

考研权威名师导学精品系列

2008 年硕士研究生入学考试

考研数学成功指南

(理工类)

(预测版·经典版)

组 编 黑博士考研信息工作室
主 审 清华大学数学科学系 李海忠
主 编 西安交通大学 10 教授考研辅导研究中心

敬告读者

购买本书的读者，均可享有以下五项优惠或免费措施：

1. 免费勾划“北京六大考研班笔记重点”：政、英、数 7~8 月强化班、10~11 月冲刺班“讲课笔记和重点内容”（勾划分四批，9、11、12、1 月），由黑博士考研培训学校、北京考研培训学校友情提供。
2. 免费参加“黑博士 12 月全国网络政治冲刺押题班”。价值 150 元，凭本书免费网上听押题班。
3. 免费参加“黑博士 12 月网络政治命题猜想点题班”。价值 150 元，凭本书免费网上听押题班。
4. 凭书后“读者意见有奖反馈卡”填写相关意见和建议，建议采纳后，可能获赠的 10 种图书中的部分。
5. 免费参加“黑博士 12 月政治考前 10 小时临门一脚押题”。价值 150 元，凭本书免费网上听押题。

网络押题班请登陆 www.heiboshi.net 相关专栏

人民日報出版社

内 容 简 介

本书作为考研数学的复习指南，紧扣考研主要是考核解题能力的特点，侧重精讲解题的思路、方法和技巧，同时对高等数学、线性代数、概率论与数理统计中的基本概念、基本理论、基本方法（简称《三基》）进行简明扼要、全面系统的叙述、总结和概括和阐述力求精练、清晰、浓缩，突出重点。

本书的鲜明特色是针对性强，例题精选于我们多年在本考研班上的授课资料及十多年考研试题中的典型题与综合题。同时，在每章（节）中均附有适当数量的预测强化训练题，相应配置了简明扼要的解题方法分析。本书是作者多年研究成果和辛勤劳动的结晶，我们深信是一本极具参考价值的复习用书！

本书可作“考研辅导班”的教材，亦是考研读者的良师益友，同时还是本科生学习数学的指南。

图书在版编目（CIP）数据

考研数学成功指南/西安交通大学 10 教授考研辅导研究中心编.

—北京：人民日报出版社，2005.12

（考研权威名师导学精品系列）

ISBN 7-80208-323-0

I. 考... II. 西... III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 （2005）第 143337 号

书 名：考研数学成功指南（理工类）

作 者：西安交通大学 10 教授考研辅导研究中心

责任编辑：安 申

封面设计：苏 萍

出版发行：人民邮电出版社

社 址：北京市金台西路 2 号

邮政编码：100733

发行热线：(010) 65369529 65369527

经 销：新华书店

印 刷：新世纪印刷厂

开 本：787×1092（毫米） 1/16

字 数：2175 千字

印 张：200

印 数：20000 册

印 次：2007 年 3 月第 5 版 2007 年 3 月第 5 次印刷

书 号：ISBN 7-80208-323-0

总 定 价（全六册）：315.00 元

第一版 前 言

为了帮助广大报考硕士研究生的考生在较短时间内准确理解和熟练掌握国家教育部颁布的、从 2003 年起试行的《数学考试大纲》的内容要求,全面提高解题能力,编者仔细地研究了近年来考研命题特点,并结合我们几十年的经济类及工科数学的教学体验,以及从事考研辅导的实际经验,编写出这本适应 2004 年以来硕士研究生入学考试《考研数学成功指南》的教学用书。

本书对高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大部分考研大纲中所要求的知识点、考点、涉及的基本概念、基本理论、基本方法(简称《三基》)进行简明扼要、全面系统的叙述和总结,概括和阐述力求精炼清晰,突出考试重点,以便读者能事半功倍地掌握基本内容。因为大学本科原教材一般较厚,内容很多,枝繁叶茂,若无辅助读物而直接复习教材,不少读者常常会分不清主次,抓不住重点和要点,有了这样一本“指南”,便会帮助读者指明正确航向,分清哪些是枝叶,哪些是树干,哪些是“芝麻”,哪些是“西瓜”,使读者不作虚功,不走冤枉路。

本书的鲜明特色是针对性很强,在数学考试大纲之内的必涉及,在数学考试大纲之外的一概不讲,书中的例题精选于我们长期在本考研班上的数学内部资料,以及二十年(1987 年开始)来全国研究生数学入学统一考试中典型题与综合题。讲这些试题,或者在解题前分析、引导,或者在解题后指出关键所在,或者一题多解,开阔思路。同时,还统计了各章在历年(1997 ~ 2003 年)试卷中所占的分数,并列成了表格,以说明该部分内容在整个数学考卷中的地位、作用。

本书典型例题取舍中,认真做到下述诸点:

例题构成大体如下:《三基》部分题约占总数的 $\frac{1}{4} \sim \frac{1}{3}$,历年研究生入学试题约占 $\frac{1}{2}$,剩下部分为综合性较强、难度较大的题。

大多数例题的难易程度与研究生考题相当,但也有少部分题的难度稍稍高出研究生的入学考试题。

同一类型的例题都编在一起,分类编写,以便分析比较。

多数例题的讲解分三步:分析(或指出解题思路,或指出它的重要性,或指出本题的特点),解法(写出解题过程),97 年起的试题都标出年份、分数;评述(指出这类题的地位、作用、解法特点,在历年考试中出现的频率,帮助读者预测来年考试中

出现的可能性大小,等等)。

有的例题或习题的右上角处附有星号(*),意指这个题型是十分典型的题,也是预测可能考的题型。

本书在每章(节)中均附有适当数量的预测强化训练题,全部预测强化训练题均附有精练的解题方法,以便读者学习。我们认为通过这些预测强化训练题的训练,能使考生达到融会贯通,举一反三,进一步提高读者的解题能力。

我们这本书,不仅是考生的良师益友,也是大学一、二年级学生学习数学的指南。

按照章(节)的前后次序,本书各部分的编者依次是:潘鼎坤教授(一元函数微分学与积分学),龚怀云教授(多元函数微分学与积分学),高应才教授(无穷级数与微分方程,线性代数),周家良教授(概率论与数理统计),最后,由高应才教授统一整理完稿。

由于时间仓促,如有不妥和不当之处,恳请读者批评、指正,不胜感激。

编者

2003.4

作者简介



高应才教授

高应才，西安交通大学数学教授，著名考研辅导专家，研究生指导教师，西安交大 10 教授考研班创始人，负责日常考研辅导班工作，主持偏微分方程理论及其数值分析，生命科学及地下水资源等领域的研究工作，发表论文 35 篇，获省部级科技进步奖和成果奖 7 次，出版著作《数学物理方程及其数值解法》、《高等工程数学》、《岩石力学名词词典》、《应用数学方法》、《研究生入学考试数学复习指南》等。长期从事考研辅导，历年来以猜题命中率高而著称。全身心投入考研辅导及组织工作，讲课认真，准备充分，举例典型，针对性强，被考研班学生誉为“最好的考研数学老师之一”。



潘鼎坤教授

潘鼎坤，西安建筑科技大学数学教授，著名考研辅导专家，曾任陕西省工科数学教学委员会副主任，《高等数学研究》杂志主编，省数学学会理事，常务理事，计算物理学会理事，有五十余年教龄，为研究生授课二十多年，编著《高等数学习题详解·释疑·指导》、《线性代数引论》（译著），《科技人员用的矩阵方法》（与刘则刚合译）、《高等数学内容提要及解题指导》、《高等数学教材中常见的瑕疵》等。被评为省优秀教师，享受国务院颁发的政府特殊津贴，深受学生欢迎，考研班学生誉为“听潘老师讲数学是一种高级享受！”



龚怀云教授

龚怀云，西安交通大学数学教授，著名考研辅导专家，研究生导师。教育部工科数学课程指导委员会（研究生组）委员，《工程数学学报》常务副主编兼总编辑。在科研方面，主要从事泛函分析的研究工作，对概率度量理论这一泛函分析与概率论的边沿学科进行了系统、深入的研究，发表论文约 50 篇，主要有《关于概率赋范空间上的局部有界》、《概率度量空间的纲定理》等。在教学方面，多年从事本科、硕士、博士研究生的教学工作，出版有《非线性分析》、《应用泛函分析》、《实变函数与泛函分析引论》、《数学分析》、《研究生高等数学入学考试指南》等，教学深入浅出，针对性强，富有启发性，颇受学生好评，全国为数不多的“数学辅导专家”之一。



周家良教授

周家良，西安交通大学数学教授，著名考研辅导专家，研究生指导教师，全国为数不多的“概率统计命题辅导专家”之一。长期任高等数学和概率统计教学工作，教学经验丰富，课堂气氛活跃，教学效果显著，多次获西安交大校教学奖和教学改革奖，王宽诚教学奖。多次参加全国概率统计考试命题工作，任组长，出版著作《概率论》、《应用统计方法》、《应用随机过程》、《概率论和数理统计的学习与提高》、《数学考研教程》，发表论文 31 篇，考研辅导有深入的研究分析，猜题命中率高，讲课中归纳总结条理清楚、重点突出、思路明确，语言风趣生动，获得学生高度评价。曾参与《研究生入学考试数学复习考点分析》等考研辅导及其相关资料的编写工作。

再版修订说明

本书修改时以下特色更加鲜明:

1.修改或删除部分例题,使所选择的每个例题都具有很强的典型性,而且大部分题目开始有“分析”,指引如何得出解题的思路和方法,在“解题”过程中写出关键步骤,思路清晰,并用黑框醒目地标出“评述”,它总结了举此例子的训练目的,注意事项,解题关键,此类题目的经验和教训,启发如何举一反三,做到事半功倍。

2.细心为考生着想,全书每章中都有教育部考试中心最近颁布的《考试要求》,它是考试大纲的核心部分,考生一方面必须紧扣《考试要求》进行复习,另一方面有了本书亦可免去购买《数学考试大纲》的麻烦和费用。

3.“历年真题常考点分布及命题规律透视”从客观上反应出每章在考试中出现的频率,占分数多少,以便考生对试题有个定量的分析。

4.全书每章中《考试要点分析与题型预测》是我们长期(二十多年)从事考研辅导教学经验,以及历年来对考研题目的分析、研究、总结出来的各章中非常热门的考试知识点,题型预测是今后十分可能会考的同类题型。

5.全书每章中重要知识点(考点)摘要的归纳、总结、综合,是为了使考生能迅速掌握和查阅基本概念,基本公式与定理,基本方法,以便抓住各章重点内容,更有效的复习大学一、二年级的数学教材。

6.为使考生达到融会贯通,举一反三,更进一步提高考生应试能力,全书每章后均有预测强化训练题,并都附有较详细解答,便于自学。

自本书出版后,许多考生都认为《考研数学成功指南》是一本考研数学中的百科全书,它包含了数学考研中各种讯息,考生如能认真阅读,考研必能成功。

本书修改时,对2007年版中尚存在的印刷疏漏,差错,做了认真的检查,并予以更正,本书自公开发行以来,受到广大读者的热忱好评和指正,对此,编者表示衷心的感谢,并欢迎继续批评和指正。

编者 2007.2

目 录

附： 历年真题常考点分布及命题规律透视

第一部分 一元函数微分学

第一章 函数、极限、连续(含考试要点分析与题型预测)	(1)
§ 1 - 1 一元函数概念	(2)
§ 1 - 2 极限、连续	(3)
§ 1 - 3 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(5)
预测·强化训练一(含重点典型题)	(30)
简明解答	(33)
第二章 一元函数微分学(含考试要点分析与题型预测)	(39)
§ 2 - 1 导数与微分概念	(39)
§ 2 - 2 微分中值定理及其应用	(41)
§ 2 - 3 微分运算基本公式	(42)
§ 2 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(43)
预测·强化训练二(含重点典型题)	(72)
简明解答	(75)

第二部分 一元函数积分学

第三章 不定积分、定积分、广义积分及其应用(含考试要点分析与题型预测)	(82)
§ 3 - 1 一元函数积分学中的基本概念和理论	(82)
§ 3 - 2 不定积分法	(84)
§ 3 - 3 常用的定积分公式	(85)
§ 3 - 4 广义积分	(86)
§ 3 - 5 定积分的应用	(87)
§ 3 - 6 需要熟记的积分公式	(88)
§ 3 - 7 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(88)

预测·强化训练三(含重点典型题)	(125)
简明解答	(128)

第三部分 多元函数微分学

第四章 空间解析几何与多元函数微分学(含考试要点分析与题型预测)	(137)
§4-1 空间解析几何、向量代数	(138)
§4-2 多元函数微分学的基本概念与理论	(144)
§4-3 多元函数微分法	(148)
§4-4 多元函数微分学的应用	(149)
§4-5 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(152)
预测·强化训练四(含重点典型题)	(179)
简明解答	(181)

第四部分 多元函数积分学

第五章 重积分及其应用(含考试要点分析与题型预测)	(187)
§5-1 重积分的概念	(187)
§5-2 重积分的计算	(188)
§5-3 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(191)
预测·强化训练五(含重点典型题)	(206)
简明解答	(208)
第六章 曲线积分与曲面积分(含考试要点分析与题型预测)	(212)
§6-1 曲线积分、曲面积分的概念与计算	(213)
§6-2 格林公式、高斯公式与斯托克斯公式及其应用	(216)
§6-3 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(217)
预测·强化训练六(含重点典型题)	(239)
简明解答	(241)

第五部分 级数与微分方程

第七章 无穷级数(含考试要点分析与题型预测)	(246)
§7-1 常数项级数 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(247)
§7-2 幂级数 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(259)
§7-3 傅立叶级数 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(277)

预测·强化训练七(含重点典型题)	(284)
简明解答	(286)
第八章 常微分方程(含考试要点分析与题型预测)	(292)
§8-1 一阶微分方程 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(292)
§8-2 可降阶的高阶微分方程 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(299)
§8-3 高阶线性微分方程 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(301)
§8-4 微分方程的应用 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(312)
预测·强化训练八(含重点典型题)	(320)
简明解答	(321)

第六部分 线性代数

第九章 行列式(含考试要点分析与题型预测)	(327)
§9-1 n 阶行列式的概念	(327)
§9-2 行列式的性质	(327)
§9-3 行列式的计算方法	(328)
§9-4 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(329)
预测·强化训练九(含重点典型题)	(336)
简明解答	(337)
第十章 矩阵(含考试要点分析与题型预测)	(340)
§10-1 矩阵的运算	(340)
§10-2 特殊矩阵	(341)
§10-3 逆矩阵	(342)
§10-4 矩阵的秩与初等变换	(343)
§10-5 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(345)
预测·强化训练十(含重点典型题)	(357)
简明解答	(358)
第十一章 向量(含考试要点分析与题型预测)	(360)
§11-1 向量组的线性相(无)关	(360)
§11-2 向量组的秩与矩阵的秩	(361)
§11-3 n 维向量空间 R^n 的基和坐标	(362)
§11-4 内积、标准正交基和 Schmidt 正交化	(362)

§ 11 - 5 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(363)
预测·强化训练十一(含重点典型题)	(372)
简明解答	(372)
第十二章 线性方程组(含考试要点分析与题型预测)	(375)
§ 12 - 1 n 个 n 元线性方程组与克莱姆(Cramer)法则	(375)
§ 12 - 2 齐次线性方程组	(376)
§ 12 - 3 非齐次线性方程组	(377)
§ 12 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(378)
预测·强化训练十二(含重点典型题)	(392)
简明解答	(393)
第十三章 矩阵的特征值和特征向量(含考试要点分析与题型预测)	(396)
§ 13 - 1 矩阵的特征值和特征向量	(396)
§ 13 - 2 相似矩阵与对角化	(397)
§ 13 - 3 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(398)
预测·强化训练十三(含重点典型题)	(409)
简明解答	(410)
第十四章 二次型(含考试要点分析与题型预测)	(412)
§ 14 - 1 二次型概念及其矩阵表示	(412)
§ 14 - 2 化二次型为标准形、规范形	(413)
§ 14 - 3 正定二次型与正定矩阵	(413)
§ 14 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(414)
预测·强化训练十四(含重点典型题)	(421)
简明解答	(422)

第七部分 概率论与数理统计

第十五章 随机事件与概率(含考试要点分析与题型预测)	(424)
§ 15 - 1 随机事件	(424)
§ 15 - 2 随机事件的概率	(426)
§ 15 - 3 事件的独立性	(428)
§ 15 - 4 独立重复试验	(429)
§ 15 - 5 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(429)
预测·强化训练十五(含重点典型题)	(438)
简明解答	(439)

第十六章 随机变量及其概率分布(含考试要点分析与题型预测)	(443)
§ 16 - 1 随机变量及其分布	(443)
§ 16 - 2 随机变量分类	(444)
§ 16 - 3 随机变量函数的分布	(447)
§ 16 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(447)
预测·强化训练十六(含重点典型题)	(457)
简明解答	(458)
第十七章 二维随机变量及其概率分布(含考试要点分析与题型预测)	(461)
§ 17 - 1 二维随机变量及其分布	(461)
§ 17 - 2 二维随机变量的边缘分布及条件分布	(463)
§ 17 - 3 随机变量的独立性	(464)
§ 17 - 4 两个随机变量简单函数的概率分布	(464)
§ 17 - 5 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(465)
预测·强化训练十七(含重点典型题)	(482)
简明解答	(484)
第十八章 随机变量的数字特征(含考试要点分析与题型预测)	(489)
§ 18 - 1 随机变量的数学期望	(489)
§ 18 - 2 随机变量的方差	(490)
§ 18 - 3 随机变量的矩与相关系数	(490)
§ 18 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(491)
预测·强化训练十八(含重点典型题)	(503)
简明解答	(505)
第十九章 大数定律与中心极限定理(含考试要点分析与题型预测)	(508)
§ 19 - 1 切比雪夫不等式	(508)
§ 19 - 2 大数定律	(508)
§ 19 - 3 中心极限定理	(509)
§ 19 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(509)
预测·强化训练十九(含重点典型题)	(512)
简明解答	(513)
第二十章 数理统计的基本概念(含考试要点分析与题型预测)	(514)
§ 20 - 1 总体、个体、样本和统计量	(514)
§ 20 - 2 抽样分布	(515)
§ 20 - 3 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(517)

预测·强化训练二十(含重点典型题)	(521)
简明解答	(522)
第二十一章 参数估计(含考试要点分析与题型预测)	(525)
§ 21 - 1 点估计	(525)
§ 21 - 2 估计量的评选标准	(526)
§ 21 - 3 区间估计	(526)
§ 21 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(527)
预测·强化训练二十一(含重点典型题)	(536)
简明解答	(537)
第二十二章 假设检验(含考试要点分析与题型预测)	(541)
§ 22 - 1 假设检验的基本思想和两类错误	(541)
§ 22 - 2 假设检验的步骤	(541)
§ 22 - 3 典型例题分析与最新考试题型预测(含命题预测)	(542)
预测·强化训练二十二(含重点典型题)	(545)
简明解答	(546)

历年真题常考点分布及命题规律透视

第一部分 一元函数微分学

第一章：函数、极限、连续

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
函数概念与性质	3	3			2	4	4	4	3	2	25
极限	5	3	5		3	10	2	4	4	2	38
洛必达法则	3		2		6	4	2		4	6	27
无穷小	3				6		4		4	4	21
函数的连续与间断	2	3		2		2		5		2	16
合计	16	9	7	2	17	20	12	13	15	16	127

数学二试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
函数概念与性质		3	5	4	3	2	5	4	4	2	32
极限	6	10	3		12	6	12	15	9	2	75
洛必达法则	8	5	3	3		5	2	7		4	37
无穷小	5	1	2	3	11	4	4	4	4	6	44
函数的连续与间断	5	3	5	7	3	5	4	9	4	4	49
合计	24	22	18	17	29	22	27	39	21	18	237

第二章：一元函数微分学

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
导数概念及应用	3	3		3	5		8	4	4	6	36
微分概念与微分法	3	2		6	3	3	2	4	4		27
微分中值定理	4		6	7			3	7	3	11	41
极值与最值问题			2	3	2	4	2		3		16
几何上的应用		1	3	3	4		4	6	4		25
不等式		6	3				12				21
合计	10	12	14	22	14	7	31	21	18	17	166

数学二试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
导数概念及应用	3		3	3	6		11	4	4	10	44
微分概念与微分法	3		5		6	16	2	4	4	4	44
微分中值定理	2	8	2	8	2	14	3	7	5	13	64
极值与最值问题	11	4	4		3	4	4	5		6	41
几何上的应用	6	8	6	5	3	15	6	11	9	4	73
不等式	8		8	3	8		12				39
合计	33	20	28	19	28	49	38	31	22	37	305

第二部分 一元函数积分学

第三章：不定积分、定积分、广义积分及其应用

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
不定积分	4		4	2		3	4	4	4		25
定积分定义和性质	6		3		3	4	2	8	4	4	34
换元积分法	2	2		3	3			5	3		18
分部积分法			3	3		2		13	6	4	31
变上限定积分	5	4	3		2		4	4	4	2	28
广义积分	3	4			3	4	4	6	4		28
定积分应用		6	3			16			7		32
合计	20	16	16	8	11	29	14	40	32	10	196

数学二试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
不定积分	9	3	5	4	3		4	4	5		37
定积分定义和性质			14	9	8	4	11	11	8	4	69
换元积分法	4	2	3	8		4	2	6	4		33
分部积分法	3	2	6	3	5	4		13	6	4	46
变上限定积分	5	2		7	2	4	2	8		4	34
广义积分	6	6	3		3		4	4			26
定积分应用	10	10	9	5	9	10	8	11	9	5	86
合计	37	25	40	36	30	26	31	57	32	17	331

第三部分 多元函数微分学

第四章：空间解析几何与多元函数微分学

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
空间解析几何	5										5
连续、可导、可微及它们之间的关系					3						3
切向量、法向量、切平面、法线		3	3	3		4					13
偏导数、全微分、复合函数与隐函数求导	3	3	5	6				12	12	6	47
极值、条件极值					7	4	12			11	34
合计	8	6	8	9	10	8	12	12	12	17	102

数学二试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
空间解析几何											
连续、可导、可微及它们之间的关系											
切向量、法向量、切平面、法线											
偏导数、全微分、复合函数与隐函数求导							14	14	12	14	54
极值、条件极值											
合计							14	14	12	14	54

第四部分 多元函数积分学

第五、六章：重积分及其应用、曲线积分与曲面积分

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
选用适当的坐标计 算二重积分及应用			3	11	7			11	9	4	45
选用适当的坐标计 算三重积分及应用			7			12					19
直接或利用格林、高斯 公式计算曲线积分	3	5	6	7		10	4			10	45
曲线积分与路 径无关问题	6				8			12	12		38
直接或利用斯氏公 式计算曲面积分	7	7	7				12	4		4	41
梯度与散度				3							3
合计	16	12	23	21	15	22	16	27	21	18	191

数学二试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
选用适当的坐标计 算二重积分及应用							4	13	12	15	44
选用适当的坐标计 算三重积分及应用											
直接或利用格林、 高斯公式计算曲线积分											
曲线积分与路 径无关问题											
直接或利用斯氏 公式计算曲面积分											
梯度与散度											
合计							4	13	12	15	44

第五部分 级数与微分方程

第七章： 无穷级数 数二不考

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
常数级数敛散性	5		3				15				23
常数项级数求和		7		2		2				4	15
幂级数的收敛半径、 收敛区间收敛域			6					3	4	4	17
幂级数展开				6		10			4		20
幂级数求和函数					5			9	4		18
傅立叶级数		3				4					7
合计	5	10	9	8	5	16	15	12	12	8	100

第八章： 常微分方程

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
一阶微分方程								4	4		8
可降阶的二 阶微分方程					3					11	14
二阶和某些高于 二阶常系数齐次 线性微分方程		3		3	2					6	14
二阶线性常数系数 非齐次微分方程						12			12	4	28
微分方程典型应用题	6										6
微分方程典型应用题	6										6
欧拉方程							4				4
合计	12	3		3	5	12	4	4	16	21	80

数学二试题考点分数统计

分 数 年 份 考 点	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
一阶微分方程		7						4	4		15
可降阶的二阶 微分方程					3						3
二阶和某些高于 二阶常系数齐次 线性微分方程	5							12	9		26
二阶线性常数系数 非齐次微分方程		3				12				4	19
微分方程典型应用题		3				12					15
微分方程典型应用题	6	4	7	7		6	11				41
欧拉方程											
合计	11	17	7	7	3	30	11	16	13	4	119

第六部分 线性代数

第九章： 行列式

数学一试题考点分数统计

分 数 年 份 考 点	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
高阶行列式计算											
行列式性质与计算		3		3			2	4	4		16
合计		3		3			2	4	4		16

数学二试题考点分数统计

分 数 年 份 考 点	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
高阶行列式计算											
行列式性质与计算		3				3	2	4	4		16
合计		3				3	2	4	4		16

第十章：矩 阵

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
矩阵运算、逆 矩阵、矩阵方程	3		12	3			6		4		28
矩阵的秩										4	4
分块矩阵											
伴随矩阵						2			2		4
初等变换、初等 方阵、等价矩阵								4	4		8
方阵的行列式											
几何与矩阵相结合	3				3						6
合计	6		12	3	3	2	6	4	10	4	50

数学二试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
矩阵运算、逆 矩阵、矩阵方程	5	6	3	6	8	3	6		4		41
矩阵的秩										4	4
分块矩阵											
伴随矩阵											
初等变换、初等 方阵、等价矩阵								4	4		8
方阵的行列式											
几何与矩阵相结合											
合计	5	6	3	6	8	3	6	4	8	4	53

第十一章：向 量

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
线性组合与线性表示			3								3
线性相关与线性无关	4					3	4	4	4	4	23
极大无关组与秩											
向量组的秩 与矩阵的秩											
等价向量组											
向量空间、基变换 与坐标变换过渡矩阵						3					3
正交规范化法											
合计	4		3			6	4	4	4	4	29

数学二试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
线性组合与线性表示	8		7					5	4		24
线性相关与线性无关		3			3		4	4		4	18
极大无关组与秩		2									2
向量组的秩 与矩阵的秩											
等价向量组											
向量空间、基变换 与坐标变换过渡矩阵											
正交规范化法											
合计	8	5	7		3		4	9	4	4	44

第十二章： 线性方程组

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
克莱姆法则											
齐次方程组的判定、 基础解系、通解						3				4	7
非齐次方程组解的 判定、解的结构、通解	5			6					4		15
带参数的方程的求解		5	3				9	9	9	7	42
一般方程组的求解					6						6
两个方程组 的同解问题											
几何与方程组结合						8					8
合计	5	5	3	6	6	11	9	9	13	11	78

数学二试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
克莱姆法则											
齐次方程组的判定、 基础解系、通解				6						4	10
非齐次方程组解的判 定、解的结构、通解			6								6
带参数的方程的求解		3		3			9	4	9	7	35
一般方程组的求解					6						6
两个方程组 的同解问题											
几何与方程组结合						8					8
合计		3	6	9	6	8	9	4	9	11	65

第十三章： 矩阵的特征值和特征向量

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
特征值和特征向量 概念、性质和计算	3	6	2		3	8		6	4	11	43
相似矩阵概念、 性质与应用				8						2	10
一般方阵的相 似与对角化											
实对称矩阵的 特征值与特征 向量的性质、计算											
含参数的矩阵对角化							9		4		13
合计	3	6	2	8	3	8	9	6	8	13	66

数学二试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
特征值和特征向量 概念、性质和计算					3					11	14
相似矩阵概念、 性质与应用										2	2
一般方阵的相 似与对角化						10					10
实对称矩阵的特 征值与特征向 量的性质、计算											
含参数的矩阵对角化							9				9
合计					3	10	9			13	35

第十四章： 二次型 数二不考

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
二次型的矩阵表示、秩、标准形、规范形					3				4		7
相似矩阵的概念与性质					8					4	12
用正交变换化二次型为标准形及几何应用	6							3	4		13
正定性概念及其判定		6									6
合计	6	6			11			3	8	4	38

第七部分 概率论与数理统计 （数二不考）

第十五章： 随机事件与概率

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
事件的关系与运算											
概率与条件概率的概念	3					5			4	4	16
古典型概率与几何型概率											
概率的性质与计算公式		3	3						3		9
事件的独立性											
独立重复试验	作为二项分布放在下章“常用分布”中统计										
合计	3	3	3			5			7	4	25

第十六章： 随机变量及其概率分布

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
一维离散型随机变量分布								4	4		8
一维连续型随机变量分布					3		4				7
一维随机变量函数的分布											
常见分布							4				4
分布函数					3	5					8
合计					6	5	8	4	4		27

第十七章： 二维随机变量及其概率分布

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
多维随机变量表达的事件的概率		7				4			4	8	23
多维离散型随机变量的分布				7							7
多维连续型随机变量的分布	3						6			6	15
多维随机变量函数的分布								5	4		9
随机变量的独立性		4						8			12
合计	3	11		7		4	6	13	8	14	66

第十八章： 随机变量的数字特征

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
均值、方差的计算			8			5		5	4		22
一维随机变量函数的数字特征计算					7						7
多维随机变量函数数字特征计算	6										6
协方差、相关系数,不相关			3	3			7	4			17
合计	6		11	3	7	5	7	9	4		52

第十九章： 大数定律和中心极限定理

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
切比雪夫不等式				3							3
大数定律											
中心极限定理											
合计				3							3

第二十章： 数理统计的基本概念

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
总体、样本等概念											
抽样分布	4			7		4		4	4		23
合计	4			7		4		4	4		23

第二十一章： 参数估计

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
矩估计		3			3		4			5	15
最大似然估计			6		4		5		4		19
估计量的性质		3				3				6	12
区间估计						4					4
合计		6	6		7	7	9		4	11	50

第二十二章： 假设检验

数学一试题考点分数统计

分 数 考 点 \ 年 份	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	合计
假设检验的两类错误											
正态总体参数的假设检验	4										4
合计	4										4

注 :由于部分考题涉及多个知识点的考察 ,所以每年的总分统计一般超过 150.

第一部分 一元函数微分学

第一章 函数、极限、连续*

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.
10. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

考试要点分析与题型预测

这一章的考试要点有

1. 复合函数,特别是由分段表示的函数的复合函数和由 $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ 所确定的复合函数.
2. 有界函数、无界函数、周期函数、奇函数、偶函数、单调函数、反函数、初等函数等等的概念.
3. 极限定义、极限基本运算法则.
4. 利用两个重要极限求极限.
5. 无穷小量的基本运算法则,等价无穷小量因子代换.
6. 无穷小量阶的比较.
7. 利用洛必达法则求未定式,即会确定 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ , ∞^0 , 0^∞ 等型未定式的值.
8. 单调有界原理和夹逼定理.
9. 连续函数定义.
10. 函数间断点的类型.
11. 有限闭区间上连续函数的有界性定理、介值定理和最大值最小值定理.
12. 零点定理.

以上这些都是考试的热点内容,特别关于极限的基本运算法则,利用洛必达法则求未定式,在有限闭区间上连续函数的性质,无穷小量阶的比较以及利用两个重要极限求极限等部分更是热点中之尤热者,几乎每年都要考到,读者务必熟练掌握.近年来利用单调有界原理,夹逼定理来判断极限的存在,已知极限去确定极限中某些常数,讨论复合函数的连续性和间断点的类型,利用介值定理判断一个连续函数在给定区间上零点的个数等等都是经常出现的题型.

