功了。

如图：

		1		
	4		2	
	7	5	3	
		8		6
			9	

九子斜排

		9		
	4		2	
7	5	3		
	8		6	
			1	

上下对易

		9		
	4		2	
3		5		7
	8		6	
			1	

左右相更

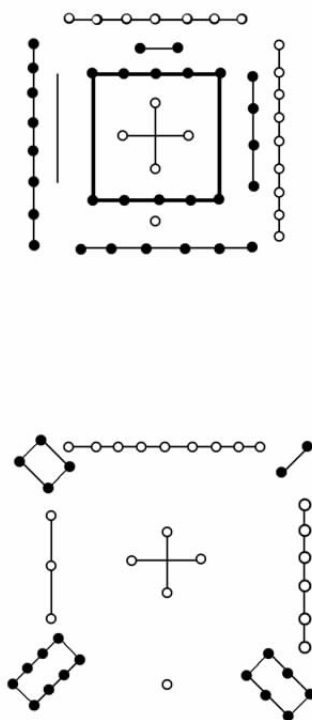
4		9		2	→	4	9	2
						3	5	7
3		5		7		8	1	6
8		1		6				

四维挺出

我们需要的不只是记住方法，还要研究填写的一般规律。

将 1~9 九个数填在九宫格内，要使横、竖和对角线上三数的和都等于 15。可以看出： $1+9=10$ ， $2+8=10$ ， $3+7=10$ ， $4+6=10$ 。它们之中的每一个数加 5，都等于 15，可判定中心方格里填 5。

接着想，先填横、竖行呢，还是先填对角线呢？当然先填对角线好，因为对角线中都有 5。填好对角线上的数，外沿的横、



竖行中就填好了两个数，以后的数就容易填写。

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

依次排四行

4	9	5	16
14	10	6	2
15	11	7	3
1	12	8	13

外四角对换

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

内四角对换

在对角线上填成对的奇数（1、9；3、7）呢？还是填成对的偶数（2、8；4、6）呢？如果填成对的奇数，则外沿的横或竖行中，为使和是奇数 15 还得再填一个奇数（奇数 + 奇数 + 奇数、奇数），这是不可能的，因为奇数已经用完。所以对角线上应该填写成对的偶数，然后在外沿的横、竖行中填写奇数就容易多了。

在杨辉的书中。对四阶幻方的填写方法为：“以下十六子依次递作四行排列，先以外四角对换，一换十六，四换十三；后以内四角对换，六换十一，七换十。”

其实，依次排四行后，三换十四，二换十五，五换十二，九换八，也可以得到横、竖行和对角线上四个数的和是 34 的要求，你不信的话，可以试一试。根据填写幻方的规律，你能不能举一反三，并在实践中有所创新呢？

什么是“百鸡问题”

公元 5 世纪，在我国一部数学古书《张丘建算经》里，有一道著名的数学问题。这个问题说：“鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一。百钱买百鸡，问鸡翁、母、雏各几何？”在数学史上，这类问题就叫做“百鸡问题”。

用现在的话来说，就是：“公鸡每只价钱 5 元，母鸡每只价钱 3 元，小鸡 3 只价钱 1 元。用 100 元钱买 100 只鸡，问买得公鸡、母鸡、小鸡各是多少只？”

“百鸡问题”怎么解答呢？我们可以假设公鸡、母鸡、小鸡的数目分别为 x 、 y 、 z ，那么根据已知条件可以列方程为：

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \dots\dots\dots (1) \\ 5x + 3y + \frac{z}{3} = 100 \dots\dots (2) \end{cases}$$

在代数里，我们学过多元一次方程组的解法，方程的个数与未知数的个数相同。而“百鸡问题”则不同，它含有三个未知数，却只列出两个方程，像这种方程的个数少于未知数个数的问題，我们叫它不定方程问题，一般地说，不定方程有无穷多组解，这与过去学过的多元一次方程组的解也是不相同的。

现在我们来解题。

$(2) \times 3 - (1)$ ，化简得，

$$7x + 4y = 100 \dots\dots (3)$$

在 (3) 式中， $4y$ 和 100 都是 4 的倍数，因此， $7x$ 也应是 4 的倍数，但 7 不是 4 的倍数，于是 x 就必须是 4 的倍数。我们可以设 x 是 4，8，12……并且相应求出 y 是 18，11，4…… z 是 78，



81, 84.....

例如, 当 $x=4$ 时, $7 \times 4 + 4y = 100$

$$4y = 100 - 28$$

$$y = 18$$

$$z = 100 - 4 - 18 = 78$$

当 $x=8$ 时

$$7 \times 8 + 4y = 100$$

$$4y = 100 - 56$$

$$y = 11$$

$$z = 100 - 8 - 11 = 81$$

当 $x=12$ 时,

$$7 \times 12 + 4y = 100$$

$$4y = 100 - 84$$

$$y = 4$$

$$z = 100 - 12 - 4 = 84$$

根据题意 x 不可能是 16，因为 7×16 得 112，超过 100 了。所以，不定方程尽管可以有无穷多组解，但是结合“百鸡问题”的条件只可能有三组解：

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 18 \\ z = 78 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 11 \\ z = 81 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \\ z = 84 \end{cases}$$

长绳的妙用

长长的绳子有很多用途，孩子们拿它游戏，工人们用它捆绑货物，但如果把它当做测量工具，它还有许多妙用呢！

当你遇到这样的问题，某学校一块小小实验田是梯形，想把它分成面积相等的两块地，以便进行对比实验，而你手头只有一条长绳，没有其它任何测量工具，怎样解决这个问题呢？

延长两腰取交点 E ，再连结 AC 、 BD 取交点 F ，最后连结 EF 并延长交 AB 于 M ， CD 于 N ，则线段 MN 就分实验田 $ABCD$ 成面积相等的两块。