* 函数、极限、连续,数学一、数学二要求完全相同

§ 1 - 1 一元函数概念

1. 绝对值定义及其运算

绝对值定义 $|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \\ -x, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$

绝对值运算 $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ $|ab| = |a| |b|$
 $\left| \frac{b}{a} \right| = \frac{|b|}{|a|}$ $|a| - |b| \leq |a - b|$
 $|x| < \varepsilon \longleftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$

2. 区间与邻域

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$

闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

半开半闭区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$

a 的 δ 邻域记作 $U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$

3. 一元函数定义 设 x 和 y 是两个变量, I 是一个给定的数集. 如果对于每一个数 $x \in I$ 按照一定的法则总有确定的 y 值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, $x \in I$. 其中 x 称作自变量, y 称作因变量, I 称做函数的定义域. f 表示 x 与 y 间的对应法则, y 所取得的值的集合称为 $f(x)$ 的值域.

两个函数相同, 是指两函数的定义域相同, 对应法则相同. 这二者称为函数定义中的两个要素. 至于用什么记号表示自变量, 什么记号表示因变量无关紧要.

4. 单调函数 若 $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$ 时总有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上为单调增函数. 若当 $x_1 < x_2$ 时总有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上为单调减函数. 若 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上为严格单调增函数. 同样可定义严格单调减函数. 单调增函数和单调减函数统称单调函数.

5. 有界函数 设 $f(x)$ 在 I 上有定义且存在正数 M , 使 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上为有界函数.

6. 无界函数 设 $f(x)$ 在 I 上有定义, 若对于任意正数 M , 总存在 $x_1 \in I$, 使 $|f(x_1)| > M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上为无界函数.

7. 奇函数、偶函数 设 $f(x)$ 在 I 有定义, 其中 I 对称于点 $x = 0$, 当对于 I 中任一 x 值恒有 $f(-x) = -f(x)$ 时, 则称 $f(x)$ 是奇函数. 恒有 $f(-x) = f(x)$ 时, 则称 $f(x)$ 是偶函数.

8. 周期函数 若存在最小的正数 T , 对于 $f(x)$ 的定义域上的每个 x 值, 恒有 $f(x \pm T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 在其定义域上是以 T 为周期的周期函数.

9. 复合函数 设 $u = \varphi(x)$, $x \in I_1$, $u \in I_2$. 又 $y = f(u)$, $u \in I_2$, 则 $y = f[\varphi(x)]$, $x \in I_1$ 称作 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数, 其中 u 称做中间变量, I_1 是 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

10. 反函数 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , $f(x)$ 的值域为 J . 若对于 J 中的每一个 y 值, 由 $y = f(x)$ 有唯一的一个 $x \in I$ 与之对应, 则在 J 上确定 x 为 y 的函数, 记为 $x = \varphi(y)$, 称为 $y = f(x)$ 的反函数.

在 xOy 直角坐标系上, $y = f(x)$, $x \in I$ 与 $x = \varphi(y)$, $y \in J$ 表示的是同一曲线, 但是 $y = f(x)$, $x \in I$ 与 $y = \varphi(x)$, $x \in J$ 所表示的曲线对称于直线 $y = x$, 并且有恒等式 $f[\varphi(y)] = y$, $y \in J$ 及 $\varphi[f(x)] = x$, $x \in I$.

反函数存在定理 若函数 $y = f(x)$ 在 I 上严格单调, 其值域设为 J , 则在 J 上存在严格单调的反函数 $x = \varphi(y)$, 其值域为 I , 且 $f(x)$ 与 $\varphi(y)$ 具有相同的单调性. 又若 $f(x)$ 在区间上连续, 则 $\varphi(y)$ 也在区间 J 上连续.

11. 基本初等函数 是指常值函数, 幂函数 x^a , 指数函数 a^x ($a > 0$, $a \neq 1$), 对数函数, 三角函数, 反三角函数等六类函数.

12. 初等函数 由基本初等函数经有限次的加、减、乘、除复合而成并且能用一个解析式表出的函数称为初等函数.

§ 1 - 2 极限、连续

一、极限

1. 数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义

如果一个数列 $a_n (n = 1, 2, \dots)$ 与一个确定的常数 A 之间有如下关系: 任意给定一个正数 ε , 无论它怎样小, 相应地必有一个正数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 不等式

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

成立. 那么称常数 A 为数列 a_n 当 $n \rightarrow +\infty$ 时的极限, 或者说 a_n 在 $n \rightarrow +\infty$ 时收敛于 A , 记作

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$$

而 $a_n (n = 1, 2, \dots)$ 就称为收敛数列(注: 数列 a_n 中的 n 表示正整数, 一般把 $n \rightarrow +\infty$ 常简记为 $n \rightarrow \infty$)

2. 函数极限的 $\varepsilon - \mathcal{M}$ 定义

如果定义于 $x \geq a$ 的函数 $y = f(x)$ 与一个确定的常数 A 有如下关系: 任意给定一个正数 ε , 无论它怎样小, 相应地必存在另一个正数 $\mathcal{M}(\varepsilon)$, 使得在 $x > \mathcal{M}(\varepsilon)$ 时, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立. 那么称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 或者说函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时收敛于 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

类似地 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义是: 设 $x \leq a$, $y = f(x)$ 有定义, 对于任意给定一个正数 ε , 无论它怎样小, 相应地必存在另一正数 $\mathcal{M}(\varepsilon)$, 使得在 $x < -\mathcal{M}(\varepsilon)$ 时, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的定义是: 设 $|x| \geq a (a > 0)$, $y = f(x)$ 有定义, 对于任意给定一个正数 ε , 无论它怎样小, 相应地必存在另一正数 $\mathcal{M}(\varepsilon)$, 使得在 $|x| > \mathcal{M}(\varepsilon)$ 时, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立. 这里 $x \rightarrow \infty$ 视作 $|x| \rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 的定义是: 设 $x \geq a$, $y = f(x)$ 有定义, 对于任意给定一个正数 M , 无论它怎样大, 相应地必存在另一正数 $\mathcal{M}(\varepsilon)$, 使得在 $x > \mathcal{M}(\varepsilon)$ 时, 不等式 $f(x) > M$ 成立. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 成立时, 我们仍说极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在.

不难依此类推得 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 等等的相应定义.

3. 函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义

如果定义于 ζ 的某一邻域(点 ζ 本身可以除外)的一个函数 $y = f(x)$ 与一个确定的常数 A 有如下关系: 任意给定一个正数 ε , 无论它怎样小, 相应地必有另一个正数 $\delta(\varepsilon)$, 凡是满足 $0 < |x - \zeta| < \delta(\varepsilon)$ 的一切 x , 都使不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立. 那么称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \zeta$ 时的极限, 或者说 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \zeta$ 时收敛于 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow \zeta} f(x) = A$$

或 当 $x \rightarrow \zeta$ 时, $f(x) \rightarrow A$

我们把 x 从 ζ 的左侧(即 $x < \zeta$) 趋近 ζ 记作 $x \rightarrow \zeta_-$, 而把 x 从 ζ 的右侧(即 $x > \zeta$) 趋近 ζ 记作 $x \rightarrow \zeta_+$.

在上述 $\varepsilon - \delta$ 定义中, 把 $0 < |x - \zeta| < \delta$ 换成 ζ 的左邻域:

$$0 < \zeta - x < \delta \quad \text{即} \quad \zeta - \delta < x < \zeta$$

就变成了函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \zeta_-$ 时极限的定义. 这时称 A 为 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \zeta$ 的左极限, 记作 $f(\zeta - 0)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow \zeta_-} f(x) = f(\zeta - 0)$$

同理, 在上述 $\varepsilon - \delta$ 定义中, 把 $0 < |x - \zeta| < \delta$ 换成 ζ 的右邻域:

$$0 < x - \zeta < \delta \quad \text{即} \quad \zeta < x < \zeta + \delta$$

就变成了函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \zeta_+$ 时极限的定义. 这时称 A 为 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \zeta$ 的右极限, 记作 $f(\zeta + 0)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow \zeta^+} f(x) = f(\zeta + 0)$$

由极限与左、右极限的定义显然可以立即得出: 极限存在的充要条件是左、右极限均存在且相等.

亦即
$$\lim_{x \rightarrow \zeta} f(x) = A \Leftrightarrow f(\zeta - 0) = f(\zeta + 0) = A$$

凡是考虑分段函数在分界点处函数 $f(x)$ 的极限是否存在时, 常常用左、右极限来判定. 同样在研究分段函数在分界点处的连续性和可导性也常常用到左、右极限这两个概念.

4. 关于极限运算的几个基本定理

(1) 单调有界原理 单调增(减)而有上(下)界的数列必存在极限;

(2) 如果在 $x \rightarrow \zeta$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时 $f(x) \rightarrow A, g(x) \rightarrow B$, 则

$$1) f(x) \pm g(x) \rightarrow A \pm B; \quad 2) f(x)g(x) \rightarrow AB;$$

$$3) \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B} \quad B \neq 0; \quad 4) kf(x) \rightarrow kA \quad k \text{ 是常数};$$

(3) 如果当 $x \rightarrow \zeta$ (或者当 $x \rightarrow \infty$) 时 $f(x) \rightarrow A, g(x) \rightarrow B$, 且

$$f(x) \leq g(x)$$

则必有
$$A \leq B$$

(4) 夹逼定理 如果在 $x \rightarrow \zeta$ (或者 $x \rightarrow \infty$) 时 $g(x) \rightarrow A, h(x) \rightarrow A$, 且有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

那么当 $x \rightarrow \zeta$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 必有 $f(x) \rightarrow A$

(5) 洛必达法则 若(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在点 ζ 某一邻域内可导, (点 ζ 可以除外) 且 $g'(x) \neq 0$, (2) 在 $x \rightarrow \zeta$ 时 $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$ (或 $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$), (3) 在 $x \rightarrow \zeta$ 时 $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \lambda$, 则有 $\lim_{x \rightarrow \zeta} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$

5. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e).$$

6. 在 $x \rightarrow \zeta$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时收敛于零的函数 $f(x)$ 称为当 $x \rightarrow \zeta$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小量, 简称无穷小量. 非零无穷小量的倒数为无穷大量.

7. 无穷小量阶的比较

设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是当 $x \rightarrow \zeta$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小量.

1) 若 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \rightarrow 0$, 则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量, 而 $\beta(x)$ 称为 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小量, 记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$

2) 若 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \rightarrow c \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量, 记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$

3) 若 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \rightarrow 1$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量, 记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

无穷小量与无穷小量阶的比较都是重要的概念, 它们将在微分学中得到广泛应用.

8. 关于无穷小量的几个基本定理

1) 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \zeta$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时有极限 A 的充要条件是当 $x \rightarrow \zeta$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时 $f(x) - A$ 为无穷小量;

2) 有限个无穷小量的代数和也是一个无穷小量;

3) 有限个无穷小量的乘积还是一个无穷小量;

4) 无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量.

二、连续

1. $f(x)$ 在 x_0 连续的定义

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义, 而且满足等式

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 连续.

如引用极限 $\varepsilon - \delta$ 定义, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续定义为: 任给一个 $\varepsilon > 0$, 相应地有一个 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立.

类似函数的左、右极限的概念, 我们又可进一步定义: 如

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

成立时, 就分别称 $f(x)$ 在 x_0 左连续或右连续.

显然, $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 左、右连续.

在上述定义中, 令 $x = x_0 + \Delta x$, 等式又可写成

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

其中 Δx 表示自变量从 x_0 到 x 的变化, 称为自变量的增量(或叫改变量), 而 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 当自变量取得增量 Δx 后相应地发生的变化, 称为函数的增量, 记作 Δy , 于是上式又可写成 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

这是 $f(x)$ 在 x_0 处连续定义的等价表达式, 因此所谓函数在某一点连续, 就是说, 当自变量增量趋于零时, 函数的增量是一个无穷小. 这也精确地反映了物理中的连续变化现象.

若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上每一点处都连续, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且在点 a 处右连续, 在点 b 处左连续, 则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

2. $f(x)$ 的间断点

如果 $y = f(x)$ 在点 x_0 不连续, 就称它在 x_0 间断, 或说点 x_0 是它的间断点. 有各种不同的间断点, 我们把它分类如下:

(1) 若在 x_0 $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ 都存在, 则称间断点 x_0 为第一类间断点, 它们又可分为:

1) 在 x_0 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ (或 $f(x_0)$ 无定义) 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点. 事实上在这种情况下, 重新定义 $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 就可使 $f(x)$ 在 x_0 连续.

2) $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ 则称点 x_0 为跳跃间断点.

(2) 第一类间断点以外的间断点, 称为第二类间断点. 在第二类间断点处, $f(x)$ 的左、右极限至少有一个不存在. 第二类间断点常见的有:

1) 当 $x \rightarrow x_0$ $f(x) \rightarrow \infty$ 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点;

2) 当 $x \rightarrow x_0$ $f(x)$ 振荡发散(譬如 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处附近), 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

3. 关于连续函数的几个基本定理

(1) 有限个连续函数的和、差、积、商(使分母等于零的点除外)仍是连续函数; 由有限个连续函数复合起来的函数在它的定义区间内仍是连续函数;

(2) 任何初等函数都在它的定义区间内连续;

(3) 维尔斯特拉斯 K. Weierstrass 定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界且有最大值与最小值. 即在 $[a, b]$ 上存在 x_1 与 x_2 使得对 $[a, b]$ 上所有的 x 有 $f(x_1) \geq f(x)$ 及 $f(x_2) \leq f(x)$;

(4) 介值定理 在 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必取得介于区间两端点的函数值之间的任何值. 即若 $f(a) < \mu < f(b)$ (或 $f(b) < \mu < f(a)$) 则在区间 (a, b) 内至少有一点 ξ 使 $f(\xi) = \mu$.

(5) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 若 $f(a)f(b) < 0$, 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ 使 $f(\xi) = 0$.

§ 1 - 3 典型例题分析与最新考试题型预测

典型题型 1. 以下讨论绝对值不等式、函数定义域

例 1 解不等式 $|x + 2| + |x + 3| < 11$.

分析 带有绝对值记号的题, 一般常据数的绝对值定义去掉绝对值处理之. 像本题 $x + 2$ 有非负、负两种

可能情况 $x - 3$ 也有非负、负两种可能情况 $2 \times 2 = 4$, 共有四种可能情况, 今就四种可能情况分别讨论之.

解 第一种情况 $x + 2 \geq 0$ 且 $x - 3 \geq 0$ 时, 也就是在 $[-2, +\infty)$ 与 $[3, +\infty)$ 的共同部分 $[3, +\infty)$ 上求解原绝对值不等式. 不等式 $|x + 2| + |x - 3| < 11$ 化为

$$x + 2 + x - 3 < 11 \quad \text{即} \quad 2x < 12, \quad \text{即} \quad x < 6.$$

故第一种情况的解集为 $(-\infty, 6) \cap [3, +\infty) = [3, 6)$.

第二种情况 $x + 2 \geq 0$ 且 $x - 3 < 0$ 时, 也就是在 $[-2, +\infty)$ 与 $(-\infty, 3)$ 的共同部分 $[-2, 3)$ 上求解原绝对值不等式. 原不等式去掉绝对值记号, 化为

$$x + 2 - (x - 3) < 11 \quad \text{即} \quad 5 < 11 \quad (\text{此式恒成立})$$

这表示对于 $-2 \leq x < 3$ 上任一 x 值, 不等式 $|x + 2| + |x - 3| < 11$ 恒成立.

第三种情况 $x + 2 < 0$ 且 $x - 3 \geq 0$ 时, 即 $(-\infty, -2) \cap [3, +\infty) = \varnothing$ 是一空集, 即此时无解.

第四种情况 $x + 2 < 0$ 且 $x - 3 < 0$ 即在 $(-\infty, -2) \cap (-\infty, 3) = (-\infty, -2)$ 上求解原绝对值不等式, 原绝对值不等式去掉绝对值记号化为

$$-(x + 2) - (x - 3) < 11 \quad \text{即} \quad -2x < 10 \quad \text{即} \quad x > -5$$

此时的解集为 $(-5, +\infty) \cap (-\infty, -2) = (-5, -2)$

由以上四种情况分析, 知使原绝对值不等式

$$|x + 2| + |x - 3| < 11$$

成立的 x 的点集为

$$(-5, -2) \cup [-2, 3) \cup [3, 6) = (-5, 6)$$

亦即该不等式所求解为 $-5 < x < 6$.

评述 在高等数学的论证和求解中, 经常要处理绝对值或绝对值不等式. 按照绝对值定义处理绝对值是经常使用的方法. 以后遇到带有绝对值的式子, 不妨都像本题那样去处理. 在考研题中, 带绝对值式子, 屡屡出现, 读者务必要掌握关于绝对值的处理方法.

例 2* 求函数 $y = \lg \frac{x+1}{x-2} + \arcsin \frac{2x+1}{3}$ 的定义域

分析 先求出 $\lg \frac{x+1}{x-2}$ 的定义域, 再求出 $\arcsin \frac{2x+1}{3}$ 的定义域, 二者的共同部分, 便是所求的定义域

解 先求 $y_1 = \lg \frac{x+1}{x-2}$ 的定义域.

因 $\lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 故只有 $\frac{x+1}{x-2}$ 为正数时, $\lg \frac{x+1}{x-2}$ 才有意义. 而 $\frac{x+1}{x-2}$ 与 $(x+1)(x-2)$ 同时为正, 同时为负, 容易看出: 当 $x > 2$ 或 $x < -1$ 时, $(x+1)(x-2)$ 为正, 故 $y_1 = \lg \frac{x+1}{x-2}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

其次, 考虑 $y_2 = \arcsin \frac{2x+1}{3}$ 的定义域.

因 $\arcsin x$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 故只有当 $-1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 1$ 时, $\arcsin \frac{2x+1}{3}$ 才有意义. 对 $-1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 1$ 各端同乘以 3, 不等号方向不变, 得 $-3 \leq 2x+1 \leq 3$, 不等式各端同加 -1 得 $-4 \leq 2x \leq 2$, 即 $-2 \leq x \leq 1$, 所以 $y_2 = \arcsin \frac{2x+1}{3}$ 的定义域为 $[-2, 1]$

使 $y_1 = \lg \frac{x+1}{x-2}$ 与 $y_2 = \arcsin \frac{2x+1}{3}$ 同时有定义的数集, 即二者的交集 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ 与 $[-2, 1]$ 的交集为 $[-2, -1)$. 因此 $y = \lg \frac{x+1}{x-2} + \arcsin \frac{2x+1}{3}$ 的定义域为 $[-2, -1)$.

评述 函数概念两大要素即定义域与对应法则, 一般无特殊说明时, 初等函数的定义域是其自然定义域, 即使解析式有定义的点的集合, 换句话说, 是使解析式有确定值的实数的全体. 在全国统考的历年考研试题中直接求函数定义域的题达多次, 至于间接地考到函数定义域的题就屡见不鲜了.

例3 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-1, 2)$ 求 $y = f(\lg x)$ 的定义域.

解 因 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 2)$, $\lg x$ 表示以 10 为底的对数, 故在 $f(\lg x)$ 中必须要求 $-1 \leq \lg x < 2$, 亦即 $10^{-1} \leq x < 10^2$, 可见 $f(\lg x)$ 的定义域为 $0.1 \leq x < 100$.

评述 求函数定义域时, 要注意某些限制: 如分式中解分母不能为零, 对数中的真数不能为负, 且底数为不等于 1 的正数, 根式中的负数不能开偶次方, $\arcsin x$, $\arccos x$ 的定义域均为 $[-1, 1]$, ... 等等.

例4 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$ 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

分析 利用 $g = e^t$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增加函数, 求出 e^t 的反函数, 再利用已知条件 $\varphi(x) \geq 0$ 求出 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的定义域.

解 因已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$, 由于 e^t 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调(增加)函数, 必存在反函数 $\varphi^2(x) = \ln(1 - x)$, $1 - x \geq 1$, 即 $x \leq 0$, 已知条件为 $\varphi(x) \geq 0$, 故 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)}$ ($x \leq 0$)

评述 e^{x^2} 的值域为 $[1, +\infty)$, 所求函数 $\varphi(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 为使 $0 \leq \varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)} < +\infty$, 必有 $-1 < x \leq 0$. 这是 1988 年的一道统考题, 试卷一、试卷四都考了这题, 这道题考查了以下各个基本初等函数 $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = \sqrt{x}$ 的单调性、值域、定义域和反函数概念等等知识点. 基本初等函数的图形及性质必须熟练掌握, 常常会直接或间接考到这些内容.

典型题型 2. 以下讨论函数某些性质

例5* 检验下列函数的奇偶性 1) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + 2\sin x^3$ 2) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ 3) $f(x) = |x| - 5e^{x^2}$ 4) $f(x) = \ln \frac{x+3}{x-3}$.

分析 奇函数满足等式 $f(-x) = -f(x)$, 偶函数满足等式 $f(-x) = f(x)$. 奇函数 $\pm$ 奇函数 = 奇函数, 偶函数 $\pm$ 偶函数 = 偶函数, 奇函数 $\times$ 奇函数 = 偶函数, 偶函数 $\times$ 偶函数 = 偶函数, 奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数. 利用奇偶函数的定义以及以上这些性质来判断这些函数的奇偶性十分方便.

解 1) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + 2\sin x^3$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$. $f(-x) = (-x)^2 \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x)^3 = -x^2 \sqrt[3]{x} - 2\sin x^3$, $f(-x) = -f(x)$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为奇函数;

2) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x)$, $f(-x) = f(x)$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为偶函数;

3) $f(x) = |x| - 5e^{x^2}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, $f(-x) = |-x| - 5e^{(-x)^2} = |x| - 5e^{x^2} = f(x)$, $f(-x) = f(x)$, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 上为偶函数;

4) $f(x) = \ln \frac{x+3}{x-3}$, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, 关于原点对称. $f(-x) = \ln \frac{-x+3}{-x-3} = \ln \frac{x-3}{x+3} = -\ln \frac{x+3}{x-3} = -f(x)$, 即 $f(-x) = -f(x)$, 它是定义域上的一个奇函数.

评述 利用奇、偶函数的定义来判断一个函数是否具有奇偶性, 这是最基本的判别法, 也是最常用最通用的判别法, 因此在以上的解答中始终用这一方法, 让读者觉察到它的通用性, 即普遍性, 但通用性的解法未必是最简便的解法. 若注意到 $\sqrt[3]{x}$, $\sin x^3$ 为奇函数, x^2 , $|x|$, e^{x^2} 为偶函数, 则 1) 题为奇函数, 3) 题为偶函数便立刻知道了. 2) 4) 二小题, 非用奇、偶函数的定义来判断不可. 读者学习时, 首先要努力掌握通用性的解法, 在此基础上注意一些带有技巧性的解法、函数的奇偶性及其性质, 几乎是每年必考内容.

例6 求函数 $f(x) = \sin 6x + \tan 4x$ 的基本周期.

分析 若 $f(x)$ 为以 T_1 为基本周期的周期函数, 则 $f(kx)$ 的基本周期为 T_1/k : $f[k(x + \frac{T_1}{k})] = f(kx + T_1) = f(kx)$. 又若 $f(x)$ 的基本周期为 T_1 , $g(x)$ 的基本周期为 T_2 , T_1, T_2 的最小公倍数为 $T_3 = mT_1 = nT_2$ (其中 m, n 为正整数), 则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ 的基本周期为 T_3 .

解 $\sin x$ 的基本周期为 2π , $\sin 6x$ 的基本周期为 $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $\tan x$ 的基本周期为 π , $\tan 4x$ 的基本周期为 $\frac{\pi}{4}$,

而 $\frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{\pi}{4}$ 的最小公倍数为 π , 故 $f(x) = \sin 6x + \tan 4x$ 的基本周期为 π .

评述 当讨论由一些周期函数所构成的函数的性质时, 本例题所涉及的知识是有用的, 往年统考题中没有直接考过这个知识点, 但每年考研的统考中总出现一两个从来没有统考过的(在考试要求之内的)新的知识点.

例7 函数 $f(x) = x \sin x$

(A) 当 $x \rightarrow +$ 时为无穷大

(B) 在 $(- , +)$ 内有界

(C) 在 $(- , +)$ 内无界

(D) 当 $x \rightarrow$ 时有有限极限

分析 当选取 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$, 则 $|f(x_n)| = \left| (2n\pi + \frac{\pi}{2}) \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \right| =$

$\left| 2n\pi + \frac{\pi}{2} \right| \rightarrow +$ (当 $n \rightarrow \pm$), 另一方面, 当选取 $x_n = n\pi (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$, 则 $f(x_n) = n\pi \sin n\pi = 0 (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$. 由此可见当 $x \rightarrow +$ 时 $f(x)$ 不是无穷大, 当 $x \rightarrow$ 时, 也不存在有限极限, 故不能选(A)及(D).

不论 M 是如何大的正数, 总存在点 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 使 $|f(x_n)| = \left| 2n\pi + \frac{\pi}{2} \right| > 2n\pi > M$ 只要选取正整数 $n > M/2\pi$ 即可. (B) 亦不对, 由无界函数的定义, 知 $f(x) = x \sin x$ 在 $(- , +)$ 内无界.

解 应选(C)

评述 无界函数与无穷大是两个截然不同的概念, 不是无穷大也未必就是有界函数, 题中的四个概念务必严格区分, 像本例这样的题是经常要考的.

例8 (06 4分) 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x = 0$ 外处处连续, $x = 0$ 时其第一类间断点, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是()

(A) 连续的奇函数

(B) 连续的偶函数

(C) 在 $x = 0$ 间断的奇函数

(D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数

分析 因在 $[-a, a]$ 上 $f(x)$ 除在点 $x = 0$ 处外, 处处连续, $x = 0$ 又是 $f(x)$ 的第一类间断点, 故 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上为有界函数且为分段连续函数. 于是由定积分存在定理知 $\int_0^x f(t) dt$ 存在. 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 按照定义

$F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$. 用 M 表示满足关系 $|f(x)| \leq M (x \in [-a, a])$, 从而有

$$|F(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq M |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |F(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} M |x| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0).$$

可见 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在点 $x = 0$ 处连续.

$$\begin{aligned} \text{当 } x \neq 0 \text{ 时} \quad |F(x + \Delta x) - F(x)| &= \left| \int_0^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \\ &\leq M \left| \int_x^{x+\Delta x} dt \right| = M |\Delta x| \end{aligned}$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $|F(x + \Delta x) - F(x)| \rightarrow 0$, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(x + \Delta x) = F(x)$, 即 $F(x)$ 在 x 处连续.

于是, 知 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 处处连续. 故(C)、(D) 不对.

以下证 $F(x)$ 在 $[-a, a]$ 上为偶函数.

$$\begin{aligned} \text{考察} \quad F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{t = -u} - \int_0^x f(-u) du = - \int_0^x [-f(u)] du \\ &= \int_0^x f(u) du = F(x) \end{aligned}$$

即 $F(x)$ 为偶函数.

解 应答(B)

评述 本题看似简单,但 $f(x)$ 不是 $[-a, a]$ 上也不是 $[0, a]$ 上的连续函数.教材上有些结论,不能直接应用,要重新考察 $\int_0^x f(t)dt$ 的性质.由 $f(x)$ 只有一个第一类间断点,在其他处处连续,从而知 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上为分段连续函数,再按定积分存在定理,知 $\int_0^x f(t)dt$ 存在.又因 $f(x)$ 为分段连续函数,知 $f(x)$ 为有界函数,从而证明 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $x \neq 0$ 处 $F(x)$ 亦连续,即 $F(x)$ 处处连续,最后证 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数,一道小题与众多基本概念有关,近年来考研题的综合性越来越强.读者必须在透彻理解和熟练掌握一些基本概念和基本定理上多下功夫.由已知 $f(x)$ 的性质,推断出 $\int_0^x f(t)dt$ 具有什么性质,也是常见的考研题的题型.

例9 设 $a > b > 0$,且 $f(x) = \begin{cases} a, & |x| \leq a \\ b, & |x| > a \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

分析 由 $f[f(x)]$ 中自变量 x 在定义域上可取不同的值开始分析.

解 当 $|x| \leq a$ 时, $f(x) = a$,此时 $f[f(x)] = f(a) = a$.

当 $|x| > a$ 时, $f(x) = b$,此时 $f[f(x)] = f(b) = a$.可见,当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时 $f[f(x)] = a$.

评述 90年曾有一道考研题已知 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$ 2001年又有一道考研题:已知 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 求 $f\{f[f(x)]\}$,这些题都是本例的特殊情况.解这类题都是从自变量下手,由自变量不同的值求出复合函数对应的值.1990年与2001年的答案分别是 $f[f(x)] = 1$, $f\{f[f(x)]\} = 1$.

例10 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{当 } |x| > 1 \end{cases}$ $\varphi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{当 } |x| \leq 2 \\ 2, & \text{当 } |x| > 2 \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

分析 欲求 $f[\varphi(x)]$,先看看当 x 取什么值时, $|\varphi(x)| \leq 1$,当 x 取什么值时 $|\varphi(x)| > 1$,然后才能求出 $f[\varphi(x)]$.

解 首先解 $|\varphi(x)| = |2 - x^2| \leq 1$ 且 $|x| \leq 2$

即 $-1 \leq x^2 - 2 \leq 1$ $1 \leq x^2 \leq 3$ 亦即 $1 \leq |x| \leq \sqrt{3} < 2$

可见当 $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$ 时 $|\varphi(x)| \leq 1$,从而 $f[\varphi(x)] = 1$.

当 $|x| < 1$ 时 $|\varphi(x)| > 1$,从而 $f[\varphi(x)] = 0$

当 $2 \geq |x| > \sqrt{3}$ 时 $|\varphi(x)| = |2 - x^2| > 1$,从而 $f[\varphi(x)] = 0$

综上所述
$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} \\ 0, & \sqrt{3} < |x| \end{cases}$$

评述 讨论复合函数是考研的一个热点,做这种题时一定要分析好中间变量 φ 的值域与其定义域间的关系.有时画出 $\varphi = \varphi(x)$ 的图形能帮助我们看清当 x 取什么值时 $|\varphi(x)| < 1$.又当 x 取什么值时 $|\varphi(x)| > 1$.像本例 $\varphi = 2 - x^2$ 为一条开口向下的抛物线,画出图后,上述一些结果便不难得到.

例11 设在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x)$, $g(x)$ 都有定义且 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数,问 $f[f(x)]$, $g[f(x)]$, $f[g(x)]$, $g[g(x)]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上各具有什么对称性的函数?

分析 仍据奇函数、偶函数的定义去判断这些复合函数,是否具有奇、偶性.

解 已知 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$,于是

$f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)]$, $f[f(x)]$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数.

$g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)]$, $g[f(x)]$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数.

$f[g(-x)] = f[g(x)]$ $f[g(x)]$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数.

$g[g(-x)] = g[g(x)]$ $g[g(x)]$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数.

评述 以上这些结果不难推广,例如 $\{f[f(\dots f(x)\dots)]\}$ (复合 n 次) 为奇函数, $\{f[g(\dots f(x)\dots)]\}$ 为偶函数.

例 12 证明 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数.

分析 $y = \ln x$ 仅在 $(0, +\infty)$ 上有定义. 不论 x 是什么实数 $x + \sqrt{1+x^2}$ 恒为正数, 故 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 仍据奇函数的定义证明之.

$$\begin{aligned} \text{证明 } f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{1} \\ &= \ln \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \\ &= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x) \end{aligned}$$

可见 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 确是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数.

评述 即使 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都不具有奇偶性的函数, 但有时复合函数 $f[g(x)]$ 却具有某种对称性. 乍一眼看去, 怎样也不会想到 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为奇函数. 用奇函数的定义去检查才知它竟然是奇函数, 而且是相当重要的函数 $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数!

例 13 设 $f(x)$ 为已知连续函数 $I = t \int_0^{s/t} f(tx) dx$, 其中 $t > 0, s > 0$, 则 I 的值依赖于_____.

(A) s 和 t (B) s 和 x (C) t 和 x 不依赖于 s (D) s 不依赖于 t

分析 这个积分究竟是什么变量的函数, 直观上也不易看出来, 必须把原来的函数化简, 并且首先把被积函数化简看看是什么情况.

$$\text{解 } I = t \int_0^{s/t} f(tx) dx \xrightarrow{\text{令 } tx = u} t \int_0^s f(u) \frac{du}{t} = \int_0^s f(u) du$$

可见 I 仅是依赖于 s 的函数, 不依赖于 x , 也不依赖于 t , 应选(D).

评述 当作积分换元法时, 令 $tx = u$, 是用新的积分变量 u 代替原来的积分变量 x , 视 t 为参数, 当 $x = 0$ 时 $u = 0$, 当 $x = s/t$ 时 $u = tx = t \cdot \frac{s}{t} = s$. 把原来的积分化为 $t \int_0^s f(u) \frac{du}{t}$, 到此 u 为积分变量, 对变量 u 积分, 视 t 为常数, 故因子 $\frac{1}{t}$ 可提到积分号外, 与 t 相消得 $\int_0^s f(u) du$. 又, 定积分与积分变量的记法无关, 故 $\int_0^s f(u) du$ 仅是 s 的函数与 t, x, u 等均无关. 类似这样的题, 在统考的考研试题中, 曾出现数次.

例 14 (97 3分) 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$ _____.

(A) 为正常数 (B) 为负常数 (C) 恒为零 (D) 不为常数

分析 由(A), (B), (C), (D)四个答案看, 首先要判断由积分 $\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ 所确定的函数是否为常数? 若是常数, 再判断它是什么性质的常数(正数? 负数? 零?).

解 因被积函数 $e^{\sin t} \sin t$ 是以 2π 为周期的周期函数, 故在任一区间长为 2π 的区间 $[x, x+2\pi]$ 上的定积分的值相互相等. 亦即 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ 为一常数. 既然是常数, 应有

$$F(x) \equiv F(0) = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = -e^{\sin t} \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt$$

(这里利用了定积分分部积分公式 $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$, 而令 $v(t) = \sin t, u(t) = e^{\sin t}$, $v'(t) = \cos t, u'(t) = e^{\sin t} \cos t$). 于是

$$\begin{aligned}
 F(x) &\equiv F(0) = -e^{\sin 2\pi} \cos 2\pi + e^{\sin 0} \cos 0 + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt \\
 &= -e^0 \cdot 1 + e^0 \cdot 1 + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt > 0
 \end{aligned}$$

可见 $F(x)$ 为正常数. 应选(A).

评述 判断 $\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ 为常数, 亦可以另一途径证实之, 即考察其导函数恒为零

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \left(\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt \right)'_x = \frac{d}{dx} \left[\int_x^0 e^{\sin t} \sin t dt + \int_0^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt \right] \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\int_0^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt - \int_0^x e^{\sin t} \sin t dt \right] \\
 &= e^{\sin(x+2\pi)} \sin(x+2\pi) - e^{\sin x} \sin x = e^{\sin x} \sin x - e^{\sin x} \sin x \equiv 0
 \end{aligned}$$

故有 $F(x) = C$ (常数), 这里利用了公式 $\frac{d}{dx} \int_0^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$. 考察由积分确定的函数的性质, 是上二例的一个共同特点. 这类题综合性都较强, 结论也不易通过直观看出, 要能融会各个知识点作出正确判断, 考研题的趋向就是综合性愈来愈强.

例 15 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调函数, 讨论 $f[g(x)]$ 的单调性.

分析 就 $f(x)$ 为单调增、单调减, $g(x)$ 为单调增、单调减, 组合起来共有四种情况, 今分别讨论之.

解 设 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上均为单调增函数, 亦即当 x 增加时, $g(x)$ 增加, 因而 $f[g(x)]$ 亦随之增加, 故 $f[g(x)]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加函数.

设 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上均为单调减函数, 即当 x 增加时, $g(x)$ 减少, 而当 $g(x)$ 减少时, $f[g(x)]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加函数.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调增函数, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调减函数, 即当 x 增加时, $g(x)$ 减少, 而当 $g(x)$ 减少时, $f[g(x)]$ 亦随之减少, 所以 $f[g(x)]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调减函数.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调减函数, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调增函数, 即当 $x_1 < x_2$ 时, $g(x_1) < g(x_2)$, 由于 $f(x)$ 为单调减函数故 $f[g(x_1)] > f[g(x_2)]$, 可见 $f[g(x)]$ 为单调减函数.

评述 以上都是依据单调增函数、单调减函数的定义来判断复合函数 $f[g(x)]$ 的单调性.

例 16 设 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$), 问 a, b, c, d 满足什么条件时, 它的反函数与直接函数相同?

分析 当 $c=0, d=0$ 时, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 无意义, 不存在反函数. 当 c, d 不全为零, 但 $ad-bc=0$ 时 (即 $c \neq 0, d \neq 0, \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; 或 $c=0, d \neq 0$, 必有 $a=0$; 或 $c \neq 0, d=0$ 必有 $b=0$) $y = \frac{ax+b}{cx+d} =$ 常数, 也不存在反函数. 而当 $ad-bc \neq 0$. 若 $c \neq 0$, 有 $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + (b - \frac{ad}{c}) / (cx+d) \neq$ 常数, 存在反函数. 若 $c=0$, 必有 $a \neq 0, d \neq 0, \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$, 也必存在反函数. 可见 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 存在反函数的充分必要条件为 $ad-bc \neq 0$.

解 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x = \frac{b-dy}{cy-a}$ 得反函数 $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$ 为使 $\frac{ax+b}{cx+d} \equiv \frac{-dx+b}{cx-a}$ 即 $(ax+b)(cx-a) \equiv (-dx+b)(cx+d)$

即 $acx^2 - a^2x + bcx - ab \equiv -dcx^2 - d^2x + bcx + bd$

比较两边系数有

$$\begin{cases} ac = -dc \\ -a^2 + bc = -d^2 + bc \\ -ab = bd \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} c(a+d) = 0 \\ (d-a)(a+d) = 0 \\ b(a+d) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

当 $a + d = 0$ 即 $a = -d$ ① ② ③ 同时成立, 此时 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 与它的反函数相同.

其次当 $a + d \neq 0$ 为使 ① ② ③ 同时成立, 必有 $c = 0$ $b = 0$ $a = d$ 此时 $y = x$, 显然它的反函数也是 $y = x$.

评述 直接函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = g(x)$ 相同, 从几何上看 $y = f(x)$ 的图形或者是 $y = x$, 或者是与直线 $y = x$ 完全对称的曲线, 在 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 中与直线 $y = x$ 完全对称的曲线. 除自身 $y = x$ 外只有等轴双曲线了 $y = -\frac{d}{c} + (b + \frac{d^2}{c}) / (cx + d)$.

例 17 作出方程 $|x-1| + |y-1| = 1$ 的图形.

分析 因为 $|x-1| + |y-1| = 1$, 所以 $|x-1| \leq 1, |y-1| \leq 1$, 从而知 x, y 的取值范围.

解 因 $|x-1| \leq 1, |y-1| \leq 1$ 有 $-1 \leq x-1 \leq 1, -1 \leq y-1 \leq 1$. 即 x, y 的所考虑的变化范围为 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

当 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 时, 原方程为 $-(x-1) - (y-1) = 1$, 即 $x+y = 1$. 这是一段直线.

当 $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ 时, 原方程为 $-(x-1) + y-1 = 1$ 即 $x-y = -1$, 这仍是一段直线. 当 $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ 时, 原方程为 $x-1 - (y-1) = 1$, 即 $x-y = 1$, 这也是一段直线.

当 $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ 时, 原方程为 $x-1 + y-1 = 1$. 即 $x+y = 3$. 这同样还是一段直线, 故原方程表示四段直线所围成的正方形, 其顶点为 $(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1)$ 见 (图 1-1).

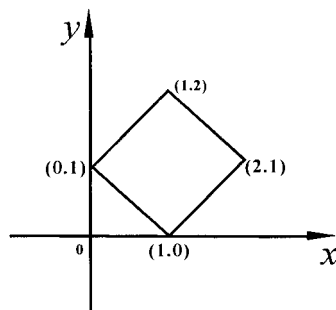


图 1-1

评述 要会处理含有绝对值记号的方程与不等式, 这是常考的知识点. 处理这类式子的基本思路就是利用数的绝对值的定义来去掉绝对值记号. 像本例区分出四种情况 (一个绝对值要分负数非负数两种情况, 含两个绝对值的式子, 自然就是 $2 \times 2 = 4$ 的了.) 分别考虑之.

例 18 求下列函数 $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

分析 由方程 $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$ 解出 x .

解 因 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, 把原方程两边三次方得

$$\begin{aligned} y^3 &= x + \sqrt{1+x^2} + 3(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}(x - \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + 3(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x - \sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}} + x - \sqrt{1+x^2} \\ &= 2x - 3(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}} - 3(x - \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}} \\ &= 2x - 3[\sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}] = 2x - 3y \end{aligned}$$

由此得 $x = \frac{1}{2}(y^3 + 3y) \quad (-\infty < y < +\infty)$.

这就是所求的反函数, 一般用 x 表示自变量, y 表示因变量, 所求反函数又可写为

$$y = \frac{1}{2}(x^3 + 3x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

评述 由 $y = f(x)$ 求它的反函数, 即据方程 $y - f(x) = 0$ 解出 x 成为以 y 为自变量的函数 $x = \varphi(y)$. 再按一般习惯表示为 $y = \varphi(x)$ 并写出 $\varphi(x)$ 的定义域. 做这类题时要小心地看清 $f(x)$ 的定义域和值域以及 $f(x)$ 在定义域上的单调性, 但因 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 有相同的单调性, 只要看清其中之一, 便立知另一函数的情况. 像本例中由 $y = \frac{1}{2}(x^3 + 3x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上知为单调增加函数, 并且它的自然定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它的值域为 $(-\infty, +\infty)$, 于是立知 $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 且是单调增加函数. 这样逆推, 比直接去判断 $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$ 的定义域, 值域及单调性要简便得多.

典型题型 3. 以下讨论数列和函数的极限问题.

例 19 作出函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的图形.

分析 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 若 x 为负数, 则 $e^{nx} \rightarrow 0$; 若 x 为正数, 则 $e^{nx} \rightarrow +\infty$, 因此必须区分 x 为零、正数、负数三种情况考虑之.

解 当 $x > 0$ 时 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-nx} + x^2}{e^{-nx} + 1} = x^2$

当 $x = 0$ 时 $f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0 + 0}{1 + 1} = 0$

当 $x < 0$ 时 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{x + 0}{1 + 0} = x$

故 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$, 它的图见(图 1-2)

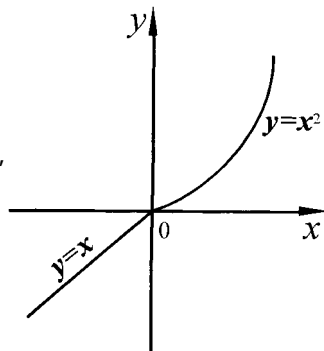


图 1-2

评述 在以上的极限运算中, 视 x 为常数, n 为变量. 若 x 为正数, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x e^{-nx} = x \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = x \cdot 0 = 0$. 本题的计算过程, 仅仅用到极限四则运算法则, 这个四则运算法则虽然十分简单, 但是用途甚广, 很多问题化繁为简时会借助于它.

例 20 当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2 (B) 等于零 (C) 为 (D) 不存在但不为

分析 因当 $x \rightarrow 1 - 0$ 时 $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$, $e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0$; 而当 $x \rightarrow 1 + 0$ 时 $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$, $e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow +\infty$. 所以必须先求 $f(1 - 0)$, $f(1 + 0)$, 看看它们是否存在, 若都存在再看看是否相等.

解 $f(1 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$
 $= 2 \cdot e^{-\infty} = 2 \cdot 0 = 0$

$f(1 + 0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$
 $= 2 \cdot e^{+\infty} = +\infty$

应选(D).

评述 就求左极限 $f(1 - 0)$ 的过程, 作一些说明. 当 $x \rightarrow 1 -$ 时, $x \neq 1$, 故因子 $x - 1 \neq 0$, 此时 $\frac{x^2 - 1}{x - 1} \equiv x + 1$, 即分子分母可同除以非零因子 $x - 1$. 又 $x + 1$ 为连续函数, 故 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = (x + 1) \Big|_{x=1} = 1 + 1 = 2$ (按连续函数定义). $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$. 左极限 $f(1 - 0)$ 存在. 但右极限 $f(1 + 0)$ 不存在, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在. 又因 $f(1 - 0) = 0$, 虽然 $f(1 + 0) = +\infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不为 0 . 利用左、右极限来判断极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在, 这是十分常见的考研题.

例 21 设 $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, $a_3 = 0.999$, $\dots$, $a_n = 0.\underbrace{99\dots9}_{n\text{个}9}$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

分析 从直观上看 $0.999\dots9\dots = 0.9$ 似乎总比 1 小, 以下证明的基本思路, 就是 0.9 不会比 1 小任何一点.

证明 $a_1 = 0.9 = 1 - \frac{1}{10}$, $a_2 = 0.99 = 1 - \frac{1}{10^2}$. 一般地 $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). 据数列极限的定

义,任意给定正数 $\varepsilon > 0$, ε 可任意地小,为使 $n > N$ 时,恒有

$$|a_n - 1| = \left| 1 - \frac{1}{10^n} - 1 \right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

即
$$10^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad n > \lg \frac{1}{\varepsilon}$$

只要选取正整数 $N \geq [\lg \frac{1}{\varepsilon}] + 1$ 即可,于是

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq [\lg \frac{1}{\varepsilon}] + 1 \quad \text{当 } n > N \text{ 时恒有 } |a_n - 1| < \varepsilon$$

,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

评述 上面证明的实质就是 0.999... 不可能与 1 有任何一点点微小的差别,只要 n 充分大时, a_n 与 1 的差的绝对值比你担心的任何一点点微小的差别 ε 还要小,换句话说 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

例 22 (99 3 分)“对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$,总存在正整数 N ,当 $n \geq N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

- (A) 充分条件但非必要条件 (B) 必要条件但非充分条件
(C) 既非充分条件又非必要条件 (D) 充分必要条件.

分析 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的定义可改写为:

对于任意正数 ε_1 ,存在正整数 N_1 ,当 $n > N_1$ 时恒有 $|a_n - a| < \varepsilon_1$ (I)

命题 (I) 中 ε_1 为任意正数. 自然包括区间 $(0, 1)$ 内任一正数 ε_1 . 若命题 (I) 成立,今取 $N = N_1 + 1$, $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ 必然成立以下命题:

对于区间 $(0, 1)$ 内的任意 ε ,总存在正整数 N ,当 $n \geq N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ (II)

以下再说明条件 (II) 成立时,条件 (I) 亦必成立.

对于任意正数 ε_1 ,今取 $\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$,于是 $\varepsilon \in (0, 1)$,存在正整数 N ,当 $n \geq N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$.

现取 $N_1 = N - 1$,因当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon \leq \frac{2\varepsilon_1}{3} < \varepsilon_1$. 命题 (I) 亦必成立.

综上所述, (I) $\leftrightarrow$ (II). 答案为 (D).

评述 由于数列极限定义中的 ε 为任意(小)正数. 故命题 (I) 中的 $|a_n - a| < \varepsilon_1$ 可改为 $|a_n - a| < k\varepsilon$ 或 $|a_n - a| \leq k\varepsilon$ (其中 k 为正数). 又因数列极限定义 (I) 中的正整数 N_1 强调其存在性, N_1 的存在不是唯一的. 故 $n > N_1$ 也可改为 $n \geq N$ 或 $n > N + P$ 或 $n \geq N + P$ 其中 P 为某一自然数. 这个例题是让读者了解数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义的实质.

例 23 (06 4 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$

分析 利用恒等变换 $u^v = 1^{v \ln u}$ ($u > 0$) 求之.

解
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n \ln \frac{n+1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \ln[1 + \frac{1}{n}]} = e^0 = 1$$

评述 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(-1)^n$ 为有界变量, $\ln(1 + \frac{1}{n})$ 为无穷小量,有界变量与无穷小量的乘积为无穷小量. 求幂指函数的极限是考研题中的常见题.

例 24* (03 4 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

分析 它属于 1^∞ 型的未定型题. 利用极限 $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ 求之. 不是十分自然,因而利用恒等变换 $u^v = e^{v \ln u}$ 求之.

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x^2) \ln \cos x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}}$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cdot \cos x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2}$$

,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

评述 利用恒等变换 $u^v = e^{v \ln u}$ 求 1^∞ 类型的未定式是经常行之有效的办法, 这里还利用了重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

例 25 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$

分析 本题仍属于 1^∞ 型的未定式, 仍利用 $u^v = e^{v \ln u}$ 求之, 不过先作变换 $\frac{1}{x} = u$, 这样把原式简化了一点.

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\cos u + \sin u \right)^{\frac{1}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} e^{\frac{1}{u} \ln(\cos u + \sin u)} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos u + \sin u)}{u}}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos u + \sin u)}{u} = \frac{0}{0} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\sin u + \cos u}{\cos u + \sin u} = 1$$

现求

这里利用了洛必达法则, 于是得最后结果为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e$$

评述 若不先作变换 $\frac{1}{x} = u$, 则将有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)}$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)$ 为 $\cdot 0$ 型的未定式, 为把 $\cdot 0$ 型未定式化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式, 仍要作变

换令 $x = \frac{1}{u}$, 于是 $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right) \stackrel{x=1/u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u}$ 与上相同.

例 26 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$

分析 这也是一个幂指函数的极限问题, 仍属于 1^∞ 型的未定式, 用重要极限 $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ 求之很不自然, 还是利用恒等变换 $u^v = e^{v \ln u}$ 去求它的值.

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)}$$

现计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}) - \ln n}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}} = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{1}{2}(1+n)$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{(1+n)/2}.$$

评述 以上四例都是幂指函数的极限, 都是利用恒等变换 $u^v = e^{v \ln u}$ 而求其值.

例 27 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

分析 这是 $\frac{0}{0}$ 型的未定式, 用洛必达法则求之. 并注意幂指函数的求导公式为 $[u(x)^{v(x)}]' = v u^{v-1} u' + u^v \ln u v'$.

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1} + (1+x)^{\frac{1}{x}} \ln(1+x) \cdot (-\frac{1}{x^2})}{1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right] \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \\
 &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x+3x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2+3x} = -\frac{e}{2}.
 \end{aligned}$$

评述 幂指函数的求导公式,读者要熟记住,考试中经常要用到这个公式,在每次利用洛必达法则时,一定要检查是否满足洛必达法则的条件,虽是求分式极限,但若不是 $\frac{0}{0}$ 或 ∞ 型未定式,就决不能用洛必达法则,故本书每次用洛必达法则之前先注明它是 $\frac{0}{0}$ 型还是 ∞ 型.本例解法中倒数第二个等号运用了等价无穷小因子代换.即当 $x \rightarrow 0$ 时 $\ln(1+x) \sim x$.

例 28 (04, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$

分析 本题虽属于 $\frac{0}{0}$ 型的不定式,但若直接利用洛必达法则求之,则计算起来,比较复杂.因之先利用恒等变换 $u^v = e^{v \ln u}$ 改写 $\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x$,再利用等价无穷小因子代换.当 $x \rightarrow 0$ 时 $e^x - 1 \sim x$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \frac{2+\cos x}{3}} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+\cos x) - \ln 3}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2+\cos x}{2x}} \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2+\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

评述 上列解法中,第一个等号利用 u^v 的恒等变换,第二个等号利用等价无穷小量代换,第四个等号利用洛必达法则,最后一个等号利用极限运算的基本定理.这是一个利用到多个知识点的极限题.近年来的试题常是综合性较强的题.

例 29 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$

分析 因 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$,故它是 1 型的未定式.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - \ln e \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x}}$$

$$\text{现求} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{故} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

评述 看起来这个幂指函数的极限题,比较麻烦,用老办法解之,仍可迎刃而解.

例 30 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right)$

分析 这是属于 $\infty - \infty$ 型的未定式,设法化为一个分式.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} - \frac{x}{e} \right) \\
 &\stackrel{x = \frac{1}{t}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t(1+t)^{1/t}} - \frac{1}{te} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e - (1+t)^{1/t}}{et(1+t)^{1/t}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(1+t)^{1/t}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e - (1+t)^{1/t}}{t} = \frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e - (1+t)^{1/t}}{t} \\
&\stackrel{0}{=} - \frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} (1+t)^{\frac{1}{t}-1} + (1+t)^{\frac{1}{t}} \ln(1+t) \left(-\frac{1}{t^2}\right) \right] \\
&= - \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t(1+t)} - \frac{\ln(1+t)}{t^2} \right] = - \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{t - (1+t) \ln(1+t)}{t^2(1+t)} \right] \\
&\stackrel{0}{=} - \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+t) - 1}{2t + 3t^2} \\
&= \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t + 3t^2} = \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2 + 3t} = \frac{1}{2e}
\end{aligned}$$

评述 为了能利用重要极限 $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$, 先把第一个分式中的分子分母同除以 x^x , 使其简化, 作变换 $x = \frac{1}{t}$, 然后把 $\frac{0}{0}$ 型未定式化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 在利用洛必达法则时, 又一次用到幂指函数的导数公式. 上述倒数第三个等号中用了等价无穷小因子代换公式 $t \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+t) \sim t$. 这个题的具体计算虽然有点冗长, 但基本思路并不复杂.

典型题型 4. 以下考虑与无穷小量阶的比较的有关的题.

例 31 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}$

分析 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\ln(1 + \frac{1}{x}) \rightarrow 0$, $\operatorname{arccot} x \rightarrow 0$. 这是 $\frac{0}{0}$ 型的未定式.

解 由洛必达法则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x) - \ln x}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{1+x^2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x} + 1} = 1$$

评述 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\operatorname{arccot} x \sim \ln(1 + \frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$, 即这三者均为等价无穷小量.

例 32 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$

分析 这是 $\frac{0}{0}$ 型的未定式可直接用洛必达法则求之. 由于分母为二因子的乘积 $x^2(e^x - 1)$, 求导一次, 项数便增多. 而且洛必达法则要用三次, 才得到答案. 计算起来有点繁. 读者不妨试试看. 今用等价无穷小量因子代换求之, 简便多了.

解 首先注意 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$.

又因 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, $e^x - 1 = x + o(x)$.

从而知当 $x \rightarrow 0$ 时有 $x - \sin x \sim \frac{x^3}{3!}$, $x^2(e^x - 1) \sim x^3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/3!}{x^3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

评述 若 $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$ 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) - f(0) \sim f'(0)x$, $f(x) - f(0) - f'(0)x \sim \frac{f''(0)}{2!}x^2$, 依此类推 $f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1}x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \sim \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. 利用这个准则便知当 $x \rightarrow 0$, $\sin x \sim x$, $\sin x - x \sim -\frac{x^3}{3!}$, $e^x - 1 \sim x$ 正确使用等价无穷小量因子代换将会简化一些计算. $\frac{0}{0}$ 型未定式或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式几乎是每年必考的热点.

例 33 (97 3 分) 设 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin^2 t dt$, $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

- (A) 低阶无穷小量 (B) 高阶无穷小量
 (C) 等价无穷小量 (D) 同阶但不等价无穷小量

分析 无穷小是无穷小量的简称. 两个名词都很通用, 本书今后兼用之, 不强求只用其一. 这是无穷小量阶的比較的题, 即求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$ 凡是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 且在分子或分母中含有变上限或变下限的积分, 求这类极限一般总是先用洛必达法则以去掉积分号.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时 $1 - \cos x \rightarrow 0$, $\int_0^{1-\cos x} \sin^2 t dt \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sin^2 t dt}{x^5/5 + x^6/6} &= \frac{0}{0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)^2 \cdot \sin x}{x^4} \quad (\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时 } x^4 + x^5 \sim x^4) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)^2}{x^3} \\
 &= \frac{0}{0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(1 - \cos x)^2 \cdot 2(1 - \cos x) \sin x}{3x^2} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos(1 - \cos x)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x} \\
 &= \frac{0}{0} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3} = 2 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小. 应选(B).

评述 这个题是十分典型的考研试题, 考研试卷中经常有这样的题. 在以上计算的第一个等号中应用了公式 $\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$. 以下各个等号是逐步简化. 第四个和第七个等号都是利用了洛必达法则. 第五个等号据函数的乘积的极限等于函数的极限的乘积, 本题还两次应用了重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 演算这样的题要灵活地应用洛必达法则与极限运算的基本法则, 这样会使计算工作量少一点. 如果自始至终都只用洛必达法则来计算 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 有时是不明智的.

例 34 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 0$, $F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}$.

分析 当 $x \rightarrow 0$ 时 $F(x) \rightarrow 0$. 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 但积分号下有积分变量 t 及参数 x . 从而不便直接求 $F'(x)$. 为此, 首先设法使积分号下不含参数 x .

解 先作换元令 $x^n - t^n = u$. 以新的积分变量 u 代替 t , 而 x 为参数, 于是 $-nt^{n-1} dt = du$, $F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt = \int_{x^n}^0 f(u) \left(-\frac{1}{n}\right) du = \frac{1}{n} \int_0^{x^n} f(u) du$. 求

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \int_0^{x^n} f(u) du}{x^{2n}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) \cdot n \cdot x^{n-1}}{2nx^{2n-1}} = \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n)}{x^n} \\ &= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) - f(0)}{x^n} = \frac{1}{2n} f'(0)\end{aligned}$$

评述 在以上的计算中,第二个等号据洛必达法则. 已知 $f(0) = 0$, 从而有第四个等号. 又因题设 $f'(0)$ 存在, 据导数定义便有第五个符号. 或许有读者问: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n)}{x^n}$ 能否利用洛必达法则求得之? 答曰: 不能.

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n)}{x^n} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) \cdot nx^{n-1}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x^n)$, 题设中, 未假定 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 便不能说 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x^n)$ 与 $f'(0)$ 相等, 读者务须注意这一点. 否则考试时至少要被扣除二分.

例 35 (97 3 分) 设 $x \rightarrow 0$ 时 $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

分析 记 $f(x) = e^{\tan x} - e^x$, 写出 $f(x)$ 的麦克劳林公式, 便可知 $f(x)$ 是 x 的几阶无穷小.

解 $f(x) = e^{\tan x} - e^x$, $f(0) = e^0 - e^0 = 0$.

$$f'(x) = e^{\tan x} \sec^2 x - e^x, f'(0) = e^{\tan 0} \sec^2 0 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^{\tan x} \sec^4 x + e^{\tan x} \cdot 2 \sec^2 x \tan x - e^x, f''(0) = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^{\tan x} \sec^6 x + e^{\tan x} \cdot 4 \cdot \sec^4 x \tan x + e^{\tan x} \cdot 2 \sec^4 x \tan x + 4e^{\tan x} \sec^2 x \tan^2 x + e^{\tan x} \cdot 2 \sec^4 x - e^x = e^{\tan x} [\sec^6 x + 6 \sec^4 x \tan x + 4 \sec^2 x \tan^2 x + 2 \sec^4 x] - e^x$$

$$f'''(0) = 1 + 2 - 1 = 2$$

从而知 $e^{\tan x} - e^x = 0 + 0 + 0 + \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3$, ξ 在 0 与 x 之间. 因 $f'''(0) \neq 0$. 只要 $|x|$ 充分地小, $\frac{f'''(\xi)}{3!} \neq 0$. 可见 $e^{\tan x} - e^x = O(x^3)$. 即该函数与 x^3 是同阶无穷小 (当 $x \rightarrow 0$ 时). 应选 (C).

评述 若 $x \rightarrow a$ 时 $f(x) \rightarrow 0$, 且 $f(x)$ 在 $x = a$ 附近具有各阶导数, 写出 $f(x)$ 的泰勒公式, 便可知 $f(x)$ 是 $x - a$ 的多少阶无穷小, 用这个办法确定无穷小的阶, 比较简捷. 比用 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 一次次去试求要省便得多. 确定无穷小的阶, 这是常见的考研题.

例 36 (01 3 分) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 又比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

分析 由于 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

从而知 $\sin x^n = x^n + o(x^n)$, $1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2), \quad \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

于是有 $\sin x^n = O(x^n)$, $1 - \cos x = O(x^2)$, $\ln(1+x^2) = O(x^2)$
 $e^{x^2} - 1 = O(x^2)$

解 当 $x \rightarrow 0$ 时 $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) = O(x^2) O(x^2) = O(x^4)$ 是 x 的四阶无穷小. $x \sin x^n = O(x) \cdot O(x^n) = O(x^{1+n})$ 是 x 的 $1+n$ 阶无穷小. $e^{x^2} - 1 = O(x^2)$ 是 x 的二阶无穷小. 由题意 $2 < n+1 < 4$. 可见 $n = 2$. 应选 (B).

评述 把所给函数各个因子都写成麦克劳林公式形式便知各个因子是几阶无穷小. 再把各个因子的无穷小的阶数相加, 就知所给函数是几阶无穷小了.

例 37* (99 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$

分析 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 但不宜直接利用洛必达法则, 否则, 越算下去就越繁. 宜先逐步化简之.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{[x \ln(1+x) - x^2](\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln(1+x) - x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{[\ln(1+x) - x] \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2!}{-x^2/2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

评述 由于分子中有根式, 分母是两项, 其中一项是二因子的乘积, 因而虽然原式是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 但直接用洛必达法则求之, 计算起来颇繁, 故设法逐步化简. 第一个等号是去掉分子中的根式, 第二第三第四个等号都是根据极限的基本运算规律、重要极限以及连续函数的定义. 第五个等号利用了等价无穷小因子代换, 这个题综合地运用了好几个知识点, 近几年来考研极限题中类似这样的题频频出现.

例 38 (98 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$

分析 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 可用洛必达法则求之, 不过得用两次. 今据二项式展开式 $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$ 求之.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o_1(x^2) + 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o_2(x^2) - 2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{o(x^2)}{x^2} \right] = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

评述 $o_1(x^2) + o_2(x^2) = o(x^2)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$. 利用麦克劳林公式计算一些 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 看似复杂, 基本思路十分简单清晰, 是十分有效的方法之一.

以上八个题都是十分典型的考研极限题.

典型题型 5. 以下关于夹逼定理的应用

例 39 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right]$

分析 虽然每一项 $\frac{i}{n^2 + n + i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 当 $n \rightarrow \infty$ 时都趋于零, 但这里不是有限个无穷小量之和. 它的极限未必是零.

解 今用夹逼定理求之

$$\begin{aligned} \text{因} \quad \frac{i}{n^2 + n + n} &\leq \frac{i}{n^2 + n + i} \leq \frac{i}{n^2 + n + 1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ , \quad \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + n + n} &\leq \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + n + i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + n + 1} \end{aligned}$$

即
$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+n+i} \leq \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+n+i} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}$$

即
$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+n+i} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

得
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+n+i} = \frac{1}{2}.$$

评述 这个题看似简单,简单中仍有值得注意之处,譬如说,如用下不等式

$$\frac{1}{n^2+n+n} \leq \frac{i}{n^2+n+i} \leq \frac{n}{n^2+n+1} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

便将得不到正确结果,故本题的第一步很重要,放大与缩小都要非常谨慎.