这个问题可以证明，因为 $AB \parallel CD$

$$\text{故有 } \frac{DN}{AM} = \frac{DE}{AE} = \frac{DC}{AB} = \frac{FC}{FA} = \frac{NC}{AM}$$

梯形 $AMND$ 与梯形 $BMNC$ 的高相等且两底分别相等，故

$$S_{AMND} = S_{BMNC}$$

但延长两腰找交点时，发现长绳不够长，这时怎么办呢？我们可以采取如下办法，首先把长绳对折确定中点，再把两端固定在 AB 两点。在 AB 两侧取记号 E 、 F ，再用长绳连结 EF ，这样就

得到 AB 的中点 M ，同样做法，可取到 DC 的中点 N ，问题就迎刃而解了。

校门前是一个半圆形的草坪，马路的一边刚好通过草坪的圆心，你能否找到马路这边到校门的最近点。别忘记，你手里有一条长长的绳子哩。

我们为了便于解决这个问题，设校门为 A ，马路一边为直线 L 与半圆交于 B 、 C 两点。这样我们只要做出过 A 点的直线 L 的垂线即可，垂足就是所求点。具体做法很简单，连结 AB 、 AC 分别与半圆交于 D 、 E 两点，再连结 BE 、 CD 交于一点 F ，最后连结 AF 并延长 BC 于 P ，这个 P 点就是所求作的点。

道理很简单，直径所对的圆周角是直角，说明 BE 、 CD 是 $\triangle ABC$ 的两条高。这样 F 即为 $\triangle ABC$ 的垂心，当然 AP 就是 BC 边上的高了，故 P 点就是所求的点。

通过上述两例，相信你也一定能用好长绳。

三兄弟不和睦造成的麻烦

兄弟三个都是农民，他们耕种的土地并列排在一起。他们的住宅和他们的土地不完全对应，使得他们在管理土地时经常发生冲突。本来就不和睦的兄弟关系闹得越来越僵。他们都表示不愿意由家到田地之间的路有交叉，换地又是根本办不到的事。他们宁愿出工时走的路长些，而又只能在所确定的四框内确定路线，真是够麻烦的了。

没办法，为了达到三兄弟的共同愿望，请你帮他们设计三条路，好吗？

为什么把海王星叫做“笔尖上的星”

牛顿发明了万有引力定律，人们用这个定律可以准确地计算



出水星、金星、火星、木星、土星在天空的位置。但在计算天王星的位置时，总是与观测结果不完全符合。约在 300 年前有人猜测，在天王星附近可能还有一颗尚没有被发现的大行星影响它的运动。

当时有两位年轻人：法国的勒维烈和英国的亚当斯，他们靠数学知识找到了这颗行星。亚当斯用了两年时间，在 1845 年，计算出了这颗行星的位置；勒维烈也于 1846 年完成了这个计算。

柏林天文台根据他们的计算，在他们指定的星空发现了这颗微带蓝色的大行星，与勒维烈预定的位置只相差 1° 左右。由于海王星的发现，首先要归功于数学计算，因此人们又把海王星叫做“笔尖上的星”。

札波里的奇想

札波里并不是数学家，他只不过是波米亚洛夫斯基所写的《神学院的随笔》一书中的一个学生。在《在冬天的傍晚》这一章里写道：“……札波里专心致志地写着，看来他似乎是个极为勤勉的学生。其实他只是在写下一个数字，然后又写下一个，两者相乘后，把积的首位数字再写下来，并和积又相乘，他一而再，再而三地做下去，产生了一个奇想：想看看结果究竟如何。”

假如他开始所选的数字是 8 和 9，那么 $8 \cdot 9 = 72$ ； $7 \cdot 72 = 504$ ； $5 \cdot 504 = 2520$ ……像这样所写的数越乘越大，我们就称之为“不稳定型”。

如果他开始所选的数字是 2 和 5，就有 $2 \cdot 5 = 10$ ； $1 \cdot 10 = 10$ ……由于积的首位数字是 1，那么以后的积就永远不变了，这种情况称之为“稳定型”。

札波里进行不断地相乘，似乎乘积首位数字为 1 的情况迟早总会发生（当积小于 1 时，指的是首位有效数字）。换句话说：“不稳定型”是暂时的，或迟或早总要化为稳定型。但经过一番探索，我们就会知道，这个直觉并不可靠。

札波里任选两个数都会在相乘运算中得到一系列乘积，我们随意从一个积开始，顺序地称为： $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$ 。这样易知：当 $X_0 = 5$ 时， $X_1 = 5 \cdot 5 = 25$ ， $X_2 = 2 \cdot 25 = 50$ ； $X_3 = 5 \cdot 50 = 250$ ；

$X_4 = 2 \cdot 250 = 500 \dots\dots$ 这显然永远成不了“稳定型”。也说明札波里的运算里的积，只要出现 5, 25, 50, 250, 500……即刻确定为“不稳定型”。

有人做过研究和统计，不稳定区间在 $[1, 10]$ 内就有 6 个，这里指 x_0 的取值。区间总长度约等于 2.53，占总区间 $[1, 10]$ 的 28%。所以“不稳定型”也绝非寥寥无几，而占有相当比例。

你若有兴趣可以记住区间 $[1, 10]$ 中这六个“不稳定区间”。它们是： $[2\frac{1}{2}, 3]$ ； $[3\frac{58}{189}, 3\frac{1}{3}]$ ； $[5, 6]$ ； $[7\frac{1}{7}, 8]$ ； $[8\frac{13}{14}, 9]$ ； $[9\frac{58}{63}, 10]$ 。