例 40* (98 6 分) 求
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+1/2} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+1/n} \right]$$

分析 当 $n \rightarrow \infty$ 时,方括号内每一项 $\frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+1/i} \rightarrow 0$. 但不是有限项无穷小之和,仍设法适当地放大、缩小看看,放大或缩小后的极限值能否用同一积分表示之,若能,便可用夹逼定理了.

解
$$\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} < \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n}$$

而
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}.$$
 另一方面

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} &> \frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \pi \right) \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \pi \right) = \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

且
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} \right] = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}.$$
 由夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right] = \frac{2}{\pi}.$$

评述 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$. 在本题中有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = 1$, 故有

$$\int_0^1 \sin x \pi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+1/i} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin x \pi dx$$

这个题十分典型,如何放大,如何缩小,如何写成定积分,在这三点上,读者要仔细琢磨.

例 41 (00 3 分) 设对任意的 x 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且等于零

(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在

(D) 不一定存在

分析 由已知条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ 知当 $x \rightarrow \infty$ 时有 $g(x) - \varphi(x) = \alpha(x)$ 其中 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ 亦

即有

$$g(x) = \varphi(x) + \text{无穷小}$$

满足题目条件和这个关系式的有下列反例:

反例一. 设当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时 $\varphi(x) = |x|$ $f(x) = |x| + \frac{1}{|x|+1}$ $g(x) = |x| + \frac{2}{|x|+1}$ 于是有
 $|x| \leq |x| + \frac{1}{|x|+1} \leq |x| + \frac{2}{|x|+1}$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{|x|+1} = 0$ 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[|x| + \frac{1}{|x|+1} \right]$ 不存在 知(A) (B) 不成立.

反例二 设当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时 $\varphi(x) = 0$ $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $g(x) = \frac{2}{x^2+1}$ 于是有
 $0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{2}{x^2+1}$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2+1} = 0$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ 知(C) 不成立.

由上分析 知应选(D).

评述 这个题初看过去,以为要用夹逼定理,但因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 均未必存在,不能利用夹逼定理,只能由已知条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ 及 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 出发作具体分析. 本题是以举反例的方式说明答案(A) (B) (C) 均不成立,从而知答案为(D). 在考研试卷中常有这样的题,不是让考生去证明什么结论成立,而是要让考生能判断哪些命题是错误的,哪些命题是正确的.

例 42 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)2n}$

分析 记 $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-1}{2n}$ 这是单调减少且有下界的数列,故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在,但用递推公式 $a_{n+1} = a_n \frac{2n+1}{2n+2}$ 两边令 $n \rightarrow \infty$ 时,得不到 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的值,因此要想另外的方法.

解 记 $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{a_n} \frac{1}{2n+1}$

从而得不等式 $0 < a_n^2 < \frac{1}{2n+1}$. 据夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$. 故得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

评述 本例给出了求数列极限另一途径,适当放大,创造能利用夹逼定理的情况.

例 43 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$ (a 为常数)

分析 a 未必为正数. 但对于任意固定的 a , 必存在正整数 m , 使有关系式 $m \leq |a| < m+1$, 于是改而考察

$$\begin{aligned} \frac{|a|^n}{n!} &= \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdots \frac{|a|}{m} \frac{|a|}{m+1} \frac{|a|}{m+2} \cdots \frac{|a|}{n} \quad (m < n) \\ &= \frac{|a|^m}{m!} \frac{|a|}{m+1} \frac{|a|}{m+2} \cdots \frac{|a|}{n} \leq \frac{|a|^m}{m!} \frac{|a|}{n} \quad \left(\frac{|a|}{m+1} < 1, \dots, \frac{|a|}{n-1} < 1 \right) \end{aligned}$$

至此,我们看到可以利用夹逼定理了, $\frac{|a|^m}{m!}$ 为一固定的常数,由不等式 $0 \leq \frac{|a|^n}{n!} \leq \frac{|a|^m}{m!} \frac{|a|}{n}$ 令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|a|^m}{m!} \frac{|a|}{n} \right) = \frac{|a|^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{n} = 0$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$ 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

评述 记 $a_n = a^n/n!$, 这里利用了若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 为什么要考虑 $|a_n|$ 呢? 因 $|a_n|$ 不变号, 便于比较 a_n 可能变号, 直接对 a_n 作出的比较大小的统一不等式没有像对 $|a_n|$ 作出的不等式简单.

例 44* 设 $a > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}$

分析 若 $a > 1$, 则 $a > a^{\frac{1}{n}}$, 开 n 次方后得数比原数小. 若 $0 < a < 1$, 则 $a < a^{\frac{1}{n}}$, 开 n 次方后得数反而大了, 没有统一结果. 因此, 对 a 将区分 $a > 1$, $a = 1$, $0 < a < 1$ 三种情况讨论之.

解 先设 $a > 1$, 但 $a > a^{\frac{1}{n}} > 1$, 因而设 $a^{\frac{1}{n}} = 1 + d_n$, d_n 为 $a^{\frac{1}{n}}$ 与 1 之差, 且 $d_n > 0$. 两边 n 次方得 $a = (1 + d_n)^n$

$$a = (1 + d_n)^n = 1 + nd_n + \frac{n(n-1)}{2!}d_n^2 + \dots + d_n^n > 1 + nd_n$$

因而得

$$0 < d_n < \frac{a-1}{n}$$

由夹逼定理得 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{n} = 0$. 可见 $a > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

若 $a = 1$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

最后考虑当 $0 < a < 1$ 时, 此时 $\frac{1}{a} > 1$, 记

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + e_n, \frac{1}{a} = (1 + e_n)^n > 1 + ne_n$$

亦即

$$0 < e_n < \frac{1/a - 1}{n}$$

由夹逼定理得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/a - 1}{n} = 0$$

, $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$. 因而 $a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + e_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e_n} = \frac{1}{1 + 0} = 1$. 亦即当 $0 < a < 1$ 时, 仍有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

综上所述, 不论 $a > 1$, $a = 1$, $0 < a < 1$, 恒有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

评述 设 $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. 这是一个十分有用的结果. 这里用的证明方法也是很值得学习的.

典型题型 6. 以下利用麦克劳林公式求极限

例 45 (00 3 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0

(B) 6

(C) 36

(D)

分析 没有说函数 $f(x)$ 满足什么性质, 对 $f(x)$ 便不能作什么运算, 唯一能处理的是 $\sin 6x$, 今把 $\sin 6x$ 按麦克劳林公式展开, 因分母是 x^3 , 展开 $\sin 6x$ 到出现 x^3 为止 $\sin 6x = 6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^3)$, 代入原式得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{6x - 36x^3 + o(x^3) + xf(x)}{x^3} \right] = 0$$

亦即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{6 + f(x)}{x^2} + \frac{o(x^3)}{x^3} - 36 \right] = 0 ,$$

, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36$. 故应选 (C) .

评述 在以上的分析中, 只有最后一句还需作点说明: 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{6 + f(x)}{x^2} + \frac{o(x^3)}{x^3} - 36 \right] = 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} 36 = 36$, 于是极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ 必存在, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} + 36 = 36$. 这个题与以前的题有所不同的是: 已知一个解析式子的极限值, 去求另一式子的极限值或求其中的某些参数值.

例 46 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{\ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$ 其中 $a^2 + c^2 \neq 0$ 则必有

(A) $b = 4d$

(B) $b = -4d$

(C) $a = 4c$

(D) $a = -4c$

分析 这个题也是已知函数极限值,反过来求式子中一些常数的关系式,所给极限属于 $\frac{0}{0}$ 型未定式,故仍

可按 $\frac{0}{0}$ 型未定式具体计算之.

解法一 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{\ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sec^2 x + b \sin x}{-2c(1 - 2x)^{-1} + 2x d e^{-x^2}} = \frac{a}{-2c} = 2$ 亦即有 $a = -4c$,

应选(D).

解法二 把分子分母按麦克劳林公式展开即 $a \tan x + b(1 - \cos x) = ax + o(x)$, $\ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2}) = -2cx + o(x)$, 于是原式为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{\ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + o(x)}{-2cx + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \frac{o(x)}{x}}{-2c + \frac{o(x)}{x}} = -\frac{a}{2c} = 2$$

典型题型 7. 利用单调有界原理

例 47* 设 $c > 0$, $x_1 = \sqrt{c}$, $x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}$, ..., $x_n = \sqrt{c + x_{n-1}}$ $n = 2, 3, \dots$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

分析 很明显 $x_1 < x_2$, 但是否都具有性质 $x_{n-1} < x_n$ ($n = 2, 3, \dots$) 呢? 直观上看不清, 今用数学归纳法, 证明这个数列单调增加有界:

证明 已知 $x_2 - x_1 = \sqrt{c + \sqrt{c}} - \sqrt{c} > 0$, 若设 $x_n - x_{n-1} > 0$, 则 $x_{n+1} - x_n = \sqrt{c + x_n} - \sqrt{c + x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{c + x_n} + \sqrt{c + x_{n-1}}} > 0$, 由数学归纳法, 知 $\{x_n\}$ 为单调增加数列.

其次, 由于 $c > 0$, $x_1 = \sqrt{c} < 1 + c$

$$x_2 = \sqrt{c + x_1} < \sqrt{c + 1 + c} = \sqrt{1 + 2c} < \sqrt{1 + 2c + c^2} = 1 + c$$

若设 $x_n < 1 + c$, 则 $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n} < \sqrt{c + 1 + c} = \sqrt{1 + 2c} < 1 + c$, 于是由数学归纳法知所有 $0 < x_n < 1 + c$, 即 $\{x_n\}$ 是有上界的数列, 亦即数列 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 据单调有界原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 今记 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 由题设中的递推公式 $x_n = \sqrt{c + x_{n-1}}$ ($n = 1, 2, \dots$), 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $a = \sqrt{c + a}$, 解此方程得 $a^2 = c + a$, 即

$$a^2 - a - c = 0, a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}. \text{ 由题设条件知 } a \text{ 必为正数, 舍去负号, } a = (1 + \sqrt{1 + 4c})/2. \text{ 亦即}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (1 + \sqrt{1 + 4c})/2.$$

评述 求数列的极限, 一般要先证极限存在, 其次求其极限值. 这个题的证明过程中, 用到了一个事实: 不论 c 是什么正数, 恒有 $\sqrt{c} < 1 + c$. 近年来, 利用单调有界原理证明极限存在的考题不少.

例 48 设 $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

分析 首先验证此数列是否满足单调有界原理的条件

解 $x_1 = 10$, $x_2 = \sqrt{6 + 10} = 4$, $x_3 = \sqrt{6 + 4} = \sqrt{10}$, 可见 $x_1 > x_2 > x_3$, 设对某正整数 k , 有 $x_k > x_{k+1}$, 则有 $x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} > \sqrt{6 + x_{k+1}} = x_{k+2}$, 故由数学归纳法, 对一切正整数 n , 都有 $x_n > x_{n+1}$. 即 $\{x_n\}$ 为单调减少数列. 由 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 显见 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$). 即 $\{x_n\}$ 有下界. 根据单调有界原理, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, 两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 便得 $a = \sqrt{6 + a}$ 从而 $a^2 - a - 6 = 0$, 因此 $a = 3$ 或 $a = -2$.

因为 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 所以 $a \geq 0$, 舍去 $a = -2$. 故得极限 $a = 3$.

评述 乍一眼看去,以为本题是前题的特例,其实不然,前题是单调增加数列,本题是单调减少数列,证明数列的极限存在性占分多,求极限值占分少,若不证明数列的极限存在,就去求数列极限值,便将出现荒唐的结果.如考察自然数数列 $\{n\}$,记 $x_n = n$,则 $x_{n+1} = x_n + 1$,令 $n \rightarrow \infty$,记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 得 $a = a + 1$,从而得 $1 = 0$.错在极限本不存在而竟视其若存在而计算之.

例 49 (97 4 分) 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) (n = 1, 2, 3, \dots)$ 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

分析 若能证明数列 $\{a_n\}$ 具有单调性和有界性,便知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在. 因 $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq |a| \cdot |b|$. 先证 $\{a_n\}$ 有下界.

$$\text{证明 } a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{a_n})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} \right)^2 \right] \geq \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n}} = 1$$

, $a_{n+1} \geq 1$ 有下界. 其次考察

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) - a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - a_n \right) = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

, $a_{n+1} \leq a_n$ $\{a_n\}$ 单调减少有下界, 由单调有界原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在. (若要再求极限值, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 对 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ 两端求极限, 得到 $a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ $2a^2 - a^2 = 1$ $a = \pm 1$, 但 $a_n \geq 0$ a 必为非负数, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.)

评述 由这几个例题可以看到, 数列 $\{a_n\}$ 是否单调, 不妨观察 $a_{n+1} - a_n$ 的正负号, 而要判断数列 $\{a_n\}$ 是否有界, 常是不同的数列要用不同的方法.

例 50 (99 7 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负连续函数, $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx$, 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

分析 $\int_1^n f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)dx$, 由定积分的几何意义易知 $f(1) \geq \int_1^2 f(x)dx$ $f(2) \geq \int_2^3 f(x)dx$ $\dots$ $f(n-1) \geq \int_{n-1}^n f(x)dx$.

证明 先证有界性

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx \\ &= f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n) - \left[\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)dx \right] \\ &= \left[f(1) - \int_1^2 f(x)dx \right] + \left[f(2) - \int_2^3 f(x)dx \right] + \dots + \left[f(n-1) - \int_{n-1}^n f(x)dx \right] + f(n) \geq 0 \end{aligned}$$

可见 $\{a_n\}$ 是有下界的数列, 其次考虑 $\{a_n\}$ 的单调性:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx - \left[\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx \right] \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} f(n+1)dx - \int_n^{n+1} f(x)dx \\ &= \int_n^{n+1} [f(n+1) - f(x)]dx \leq 0 \end{aligned}$$

, $a_{n+1} \leq a_n$ $\{a_n\}$ 为单调减少数列.

综上所述知数列 $\{a_n\}$ 为单调减少且有下界, 据单调有界原理, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

评述 有界性的证明, 由比较大小而得, 即把 $f(k)$ 看作长为1高为 $f(k)$ 的长方形的面积与曲边梯形的面积 $\int_k^{k+1} f(x)dx$ 比较, 便知 $f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx$ 的正负号. 再一次指出, 利用单调有界原理证明数列极限的存在性, 是考研的一个热点内容.

例 51* (06, 12 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) (I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限; (II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

分析 经常利用单调有界原理, 证明数列极限的存在性. 为此先考察数列 $\{x_n\}$ 的单调性及有界性. 证明数列极限存在后, 然后计算数列极限的值.

证明 (I) 先证数列 $\{x_n\}$ 单调下降且有下界.

由 $0 < x_1 < \pi$ 得 $0 < x_2 = \sin x_1 < x_1 < \pi$. 设 $0 < x_n < \pi$, 则 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n < \pi$. 据数学归纳法知数列 $\{x_n\}$ 单调下降且有下界. 再由单调有界原理知, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 据递推公式 $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 两边取有限得 $a = \sin a$ ($0 \leq a < \pi$). 所以 $a = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

由题意有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

因 $n \rightarrow \infty$ 时 $x_n \rightarrow 0$ 为便于利用微分学中方法求上列极限, 今先以连续变量 x 代替离散变量 x_n , 从而去处理连续变量的极限过程.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x - \ln x}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x \cos x - \sin x}{2x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{6x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{\sin x}{6x}} = e^{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

于是知有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

评述 一般包含特殊. 求出 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, 自然便得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$. 求幂指函数的极限时, 常用恒等式 $u^v = e^{v \ln u}$ ($u > 0$). 本题计算中既用了洛必达法则, 又用了等价无穷小量因子代换. 这个考研题, 十分典型, 这类题在考卷中经常出现.

典型题型 8. 以下讨论函数的连续性和间断点的类型.

例 52 $x = 1$ 是 $f(x) = \arctan \frac{2}{x-1}$ 的_____.

- (A) 连续点 (B) 可去间断点
(C) 有限跳跃间断点 (D) 无穷间断点

分析 利用函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续的定义判断它的连续性.

解 $f(1-0) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, $f(1+0) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, 可见 $f(1-0) \neq f(1+0)$. 故 $f(x)$

在 $x = 1$ 处间断, 又因 $f(1-0)$ 与 $f(1+0)$ 均存在但不相等, $x = 1$ 是 $\arctan \frac{2}{x-1}$ 的有限跳跃间断点, 应选 (C).

评述 判断函数在某点 $x = a$ 是否连续, 若不连续就要辨别间断点的类型, 这是经常要考试的内容. 而且总是利用定义判断之.

例 53 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} (1 + |x|)^{1/x} & x \neq 0 \\ e & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

分析 看看 $f(0-0)$, $f(0+0)$ 是否存在且是否与 $f(0)$ 相等?

解 $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + |x|)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

$$\begin{aligned} f(0-0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + |x|)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x)^{\frac{1}{x}} \stackrel{-x=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} (1+t)^{-\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} [(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{-1} = e^{-1} \neq f(0) = e \end{aligned}$$

可见所给函数在 $x=0$ 处不连续, $x=0$ 是该函数的跳跃间断点.

评述 该函数在 $x=0$ 处为右连续.

例 54* (05 4 分) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则

- (A) $x=0$, $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.
 (B) $x=0$, $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.
 (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
 (D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

分析 $f(0)$, $f(1)$ 均没有定义, 所以 $x=0$, $x=1$ 均是 $f(x)$ 的间断点.

$f(0+0) = -$, $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

$$f(1-0) = \frac{1}{e^- - 1} = -1, \quad f(1+0) = \frac{1}{e^+ - 1} = 0, \quad x=1 \text{ 是 } f(x) \text{ 的第一类间断点.}$$

解 应选(D)

评述 在函数无定义点处必是函数的间断点, 已知 $f(0+0) = -$, 便可断定 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, 不必再考察 $f(0-0)$ 了.

例 55* 设函数 $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ x + e^{-\frac{1}{2}}, & x < 0 \end{cases}$ 能否选取适当的 a 值, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

分析 求 $f(0-0)$, $f(0+0)$, 然后选取 a 使 $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$ 成立.

$$\text{解 } f(0-0) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{因为 } \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln \left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right] = \frac{1}{x^2} \ln(1+x) - \frac{1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{即 } \ln f(0+0) = -\frac{1}{2},$$

从而有 $f(0+0) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(0) = a$. 由连续函数的定义, 选取 $a = e^{-1/2}$, 便可使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

评述 凡分段表示的函数, 考虑其在分界点处函数的连续性, 恒用函数的左、右极限的值与函数值比较之, 这是一个很典型的考研试题.

例 56 (02 3 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin x / 2}, & x > 0 \\ a e^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a .

$$\text{分析 } f(0-0) = a, \quad f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin x / 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{x/2} = -2$$

答 为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 必须 $f(0-0) = f(0) = f(0+0)$, 可见 $a = -2$.

评述 在求 $f(0+0)$ 中, $u \rightarrow 0$ 时 $1 - e^u \sim -u$, 在第二个等号利用了等价无穷小因子代换. 即 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - e^{\tan x} \sim -\tan x$, $\arcsin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$, 第三个等号处仍用等价无穷小因子代换 $\tan x \sim x$.

例 57 (97 3 分) 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x-2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求 $a = ?$

分析 先求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x-2}$, 然后令 $a = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x-2}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x-2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x-2} \ln \cos x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x}} = e^{-\frac{1}{2}}$, 故 $a = e^{-\frac{1}{2}}$.

评述 据连续函数的定义解答本题.

例 58 (98 5 分) 求函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\pi/4)}}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型.

分析 在使 $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = 0$ 或 $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = \infty$ 的点处 $f(x)$ 均无定义, 因而这些点都是 $f(x)$ 的间断点.

解 在 $(0, 2\pi)$ 内的点 $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 处 $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = 0$, 在 $(0, 2\pi)$ 内的点 $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 处 $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = \infty$, 故区间

$(0, 2\pi)$ 内有四点: $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的间断点.

在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处 $f(\frac{\pi}{4} + 0) = +\infty$, 故 $x = \frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, 且为无穷间断点.

在 $x = \frac{5\pi}{4}$ 处 $f(\frac{5\pi}{4} + 0) = +\infty$, 故 $x = \frac{5\pi}{4}$ 也是 $f(x)$ 的第二类间断点, 且为无穷间断点.

在 $x = \frac{3\pi}{4}$ 处 $f(\frac{3\pi}{4} - 0) = 1$, $f(\frac{3\pi}{4} + 0) = 1$, 故点 $x = \frac{3\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 第一类间断点, 且为可去间断点.

在点 $x = \frac{7\pi}{4}$ 处 $f(\frac{7\pi}{4} - 0) = 1$, $f(\frac{7\pi}{4} + 0) = 1$, 故点 $x = \frac{7\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点, 且为可去间断点.

评述 第一类间断点的特点是 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0)$ 均存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 不成立, 第二类间断点的特点是 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0)$ 二者中至少有一个不存在.

例 59 (01 7 分) 求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求 $f(x)$ 的间断点, 并指出其类型.

分析 在本题求极限过程中, 视 x 为常量, t 为变量, 先写出 $f(x)$ 的解析表示式, 然后才能求出 $f(x)$ 的全部间断点并判断其间断点的类型.

解 记 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} = \lim_{t \rightarrow x} e^{\frac{x}{\sin t - \sin x} \ln \frac{\sin t}{\sin x}} = e^{\lim_{t \rightarrow x} \frac{x \ln \sin t - \ln \sin x}{\sin t - \sin x}} = e^{\lim_{t \rightarrow x} \frac{x \cos t - \frac{1}{\sin x}}{\cos t - 1}} = e^{\frac{x}{\sin x}}$ 即 $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}$

当 $x = 0, \pm n\pi (n = 1, 2, \dots)$ 时, $f(x)$ 无定义, 故这些点均为 $f(x)$ 的间断点, 在其他点处 $f(x)$ 均连续.

又因 $f(0 - 0) = f(0 + 0) = e$, 故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点且为可去间断点.

在 $x = \pm n\pi$ 处 ($n = 1, 2, \dots$) 左、右极限之一为 0, 另一为 ∞ , 故为第二类间断点中的无穷间断点.

评述 这类题型是近年考研的热点, 在一个题中考了多个知识点, 并考查了极限运算能力和分析、判断的能力, 望读者熟练掌握这个题.

例 60 设对于每一个充分小的数 $\delta > 0$, 都有 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得: 只要 $|x - x_0| < \delta$, 则不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立. 由此是否可断定 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续?

分析 这里的正数 ε 未必能任意地小, 考察反例 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ 取 $\varepsilon = 2$ 题设条件都成立, 但 $f(x)$

在 $x = 0$ 处不连续.

解 由于不是对任意小正数 ε , 都存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立, 也就是说, $f(x)$ 在 x_0 处连续的条件未必成立, 故不能由此判定 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

评述 若取 $M = \max_{[a, b]} |f(x)|$, 再取 $\varepsilon = 2M + 1$, $x_0 \in (a, b)$, 不论 δ 取什么正数, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 虽然由此不能推出 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 但却可由此推出 $f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域内 $f(x)$ 是有界函数. 因当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内, 有不等式 $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, 此即说明 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上为有界函数.

例 61 (04 4 分) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{n-1}{n})^x}{nx^2 + 1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为_____.

解 $x = 0$. 因 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - 1/n)^x}{x^2 + 1/n} = \frac{x}{x^2}$ 故 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 可见 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0$.

在其他点处 $f(x)$ 连续.

例 62 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则_____.

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点

(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $[f(\varphi(x))]$ 必有间断点

(D) $\varphi(x)/f(x)$ 必有间断点

分析 作反例来否定某些错误命题.

(A) 不对. 有反例为 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $f(x) = e^x$, $\varphi(e^x) = 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

(B) 不对. 有反例为 $\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ $\varphi^2(x) = 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

(C) 不对. 有反例为 $f(x) = x^2 + 1$, $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $[f(\varphi(x))]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

(D) 对. 今用反证法证之. 若 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 处处连续, 已知 $f(x)$ 处处连续, 则二连续函数的乘积 $\frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot f(x) = \varphi(x)$ 亦必处处连续. 与假设矛盾, 故 $\varphi(x)/f(x)$ 必有间断点. 应选(D).

评述 判断一个命题的正确与错误, 是近年考研题的一大热点, 也最能反映出一个考生的数学素质如何, 平时在这方面必须多加磨练.

例 63 判断下列命题中哪个是正确的?

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处不连续, 则 $f(x) + g(x)$ 在 $x = x_0$ 处必不连续.

(2) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处均不连续, 则 $f(x) + g(x)$ 在 $x = x_0$ 处必不连续.

(3) 不连续函数的平方后仍为不连续函数.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处不连续, 则 $f(x)g(x)$ 在 $x = x_0$ 处必不连续.

(5) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处都不连续, 则 $f(x)g(x)$ 在 $x = x_0$ 处必不连续.

分析 (1) 对. 用反证法证之. 若 $f(x) + g(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则二连续函数的和 $[f(x) + g(x)] + [-f(x)] = g(x)$ 在 $x = x_0$ 处必连续, 与题设矛盾.

(2) 否. 有反例 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$

$f(x) + g(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

(3) 否. 有反例 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ 则 $f^2(x) = 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

(4) 否. 有反例 $f(x) = 0$, $(-\infty < x < +\infty)$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ $f(x)g(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

连续.

(5) 否. 有反例 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ $f(x)g(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

评述 在相当多的情况下,常不能用一条已知定理来帮助读者去否定一个命题,每依靠举出反例达到否定的目的.本例代表一大类类似的题.应开拓思维试作各种代换后看看是什么情况.譬如说,将函数“极限存在”代替“连续”,“极限不存在”代替“不连续”,又如在常数项级数中,可将“级数收敛”代替“函数在点 x_0 处连续”,“级数发散”代替“函数在点 x_0 处不连续”,...等其他题干文字不变,看看正确的结果各是什么.这样能帮助读者从正反两方面去观察一个事物,以便更全面地认识它.

典型题型 9. 以下讨论方程的实根

例 64* 求证方程 $x + p + q\cos x = 0$ 恰有一个实根,其中 p, q 为常数且 $0 < q < 1$.

分析 记 $f(x) = x + p + q\cos x$, 探求方程 $f(x) = 0$ 的实根个数的问题便化为考察曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴的交点个数的问題.

解 因 $f(x) = x + p + q\cos x$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数,且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + p + q\cos x) = +\infty$, 知存在 b , 使 $f(b) > 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + p + q\cos x) = -\infty$, 知存在 a , 使 $f(a) < 0$. 据连续函数的介值定理, 知在 (a, b) 内至少存在一个实数 ξ 使 $f(\xi) = 0$, 也就是说方程 $f(x) = 0$ 至少有一个实根.

又因 $f'(x) = 1 - q\sin x > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调增函数, 故方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内至多有一个实根.

综上所述, 方程 $x + p + q\cos x = 0 (0 < q < 1)$ 恰有一个实根.

评述 利用连续函数的介值定理, 来确定方程实根的存在性以及实根至少有几个, 另一方面, 我们还经常利用 $f(x)$ 的单调性来判定方程 $f(x) = 0$ 的实根的唯一性. 方程实根的存在性与唯一性, 屡屡用这样的方法判定之, 这是考研的热点内容之一.

例 65 (03, 12 分) 讨论曲线 $y = 4 \ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数

分析 在二曲线的交点处, 二曲线的纵坐标相同, 所以讨论曲线 $y = 4 \ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数必与方程 $4 \ln x + k = 4x + \ln^4 x$ 的不同实根个数相同, 亦即与方程 $\ln^4 x - 4 \ln x + 4x - k = 0$ 的不同实根的个数相同.

解 $\varphi(x) = \ln^4 x - 4 \ln x + 4x - k$, $\varphi'(x) = \frac{4(\ln^3 x - 1 + x)}{x}$

令 $\varphi'(x) = 0$ 得 $\varphi(x)$ 的驻点 $x = 1$.

当 $0 < x < 1$ 时 $\varphi'(x) < 0$, 即 $\varphi(x)$ 单调减少; 当 $x > 1$ 时 $\varphi'(x) > 0$, 即 $\varphi(x)$ 单调增加, 故 $\varphi(1) = 4 - k$ 为函数 $\varphi(x)$ 的最小值.

当 $4 - k > 0$ 即 $4 > k$ 时 $\varphi(x)$ 无实根, 即两条曲线无交点.

当 $4 - k = 0$ 即 $k = 4$ 时 $\varphi(x) = 0$ 有唯一实根, 即两曲线只有一个交点.

当 $4 - k < 0$ 时, 即 $4 < k$ 时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

故 $\varphi(x) = 0$ 有两个实根, 分别位于 $(0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 内, 即此二曲线有两个交点.

评述 这个例题的解题方法很有启发性. 一般, 若 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的图形都十分简单, 则不难发现曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 的交点的横坐标就是方程 $f(x) = g(x)$ 的实根. $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的交点个数, 就是方程 $f(x) - g(x) = 0$ 的不同实根的个数.

预测·强化训练一

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$ 则

$$(A) f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases} \quad (B) f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(C) f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases} \quad (D) f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

2. 写出函数 $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$ 的定义域(指自然定义域)

3. $f(x) = |\sin x|e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是

(A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数.

4. $f(x) = \cos(e^x - e^{-x})$ 是_____函数.

5. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$ 则函数 $f(e^x)$ 的定义域为_____.

$$6^*. x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n} & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n} & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad \text{则当 } n \rightarrow \infty \text{ 时 } x_n \text{ 是}$$

(A) 无穷大量 (B) 无穷小量 (C) 有界变量 (D) 无界变量.

7. 若 $I = \frac{1}{s} \int_0^s f\left(t + \frac{x}{s}\right) dx (s > 0, t > 0)$ 则 I 的值

(A) 依赖于 s, t, x (B) 依赖于 t 和 s (C) 依赖于 t , 不依赖于 s (D) 依赖于 s, x .

8. 若函数 $f(x)$ 及其反函数 $g(x)$ 都可微, 且有关系式

$$\int_1^{f(x)} g(t) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{x^2} - 8 \right) \quad \text{求函数 } f(x)$$

9*. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$ 则 $f(x) =$ _____.

10. 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$ 则 $f(x) =$ _____.

(A) $e^x \ln 2$ (B) $e^{2x} \ln 2$ (C) $e^x + \ln 2$ (D) $e^{2x} + \ln 2$.

11. $f(x) = \ln(1 - e^{1-x})$ 的定义域为_____.

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{\sin x}^0 \cos t^2 dt = \text{_____}.$$

13. 当 $x \rightarrow 0$ 时 $x - \sin x$ 是 x^2 的

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小
(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小

14. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个比其它三个更高阶的无穷小?

(A) x^2 (B) $1 - \cos x$ (C) $\sqrt{1 - x^2} - 1$ (D) $x - \tan x$

15. (97 3 分) 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小, 则当

$x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x f(t) \sin t dt$ 是 $\int_0^x t \varphi(t) dt$ 的

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 同阶但不等价的无穷小 (D) 等价无穷小

16. (03 4 分) 若 $x \rightarrow 0$ 时 $(1 - ax^2)^{1/4} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 求 a 值.

17. 下列式中正确的是

$$(A) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1 \quad (B) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(C) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = -e \quad (D) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} \sqrt{n} - \sqrt{n} \sqrt{n}).$$

$$20^*. \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$21. (97 6 分) \text{ 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1 + ax) \right] \quad (a \neq 0).$$

27. 若 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - x + b \right) = 0$ 则 $b =$ _____.
28. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x + 1} - ax - b \right) = 0$ 其中 a, b 是常数 则
 (A) $a = 1, b = 1$ (B) $a = -1, b = 1$ (C) $a = 1, b = -1$ (D) $a = -1, b = -1$
29. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x = 9$ 求常数 a .
30. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x - a}{x + a} \right)^x = \int_a^+ 4x^2 e^{-2x} dx$ 求常数 a 的值.
31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$ 则
 (A) $a = 1, b = -\frac{5}{2}$ (B) $a = 0, b = 2$
 (C) $a = 0, b = -\frac{5}{2}$ (D) $a = 1, b = -2$
32. (05 4 分) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} =$ _____.
33. 是非题. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$ 必存在.
34. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是
 (A) 无穷小 (B) 无穷大
 (C) 有界的, 但不是无穷小量 (D) 无界的, 但不是无穷大
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5}{5x + 3} \sin \frac{2}{x} =$ _____.
36. (98 3 分) 设数列 χ_n 与 η_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n \eta_n = 0$ 则下列断言正确的是
 (A) 若 χ_n 发散 则 η_n 发散 (B) 若 χ_n 无界 则 η_n 必有界
 (C) 若 χ_n 有界 则 η_n 必为无穷小 (D) 若 $\frac{1}{\chi_n}$ 为无穷小 则 η_n 必为无穷小
37. (98 5 分) 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1 + t^3)}{t} dt} = c (c \neq 0)$
38. (98 6 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ (n 为自然数)
39. (99 3 分) 设 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln [f(1)f(2)\dots f(n)] =$ _____.
40. $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{\sin x} (1 + t)^{\frac{1}{t}} dt$ 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 ()
 (A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小
 (C) 同阶但不是等价无穷小 (D) 等价无穷小
41. (06 4 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + x)}{1 - \cos x}$
42. (01 3 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 - x} - \sqrt{1 + x}}{x^2 + x - 2}$.
43. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.
44. (02 3 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right]^n$ 其中 $a \neq \frac{1}{2}$.
45. (00 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right]$.
46. (02 3 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right]$.

$$42. (02.5 \text{ 分}) \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1 - \cos x)}.$$

43*. (02.8 分) 设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

44. 函数_____在其定义域内连续

(A) $f(x) = \ln x + \sin x$

(B) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0; \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

45. 若 $f(x) = \begin{cases} e^x(\sin x + \cos x), & x > 0 \\ 2x + a, & x \leq 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 则 $a =$ _____.

46. $x = 0$ 是函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 的

(A) 连续点

(B) 可去间断点

(C) 有限跳跃间断点

(D) 无穷间断点

47. 设 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则常数 a 与 b 应满足的关系是_____.

48*. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}, & \text{若 } x \neq 1 \\ 1, & \text{若 } x = 1, \end{cases}$ 问 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处是否连续? 若不连续, 修改函数在 $x = 1$ 处的定义, 使之连续.

49. (98.) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为

(A) 不存在间断的点

(B) 存在间断点 $x = 1$

(C) 存在间断点 $x = 0$

(D) 存在间断点 $x = -1$

50. (00.3 分) 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足

(A) $a < 0, b < 0$

(B) $a > 0, b > 0$

(C) $a \leq 0, b > 0$

(D) $a \geq 0, b < 0$

51*. 讨论函数 $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right)$ 的连续性.

52. 设函数 $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x-2)}$, 讨论 $f(x)$ 的间断点.

53. 是否存在处处不连续的函数 $f(x), g(x)$, 但 $f(x) + g(x), f(x)g(x)$ 都处处连续?

54*. 研究函数 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$ 的连续性

55. 讨论函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) / \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)$ 的间断点, 并指出这些点性质

56*. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有 ξ , 使 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$.

57. 证明方程 $\cos x + x + 1 = 0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

简明解答

1. (D). 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x^2 + x & x > 0 \end{cases}$ 则 $f(-x) = \begin{cases} (-x)^2, & -x \leq 0 \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0 \end{cases}$

$$\text{即 } f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^2 - x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{应选(D).}$$

2. 为使 $\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$ 有意义, 必需且只需 $\sin(\sqrt{x}) \geq 0$. 为使 $\sin(\sqrt{x}) \geq 0$, 必需且只需 $2n\pi \leq \sqrt{x} \leq (2n+1)\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ 亦即 $4n^2\pi^2 \leq x \leq (2n+1)^2\pi^2, n = 0, 1, 2, \dots$, 故该函数的定义域为 $4n^2\pi^2 \leq x \leq (2n+1)^2\pi^2, n = 0, 1, 2, \dots$.

3. (D). $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$. $f(-x) = |-x \sin(-x)| e^{\cos(-x)} = |x \sin x| e^{\cos x} = f(x)$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为偶函数, 显然 $f(x)$ 不是单调函数, 不是周期函数, 也不是有界函数, 应选(D).

4. 偶. $f(x) = \cos(e^x - e^{-x})$, $f(-x) = \cos(e^{-x} - e^x) = \cos(e^x - e^{-x}) = f(x)$. 故 $f(x)$ 为偶函数.

5. $(-\infty, 0)$. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$, 使 $0 < e^x < 1$ 成立的 x 的集合为 $-\infty < x < 0$, 故 $f(e^x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$.

6. (D). $x_n = \begin{cases} (n^2 + \sqrt{n})/n = n + 1/\sqrt{n}, & n \text{ 为奇数} \\ 1/n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它是一个无界变量, 应选(D).

7. (C). 若 $I = \int_0^s f(t + \frac{x}{s}) dx (s > 0, t > 0)$, 令 $t + \frac{x}{s} = u$, 即用新的积分变量 u 代替原来的积分变量 x , 代入得 $I = \int_0^s f(t + \frac{x}{s}) dx = \frac{1}{s} \int_t^{2t} f(u) s du = \int_t^{2t} f(u) du$, 它是仅依赖于 t 不依赖于 s 的函数, 应选(C).

8. 由关系式 $\int_1^{f(x)} g(t) dt = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 8)$ 两边对 x 求导得 $g[f(x)] f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, 因 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数, 即由 $y = f(x)$ 解出 $x = g(y) = g[f(x)]$, 代入前一关系式, 于是有 $xf'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, 即 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 积分之得

$f(x) = \sqrt{x} + C$. 又因取 $f(x) = 1$ 时 $\int_1^{f(x)} g(t) dt = 0 = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 8)$, $f(x)$ 、 $g(x)$ 均是单调函数, 存在唯一的 x

值, 使 $\int_1^{f(x)} g(t) dt = 0 = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 8)$ 成立, 解得 $x = 4$. 从而得条件 $f(4) = 1$. 代入 $f(x) = \sqrt{x} + C$ 有 $1 = \sqrt{4} + C$, $C = -1$, 最后得 $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

9. $x - 1$. 因 $f(x)$ 为连续函数, 定积分 $\int_0^1 f(t) dt$ 存在, 记 $2 \int_0^1 f(t) dt = c$ 于是 $f(x) = x + c$. 代入前一关系式 $2 \int_0^1 (t + c) dt = c$, 即 $\frac{2}{2} + 2c = c$ 得 $c = -1$. 所求函数为 $f(x) = x - 1$.

10. (B). 由关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2}) dt + \ln 2$, 两边对 x 求导得 $f'(x) = 2f(x)$, 即 $\frac{df(x)}{f(x)} = 2dx$, $f(x) = ce^{2x}$. 由原关系式 $f(0) = \ln 2$, $c = \ln 2$ 所求解 $f(x) = \ln 2 \cdot e^{2x}$. 应选(B).

11. $(1, +\infty)$. $f(x) = \ln(1 - e^{1-x})$ 的定义域为使 $1 - e^{1-x} > 0$ 的 x 的集合, 即使 $e^x > e$ 的 x 的集合, 所求定义域为 $(1, +\infty)$.

12. -1 . $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{\sin x}^0 \cos^2 t dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\int_0^{\sin x} \cos^2 t dt}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sin^2 x) \cos x = -1$

13. (B). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} = 0$. 故当 $x \rightarrow 0$ 时 $x - \sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小, 应选(B).

14. (D). $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\sqrt{1 - x^2} - 1 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ 可见 $x^2, 1 - \cos x, \sqrt{1 - x^2} - 1$ 三者当 $x \rightarrow 0$ 时, 均为 x 的二阶无穷小. 而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sec^2 x \tan x}{2} = 0$, 可见 $x - \tan x = o(x^2)$. 应选(D).

15. (B). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) \sin t dt}{\int_0^x t \varphi(t) dt} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{x \varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, 故 $\int_0^x f(t) \sin t dt$ 是 $\int_0^x t \varphi(t) dt$ 的高阶无穷小, 应选(B).

16. $\lim_{x \rightarrow 0} [(1 - ax^2)^{1/4} - 1] / x \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 - ax^2)^{1/4} - 1] / x^2 \stackrel{0}{=} \frac{-a}{4} = 1, a = -4$

$$17. (A). \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(1 + \frac{1}{x})} \xrightarrow{x = \frac{1}{t}} e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+t}} = e^0 = 1, \text{故(A)对, (B)错.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x \xrightarrow{-\frac{1}{x} = t} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} [(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{-1} = e^{-1}, \text{故(C)错.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^{-x} \xrightarrow{\frac{1}{x} = t} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} = e^{-1}, \text{故(D)错. 应选(A).}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow{0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+3n^{-1/2}} + \sqrt{1-n^{-1/2}}} = 2.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \right] \xrightarrow{\frac{1}{x} = t} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - (1 - a^2 x^2) \ln(1+ax)}{x^2} \xrightarrow{0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + 2a^2 x \ln(1+ax) - a(1-ax)}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a^2 \ln(1+ax) + \frac{2a^3 x}{1+ax} + a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$22. 1. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - x + b \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - 1 + \frac{2}{x+1} - x + b \right) = b - 1 = 0, \text{故 } b = 1.$$

$$23. (C). \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow 1} [(1-a)x - (b+1)] = 0 \quad \text{必有 } a = 1, b = -1, \text{应选(C).}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^x \xrightarrow{\frac{2a}{x-a} = t} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{a + \frac{2a}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^a \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t} 2a}$$

$$= e^{2a} = (e^a)^2 = 9, \quad a = \ln 3.$$

$$25. \text{由上题知 } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = e^{-2a}. \int_a^+ 4x^2 e^{-2x} dx = -2 \int_a^+ x^2 de^{-2x} = -2x^2 e^{-2x} \Big|_a^+ + 4 \int_a^+ x e^{-2x} dx$$

$$= 2a^2 e^{-2a} - 2 \int_a^+ x de^{-2x} = 2a^2 e^{-2a} - 2xe^{-2x} \Big|_a^+ + 2 \int_a^+ e^{-2x} dx$$

$$= 2a^2 e^{-2a} + 2ae^{-2a} - e^{-2x} \Big|_a^+ = 2a^2 e^{-2a} + 2ae^{-2a} + e^{-2a},$$

于是由 $e^{-2a} = 2a^2 e^{-2a} + 2ae^{-2a} + e^{-2a}$ 即 $2a^2 + 2a = 0$, $a = 0$ 或 $a = -1$.

$$26. (A). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - ax - bx^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1-a) \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - b \right] = 2. \text{故必有}$$

$a = 1, -\frac{1}{2} - b = 2$ 即 $a = 1, b = -\frac{5}{2}$. 应选(A).

$$27. 2. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2x}{x^2+1} \right) / \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2+1} / \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2.$$

28. “非”. 例如取 $f(x) = x, g(x) = \sin \frac{1}{x}, x_0 = 0$. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, 函数乘积的极限存在, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 亦存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在. 应答“非”.

$$29. (D). \text{记 } f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}. \text{ 当取 } x_n = \frac{1}{n\pi}, n = 1, 2, \dots \text{ 时 } f(x_n) = 0. \text{ 当 } x_n = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}, n = 1, 2, \dots \text{ 时,}$$

$|f(x_n)| = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \rightarrow (n \rightarrow \infty)$. 故当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 不是无穷小, 不是无穷大, 也不是有界变量 $f(x)$ 是无界的但不是无穷大, 应选(D).

$$30. \frac{6}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5}{5x + 3} \sin \frac{2}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5}{5x^2 + 3x} \cdot \frac{x}{2} \sin \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{3}{5} = 6/5. \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5}{5x^2 + 3x} = \frac{3}{5}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \sin \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{2}{x} / \frac{2}{x} = 1.$$

$$31. \text{ 选(D). (A) 不对. 存在反例 } \chi_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad \eta_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad \chi_n \eta_n = 0 (n = 1, 2, \dots) \quad \chi_n \text{ 发散, 但 } \eta_n \text{ 收敛于零} (n \rightarrow \infty \text{ 时})$$

$$(B) \text{ 不对. 存在反例 } \chi_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad \eta_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \text{ 为奇数} \\ n, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n \eta_n = 0 \quad \chi_n \text{ 无界, 但 } \eta_n \text{ 无界}$$

$$(C) \text{ 不对. 存在反例 } \chi_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad \eta_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ 1, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n \eta_n = 0. \quad \chi_n \text{ 为有界数列, 但 } \eta_n \text{ 不是无穷小数列.}$$

$$(D) \text{ 对. 已知 } \chi_n \eta_n \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时为无穷小数列, 若 } \frac{1}{\chi_n} \text{ 为无穷小, 则二无穷小的乘积 } \chi_n \eta_n \cdot \frac{1}{\chi_n} = \eta_n \text{ 必为无穷小, 应选(D).}$$

$$32. \text{ 已知 } \lim_{x \rightarrow 0} (ax - \sin x) / \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = c \neq 0. \text{ 且当 } x \rightarrow 0 \text{ 时分子 } ax - \sin x \rightarrow 0, \text{ 故当 } x \rightarrow 0 \text{ 时 } \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt \rightarrow 0, \text{ 从而知必有 } b = 0 \text{ (否则当 } x \rightarrow 0 \text{ 时 } \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt \rightarrow 0 \text{ 与 } c \neq 0 \text{ 矛盾)}, \text{ 计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(a - \cos x)}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(a - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = c \neq 0. \text{ 必有 } a = 1, c = \frac{1}{2}.$$

$$33. \text{ 考察 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \tan \frac{1}{x})^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln(x \tan \frac{1}{x})} = e_{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x \tan \frac{1}{x}) \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x \tan \frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln t - \ln t}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sec^2 t / \tan t - 1/t}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sec^2 t - \tan t}{2t^2 \tan t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sec^2 t - \tan t}{2t^3} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \sec^2 t \tan t}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \sec^2 t \cdot \frac{\tan t}{t} \right) = \frac{1}{3}.$$

从而知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} = e^{\frac{1}{3}}.$

$$34. \frac{1}{2} \ln a. \text{ 已知 } f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2)\dots f(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \dots a^n] = \ln a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$35. \text{ 选(C). } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt / \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[5 \frac{\sin 5x}{5x} / (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \cos x \right] = \frac{5}{e}.$$

故 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶但非等价无穷小 (当 $x \rightarrow 0$ 时). 应选(C).

$$36. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = 2.$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x - (1+x)}{(x+2)(x-1)[\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x}]} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin \ln(1 + \frac{3}{x}) - \sin \ln(1 + \frac{1}{x}) \right] \stackrel{x = \frac{1}{t}}{\rightarrow} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \ln(1 + 3t) - \sin \ln(1 + t)}{t}$$

$\frac{\cos(x-1)}{\sin \frac{\pi}{2}x}(-\frac{2}{\pi}) = -\frac{4}{\pi^2}$. 关系式 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{4}{\pi^2} \neq f(1) = 1$. 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续. 为使 $f(x)$ 在

$x=1$ 处连续, 应定义 $f(1) = -\frac{4}{\pi^2}$.

49. (B). 当 $|x| > 1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = 0$, 当 $|x| < 1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = 1+x$, 当 $x=1$ 时 $f(x) = 1$, $x=-1$ 时 $f(x) = 0$, 所给函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 1+x, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$f(-1-0) = 0$, $f(-1+0) = f(-1) = 0$, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续, $f(1-0) = 2$, $f(1+0) = 0$, $f(x)$ 在 $x=1$ 处间断, 应选(B).

50. (D). 因 e^{bx} 的值域为 $(0, +\infty)$, 为使 $f(x)$ 处处连续, 必须 $a \geq 0$. 又因 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{a + e^{bx}} = 0$, 必须 $b < 0$, 应选(D).

51. $f(0-0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(0+0) = \frac{\pi}{2}$, $f(1-0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(1+0) = \frac{\pi}{2}$, $f(-3-0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(-3+0) = \frac{\pi}{2}$, 故 $x=0$, $x=1$, $x=-3$ 三点均为 $f(x)$ 的第一类间断点, 且为有限跳跃间断点.

52. $f(0-0) = f(0+0) = +\infty$, $x=0$ 为 $f(x)$ 无穷间断点, $f(-1-0) = -\frac{\pi}{2}e$, $f(-1+0) = \frac{\pi}{2}e$, $f(2-0) = -\frac{\pi}{2}e^{\frac{1}{4}}$, $f(2+0) = \frac{\pi}{2}e^{\frac{1}{4}}$, 故 $x=-1$, $x=2$ 两点均为 $f(x)$ 的第一类间断点, 且均为有限跳跃间断点.

53. 取 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \\ 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \end{cases}$ $f(x) + g(x) \equiv 0$, $f(x)g(x) \equiv -1$, $f(x)$, $g(x)$ 均处处间断, 但是 $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ 均处处连续.

54. 当 $|x| < 1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}} = 1$, 当 $x = \pm 1$ 时 $y = 1$, 当 $|x| > 1$ 时 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 \sqrt{x^{-2n} + 1} = x^2$, 亦即 $y = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ x^2, & |x| > 1 \end{cases}$, 该函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

55. $x=0$, $x=-1$, $x=1$ 都是 $f(x)$ 的间断点, 因在这些点处 $f(x)$ 无定义, 当 $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$ 时 $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$, 故 $x=0$, $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, $x=-1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

56. 因已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上必连续, 今记 $m = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$, $M = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$, 有

$$m \leq \frac{nm}{n} \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq \frac{nM}{n} = M$$

再记 $\mu = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$, 则 $m \leq \mu \leq M$. 若 $m < M$, 则 $m < \mu < M$, 由在 $[x_1, x_n]$ 上连续函数的

介值定理, 知至少存在一个 $\xi \in (x_1, x_n)$ 使有 $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} = f(\xi)$. 若 $m = M$, 则 $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = m = M$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中任何一个 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 均可取作 ξ . 综上所述, 在 $[x_1, x_n]$ 上必有 ξ , 使 $[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]/n = f(\xi)$.

57. 记 $f(x) = \cos x + x + 1$, $f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} + 1 < 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + 1 > 0$, 由闭区间上连续函数的介值定理知, 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少存在一个 ξ 使 $f(\xi) = 0$, 即方程 $\cos x + x + 1 = 0$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 至少有一个实根.

第二章 一元函数微分学*

考试要求

1. 理解导数和微分的概念,理解导数与微分的关系,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程,了解导数的物理意义,会用导数描述一些物理量,理解函数的可导性与连续性之间的关系.
2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式,了解微分的四则运算和一阶微分形式的不变性,会求函数的微分.
3. 了解高阶导数的概念,会求简单函数的高阶导数.
4. 会求分段函数的导数,会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.
5. 理解并会用罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理和泰勒(Taylor)定理,了解并会用柯西(Cauchy)中值定理.
6. 理解函数的极值概念,掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法,掌握函数最大值和最小值的求法及其简单的应用.
7. 会用导数判断函数图形的凹凸性,会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线,会描绘函数的图形.
8. 了解曲率和曲率半径的概念,会计算曲率和曲率半径.

考试要点分析与题型预测

这一章的考试要点有

1. 导数与微分概念,导数的几何意义与物理意义,平面曲线的切线方程与法线方程.
2. 会求各种各样函数的导数和高阶导数.
3. 四条微分中值定理.
4. 求函数的极值与最值,曲线的拐点、渐近线,作出函数的图形,求平面曲线的曲率.

亦即一元函数微分学这一章中的考试热点是以上四大块,这四大块内容几乎每年都考到,导数定义必须熟记,微分运算必须熟练掌握,四条中值定理的内容要记准确,微分法在求最值、极值和作图上的应用非常重要,不可忽视.第一大块是基本概念,第二大块是基本运算方法,第三大块是基本理论,第四大块是微分法的应用.这四大块构成微分学这座辉煌大厦的四根柱子,缺一不可.考试时这四方面的内容也是几乎不会缺少任何其中之一的.

§ 2 - 1 导数与微分概念

一、导数

1. 导数定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义,若函数的改变量 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 与自变量的改变量 Δx 之比当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,记作

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

并称 $f'(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数.导数定义亦可写作

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ 或 } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}$$

* 一元函数微分学,数学一、数学二要求完全相同

导数定义的这三种书写形式都很常用,宜熟记之.

若函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的每点处都可导,则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导,这时对于任一 $x \in (a, b)$ 都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值,这样就构成了一个新的函数,这个新函数叫做原来函数 $y = f(x)$ 的导函数,记作 $f'(x)$ 或 y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ 等,导函数也简称作导数,在 (a, b) 上可导函数必为在 (a, b) 上的连续函数,其逆不真.

2. 左、右导数定义和记号

左导数定义 $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 其中 $\Delta x < 0$

右导数定义 $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 其中 $\Delta x > 0$

导数 $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件为 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ 均存在且相等,并有 $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

3. 导数的几何意义及物理意义

导数 $f'(x_0)$ 的几何意义表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率,其切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$,其法线方程为 $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

导数的物理意义经常用的有:表示变速运动的瞬时速度 $\frac{ds}{dt}$,角速度 $\frac{d\theta}{dt}$,杆的线密度 $\frac{dm(x)}{dx}$,电流强度 $\frac{dq}{dt}$ 等.

4. 高阶导数 若 $f(x)$ 为可导函数,则定义 $f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x)$ 称 $f''(x)$ 为 $f(x)$ 的二阶导数,若 $f^{(n-1)}(x)$ 为

可导函数,则定义 $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$ 称 $f^{(n)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 阶导数, n 阶导数还可记作 $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ 等.

二、微分

1. 微分概念 若函数的改变量 Δy 可以写作

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 为与 Δx 无关的常数, $o(\Delta x)$ 为比 Δx 高阶的无穷小,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处微分. 记作 $dy \Big|_{x=x_0} = A\Delta x$ 或 $df(x) \Big|_{x=x_0} = A\Delta x$

2. 可微与可导 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可微,从而有

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

两边除以 Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

取极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = A$

可见导数存在且 $A = f'(x_0)$

故 $dy \Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$ 或 $df(x) \Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$

若 x_0 为任意一点 x ,则 $dy = f'(x)\Delta x$ 或 $df(x) = f'(x)\Delta x$

由此知 $dx^3 = 3x^2 dx$ $dx^2 = 2x dx$ $dx = dx$.

反之可导亦必可微,若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$,由极限与无穷小间的关系有

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) \quad \text{其中} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$

亦即 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$

可见函数的改变量 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可写作 $A\Delta x + o(\Delta x)$,其中 $A = f'(x_0)$ 是与 Δx 无关的常数, $f(x)$ 在点 x_0 处可微.

由上知可微必可导,可导亦必可微,在单元函数微分学中可导与可微是等价的,又因 $dx = \Delta x$,故对于可微函数有 $df(x) = f'(x)dx$, $dy = y'dx$. 于是有 $\frac{dy}{dx} = dy \div dx$.

3. 一阶微分形式的不变性 不论 u 是自变量还是中间变量,若 $f(u)$ 为可微函数,则恒有 $df(u) = f'(u)du$.

§ 2 - 2 微分中值定理及其应用

一、微分中值定理

1. 罗尔(M. Rolle)定理 若函数 $y = f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, (2) 在开区间 (a, b) 内可导, (3) $f(a) = f(b)$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

2. 拉格朗日(J. L. Lagrange)中值定理 若函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立, 或在 $(0, 1)$ 内至少存在一数 θ , 使 $f(b) - f(a) = f[a + \theta(b - a)](b - a)$ 成立, 其中 $\theta = (\xi - a)/(b - a)$.

拉格朗日中值定理另一写法为 $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$ 其中 $0 < \theta < 1$.

3. 柯西(A. L. Cauchy)中值定理 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上均连续, 在开区间 (a, b) 内均可导, $g'(x) \neq 0$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ 使 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 成立.

4. 泰勒(B. Taylor)定理 若函数 $f(x)$ 在点 a 的邻域内 n 阶可导, 则对于这邻域内的任一点 x , 在 a 与 x 之间至少存在一点 ξ 使 $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n$

成立. 这个公式叫做带拉格朗日型余项的 $n - 1$ 阶泰勒公式, 其中 $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n$ 称为 $n - 1$ 阶泰勒公式的拉格朗日型余项(注或将余项写作 $o((x - a)^{n-1})$ 称它为 $n - 1$ 阶泰勒公式的 Peano 型余项).

这四条定理通称为微分中值定理, 其中泰勒定理是拉格朗日中值定理的推广, 罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情况. 在柯西中值定理中令 $g(x) = x$, 便得拉格朗日中值定理, 这四条中值定理是研究函数性质的极为有力的工具.

二、导数的应用

1. 单调函数

如果函数 $y = f(x)$ 可导, 则

1) 在 $f'(x) \geq 0$ 的区间 $f(x)$ 单调增(在 $f'(x) > 0$ 的区间 $f(x)$ 严格单调增);

2) 在 $f'(x) \leq 0$ 的区间 $f(x)$ 单调减(在 $f'(x) < 0$ 的区间 $f(x)$ 严格单调减);

2. 极值

如果在 x_0 的某一邻域内不等式

$$f(x_0) \geq f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值 $f(x_0)$, 如果不等式

$$f(x_0) \leq f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值 $f(x_0)$.

极值存在的必要条件: 可导函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处取得极值的必要条件是 $f'(x_0) = 0$.

极值的第一种充分条件: 若 $y = f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内连续, 且在该邻域内

当 $x < x_0$ 时 $f'(x) > 0$, 而当 $x > x_0$ 时 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值;

当 $x < x_0$ 时 $f'(x) < 0$, 而当 $x > x_0$ 时 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值;

当 $x < x_0$ 与 $x > x_0$ 时 $f'(x)$ 不改变符号, 则 $f(x)$ 在 x_0 没有极值.

极值的第二种充分条件: 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$ 而 $f''(x_0) \neq 0$. 如果:

$f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值;

$f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值.

3. 拐点

在区间 I 任意点处作曲线 $y = f(x)$ 的切线, 如果曲线都在切线下面, 就称在区间 I 曲线下凹; 如果曲线都在切线的上面, 就称在区间 I 曲线上凹; 上凹与下凹部分的分界点称为这曲线的拐点 (假定曲线 $y = f(x)$ 在不同凹向的分界点处存在切线) (注: 有少数书“存在切线”这一条件减弱为“连续”).

在 $f''(x_0) > 0$ 的区间 I_1 上凹; 在 $f''(x) < 0$ 的区间 I_2 上凹.

拐点存在的必要条件: 如果函数 $y = f(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 有拐点的必要条件是 $f''(x_0) = 0$.

拐点的第一充分条件: 若 $y = f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可导, 且在该邻域内

当 $x < x_0$ 与 $x > x_0$ 时 $f'(x)$ 异号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

拐点的第二充分条件: 如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 三阶可导且 $f''(x_0) = 0$ 而 $f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

4. 渐近线

如果当 $x \rightarrow \infty$ 或 $y \rightarrow \infty$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 上的点 $M(x, y)$ 到直线 L 的距离趋向 0, 称直线 L 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, 称直线 $x = a$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, 称直线 $y = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

若存在极限 $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$

或 $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx]$

称直线 $y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

5. 作函数图形注意以下各点

(1) 求出函数的定义域;

(2) 讨论函数的奇偶性;

(3) 求出函数的图形与坐标轴的交点;

(4) 讨论函数的连续性. 如果函数有间断点, 则找出这些间断点并弄清它的类型, 求出曲线 $y = f(x)$ 的渐近线;

(5) 求出函数单调增加及单调减少区间和极值;

(6) 求出函数的凹凸性区间和拐点;

(7) 作出函数性态表后再画函数图形;

6. 平面曲线的曲率

若曲线的方程为 $y = f(x)$, 则它的曲率为 $K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$

若曲线由参数方程 $x = x(t), y = y(t)$ 给出, 则它的曲率公式为 $K = \frac{|x\ddot{y} - y\ddot{x}|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$

曲率半径 $R = \frac{1}{K}$.

§ 2 - 3 微分运算基本公式

一、导数运算公式

设 u, v 都是 x 的可微函数, $f(u)$ 为 u 的可微函数, c, a 为常数.

$c' = 0$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{uv' - vu'}{u^2}$

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$(\tan u)' = \sec^2 u \cdot u'$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$[f(u)]' = f'(u)u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' (a > 0, a \neq 1)$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'$$

$$(\cot u)' = -\csc^2 u \cdot u'$$

$$(\sec u)' = \sec u \tan u \cdot u'$$

$$(\csc u)' = -\csc u \cot u \cdot u'$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\operatorname{arccot} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

四、微分运算公式

$$dc = 0$$

$$d(x) = dx$$

$$d(u+v-w) = du+dv-dw$$

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$d(u^n) = nu^{n-1} du$$

$$d\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u dv - v du}{u^2}$$

$$d(ku) = k du$$

$$d(\ln u) = \frac{du}{u}$$

$$d(a^u) = a^u \ln a du (a > 0, a \neq 1)$$

$$de^u = e^u du$$

$$du^v = vu^{v-1} du + u^v \ln u \cdot dv$$

$$d \sin u = \cos u \cdot du$$

$$d \cos u = -\sin u \cdot du$$

$$d \tan u = \sec^2 u du$$

$$d \arcsin u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d \arctan u = \frac{du}{1+u^2}$$

$$d \sec u = \sec u \cdot \tan u \cdot du$$

$$df(u) = f'(u) du$$

§ 2 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测

典型题型 1. 以下直接根据导数定义讨论导数

例 1 设 $f(x) = g(x)\sin x$ 其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 求 $f'(0)$

分析 由于 $g(x)$ 在 $x=0$ 处未必可导, 故不能用公式 $(uv)' = u'v + uv'$, 再令 $x=0$ 代入求之. 只能用导数定义求其值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)\sin x - g(0)\sin 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)\sin x}{x} = g(0). \end{aligned}$$

评述 因 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $g(0)$ 有定义, 直接利用导数定义求导数是考试热点内容之一.

例 2 设 $f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n)\tan x$ 求 $f'(0)$

分析 本题如视 $f(x)$ 为 $n+1$ 个因式的乘积, 再按因式乘积的求导公式求之, 就有点繁琐了. 仍用导数定义直接求值, 十分简便.

$$\text{解} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\tan x - 0}{x} = (-1)^n n!$$

例 3 已知 $f(x_0) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 3x) - f(x_0 + x)}$.

分析 本例同样不能利用洛必达法则求之

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 3x) - f(x_0 + x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\{f(x_0 - 3x) - f(x_0) - [f(x_0 + x) - f(x_0)]\} / x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-3 \cdot \frac{f(x_0 - 3x) - f(x_0)}{-3x} - \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}} \\ &= \frac{1}{-3f'(x_0) - f'(x_0)} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

评述 在 $\frac{f(x_0 - 3x) - f(x_0)}{-3x}$ 中把 $-3x$ 看作导数定义中的 Δx , 在 $\frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}$ 中把 x 看作导数定义中的 Δx . 导数概念是考试热点, 其定义必须熟记且能灵活应用之.

例 4* (05 4 分) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\quad, +\quad)$ 内

- (A) 处处可导 (B) 恰有一个不可导点
(C) 恰有两个不可导点 (D) 至少有三个不可导点

分析 当 $|x| < 1$ 时 $\sqrt[n]{1+0} < \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} < \sqrt[n]{2}$

由夹逼定理知有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = 1$

当 $|x| \geq 1$ 时 $|x|^3 < \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} \leq \sqrt[n]{2+|x|^{3n}} = |x| \sqrt[n]{2}^{\frac{1}{n}}$

由夹逼定理知有此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = |x|^3$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ |x|^3 & |x| \geq 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad f(x) = \begin{cases} -x^3 & x \leq -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ x^3 & x \geq 1 \end{cases}$$

函数 $f(x)$ 除 $x = \pm 1$ 两点外, 都可导, 而在 $x = 1$ 处

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} = 0$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导, 由于 $f(x)$ 是偶函数, 知 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处亦不可导, 故 $f(x)$ 恰有两个不可导点
解 应答(C).

评述 利用左、右导数是否存在, 且存在时是否相等去判断导数是否存在, 是考研中常见的题型.

例 5* 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的一个充分条件是

- (A) $\lim_{h \rightarrow +0} h \left[f(a + \frac{1}{h}) - f(a) \right]$ 存在 (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在
(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在 (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{2h}$ 存在

分析 (A) $\lim_{h \rightarrow +0} h \left[f(a + \frac{1}{h}) - f(a) \right] = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a + 1/h) - f(a)}{1/h} \xrightarrow{1/h = t} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'_+(a)$

可见条件(A)成立仅保证 $f'_+(a)$ 存在, 而 $f'_-(a)$ 未必存在, 从而 $f'(a)$ 未必存在.

(B)、(C) 存在反例 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$, 对于这个函数, (B)、(C) 中的极限均存在, 但 $f'(a)$ 不存在, 故

(B)、(C) 不是 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的充分条件.

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = \frac{1}{2} f'(a)$, 若极限(D)存在, 则 $f'(a)$ 必存在, 故条件(D)是 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的一个充分条件.

解 应选(D)

评述 条件(B)、(C)中,不含 $f(a)$,亦即条件(B)、(C)对 $f(x)$ 在点 a 处的函数值毫无约束,换句话说, $f(a)$ 任意定义、任意更换,对极限(B)、(C)不发生影响,故条件(B)、(C)决不可能是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件.因可导必连续,在 $f(x)$ 连续点 $x=a$ 处 $f(a)$ 的值是唯一确定的,不能任意更换.这个题审查读者对导数定义是否真正掌握.这样的题型是考研中常见题型.

例6 (01,3分) 设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh)$ 存在

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh)$ 存在

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$ 存在

分析 (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh) - f(0)}{1 - \cosh} \cdot \frac{1 - \cosh}{h^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ (其中 $x = 1 - \cosh > 0$)

可见极限(A)存在,只能保证 $f_+(0)$ 存在,条件(A)不充分

关于条件(C)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh) - f(0)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h - \sinh) - f(0)}{h - \sinh} \cdot \frac{h - \sinh}{h^3} \cdot \frac{h^3}{h^2} \right]$$

当 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh)}{h^2}$ 存在时,又 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \sinh}{h^3} = \frac{1}{6}$, 而 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh) - f(0)}{h - \sinh} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 未必存在,故条件(C)不是充分条件.

关于条件(D),存在反例 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $f(0)$ 不存在,但 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} = 0$ 存在,故条件(D)不充分.

关于条件(B)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(1 - e^h) - f(0)}{1 - e^h} \cdot \frac{1 - e^h}{h} \right] \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (x = 1 - e^h) \end{aligned}$$

可见条件(B)是 $f'(0)$ 存在的充分必要条件.故应选(B).

评述 这个题与前一题题型相同,不过更难一些,(A)、(C)、(D)三条件均为 $f'(0)$ 存在的必要条件,(A)、(C)存在反例 $f(x) = |x|$.

例7* 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

(A) $f(a) = 0$ 且 $f'(a) = 0$

(B) $f(a) = 0$ 且 $f'(a) \neq 0$

(C) $f(a) > 0$ 且 $f'(a) > 0$

(D) $f(a) < 0$ 且 $f'(a) < 0$

分析 函数 $f(x) = (x - a)^2$ 满足条件(A),但 $|f(x)| = (x - a)^2$ 在点 $x=a$ 可导.函数 $f(x) = e^x$ 满足条件(C)但 $|f(x)| = e^x$ 在 $x=a$ 处可导.函数 $f(x) = -e^x$ 满足条件(D),但 $|f(x)| = e^x$ 在 $x=a$ 处可导.故(A)、(C)、(D)都不是 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件.

解 条件(B)是 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件.不失一般性,设 $f(a) > 0$, $f(a) = 0$,在 $x=a$ 两旁 $f(x)$ 由负变正,今记 $\varphi(x) = |f(x)|$,则

$$\begin{aligned} \varphi'_+(a) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(a+h)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_+(a) = f'(a) > 0 \\ \varphi'_-(a) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(a+h)|}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h)}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -f'_-(a) = -f'(a) < 0 \end{aligned}$$

可见 $\varphi'_-(a) \neq \varphi'_+(a)$, $\varphi(x) = |f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导,应选(B).

评述 建议读者自己画画图,利用几何图形的直观,易知(A)、(C)、(D)不是充分条件,只有条件(B)是 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件.

例8 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$,则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的

- (A) 充分必要条件 (B) 充分条件但非必要条件
(C) 必要条件但非充分条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

分析 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充分必要条件为 $F'_-(0) = F'_+(0)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad F'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)(1 + |\sin x|) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)(1 - \sin x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - f(x) \frac{\sin x}{x} \right] \\ &= f'_-(0) - f(0 - 0) = f'_-(0) - f(0) \\ F'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)(1 + |\sin x|) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)(1 + \sin x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} + f(x) \frac{\sin x}{x} \right] \\ &= f'_+(0) + f(0 + 0) = f'_+(0) + f(0) \end{aligned}$$

若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,则必有 $F'_-(0) = F'_+(0)$,即 $f'_-(0) - f(0) = f'_+(0) + f(0)$ 亦即 $f(0) = 0$.故 $f(0) = 0$ 是 $F'(0)$ 存在的必要条件.反之,若 $f(0) = 0$,则 $F'_-(0) = F'_+(0)$.故 $f(0) = 0$ 也是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充分条件,应选(A).

评述 因 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,故 $f'_-(0) = f'_+(0) = f'(0)$,又因可导必连续,所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,从而 $f(0 - 0) = f(0 + 0) = f(0)$.本例中反反复复利用了函数的左、右极限与左右导数等概念,这是讨论函数连续性与可导性的常用方法之一.

例9 (99, 3分) 设 $f(x) = \begin{cases} (1 - \cos x) / \sqrt{x} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \leq 0 \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处

- (A) 极限不存在 (B) 极限存在但不连续
(C) 连续但不可导 (D) 可导

分析 当 $x \rightarrow 0^+$ 时 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $(1 - \cos x) / \sqrt{x} \sim \frac{1}{2} x^{3/2}$,从而立知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,故直接去验证(D).

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 g(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x g(x) = 0 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x) / \sqrt{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^{3/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2/2}{x^{3/2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad (\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时 } 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}) \end{aligned}$$

可见 $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$.故 $f(0)$ 存在, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.应选(D).

评述 可导必连续,故(B)、(C)错,连续点处极限必存在,故(A)错.

例10* 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1 \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2 \\ 12x - 16, & x > 2 \end{cases}$

- (1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;
(2) $g(x)$ 是否有间断点,不可导点,若有,指出这些点.

分析 记 $y = f(x)$,先解出其反函数 $x = g(y)$

$$x = g(y) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-y}{2}}, & y < -1 \\ y^{1/3}, & -1 \leq y \leq 8 \\ (y+16)/12, & 8 < y \end{cases}$$

再按通常惯例,改用 x 表示自变量, y 表示因变量,便得所求的反函数 $g(x)$.

解 (1) $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 为

$$y = g(x) = \begin{cases} -\sqrt{(1-x)/2}, & x < -1 \\ x^{1/3}, & -1 \leq x \leq 8 \\ (x+16)/12, & x > 8 \end{cases}$$

(2) $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处连续,没有间断点.

$$\begin{aligned} g'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-\sqrt{(1-x)/2} + 1}{x + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1-x}}{x + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2 - (1-x)}{(x+1)(\sqrt{2} + \sqrt{1-x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$g'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^{1/3} + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^{2/3} - x^{1/3} + 1} = \frac{1}{3}$$

故 $x = -1$ 是 $y = g(x)$ 的不可导点. 又 $x = 0$ 显然也是不可导点 $\left(g'(x)|_{x=0} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Big|_{x=0} = \infty \right)$. 再考虑在 $x = 8$ 处

$$\begin{aligned} g'_-(8) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{g(x) - g(8)}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{x^{1/3} - 2}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(x^{1/3} - 2)}{(x^{1/3} - 2)(x^{2/3} + 2x^{1/3} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{1}{x^{2/3} + 2x^{1/3} + 4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$g'_+(8) = \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{g(x) - g(8)}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{(x+16)/12 - 2}{x - 8} = \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{x - 8}{x - 8} = \frac{1}{12}$$

, $g(x)$ 在 $x = 8$ 处可导.

综上所述 $g(x)$ 没有间断点,只有两个不可导点 $x = 0$ 与 $x = -1$.

评述 若 $\varphi(x)$ 在 $[a, a+H]$ 上连续,在 $(a, a+H)$ 内可导,且 $\varphi'(a+0)$ 存在,则 $\varphi'_+(a) = \varphi'(a+0)$. 利用 $\varphi'_+(a)$ 的定义及拉格朗日中值定理便可推导这个结果. 同样若 $\varphi(x)$ 在 $[b-H, b]$ 上连续,在 $(b-H, b)$ 内可导,且 $\varphi'(b-0)$ 存在,则 $\varphi'_-(b) = \varphi'(b-0)$. 本例中 $g'_-(-1)$, $g'_+(-1)$, $g'_-(8)$, $g'_+(8)$ 均可用这个命题求之较简. 这个例题考到的知识点较多,综合性较强,是一个很典型的考研题.

例 11 设 $f(x) = \begin{cases} (g(x) - e^{-x})/x, & \text{若 } x \neq 0 \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$.

(1) 求 $f(x)$ (2) 讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性

分析 当 $x \neq 0$ 时,利用商的求导公式求得 $f(x)$. 当 $x = 0$ 时,利用导数定义求得 $f(0)$. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 上连续是十分明显的,如能证实 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$,便知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

解 (1) 当 $x \neq 0$ 时,

$$f(x) = \left[\frac{g(x) - e^{-x}}{x} \right]' = \frac{x(g'(x) + e^{-x}) - (g(x) - e^{-x})}{x^2} = \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2}$$

当 $x = 0$ 时,由导数定义,并注意 $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$ 得

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - e^{-x}}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g''(x) - e^{-x}}{2}}{2} = \frac{1}{2} [g''(0) - 1]$$

于是求得

$$f = \begin{cases} [xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}]/x^2, & x \neq 0 \\ [g''(0) - 1]/2, & x = 0 \end{cases}$$

(2) 讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性. 因题设 $g(x)$ 有二阶连续导数, $g'(x)$ 必连续, 由 $f(x)$ 的表示式知, 当 $x \neq 0$ 时 $f(x)$ 亦必连续. 现只要考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续. 因 $g(0)=1, g'(0)=-1$ 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} [xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}]/x^2 \\ &= \frac{0}{0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + xg''(x) - g'(x) + e^{-x} - (x+1)e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg''(x) - xe^{-x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} (g''(x) - e^{-x}) = \frac{1}{2} [g''(0) - 1] = f(0) \end{aligned}$$

可见 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

评述 本例综合地应用了求导的基本运算法则, 求极限的基本运算法则, 函数在一点处连续的定义, 导数的定义, 求未定式洛必达法则等等多个知识点, 这些知识点都是考研的热点内容.

例 12 (97 年 3 分) 已知 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 设 $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

分析 仅知 $f(x)$ 为连续函数, $\varphi'(x)$ 未必存在, 故不能在积分号下求导, 也就是说, 不能写 $\varphi'(x) = \int_0^1 tf'(xt)dt$. 为了求 $\varphi'(x)$, 首先必须把 $\int_0^1 f(xt)dt$ 化为能直接求导的形式.

解 首先改写 $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$ 的形式

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt \xrightarrow{xt=u} \int_0^x f(u) \frac{du}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du \quad (x \neq 0)$$

为求 $\varphi(0)$, 必须先知 $f(0)$, 由已知条件 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 故必有 $0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 即 $f(0) = 0$, 从而知 $\varphi(0) = \int_0^1 f(0)dt = 0$

$$\text{即} \quad \varphi(x) = \begin{cases} \int_0^x f(u)du/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

其次求 $\varphi'(x)$, 当 $x \neq 0$ 时

$$\varphi'(x) = [xf(x) - \int_0^x f(u)du]/x^2 = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du$$

当 $x=0$ 时

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(u)du/x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = 1.$$

于是有

$$\varphi'(x) = \begin{cases} f(x)/x - \int_0^x f(u)du/x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时 $\varphi'(x)$ 为连续函数 (因 $f(x)$ 为连续函数, $\int_0^x f(u)du$ 亦为连续函数, 于是 $x \neq 0$ 时 $\varphi'(x)$ 连续), 在 $x=0$ 处

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[f(x)/x - \int_0^x f(u)du/x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_0^x f(u)du/x^2 \right] \\ &= 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = 2 - 1 = 1 = \varphi'(0) \end{aligned}$$

可见 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

综上所述 $\varphi'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

评述 这个例题的解法有数处值得注意. (1) 条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 隐含 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. 因 $f(x)$ 连续, 故 $f(0) = 0$, 并且还隐含 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 2$. 由已知条件 $f(x)$ 连续及 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A (A \neq 0)$ 推出隐含条件 $f(0) = 0, f'(0) = A$ 这是常考的内容. (2) 仅知 $f(u)$ 为连续函数时, $\left[\int_0^1 f(xt) dt \right]'_x$ 不能得出 $\int_0^1 t f(xt) dt$, 因 $f(xt)$ 未必存在, 更未必连续. (3) 这个例题的解法思路, 平坦迂回, 前后紧扣, 望读者熟练掌握之, 其中若干小技, 都是考研中常用的惯技.

例 13* 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$ 处处可导, 求 a, b 的值.

分析 除点 $x = 1$ 外 $f(x)$ 处处可导, 现只要确定 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处亦可导.

解 可导必连续, 为使 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 首先选取 a, b 使 $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续, 令 $f(1 - 0) = \frac{1}{3} = f(1 + 0) = a + b$. 得 $b = \frac{1}{3} - a$.

$$f_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3/3 - 1/3}{x - 1} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x + 1) = 1$$

$$f_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - 1/3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + 1/3 - a - 1/3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax - a}{x - 1} = a$$

为使 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 充分必要条件为 $f_-(1) = f_+(1)$ 即 $a = 1$, 从而 $b = -2/3$.

评述 这里欲求两个常数 a, b 的值, 因而需要利用两个条件, 以便建立两个方程, 由连续性条件得方程 $f(1 - 0) = f(1 + 0)$, 再由可导性条件得另一方程 $f_-(1) = f_+(1)$. 纵观以上诸例便知, 函数的左、右极限以及左、右导数等概念是何等重要.

例 14 设 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 且 $\varphi(a) \neq 0$, 求证 $f(x) = \varphi(x) \sin |x - a|$ 在 $x = a$ 处必不可导.

分析 在 $x = a$ 的一个邻域 $(a - \delta, a + \delta)$ (δ 为充分小的正数) 内考虑之. 仍利用函数在 $x = a$ 处可导的充分必要条件 $f_-(a) = f_+(a)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f_-(a) &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\varphi(x) \sin |x - a| - 0}{x - a} \\ &= - \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\varphi(x) \sin(x - a)}{x - a} = - \lim_{x \rightarrow a^-} \varphi(x) \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\sin(x - a)}{x - a} = - \varphi(a - 0) = - \varphi(a) \\ f_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\varphi(x) \sin |x - a| - 0}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\varphi(x) \sin(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sin(x - a)}{x - a} = \varphi(a + 0) = \varphi(a) \end{aligned}$$

因 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 故 $\varphi(a - 0) = \varphi(a + 0) = \varphi(a)$. 又因 $\varphi(a) \neq 0$, 从而知 $f_-(a) \neq f_+(a)$, $f(x)$ 在 $x = a$ 处不可导.

评述 若 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 且 $\varphi(a) = 0$, 则 $f(x) = \varphi(x) \sin |x - a|$ 在 $x = a$ 处可导.

例 15* 设 $f(x)$ 是三次实系数的多项式, 且有 $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x - 2a} = \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x - 4a} = 1$, 其中 $a \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x - 3a} = ?$

分析 设 $f(x)$ 为三次实系数多项式, 则 $f(x) = 0$ 有且只有三个根, 其中实根数或者只有一个或者有三个. 由题设条件知 $x = 2a$ 与 $x = 4a$ 都是 $f(x) = 0$ 的实根, 从而知 $f(x) = 0$ 有且恰有三个实根, 于是可写 $f(x) = k(x - 2a)(x - 4a)(x - c)$, 其中 k, c 为待定常数, 再利用条件 $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x - 2a} = \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x - 4a} = 1$ 不难把 k, c 确定出来, 当

$f(x)$ 确定后, 便可计算出极限 $\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x - 3a}$ 的值.

解 $f(x)$ 是三次多项式, 所以它处处连续, 又因 $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x-2a} = 1$, 必有 $\lim_{x \rightarrow 2a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2a} [(x-2a) \frac{f(x)}{x-2a}] =$

$\lim_{x \rightarrow 2a} (x-2a) \lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x-2a} = 1 \cdot 0 = 0$, 注意 $f(x)$ 连续, 从而 $f(2a) = 0$, 同理 $f(4a) = 0$.

于是 $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x-2a} = \lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x) - f(2a)}{x-2a} = f'(2a) = 1$, 同理 $f'(4a) = 1$.

一个三次实系数多项式的曲线与 x 轴的交点若不是三个, 则必有一个, 今已知该三次多项式曲线与 x 轴有交点 $x_1 = 2a$, $x_2 = 4a$, 今设第三个交点为 $x_3 = c$, 则该三次多项式为

$$f(x) = k(x-2a)(x-4a)(x-c)$$

其中 c 为待定常数, k 为待定的非零常数.

$$f(x) = k(x-4a)(x-c) + k(x-2a)(x-c) + k(x-2a)(x-4a)$$

由 $f(2a) = 1$, $f(4a) = 1$ 有

$$k(-2a)(2a-c) = 1, \quad k \cdot 2a(4a-c) = 1$$

由此解得 $c = 3a$, $k = \frac{1}{2a^2}$, 故

$$f(x) = \frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a)$$

因而

$$\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x-3a} = \frac{1}{2a^2} \lim_{x \rightarrow 3a} (x-2a)(x-4a) = -\frac{1}{2}$$

评述 由代数方程可知 n 次代数方程恰有 n 个根, n 个根中有的是实根, 有的可能是复数根, 三次实系数多项式方程, 有可能是一个实根和一对共轭复根, 或三个都是实根. 不可能出现一个复根两个实根的情况, 因实系数代数方程中的复根必是成对成对地出现, 即若 $\alpha + i\beta$ 是它的根, 则 $\alpha - i\beta$ 也必是该实系数代数方程的根. 本例正是利用这一点, 判定 $f(x) = 0$ 恰有三个实根. 判定实根个数后, 便可完全确定 $f(x)$ 的表示式, 从而知 $\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x-3a}$ 的值. 这个例题的解法思路, 与以前例题有所不同, 望读者仔细琢磨.

例 16* 求函数 $f(x) = (x^2 + x - 6)|x^2 + 3x|$ 的不可导点

分析 因子 $x^2 + x - 6$ 处处可导, $|x^2 + 3x| = |x| \cdot |x+3|$ 除 $x=0$ 和 $x=-3$ 两处外也处处可导, 故只有 $x=0$ 与 $x=-3$ 两点有可能是函数 $f(x)$ 的不可导点.

解 在 $x=0$ 处

$$f_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 + x - 6)|x^2 + 3x| \cdot |x|}{x} \\ = - \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x - 6)|x+3| = -(-6) \cdot 3 = 18$$

$$f_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 + x - 6)|x^2 + 3x| \cdot |x|}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x - 6)|x+3| = (-6) \cdot 3 = -18$$

$f_-(0) \neq f_+(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

$$\text{在 } x=-3 \text{ 处 } f_-(-3) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x^2 + x - 6)|x+3| \cdot |x|}{x+3} \\ = - \lim_{x \rightarrow -3^-} (x+3)(x-2)|x| = 0$$

$$f_+(-3) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} (x^2 + x - 6)|x| = 0$$

$f_-(-3) = f_+(-3)$, 故 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处可导.

综上所述 $f(x)$ 的不可导点只有一点即 $x=0$ 点.

评述 注意 $\varphi(x) = (x-a)|x-a|$ 在 $x=a$ 处可导, $\varphi(x) = |x-a|$ 在 $x=a$ 处不可导, 今写 $f(x) = (x^2 + x - 6)|x^2 + 3x| = (x+3)|x+3| \cdot |x| \cdot (x-2)$ 便立知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 在 $x=-3$ 处可导.

典型题型 2. 以下求曲线的切线方程和法线方程.

例 17 (00 7 分) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 在 $x = 1$ 处可导, 且有关系式

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x) \quad (*)$$

其中 $\alpha(x) = o(x)$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

分析 $o(x)$ 表示当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 因 $f(x)$ 是周期为 5 的周期函数, $f(1) = f(5+1) = f(6)$, $f(1) = f(6)$, 只要能求得 $f(1)$, $f'(1)$, 便可写出曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

解 已知 $f(x)$ 为连续函数, 令 $x \rightarrow 0$, 由关系式 $(*)$ 得

$$f(1) - 3f(1) = 0 \quad \text{故} \quad f(1) = 0 \quad \text{即} \quad f(6) = 0$$

关系式 $(*)$ 两边除以 $\sin x$ 得

$$\frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} = 8 \frac{x}{\sin x} + \frac{o(x)}{\sin x}$$

由于 $f(1) = 0$ 得

$$\frac{f(1 + \sin x) - f(1)}{\sin x} + 3 \frac{f(1 - \sin x) - f(1)}{-\sin x} = 8 \frac{x}{\sin x} + \frac{o(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

$$\text{令 } x \rightarrow 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ 得}$$

$$f(1) + 3f(1) = 8 + 0, \quad f(1) = 2, \quad f(6) = 2$$

于是得所求的切线方程为 $y - f(6) = f'(6)(x - 6)$

$$\text{即} \quad y - 0 = 2(x - 6), \quad \text{即} \quad y - 2x + 12 = 0$$

评述 由周期性知 $f(1) = f(6)$, $f'(1) = f'(6)$, 由连续性得 $f(1) = 0$, 据 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的可导性得 $f'(1) = 2$.

例 18 (99 3 分) 求曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程.

分析 在点 $(0, 1)$ 处对应于 $t = 0$. 因而只要求出 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$ 的值, 便可写出所求法线方程

$$y - 1 = - (x - 0) / \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}.$$

$$\text{解} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(e^t \cos t - e^t \sin t) dt}{(e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t) dt} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin 2t + 2\cos 2t} \cdot \frac{dy}{dx} \bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

所求法线方程为 $y - 1 = -2x$, 即 $y + 2x - 1 = 0$.

评述 一阶导数 $\frac{dy}{dx} = dy \div dx$, 由参数方程所确定的函数 $y(x)$, 常用这个性质求 $\frac{dy}{dx}$.

例 19 设曲线 $f(x) = x^3 + ax$ 与 $g(x) = bx^2 + c$ 都通过点 $(-1, 0)$, 且在点 $(-1, 0)$ 有公共切线, 求 a, b, c 的值.

分析 二曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 都通过点 $(-1, 0)$. 故 $f(-1) = 0$, $g(-1) = 0$. 又因二曲线在点 $(-1, 0)$ 处有共同的切线, 还有关系式 $f'(-1) = g'(-1)$, 有此三关系式 ($f(-1) = 0$, $g(-1) = 0$, $f'(-1) = g'(-1)$), 便可求出 a, b, c 的值.

解 由 $f(-1) = 0$ 得 $(-1)^3 - a = 0$, $a = -1$. 由 $g(-1) = 0$ 得 $b(-1)^2 + c = 0$ 有 $c = -b$.

$$\text{再因 } f'(-1) = g'(-1), \text{ 有 } (3x^2 + a) \bigg|_{x=-1} = (2bx + 0) \bigg|_{x=-1} \quad \text{即 } 3 - 1 = -2b, \quad b = -1.$$

从而知 $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$.

评述 求曲线的切线方程, 法线方程, 是考研的常考内容.

例 20 (97 3 分) 求对数螺线 $\rho = e^\theta$ 在点 $(\rho, \theta) = (e^{\pi/2}, \pi/2)$ 处的切线的直角坐标方程.

分析 直角坐标与极坐标间的关系式为 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, 切点 $(e^{\pi/2}, \pi/2)$ 的直角坐标为

$(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \Big|_{\theta=\pi/2} = (e^{\theta} \cos \theta, e^{\theta} \sin \theta) \Big|_{\theta=\pi/2} = (0, e^{\pi/2})$, 再求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{\theta=\pi/2}$, 使得切线的直角坐标方程.

解 把对数螺线的极坐标方程 $\rho = e^{\theta}$ 转化为参数方程得 $x = \rho \cos \theta = e^{\theta} \cos \theta, y = \rho \sin \theta = e^{\theta} \sin \theta$, 从而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{\theta} \sin \theta + e^{\theta} \cos \theta) d\theta}{(e^{\theta} \cos \theta - e^{\theta} \sin \theta) d\theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta},$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1+0}{0-1} = -1$$

切点的直角坐标为 $(0, e^{\pi/2})$, 所求切线的直角坐标方程为

$$y - e^{\pi/2} = -1(x - 0), \text{ 即 } x + y = e^{\pi/2}.$$

评述 一般教材上直接给出的切线方程多为直角坐标的曲线方程 $y = f(x)$ 的切线方程 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, 题中切点及曲线方程都用极坐标表示出, 而要求的是写出直角坐标切线方程, 这里有半步之遥的陌生路, 是十分典型的考研题.

典型题型 3. 以下讨论单元函数微分法

例 21 设 $y = x^{xx} (x > 0)$, 求 y' 和 dy

分析 这是一个幂指函数 $u(x)^{v(x)}$, 视 $u(x) = x, v(x) = x^x$, 幂指函数的求导公式为 $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$, 微分公式为 $d(u^v) = v u^{v-1} du + u^v \cdot \ln u \cdot dv$.

解 $(x^{xx})' = x^x \cdot x^{xx-1} + x^{xx} \cdot \ln x \cdot (x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x)$.
 $d(x^{xx}) = x^x \cdot x^{xx-1} dx + x^{xx} \ln x \cdot dx^x$
 $= x^x \cdot x^{xx-1} dx + x^{xx} \cdot \ln x \cdot (x \cdot x^{x-1} dx + x^x \cdot \ln x \cdot dx)$

评述 求幂指函数的导数及微分是经常考到的内容.

例 22* 已知 $y = f\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right), f(x) = \arctan x^2$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$.

分析 若 $y = f(u), f(u)$ 为可导函数, 则 $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot u'$.

解 $\frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right) \left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)'$
 $= \arctan\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)^2 \cdot \frac{(\sin x + 1)\cos x - (\sin x - 1)\cos x}{(\sin x + 1)^2}$
 $= \arctan\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)^2 \cdot \frac{2\cos x}{(\sin x + 1)^2}$
 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$

评述 因已知 $f(x) = \arctan x^2$, 可见 $f(x)$ 处处可导, 这是一个复合函数求导的例题, 复合函数微分法是微积分学中的一个基本方法, 必须熟练掌握之.

例 23* 设由 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \sin t \end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

分析 因 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$, 始终用这一公式去求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos t dt}{(1 - \cos t) dt} = \frac{-\cos t}{1 - \cos t}$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = d \left(\frac{dy}{dx} \right) / dx = d \left(\frac{-\cos t}{1 - \cos t} \right) / d(t - \sin t)$
 $= \frac{[(1 - \cos t)\sin t + \cos t \sin t] dt}{(1 - \cos t)^2} / (1 - \cos t) dt = \frac{\sin t}{(1 - \cos t)^3}$

评述 求参数方程所确定的函数的二阶导数,是考试的热点内容,一般教材中,求这里的二阶导数常用如下方法.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt}.$$

我们这里,把 $\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$ 看作 $d \left(\frac{dy}{dx} \right) / dx$,一般说来,这样处理会稍稍简单一些.

例 24 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x e^{f(y)} = e^y$ 确定,其中 f 具有二阶导数,且 $f' \neq 1$,求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

分析 这是求由方程所确定的隐函数的导数,本题两边先取对数,可把原方程化简.

解 原方程两边取对数得 $\ln x + f(y) = y$,

两边再对 x 求导得 $\frac{1}{x} + f(y) \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$,得 $[1 - f(y)] \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

从而有 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x[1 - f(y)]}$

再对 x 求导 $\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{[1 - f(y)] - x f'(y) y'}{x^2 [1 - f(y)]^2} = - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 - f(y)} + \frac{1}{x^2} \frac{f'(y)}{[1 - f(y)]^2}$
 $= - \frac{[1 - f(y)]^2 - f'(y)}{x^2 [1 - f(y)]^3}$

评述 复合函数微分法,由参数方程所确定的函数微分法,隐函数微分法都是基本方法,几乎属于每年必考内容.

例 25 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 9 \end{cases}$ 所确定,求 $\frac{dy}{dx}$,并求 $t = 0$ 处的曲线的切线方程.

分析 $y = y(x)$ 是由参数方程和隐函数方程共同所确定,方程两边都对 t 求导,先求出 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$,然后便得

$\frac{dy}{dx}$.

解 由题中的第一个方程两边对 t 求导得 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + t^2}$.

由第二个方程两边对 t 求导得

$$2 \frac{dy}{dt} - y^2 - 2yt \cdot \frac{dy}{dt} + e^t = 0, \frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - e^t}{2(1 - yt)}$$

从而得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{y^2 - e^t}{2(1 - yt)} \cdot \frac{1}{1 + t^2} = \frac{(y^2 - e^t)(1 + t^2)}{2(1 - yt)}$$

对应于 $t = 0$ 的切点的直角坐标为 $(0, 4)$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{15}{2}$.

所求的切线方程为 $y - 4 = \frac{15}{2}(x - 0)$,即 $2y - 15x - 8 = 0$.

评述 本题求 $\frac{dy}{dx}$ 的另一方法如下:由题中第一个方程得 $t = \tan x$ 代入第二个方程得 $2y - y^2 \tan x + e^{\tan x} =$

9. 对 x 求导得 $2 \frac{dy}{dx} - 2y \tan x \cdot \frac{dy}{dx} - y^2 \sec^2 x + e^{\tan x} \cdot \sec^2 x = 0$,从而得

$$\frac{dy}{dx} = (y^2 - e^{\tan x}) / 2(1 - y \tan x) \cos^2 x$$

这一结果与前一结果完全相同(将 $t = \tan x$ 代入前一结果便得后者).

例 26* (00 5 分) 求 $f(x) = x^2 \ln(1 + x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$.

分析 求两个函数乘积的 n 阶导数, 常用莱布尼茨公式

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{(n-3)}v''' \\ &+ \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)}\end{aligned}$$

求之

解 今命 $u = \ln(1+x)$, $v = x^2$, 于是 $v' = 2x$, $v'' = 2$, $v''' = 0$, $v^{(n)} = 0 (n \geq 3)$, 又因 $v|_{x=0} = 0$, $v'|_{x=0} = 0$, 代入上述莱布尼茨公式得

$$(uv)^{(n)}|_{x=0} = 0 + 0 + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}2|_{x=0} + 0 + 0 \dots + 0$$

而由 $u = \ln(1+x)$ $u' = \frac{1}{1+x}$ $u'' = -(1+x)^{-2}$ $u''' = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$ $\dots$ $u^{(n-2)} = (-1)^{n-3}(n-3)!(1+x)^{-(n-2)}$ $u^{(n-2)}|_{x=0} = (-1)^{n-1}(n-3)!$

故有 $f^{(n)}(0) = [x^2 \ln(1+x)]^{(n)}|_{x=0} = \frac{n(n-1)}{2!}(-1)^{n-1}(n-3)! \cdot 2 = (-1)^{n-1} \frac{n!}{n-2}$

评述 也可利用 $f(x)$ 的麦克劳林展开式求 $f^{(n)}(0)$ 因

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

若已知

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

由函数展开为 x 的幂级数的唯一性便知 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$, $f^{(n)}(0) = n! a_n$.

如本题 $f(x) = x^2 \ln(1+x) = x^2(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{n-2} + \dots)$
 $= x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n-2} + \dots$

比较系数得 $f^{(n)}(0) = n! a_n = (-1)^{n-1} \frac{n!}{n-2}$.

亦即 $[x^2 \ln(1+x)]^{(n)}|_{x=0} = (-1)^{n-1} \frac{n!}{n-2}$.

例 27 若函数 $y = f(x)$ 有 $f(x_0) = 0.02$ 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在 $x = x_0$ 处的微分 dy 是

- (A) 与 Δx 等价无穷小 (B) 与 Δx 同阶但非等价的无穷小
 (C) 比 Δx 低阶的无穷小 (D) 比 Δx 高阶的无穷小

分析 由函数微分的定义及本题题意得 $dy|_{x=x_0} = 0.02\Delta x$. 再由同阶无穷小的定义知 $dy|_{x=x_0}$ 是与 Δx 同阶但非等价的无穷小.

解 应选(B).

例 28 (06 4 分) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则

- (A) $0 < dy < \Delta y$ (B) $0 < \Delta y < dy$
 (C) $\Delta y < dy < 0$ (D) $dy < \Delta y < 0$

分析 $f'(x) > 0$. 曲线 $y = f(x)$ 单调增加, 又因 $f''(x) > 0$. 曲线 $y = f(x)$ 向上凹, 曲线每点的切线均在曲线的下侧, 由 dy 的几何意义当 $\Delta x > 0$. 显然有

$$0 < dy < \Delta y$$

另法 由一阶泰勒公式有

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

此 即 $\Delta y = dy + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 > dy = f'(x_0)(x - x_0) > 0$ (当 $\Delta x = x - x_0 > 0$ 时)

解 应选(A). (B)、(C)、(D) 均错.

评述 微分是微积分学中一个重要的概念,本题综合考察了 dx , dy , Δy , $f'(x)$, $f''(x)$ 等各量间的关系,既可由几何直观作出判断,也可利用泰勒公式作出解答,是一个很典型很重要的基本概念题.

例 29* 设 $y = f(\sin x^3)e^{f(x)}$, 其中 f 可微, 求 dy

分析 视作二复合函数 $f(\sin x^3)$ 与 $e^{f(x)}$ 的乘积

解 $dy = d[f(\sin x^3)e^{f(x)}] = e^{f(x)}df(\sin x^3) + f(\sin x^3)de^{f(x)}$
 $= e^{f(x)}f'(\sin x^3)d\sin x^3 + f(\sin x^3)e^{f(x)}df(x)$
 $= e^{f(x)}[f'(\sin x^3)\cos x^3 \cdot 3x^2 dx + f(\sin x^3)2f'(x)df(x)]$
 $= e^{f(x)}[3x^2 f'(\sin x^3)\cos x^3 + 2f(\sin x^3)f'(x)f'(x)]dx$

评述 在以上二例的解答中,多次利用了一阶微分形式不变性.

例 30 设已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 其中 α 是比 Δx ($\Delta x \rightarrow 0$) 高阶的无穷小, 求 $\frac{dy}{dx} = ?$

解 求 $\frac{dy}{dx} = ?$

分析 据函数微分的定义,若函数改变量 $\Delta y = y'(x)\Delta x + \alpha$, α 是比 Δx 高阶的无穷小,则 $y'(x)\Delta x$ 为函数的微分,记作 $dy = y'(x)\Delta x$.

解 根据题意及微分的定义,知有 $dy = \frac{y}{1+x^2}dx$, 亦即 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}$.

评述 另法:由 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 其中 $\alpha = o(\Delta x)$, 两边同除以 Δx 得 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{1+x^2} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{y}{1+x^2} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right] = \frac{y}{1+x^2} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{y}{1+x^2} + 0 = \frac{y}{1+x^2}$, 亦即 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}$.

典型题型 4. 以下讨论微分中值定理

例 31 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在区间 (a, b) 内可导且 $f(a) = f(b)$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$.

分析 本例有一个很特殊的条件,就是 $f(x)$ 不恒为常数,其他条件与罗尔定理条件相同,但利用罗尔定理得不到在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$ 的结论,因此只能由特殊条件出发作合理的推导.

证明 因 $f(a) = f(b)$, 且 $f(x)$ 不恒为常数,故至少存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) \neq f(a) = f(b)$. 于是 $f(c) > f(a)$ 或 $f(c) < f(a)$.

现设 $f(c) > f(a)$, 则在 $[a, c]$ 上因 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件,故至少存在一点 $\xi_1 \in (a, c) \subset (a, b)$ 使得 $f'(\xi_1) = \frac{1}{c-a}[f(c) - f(a)] > 0$. 对于 $f(c) < f(a)$ 的情形,可完全类似地讨论得 $\frac{f(b) - f(c)}{b-c} = f'(\xi_2) > 0$, 其中 $\xi_2 \in (c, b) \subset (a, b)$.

不论哪种情况,在 (a, b) 内均至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) > 0$.

评述 不妨画画图,也常常给人以启发,像本例,乍看条件,以为要用罗尔定理,但再看结论,便感到结论很出人意外,遇到这种困惑时,便不妨根据题意画画图,在 (a, b) 内不论 $f(x) > f(a) = f(b)$, 或 $f(x) < f(a) = f(b)$, 或在 (a, b) 内一部分上 $f(x) < f(a) = f(b)$, 在另一部分上 $f(x) > f(a) = f(b)$, 在图上均可看到在 (a, b) 内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi) > 0$.

例 32 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $3\int_{2/3}^1 f(x)dx = f(0)$, 证明在 $(0, 1)$ 内存在一点 c , 使 $f'(c) = 0$.

分析 本题与罗尔定理比较,结论相同,条件只是用 $3\int_{2/3}^1 f(x)dx = f(0)$ 代替了相当 $f(a) = f(b)$ 这个条件,其他条件相同,因此,只要由 $3\int_{2/3}^1 f(x)dx = f(0)$ 得出两端点函数值相同这个条件即可.

证明 由积分中值定理知在 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 上存在一点 c_1 , 使 $\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = \frac{1}{3}f(c_1)$, 从而有 $f(c_1) = f(0)$. 故 $f(x)$ 在 $[0, c_1]$ 上满足 Rolle 定理的条件, 因而在 $(0, c_1)$ 内存在一点 c 使 $f'(c) = 0$, $c \in (0, c_1) \subset (0, 1)$.

评述 罗尔定理是考研的一个热点内容, 而且经常与其他定理一起应用, 再看下例也是这样.

例 33* 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上可微, 对于 $[0, 1]$ 上每一个 x , 函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0, 1)$ 内, 且 $f(x) \neq 1$, 证明在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x) = x$.

分析 对于 $[0, 1]$ 上每一个 x , 函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0, 1)$ 内的意义: 即当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $0 < f(x) < 1$, 而要证明的结论为在 $(0, 1)$ 内, 方程 $f(x) - x = 0$ 有且仅有一个实根.

证明 存在性 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 由于 $0 < f(x) < 1$, $F(0) = f(0) - 0 > 0$, $F(1) = f(1) - 1 < 0$. 所以由连续函数介值定理, 至少存在 $(0, 1)$ 中的一点 x , 使 $F(x) = f(x) - x = 0$, 即 $f(x) = x$.

其次用反证法证明唯一性. 若存在两个数 x_1, x_2 , $x_1 \neq x_2$, $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (0, 1)$, 使 $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$, 则由 Lagrange 中值定理知, 至少存在一点 $x \in (0, 1)$ 使 $f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1$, 此与 $f'(x) \neq 1$ 的假设矛盾.

因此在 $(0, 1)$ 内有且仅有一点 x , 使 $f(x) = x$.

评述 这个题是十分典型的考研题, 证明方程实根存在性时用了闭区间上连续函数的介值定理, 证明实根唯一性时用了拉格朗日中值定理, 闭区间上连续函数的性质与微分中值定理经常被一起应用.

例 34 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数, 并且 $g''(x) \neq 0$, $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$. 试证

(1) 在开区间 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$;

(2) 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

分析 证明第一个结论用反证法, 为证第二个结论, 先把方程 $f(x)/g(x) = f'(x)/g'(x)$ 等价地变换为 $f(x)g''(x) - g(x)f''(x) = 0$, 也就是说转而求证变换后的方程在 (a, b) 内至少有一个实根, 而 $[f(x)g'(x) - g(x)f'(x)]' = f(x)g''(x) - g(x)f''(x)$, 立知作辅助函数 $\varphi(x) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$, 而 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 Rolle 定理的全部条件.

证明 (1) 若存在点 $c \in (a, b)$, 使 $g(c) = 0$. 则对 $g(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 内可分别应用 Rolle 定理知存在 $\zeta_1 \in (a, c)$ 和 $\zeta_2 \in (c, b)$ 使 $g'(\zeta_1) = g'(\zeta_2) = 0$, 再对 $g'(x)$ 在 $[\zeta_1, \zeta_2]$ 上应用 Rolle 定理知存在 $\zeta_3 \in (\zeta_1, \zeta_2)$ 使 $g''(\zeta_3) = 0$, 这与题设 $g''(x) \neq 0$ 矛盾, 故在 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$.

(2) 令 $\varphi(x) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$, 显然 $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$. 由罗尔定理知至少存在一点 $\zeta \in (a, b)$, $\varphi'(\zeta) = 0$, 因 $g(\zeta) \neq 0$, 且 $g''(\zeta) \neq 0$, 故得

$$\frac{f'(\zeta)}{g''(\zeta)} = \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}$$

评述 证明结论(1)时 Rolle 定理用了三次, 证明结论(2)时, 又用了一次罗尔定理, 罗尔定理共用了四次, 还有关系式 $[f(x)g'(x) - g(x)f'(x)]' = f(x)g''(x) - g(x)f''(x)$ 也是一个值得注意的式子, 罗尔定理始终是考研的热点内容.

例 35 (98 6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(\xi)}{f(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$ 成立.

分析 把要证的关系式改写为 $\frac{f(\xi)(b-a)}{e^b - e^a} = \frac{f(\eta)}{e^\eta}$, 便立知要考虑关系式 $\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a}$.

证明 $f(x)$ 和 e^x 二函数在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 对关系式 $\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a}$ 应用柯西中值定理使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^\eta}, \quad a < \eta < b.$$

另一方面,对 $f(b) - f(a)$ 应用拉格朗日中值定理得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b.$$

从而得

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\xi)(b - a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^\eta} \quad a < \xi, \eta < b.$$

亦即

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta} \quad a < \xi, \eta < b.$$

评述 本题的特点是要证的结论中含有两个中值 ξ, η , 从而知不能只用一次微分中值定理. 只有用两次微分中值定理才能出现两个中值 ξ, η . 寻求证明途径时, 把 ξ, η 分离在等号的两边, 便比较容易看出应考虑什么样的关系式, 如本例的 $\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a}$.

例 36 设 $f(x)$ 在 $[0, x]$ ($x > 0$) 上连续, 在 $(0, x)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, 试证在 $(0, x)$ 内存在一个 ξ 使 $f(x) = (1 + \xi)\ln(1 + x)f'(\xi)$ 成立.

分析 欲证的关系式可改写为 $\frac{f(x)}{\ln(1 + x)} = (1 + \xi)f'(\xi)$, 因 $f(0) = 0$ 可进一步改写为

$$\frac{f(x)}{\ln(1 + x)} = \frac{f(x) - f(0)}{\ln(1 + x) - \ln(1 + 0)} = f'(\xi) / \frac{1}{1 + \xi}$$

证明 在区间 $[0, x]$ 上对 $[f(x) - f(0)] / [\ln(1 + x) - \ln(1 + 0)]$ 应用柯西中值定理, 便知在 $(0, x)$ 内存在一个 ξ 使

$$\frac{f(x) - f(0)}{\ln(1 + x) - \ln(1 + 0)} = \frac{f'(\xi)}{1/(1 + \xi)} \quad \text{即} \quad \frac{f(x)}{\ln(1 + x)} = \frac{f'(\xi)}{1/(1 + \xi)}$$

成立.

评述 证这个题关键的一步就是把欲证的关系式写成如下形式

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{其中 } g(x) = \ln(1 + x).$$

例 37 (98 年 6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$, 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$ 使得 $e^{\eta - \xi} [f(\eta) + f(\eta)] = 1$ 成立.

分析 把 ξ, η 分离在等号的两边, 欲证的关系式变为

$$e^\eta [f(\eta) + f(\eta)] = e^\xi \quad \text{即} \quad [e^\eta f(\eta)]' = e^\xi$$

注意 $f(a) = f(b) = 1$, 从而知应考虑有限增量 $e^b f(b) - e^a f(a) = e^b - e^a$

对上式左右两端各应用拉格朗日中值定理即可

证明 $e^x f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理知在 (a, b) 内存在 η , 使有

$$e^b f(b) - e^a f(a) = [e^x f(x)]'_{x=\eta} (b - a) = e^\eta [f(\eta) + f(\eta)] (b - a)$$

另一方面由于 $f(b) = f(a) = 1$

$$e^b f(b) - e^a f(a) = e^b - e^a = e^\xi (b - a) \quad a < \xi < b$$

从而有

$$e^\eta [f(\eta) + f(\eta)] = e^\xi \quad a < \xi, \eta < b$$

评述 拉格朗日中值定理是微分学中非常重要的一个基本定理, 是考试的一个热点内容.

例 38* (99 年 7 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, 试证

(1) 存在 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使 $f(\eta) = \eta$;

(2) 对任意实数 λ , 必存在 $\xi \in (0, \eta)$ 使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

分析 关于(1) 相当于求证在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内方程 $f(x) - x = 0$ 必有实根, 关于(2) 相当于求证在 $(0, \eta)$ 内方程 $f'(x) - 1 - \lambda[f(x) - x] = 0$ 必有实根.

也就是说 $[f(x) - x] - \lambda[f(x) - x] = 0$ 在 $(0, \eta)$ 内必有实根, 其中 λ 为任意实数, 为证此, 应用罗尔定理, 作辅助函数 $F(x) = (f(x) - x)e^{-\lambda x}$ 考察之.

证明 (1) 作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - x$ $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上必连续 $\varphi(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 < 0$ $\varphi(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} > 0$, 由闭区间上连续函数的介值定理, 知在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内至少存在一个 η 使有 $\varphi(\eta) = f(\eta) - \eta = 0$, 即 $f(\eta) = \eta$.

(2) 今考察 $F(x) = [f(x) - x]e^{-\lambda x}$ $F(0) = 0$ $F(\eta) = [f(\eta) - \eta]e^{-\lambda\eta} = 0$, 其中 η 即(1)结论中的 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$ 且 $F(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上连续, 在 $(0, \eta)$ 内可导, 罗尔定理中所有的条件在闭区间 $[0, \eta]$ 上都满足, 据此定理知在 $(0, \eta)$ 内至少存在一个 ξ 使有 $F'(\xi) = 0$ 亦即

$$e^{-\lambda\xi}\{f'(\xi) - 1 - \lambda[f(\xi) - \xi]\} = 0, \text{即 } f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$$

评述 一般说来, 欲证 $g'(x) - \lambda g(x) = 0$ (其中 λ 为任意实数) 在 (a, b) 内至少存在一个实根, 不妨设作辅助函数 $F(x) = g(x)e^{-\lambda x}$, 再检查 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上是否满足罗尔定理中的条件, 若满足, 由罗尔定理, 便得欲证的结果. 本例的(1)与(2)都是证明方程实根的存在性. (1)是用连续函数介值定理. (2)是用罗尔定理. 这是十分典型的两个方法, 望读者注意.

例 39 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)| \leq a$, $|f'(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数, c 是 $(0, 1)$ 内任意一点

(1) 写出 $f(x)$ 在点 $x = c$ 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式

(2) 证明 $|f(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$

分析 $f(x)$ 在点 $x = c$ 处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式为

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1} \quad \text{其中 } \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } c \text{ 之间}$$

在这个公式中取 $n = 1$ 便得 $f(x)$ 在点 $x = c$ 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式. 证本题(2)中的结果时, 自然要用到(1)的结果.

证明 (1) $f(x)$ 在 $x = c$ 处的带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式为

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1}(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2 \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } c \text{ 之间} \quad (*)$$

(2) 在 $(*)$ 中令 $x = 0$ 得

$$f(0) = f(c) + \frac{f'(c)}{1}(0 - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(0 - c)^2 \quad 0 < \xi_1 < c$$

再在 $(*)$ 中令 $x = 1$ 得

$$f(1) = f(c) + \frac{f'(c)}{1}(1 - c) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(1 - c)^2 \quad c < \xi_2 < 1$$

上述两式相减得

$$f(1) - f(0) = f'(c) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1 - c)^2 - f''(\xi_1)c^2]$$

从而 $|f(c)| = \left| f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)c^2 - f''(\xi_2)(1 - c)^2] \right|$

$$\leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2}[|f''(\xi_1)|c^2 + |f''(\xi_2)|(1 - c)^2]$$

因 $|f(x)| \leq a$, $|f'(x)| \leq b$, 从而知

$$|f(c)| \leq a + a + \frac{b}{2}[c^2 + (1 - c)^2] = 2a + \frac{b}{2}[2c^2 - 2c + 1] \leq 2a + \frac{b}{2}$$

亦即

$$|f(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$$

评述 近年来,泰勒公式成为考研的热点内容,一定要把泰勒公式熟记,其中 x 常以一些特殊数值代入,当然这些特殊数值不会是奇奇怪怪的数,总是一些与题目有关的很简单,很常用的数,像本题中的 0 与 1,并参看下列.

例 40* (99 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$, 证明: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f''(\xi) = 3$.

分析 由题设条件具有三阶连续导数且求证在 $(-1, 1)$ 内存在一点 ξ , 使 $f''(\xi) = 3$, 因此设想要用到带拉格朗日型余项的二阶泰勒公式. 又已知 $f(0) = 1$, 且 $x = 0$ 为区间 $[-1, 1]$ 的一个中点, 因而猜想应在 $x = 0$ 处展开.

证明 由麦克劳林公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$$

其中 η 介于 0 与 x 之间, $x \in [-1, 1]$. 在上式中, 先后令 $x = -1$ 和 $x = 1$, 并结合已知条件得

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\eta_1) \quad -1 < \eta_1 < 0$$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\eta_2) \quad 0 < \eta_2 < 1$$

从后一等式左右两端分别减去前一等式左右两端得

$$1 - 0 = \frac{1}{6}f'''(\eta_2) + \frac{1}{6}f'''(\eta_1), \text{ 即 } f'''(\eta_2) + f'''(\eta_1) = 6.$$

因 $f'''(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 自然在 $[\eta_1, \eta_2] \subset (-1, 1)$ 上连续, $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_1, \eta_2]$ 上存在最大值和最小值, 设它们分别为 M 和 m , 则有 $m \leq \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] \leq M$, 今记 $\mu = \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)]$, 便有 $m \leq \mu$

$\leq M$. 由闭区间上连续函数介值定理知在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上存在 ξ , 使有 $f'''(\xi) = \mu = \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] = \frac{6}{2} = 3$. $\eta_1 \leq \xi \leq \eta_2 < 1$, 即存在 $\xi \in (-1, 1)$, 有 $f'''(\xi) = 3$.

评述 这个题的证明应用了带拉格朗日型余项二阶麦克劳林公式, 闭区间上连续函数的最值定理和介值定理. 像这样的题的证明务必努力掌握之.

例 41 (06 10 分) 试确定常数 A, B, C 的值, 使得

$$e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量

分析 原题意确定为 A, B, C 的值使

$$e^x(1 + Bx + Cx^2) - 1 - Ax = o(x^3) \text{ 成立.}$$

解 写出 e^x 的麦克劳林展开式 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_1(x^3)$ 代入上式有

$$[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 + o_1(x^3)](1 + Bx + Cx^2) - 1 - Ax = o(x^3)$$

合并同次幂得:

$$1 - 1 - (B + 1 - A)x + (C + B + \frac{1}{2})x^2 + (C + \frac{B}{2} + \frac{1}{6})x^3 + o_2(x^3) = o(x^3)$$

比较两端同次幂的系数得:

$$\begin{cases} B - A + 1 = 0 \\ B + C + \frac{1}{2} = 0 \\ C + \frac{B}{2} + \frac{1}{6} = 0 \end{cases}$$

解得 $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{3}$, $C = \frac{1}{6}$

评述 解这类题的关键思想就是把两端均写作麦克劳林展开式,并比较同次幂的系数,得一方程组而解之.这个方法既简便又很常用,望读者熟练掌握它.

例 42 (02 8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数,且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0, f''(0) \neq 0$, 证明存在唯一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时, $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

分析 因 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续函数,故可把 $f(x)$ 展为麦克劳林级数.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(h) &= f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2 \quad \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } h \text{ 间} \\ &= f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{2}[f''(\xi) - f''(0)]h^2 \\ &= f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

$$\text{同理} \quad f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + o(h^2)$$

$$f(3h) = f(0) + 3f'(0)h + \frac{9}{2}f''(0)h^2 + o(h^2)$$

$$\text{故有} \quad \lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)f(0) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)f'(0)h + \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3)f''(0)h^2 + o(h^2)$$

由题意上式是比 h^2 高阶的无穷小,且因 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0, f''(0) \neq 0$, 必有

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

这个代数方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

知上列代数方程组的解存在且唯一,即存在唯一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得当 $h \rightarrow 0$ 时, $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

评述 本例另一证法为直接由比 h^2 高阶无穷小的定义得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0$$

再由洛必达法则有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f'(h) + 2\lambda_2 f'(2h) + 3\lambda_3 f'(3h)}{2h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f''(h) + 4\lambda_2 f''(2h) + 9\lambda_3 f''(3h)}{2} = 0$$

从而有上列线性代数方程组,满足此方程组的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的解是存在且唯一的.

例 43 设 $f(x)$ 存在 $n+1$ 阶导数,并有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x + \theta h) \quad 0 < \theta < 1$$

且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, 证明 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

分析 $n+1$ 阶导数 $f^{(n+1)}(x)$ 存在,但未必连续,利用 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶和 n 阶的泰勒公式,以及 $n+1$ 阶导数的定义去求 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$.

证明 已知

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x + \theta h) \quad 0 < \theta < 1$$

由于 $f(x)$ 具有 $n+1$ 阶导数, 因而又有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1})$$

比较上二式右端得

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1})$$

两边同除以 $h^n/n!$, 并移项得

$$f^{(n)}(x + \theta h) - f^{(n)}(x) = \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(x) + \frac{n b(h^{n+1})}{h^n}$$

亦即

$$\theta \frac{f^{(n)}(x + \theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) + \frac{n b(h^{n+1})}{h^{n+1}}$$

令 $h \rightarrow 0$, 并因 $f^{(n+1)}(x)$ 存在得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x + \theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) + n \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}$$

得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta \cdot f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) + 0$$

又因 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, 故得 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

评述 从例 31 - 例 43 共 13 题都与微分中值定理有关, 这一部分是微分学理论的核心部分, 几乎每年都要考到, 而且经常与闭区间上连续函数的性质、积分中值定理等等结合在一起, 出一些综合性较强的试题. 其中例 38, 例 40 是众典型题中之尤为典型者.

例 44 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = 0$, 证明在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ 使得 $|f'''(\xi)| \geq 24$.

分析 在函数、一阶导数与 $f''(x)$ 间有关系式的唯有泰勒公式, 今已知 $f(\frac{1}{2}) = 0$, 不妨在点 $\frac{1}{2}$ 处利用带拉格朗日型余项的二阶泰勒公式展开 $f(x)$.

证明 把函数值 $f(0)$, $f(1)$ 都用在点 $x = \frac{1}{2}$ 处的带拉格朗日型余项的二阶泰勒公式展开表示之.

$$f(0) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(0 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} f''(\frac{1}{2})(0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi_1)(0 - \frac{1}{2})^3$$

其中 $0 < \xi_1 < \frac{1}{2}$,

$$f(1) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} f''(\frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi_2)(1 - \frac{1}{2})^3$$

其中 $\frac{1}{2} < \xi_2 < 1$. 因 $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = 0$ 代入上式分别得

$$1 = f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{8} f'(\frac{1}{2}) - \frac{1}{48} f'''(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < \frac{1}{2}$$

$$2 = f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{8} f'(\frac{1}{2}) + \frac{1}{48} f'''(\xi_2), \quad \frac{1}{2} < \xi_2 < 1$$

将上二式对应项, 后者减去前者得

$$1 = 0 + 0 + \frac{1}{48} [f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1)]$$

即 $48 = [f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1)] \leq |f'''(\xi_2)| + |f'''(\xi_1)| \leq 2 \max\{|f'''(\xi_1)|, |f'''(\xi_2)|\}$

今取 $|f'''(\xi_1)|, |f'''(\xi_2)|$ 中二者较大中的 ξ_1 或 ξ_2 为 ξ , 便有

$$24 \leq |f'''(\xi)|, \quad \xi \in (0, 1)$$

典型题型 5. 以下讨论微分学的应用

例 45 设 $f'(x) < 0$, $f(0) = 0$, 证明对任何 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ 有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$

分析 不妨设 $0 < x_1 \leq x_2$,原不等式相当于求证

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) - f(x_1) < 0$$

证明 由于 $0 < x_1 \leq x_2 < x_1 + x_2$,并注意 $f(0) = 0$,考虑

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) - f(x_2) - f(x_1) &= f(x_1 + x_2) - f(x_2) - [f(x_1) - f(0)] \\ &= f'(\xi_2)(x_1 + x_2 - x_2) - f'(\xi_1)(x_1 - 0) = x_1[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] \end{aligned}$$

这里利用了有限增量公式(即拉格朗日中值定理),其中 $0 < \xi_1 < x_1 \leq x_2 < \xi_2 < x_1 + x_2$,再利用有限增量公式并因 $f'(x) < 0$, $\xi_2 - \xi_1 > 0$, $x_1 > 0$ 有

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) - f(x_1) = x_1 f'(\xi)(\xi_2 - \xi_1) < 0 \quad (\xi_1 < \xi < \xi_2)$$

从而得

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$$

评述 本题利用了三次拉格朗日中值定理,凡要简化有限增量时,每每要用拉格朗日中值定理,故此定理也叫有限增量公式。

例 46* (06, 10 分) 证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

分析 不等式两端解析式的结构相同,故作辅助函数

$$f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x \quad 0 < x < \pi$$

考察 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的变化情况,便知 $f(b)$, $f(a)$ 二者中哪个大,哪个小。

证明 $f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi$

$$f'(x) = \cos x + \cos x - x \sin x - 2 \cos x = -x \sin x < 0 \quad 0 < x < \pi$$

即有当 $x \in (0, \pi)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上严格单调下降,而 $f(\pi) = 0$.故知在 $(0, \pi)$ 上 $f(x) > 0$, $f(x)$ 严格单调增加,已知

$$0 < a < b < \pi, \text{ 便知 } f(b) > f(a)$$

即 $b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$

评述 把证明不等式问题转化为证明函数单调性的问题,这是常用的证法

例 47 设 $b > a > e$,证明 $a^b > b^a$

分析 由 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加连续函数,一个正数不等式两边同取自然对数,不等号方向不变,据此,便可简化不等式。

证明 因 $b > a > e > 0$,故 a^b , b^a 均为正数,对原不等式两边同取自然对数,使得另一等价不等式

$$a^b > b^a \iff b \ln a > a \ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$$

只要能证明 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$,也就证明了 $a^b > b^a$.为此作辅助函数 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($e < x < +\infty$) ,于是

$$\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \quad (x \in (e, +\infty))$$

可见在 $(e, +\infty)$ 内 $\varphi(x)$ 为严格单调减少函数,因已知 $e < a < b$,便知 $\varphi(a) > \varphi(b)$. 亦即 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$.

评述 凡证明一些幂指函数间的不等式,可参考这里的一些处理方法。

例 48 设 p, q 是大于 1 的常数,且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,证明: 对于任意 $x > 0$,有 $\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} \geq x$.

分析 求证不等式 $\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} \geq x$ 相当求证 $\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} - x \geq 0$,作辅助函数 $f(x) = \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} - x$. 考察曲线 $y = f(x)$ 当 $x > 0$ 时是否在 x 轴的上方?

证明 为了考察曲线 $y = f(x)$ 的图象位置,求 $f'(x) = x^{p-1} - 1$,令 $f'(x) = 0$,得唯一驻点 $x = 1$, $f''(x) = (p-1)x^{p-2}$, $f''(1) = p-1 > 0$,可见 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处达到极小值. 且因 $x > 0$ 时,驻点只有一个,这个极小值也是 $f(x)$ 当 $x > 0$ 时的最小值,而 $f(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0$. 故当 $x > 0$ 时 $f(x) \geq f(1) = 0$.

评述 经常利用函数的单调性或极值来证明不等式. 本题是利用 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时的最小值 $f(1) = 0$, 从而得知当 $x > 0$ 时 $f(x) \geq f(1) = 0$.

例 49 (98 3 分) 设 $x \in (0, 1)$, 证明

$$(1) (1+x)\ln^2(1+x) < x^2 \quad (2) \frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$$

分析 证明(1)时的思路是观察在 $(0, 1)$ 上一段曲线 $f(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$ 在坐标面中是否处于 x 轴的下方, 证明(2)时是考察函数 $g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上的上界与下界.

证明 (1) 考虑辅助函数 $f(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$, $f(0) = 0$.

$$f'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x \quad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\ln(1+x) \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x} - 2 = 2 \cdot \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x}{1+x} \\ &= \frac{2}{1+x} [\ln(1+x) - x] = \frac{2}{1+x} \left[x - \frac{x^2}{(1+\theta x)^2} - x \right] \\ &= -\frac{2x^2}{(1+x)(1+\theta x)^2} < 0 \quad \text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时} \end{aligned}$$

在以上的推导中, 曾把 $\ln(1+x)$ 化为带拉格朗日型余项的一阶麦克劳林公式, 由于在 $(0, 1)$ 内 $f''(x) < 0$, 故 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内严格单调减少, 又 $f'(0) = 0$, 从而得知在 $(0, 1)$ 内 $f'(x) < 0$, 据此进而推知在 $(0, 1)$ 内 $f(x)$ 严格单调减少, 注意 $f(0) = 0$, 便知在 $(0, 1)$ 内 $f(x) < 0$, 亦即

$$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2 \quad x \in (0, 1)$$

(2) 为证第二组不等式, 考虑 $g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$, $0 < x < 1$,

$$g'(x) = \left[\frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} \right]', = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

由刚证得的(1)的结论, 知当 $x \in (0, 1)$ 时 $g'(x) < 0$, 于是有 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内严格单调减少:

$$g(x) > g(1).$$

即

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} > \frac{1}{\ln(1+1)} - \frac{1}{1} = \frac{1}{\ln 2} - 1, \quad x \in (0, 1).$$

由于 $g(0)$ 无意义, 故而计算

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (x - x^2/2 + o(x^2))}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

因 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 是严格单调减少函数, 便知: $g(x) < \frac{1}{2} \quad x \in (0, 1)$.

综上所述得

$$\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}, \quad (0 < x < 1).$$

评述 这个例题中几个不等式都是利用函数的单调性证得的, 以上诸例证明不等式的方法, 各有所不同, 但每个例题的证法都很典型, 望读者认真学习, 努力掌握之.

例 50 (00 3 分) 设 $f(x)$, $g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有

$$(A) f(x)g(b) > f(b)g(x)$$

$$(B) f(x)g(a) > f(a)g(x)$$

$$(C) f(x)g(x) > f(b)g(b)$$

$$(D) f(x)g(x) > f(a)g(a)$$

分析 什么函数的导数会出现 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ 呢? 由于 $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0$,

可见 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 为严格单调减少函数, 有 $\frac{f(a)}{g(a)} > \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$, 于是 $f(x)g(b) > f(b)g(x)$. 故应选(A).

评述 见到 $f(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 要想到它是 $f(x)g(x)$ 的导数, 见到 $f'(x)g(x) - f(x)g''(x)$ 要想到它是 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ 的导数, 见到 $g(x)f'(x) - f(x)g'(x)$ 要想到它是 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的导数中的分子, 多次考到这些知识.

例 51 (02 8 分) 设 $0 < a < b$, 证明不等式

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

分析 难于利用已知不等式去直接推导出以上这两个不等式, 因此采取作辅助函数的方法来探讨, 把 b 换为 x 使得辅助函数 $f(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$ 和 $g(x) = (x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x-a)$ ($0 < a < x < +\infty$)

证明 先证右边的不等式, 令 $f(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$ ($0 < a < x$)

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{a}}{2x^{3/2}} = \frac{2\sqrt{a}\sqrt{x} - x - a}{2\sqrt{a}x^{3/2}} = -\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2}{2ax^{3/2}} < 0 \quad (0 < a < x)$$

可见在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x)$ 是严格单调减少函数, 当 $b > a$ 时, $f(a) > f(b)$ 即

$$f(a) = 0 > \ln b - \ln a - \frac{b-a}{\sqrt{ab}} = f(b)$$

也就是说

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}} \quad (0 < a < b)$$

其次证不等式 $\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a}$, 为此作辅助函数

$$g(x) = (x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x-a) \quad 0 < a < x < +\infty$$

$$g'(x) = 2x(\ln x - \ln a) + \frac{x^2 + a^2}{x} - 2a$$

$$= 2x(\ln x - \ln a) + \frac{x^2 + a^2 - 2ax}{x} = 2x(\ln x - \ln a) + \frac{(x-a)^2}{x} > 0$$

可见 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内严格单调增加函数, 当 $b > a$ 时, 有 $g(a) < g(b)$ 即 $g(a) = 0 < (b^2 + a^2)(\ln b - \ln a) - 2a(b-a)$

也就是说

$$\frac{2a}{b^2 + a^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} \quad (b > a > 0).$$

综上所述, 证得当 $0 < a < b$ 时有

$$\frac{2a}{b^2 + a^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

评述 这里试图给出证不等式一个比较普遍适用的方法: 即把式子移到不等式的一边去, 作适当的辅助函数, 考察辅助函数的单调性, 得到欲证的不等式, 为什么本例第一个辅助函数不取 $f(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a} - \frac{1}{\sqrt{ax}}$, 这是因为此函数的导数不是很简单, 而取 $f(x) = \ln x - \ln a - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$,

这个函数的导数较简, 同样理解 $g(x)$ 的构造, 这两个不等式的证明方法有一点雷同, 值得读者思考, 还值得读者注意的是, 第二个不等式也可如下证明之. 因 $a > 0, b > 0$, 故 $0 < \frac{2ab}{a^2 + b^2} < 1$, 利用拉格朗日中值定理, 并注意 $a < b$, 使得

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{(\ln x)' \big|_{x=\xi} (b-a)}{b-a} = \frac{1}{\xi} \quad (0 < a < \xi < b)$$

$$\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b} > \frac{1}{b} \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2a}{a^2 + b^2}$$

从而知

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{2a}{a^2 + b^2} \quad (0 < a < b)$$

例 52* 若函数 $f(x)$: (1) 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导函数 $f''(x)$ 及 (2) $f(a) = f(b) = 0$, 则在区间 (a, b) 内至少存在一点 C , 满足

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

分析 已知 $f(a) = 0, f(b) = 0$, 且要建立二阶导数与 $f(a), f(b)$ 间的关系式, 故在 $x = a, x = b$ 二处利用带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式.

证明 把函数 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 在 $x = a, x = b$ 二点处分别利用泰勒公式展开

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 \quad a < \xi_1 < \frac{a+b}{2}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f'(b)}{1}\left(\frac{a+b}{2} - b\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 \quad \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b$$

相减得

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{4} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

$$\frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)| = \frac{1}{2} |f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \leq \frac{1}{2} [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|]$$

$$\leq \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$$

当 $|f''(\xi_1)| \geq |f''(\xi_2)|$ 时, 取 $c = \xi_1$; 当 $|f''(\xi_2)| > |f''(\xi_1)|$ 时, 取 $c = \xi_2$, 故不论哪种情况, 总存在 c , 使有

$$\frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)| \leq |f''(c)|$$

其中 $c \in (a, b)$.

评述 近年来, 常考像本例这样类型的综合题.

例 53* 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在 $x = a$ 处

(A) $f(x)$ 的导数存在且 $f'(a) \neq 0$

(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值

(D) $f(x)$ 的导数不存在

分析 直接面对结论判断哪些正确, 哪些错误, 比较费事. 而题设条件只有一个, 今由条件出发作合理推导, 看能推导出什么结论来.

解 已知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 由函数极限与无穷小间的等价关系有

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1 + \alpha(x) \quad \text{其中 } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

可见当 x 与 a 充分接近时, $f(x) - f(a) < 0 (x \neq a)$, 也就是说 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值. (B) 对, (C) 错.

又因有 $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = -(x-a) + o(x-a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) = 0.$$

从而知 (A)、(D) 都不成立.

应选 (B).

评述 这样的题型是十分常见的, 请再看与本例类似的下列.

例 54 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$.

(A) 不可导.

(B) 可导且 $f'(0) \neq 0$.

(C) 取得极大值.

(D) 取得极小值.

分析 由 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$ 得

$$\frac{f(x) - f(0)}{1 - \cos x} = 2 + \text{无穷小} \quad (x \rightarrow 0 \text{ 时})$$

当 $x \in (-\delta, \delta) \cup (0, \delta)$ 时, $f(x) - f(0) > 0$, 知 $f(0) = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值.

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x - 0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{1 - \cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

故 $f'(0)$ 存在且 $f'(0) = 0$, 可见 (A)、(B)、(C) 均不成立.

解 应选 (D)

评述 如何在这两例中判断 $f'(0)$ 存在 $f'(a)$ 存在, 如何算出 $f'(0) = 0$ $f'(a) = 0$, 两例有类同处, 也有差别处. 这两者的处理方法均常用.

例 55 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- (C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

分析 由 $f'(0) = 0$ 知可导函数在 $x = 0$ 处达到极值的必要条件成立, 再由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 知在 $x = 0$ 的“0”邻域内 $f''(x) > 0$, 且经过 $x = 0$ 时, $f'(x)$ 由负变正, 知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处达到极小值, 又因 $f''(x)$ 在 $x = 0$ 两侧不变号, 始终为正, 故知 $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解 应选 (B), 而 (A)、(C)、(D) 均不成立.

评述 本例利用二阶导数的正号及 $f'(0) = 0$ 来判断 $f(0)$ 为极小值以及点 $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点.

例 56 (01 3 分) 已知 $f(x)$ 在 $(1 - \delta, 1 + \delta)$ 内有二阶导数, $f(x)$ 严格单调减少, 且 $f(1) = f'(1) = 1$, 则

- (A) 在 $(1 - \delta, 1)$ 和 $(1, 1 + \delta)$ 内均有 $f(x) < x$
- (B) 在 $(1 - \delta, 1)$ 和 $(1, 1 + \delta)$ 内均有 $f(x) > x$
- (C) 在 $(1 - \delta, 1)$ 内 $f(x) < x$, 在 $(1, 1 + \delta)$ 内 $f(x) > x$
- (D) 在 $(1 - \delta, 1)$ 内 $f(x) > x$, 在 $(1, 1 + \delta)$ 内 $f(x) < x$

分析 过点 $(1, 1)$ 且斜率为 1 的直线方程为 $y = x$, 又因 $f(x)$ 严格单调减少, $f'(1) = 1$, $x \in (1 - \delta, 1)$ 内 $f'(x) > 1$, 当 $x \in (1, 1 + \delta)$ 内 $f'(x) < 1$, 且 $f''(x) \leq 0$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近向下凹, 从而知在 $(1 - \delta, 1)$ 和 $(1, 1 + \delta)$ 内曲线 $y = f(x)$ 在直线 $y = x$ 的下方, 即均有 $f(x) < x$, 故应选 (A).

评述 把分析里的叙述, 用图形表达出来, 便更清楚了, 建议读者边分析, 边作图.

例 57 设 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 试求 $y = y(x)$ 的驻点, 并判别它是否为极值点.

分析 虽然这是由方程所确定的隐函数 $y = y(x)$, 但驻点的定义不变, 在极值点处 $y(x)$ 应满足的条件不变, 仍如同求显函数的极值一样讨论之.

解 方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 两边对 x 求导, 其中 y 视作 $y(x)$

$$6y^2 \cdot y' - 4y \cdot y' + 2y + 2xy' - 2x = 0$$

除以 2 得 $3y^2 y' - 2y \cdot y' + y + xy' - x = 0$ (*)

在驻点处 $y' = 0$, 得 $y = x$, 将此代入原方程得 $2x^3 - x^2 = 1$, 即 $(x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0$, 从而得唯一驻点 $x = 1$.

对方程 (*) 两边再求得 $(3y^2 - 2y + x)y'' + 2(3y - 1)y' + 2y' - 1 = 0$

于是
$$y''|_{(1,1)} = \frac{1}{3y^2 - 2y + x}|_{(1,1)} = \frac{1}{2} > 0$$

可见驻点 $x = 1$ 是隐函数 $y = y(x)$ 的极小值点.

评述 这个例题就隐函数讨论函数极值, 但用到的驻点定义, 判断极值的定理仍与显函数的相同, 这一经验值得注意, 出现这种题型的动向更值得注意.

例 58 (00 3 分) 设 $f(x)$ 满足 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 且 $f(0) = 0$ 则

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
 (C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

分析 将 $x = 0, f(0) = 0$ 代入原方程得 $f''(0) = 0$, 拐点的必要条件得到满足, 但 $(0, f(0))$ 是否为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 得看 $f'(x)$ 的正负号在 $x = 0$ 两侧是否不同.

解 将 $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近展为带 Peano 型余项的麦克劳林级数, 因 $f(0) = 0, f'(0) = 0$ 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = 0 + 0 + o(x) = o(x)$$

代入原方程有 $f''(x) + [o(x)]^2 = x$ 即 $f''(x) = x - o^2(x)$ ($x \rightarrow 0$ 时)

可见在 $x = 0$ 两侧 $f''(x)$ 在正负号由第一项 x 所确定, 也就是说, 当 $x \in (-\delta, 0)$ 时, $f''(x)$ 为负, 当 $x \in (0, \delta)$ 时, $f''(x)$ 为正 (其中 $\delta > 0$), 这就说明点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点.

再说明 $x = 0$ 不是函数 $y = f(x)$ 的极值点, 为此对原方程求导得 $f'''(x) = 1 - 2f'(x)f''(x)$, $f'''(0) = 1 - 0 = 1 > 0$, 知当 $|x|$ 充分小时, $f'''(x) > 0$, 再由函数 $y = f(x)$ 的二阶麦克劳林公式得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \quad \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间} \\ &= f(0) + 0 + 0 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \end{aligned}$$

亦即
$$f(x) - f(0) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \quad \text{其中 } \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

据此知 $f(0)$ 不可能是函数 $f(x)$ 的一个极大值, 也不可能是 $f(x)$ 的一个极小值, 因当 δ 为充分小的正数, $x \in (-\delta, 0)$ 时, $f(x) - f(0) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 < 0$, 而当 $x \in (0, \delta)$ 时, $f(x) - f(0) = \frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3 > 0$.

综上所述, (A)、(B)、(D) 均错, 应选 (C).

评述 由本例的解答, 可看出麦克劳林公式是深入了解函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 附近性态的强有力的工具, 同理泰勒公式是深入了解函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 附近性态的犀利的武器.

例 59 (97 3 分) 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $xf'(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f(x_0) = 0 (x_0 \neq 0)$ 则

- (A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
 (B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
 (C) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

分析 已知 $f(x_0) = 0 (x_0 \neq 0)$ 极值的必要条件满足, 因 $x_0 \neq 0$, 故 $1 - e^{-x_0} \neq 0$, 从而知 $f'(x_0)$ 有确定的正负号.

解 把条件 $x_0 \neq 0, f(x_0) = 0$ 代入原方程得 $f'(x_0) = \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0}$, 当 $x_0 > 0$ 时 $(1 - e^{-x_0})/x_0 > 0$, 当 $x_0 < 0$ 时, $(1 - e^{-x_0})/x_0 > 0$ (分子、分母均为负数) 由此可见, 不论 x_0 是正数或是负数, 恒有 $f'(x_0) > 0$, 又已知 $f(x_0) = 0$, 便知 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值, 同样因为 $f'(x_0) > 0$, 拐点的必要条件不满足, 故知 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

由上所述, (A)、(C)、(D) 均不对, 应选 (B).

评述 这两个例题虽然各给出了一个非线性微分方程, 实际上不用求解这些微分方程便可得到判别函数极值的充分条件和判断不是曲线拐点的充分条件.

例 60 证明方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个实根.

分析 证明方程 $f(x) = 0$ 的实根个数, 实际上就是证明曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴交点的个数, 于是用作函数 $y = f(x)$ 的曲线草图的思路去求解方程 $f(x) = 0$ 的实根个数了.

证明 $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2} \sin x dx = \sqrt{2} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{2}$, 代入原方程得 $\ln x = \frac{x}{e} - 2\sqrt{2}$. 移到等号

的一边得 $\frac{x}{e} - \ln x - 2\sqrt{2} = 0$. 记 $f(x) = \frac{x}{e} - \ln x - 2\sqrt{2}$ ($0, +\infty$).

$$f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x-e}{ex}, f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

令 $f'(x) = 0$ 得唯一驻点 $x = e$, 在 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 向上凹.

当 $0 < x < e$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上为单调下降函数, 在 $(0, e)$ 上 $f(x) = 0$ 至多有一实根, 当 $e < x < +\infty$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 为单调增加函数, 在 $(e, +\infty)$ 上 $f(x) = 0$ 至多有一实根.

$f(e) = 1 - \ln e - 2\sqrt{2} = -2\sqrt{2} < 0$, $f(0+0) = +\infty$, $f(e^4) = \frac{e^4}{e} - 4 - 2\sqrt{2} = e^3 - 4 - 2\sqrt{2} > 0$, 由连续函数的零点定理知在 $(0, e)$ 上和 (e, e^4) 上 $f(x) = 0$ 各至少有一实根.

综上所述知 $f(x) = 0$ 在 $(0, e)$ 上恰有一实根, 在 $(e, +\infty)$ 上也恰有一实根, 故 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且仅有两个不同的实根.

评述 确定方程 $f(x) = 0$ 的实根个数及其所在区间范围是一个很重要的实际问题, 也是考研的一个热点问题, 常用函数的单调性确定实根的唯一性, 而用零点定理或介值定理判定实根的存在性.

例 61* 设在 $[0, +\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f'(x) \geq k > 0$, $f(0) < 0$, 证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点.

证明 过点 $(0, f(0))$ 且斜率为 k 的直线方程为 $y - f(0) = kx$, 即 $y = kx + f(0)$, 曲线 $y = f(x)$ 的斜率 $f'(x) \geq k$, 知曲线 $y = f(x)$ 位于直线 $y = kx + f(0)$ 的上方, 取 $x_1 > -\frac{f(0)}{k}$ 时,

$$f(x_1) > kx_1 + f(0) > k(-\frac{f(0)}{k}) + f(0) = -f(0) + f(0) = 0$$

而 $f(0) < 0$, 由连续函数零点定理知在 $(0, x_1) \subset (0, +\infty)$ 内 $f(x) = 0$ 至少有一实根, 又因 $f'(x) \geq k > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 故知 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多有一实根, 这样便知 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个实根.

例 62 设当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解, 求 k 的取值范围

分析 对 $k < 0$, $k = 0$, $k > 0$ 分别讨论.

解 设 $f(x) = kx + \frac{1}{x^2} - 1$, 则

$$f'(x) = k - \frac{2}{x^3}, f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0$$

(1) 当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 为严格单调减少函数, 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, 当 $k < 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; 当 $k = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

当 $k \leq 0$ 时, 原方程在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个解.

(2) 当 $k > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 求得唯一驻点是 $x = \sqrt[3]{\frac{2}{k}}$, 且为极小值点. 又因函数 $f(x)$ 的图像在 $(0, +\infty)$ 内是凹的, 所以仅当极小值为零, 即

$$f\left[\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right] = k\sqrt[3]{\frac{2}{k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{k}\right)^2}} - 1 = 0$$

时, 原方程有且仅有一个解, 由上式解得 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$. 当极小值 $f\left[\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right] > 0$ 时, $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内无实根,

当极小值 $f\left[\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right] < 0$ 时, 因 $f(0+0) = +\infty$, $f(+\infty) = +\infty$, 在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x) = 0$ 有两个实根.

综上所述, 设当 $x > 0$ 时, 当且仅当 $k \leq 0$ 和 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解.

评述 本例跟以前的例题有所不同,在指定区间 $(0, +\infty)$ 内,确定 k 的取值范围,使方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个实根,这个例题十分典型.

典型题型 6. 以下讨论求曲线的增减区间,凹凸区间和渐近线等.

例 63 (99 8 分) 已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, 求

- (1) 函数的增减区间及极值;
- (2) 函数图形的凹凸区间及拐点;
- (3) 函数图形的渐近线.

解 所给函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, 令 $y' = 0$ 得驻点 $x = 0$ 及 $x = 3$

$y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 函数性态表为

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	+	-	0	+
y''	-	0	+	+	+	+
y	$\nearrow \cap$	拐点	$\nearrow \cup$	$\searrow \cup$	极小值	$\cup \nearrow$

由此可知 (1) 函数的单调增加区间为 $(-\infty, 1)$ 和 $(3, +\infty)$.

单调减少区间为 $(1, 3)$, 极小值为 $y|_{x=3} = \frac{27}{4}$.

(2) 函数图形在区间 $(-\infty, 0)$ 内是(向上)凸的, 在区间 $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ 内是(向上)凹的, 拐点为点 $(0, 0)$.

(3) 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$ 知 $x = 1$ 是函数图形的铅直渐近线, 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right] = 2$$

故 $y = x + 2$ 是函数图形的斜渐近线.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)^2} = +\infty$, 故无水平渐近线.

评述 这个题检查了微分学中多个知识点, 且都是很重要的知识点, 更是常见的考研题型.

例 64* 求函数 $y = \frac{2x^2}{(1-x)^2}$ 的单调区间, 极值点, 并求该函数所表示的曲线的凹凸区间、拐点、渐近线, 以及在点 $(0, 0)$ 处的曲线的曲率.

解 函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$y' = \frac{(1-x)^2 \cdot 4x + 2x^2 \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{4x}{(1-x)^3}$$

令 $y' = 0$ 得唯一驻点 $x = 0$.

$$y'' = \frac{(1-x)^3 \cdot 4 + 4x \cdot 3(1-x)^2}{(1-x)^4} = \frac{8x+4}{(1-x)^4}$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -\frac{1}{2}$. 作函数性态表

x	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	-		-	0	+	不存在	-
y''	-	0	+	+	+		+
y	$\searrow \cap$	拐点	$\searrow \cup$	极小值	$\nearrow \cup$		$\searrow \cup$

单调增加区间 $(0, 1)$, 单调减少区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$.

函数在 $x = 0$ 处取得极小值, 极小值为 0.

函数的曲线图形在区间 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上向下凹, 在区间 $(-\frac{1}{2}, 1)$ 上向上凹, 在区间 $(1, +\infty)$ 上向上凹, 曲

线的拐点是 $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{9})$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(\frac{1}{x} - 1)^2} = 2, \text{ 有水平渐近线 } y = 2$$

又 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2}{(1-x)^2} = +\infty$, 有铅直渐近线 $x = 1$.

考察 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x(1-x)^2} = 0$, 无斜渐近线.

在点 $(0, 0)$ 处曲线的曲率 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \Big|_{x=0} = 4$.

评述 把函数 $y = \frac{2x^2}{(1-x)^2}$ 改写 $2 + \frac{2(2x-1)}{(x-1)^2}$, 立知有水平渐近线 $y = 2$, 铅直渐近线 $x = 1$, 无斜渐近线.

例 65 (04 4 分) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为_____.

分析 先求出 $\frac{d^2y}{dx^2}$, 然后考察 x 在什么范围内取值时 $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$.

解 因 $\frac{dy}{dx} = \frac{(3t^2 - 3)dt}{(3t^2 + 3)dt} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1 - \frac{2}{t^2 + 1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = 2(t^2 + 1)^{-2} \cdot 2tdt / (3t^2 + 3)dt = \frac{4}{3} \frac{t}{(t^2 + 1)^3}$$

可见 $t < 0$ 时便有 $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 曲线 $y = y(x)$ 向上凸.

再考察 $x = t^3 + 3t + 1$, $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 3 > 0$, 故 $x = x(t)$ 为单调增加函数, 从而 $t < 0$ 时 x 的取值范围为 $(-\infty, 1)$.

评述 研究由参数方程确定的函数 $y = y(x)$ 的性质, 是值得注意的一个新动向.

例 66 (06 4 分) 曲线 $y = \frac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x}$ 的水平渐近线方程_____.

分析 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则曲线 $y = f(x)$ 有水平渐近线方程 $y = a$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + (4\sin x)/x}{5 - (2\cos x)/x} = \frac{1}{5}$

故有水平渐近线方程 $y = \frac{1}{5}$.

例 67 (00 3 分) 求曲线 $y = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程.

分析 所给函数不是有理函数,只能按一般方法求之.

解 若斜渐近线方程为 $y = ax + b$ 则

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} = 2.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} [(2x - 1)e^{\frac{1}{x}} - 2x]$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{x = \frac{1}{t}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{2}{t} - 1 \right) e^t - \frac{2}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[2 \frac{e^t - 1}{t} - e^t \right] \\ & = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 0}{1} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

所求斜渐近线为 $y = 2x + 1$.

评述 这个题 稍不小心,便会算错,如错成 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(2x - 1)e^{\frac{1}{x}} - 2x] = -1$,为什么答案 -1 是错的呢? 此式子中的三个 x 同时趋于 ∞ ,因而它是 $\infty - \infty$ 的未定式,不能让 $e^{\frac{1}{x}}$ 中的 x 先趋于 ∞ ,其他两个 x 后趋于 ∞ ,望读者警惕这种 $\infty - \infty$ 的未定式很容易算错的情况,近年考研题中常含有 $\infty - \infty$ 未定式的题.

例 68 (00 7 分) 求函数 $y = (x - 1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$ 的单调区间和极值,并求该函数图形的渐近线.

分析 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\arctan x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ 故求渐近线时,要分别考虑之.

解 给定的函数处处有定义.

$$\begin{aligned} y' &= e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} + (x - 1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} \\ &= \frac{x^2 + x}{1 + x^2} e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} \end{aligned}$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x = -1, x = 0$, 列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+		-		+
y	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

单调增加区间为 $(-\infty, -1)$, $(0, +\infty)$, 单调减少区间为 $(-1, 0)$, 极大值为 $f(-1) = -2e^{\pi/4}$, 极小值为 $f(0) = -e^{\pi/2}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} = \infty$, 故无水平渐近线, 对于任何 x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - 1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$ 存在, 因此亦无铅直渐近线.

考察

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} = e^{\pi}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x - 1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} - e^{\pi}x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [xe^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} - xe^{\pi}] - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} \stackrel{x = 1/t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{t}} - e^{\pi}}{t} - e^{\pi}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{t}}}{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} - e^{\pi}$$

$$= -2e^{\pi}$$

故 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有一条斜渐近线 $y = a_1x + b_1 = e^{\pi}x - 2e^{\pi}$, 即 $y = e^{\pi}(x - 2)$

完全类似地, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 还有另一条斜渐近线为 $y = x - 2$

评述 这里b的极限又是 $-\infty$ 型未定式,不要以为含因子x的两项可以相消,确有不少人曾这样算错成 $b = -e^\pi$,前车之鉴,务必充分注意.

例 69* 作函数 $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 的图形

解 (1) 函数定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

(2) 单调性、极值、凹向、拐点

$$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3} \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得驻点 } x = -1, x = 5$$

$$y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4} \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = -1$$

作函数性态表,使函数的单调区间、极值、凹向、拐点一目了然.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
y'	+	0	+	不存在	-	0	+
y''	-	0	+		+	+	+
y	$\nearrow \cap$	拐点	$\nearrow \cup$		$\searrow \cup$	极小值	$\nearrow \cup$

曲线的拐点为 $(-1, 0)$ 函数极小值为 $f(5) = 27/2$.

(3) 现讨论曲线的渐近线:因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \infty$, 故无水平渐近线,又因 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = +\infty$, 故有铅直渐近线 $x = 1$, 其次考虑

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = x + 5 + \frac{12x-4}{x^2-2x+1} \text{ 故有斜渐近线 } y = x + 5, \text{ 其次考虑}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} - \frac{x^3 - 2x^2 + x}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 5$$

故有斜渐近线 $y = x + 5$.

函数曲线的图形如上

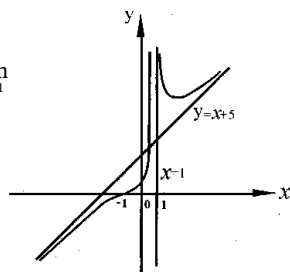


图 2 - 1

评述 若改写 $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} = x + 5 + \frac{12x - 4}{x^2 - 2x + 1}$, 由此立知该曲线的斜渐近线为 $y = x + 5$, 铅直渐近线为 $x = 1$, 无水平渐近线.

例 70 设 A 与 B 二点处各有一光源, 其强度分别为 s_1 支烛光与 s_2 支烛光, 在线段 $AB = a$ 上求出最小照明的点 M.

分析 设 A 点位于原点, B 点坐标为 a, M 点坐标为 x, AB 上任意一点处的照明亮度与光源的距离平方成反比, 与光源强度成正比, 比例系数的数值大小与本题答案无关, 故取比例系数为 1.

解 在 AB 上任一点 M 处的照明亮度按题意为

$$\varphi(x) = \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{(a-x)^2}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{2s_1}{x^3} + \frac{2s_2}{(a-x)^3} \stackrel{\text{令}}{=} 0. \quad s_1(a-x)^3 = s_2x^3$$

解出唯一驻点 $x_0 = a \left[1 + \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^{1/3} \right]^{-1}$

$$\varphi''(x) = \frac{6s_1}{x^4} + \frac{6s_2}{(a-x)^4}, \quad \varphi''(x_0) > 0$$

可见 $\varphi(x)$ 在点 x_0 处取极小值, 在 $(0, a)$ 内 $\varphi(x)$ 处处可微, 驻点只有一个, 又 $\varphi(x)$ 的最小值必存在, 这样便知 $\varphi(x)$ 在 x_0 处必达到最小值, 亦即在点 x_0 处照明亮度最弱.

评述 $\varphi(x)$ 只存在最小值, 不存在最大值. 极值、最值应用题几乎成为每年必考的应用题.

预测·强化训练二

1. (06 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则().

(A) $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在

(B) $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

(C) $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在

(D) $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处().

(A) 极限不存在

(B) 极限存在但不连续

(C) 连续, 但不可导

(D) 可导

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 试讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x), & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt, & x > 0 \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性和可导性.

5. (97 6 分) 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

6. 设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 等于().

(A) $f'(a)$

(B) $2f'(a)$

(C) 0

(D) $f'(2a)$

能否用洛必达法则计算这个极限? 为什么?

7. 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶导数的阶数 n 为().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

8. 讨论函数 $f(x) = |x|(x^2 - 1)|x^2 - 1|$ 的不可导点

9. (98 3 分) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = ()$.

(A) $xf(x^2)$

(B) $-xf(x^2)$

(C) $2xf(x^2)$

(D) $-2xf(x^2)$

10. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ζ 使 $\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\zeta) + \zeta f'(\zeta)$

11. (02 3 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义, 在开区间 (a, b) 内可导, 则().

(A) 当 $f(a)f(b) < 0$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$

(B) 对任何 $\xi \in (a, b)$, 有 $\lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0$

(C) 当 $f(a) = f(b)$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$

(D) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

12. (02 6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内具有一阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$, 若 $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时是比 h 高阶的无穷小, 试确定 a, b 的值.

13. (01 7 分) 设 $y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续导数且 $f'(x) \neq 0$, 试证

(1) 对于 $(-1, 1)$ 内的任一 $x \neq 0$, 存在唯一的 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使 $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$ 成立;

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$$

14*. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0$, 证明存在 $\zeta \in (a, b)$ 和 $\eta \in (a, b)$ 使 $f(\zeta) = 0$, $f'(\eta) = 0$.

$$15^*. \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, 证明 } \frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}.$$

$$16. \text{ 设 } x > 0, a > e, \text{ 证 } (a+x)^a < a^{a+x}.$$

$$17. \text{ 证明不等式 } 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2} \quad - < x < +$$

$$18. \text{ 证明不等式 } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x} \quad 0 < x <$$

19. 求证: 方程 $x + p + q \cos x = 0$ 恰有一个实根, 其中 p, q 为常数且 $0 < q < 1$.

20. 假设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 过点 $A(0, f(0))$ 与 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$, 其中 $0 < c < 1$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ζ , 使 $f'(\zeta) = 0$.

21*. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导且 $f(0) = f(1) = 0$, 试证: 至少存在一个 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = 2f(\xi)/(1-\xi)$.

22. 求方程 $2y - x = (x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的微分 dy .

23. (00 3 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定, 则 $dy|_{x=0} =$ _____.

24. (02 3 分) 设函数 $f(u)$ 可导, $y = f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1 , 则 $f'(1) =$

- (A) -1 (B) 0.1 (C) 1 (D) 0.5

25. (06 4 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} =$ _____.

26. (06 4 分) 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$, 则 $g(1)$ 等于

- (A) $\ln 3 - 1$. (B) $-\ln 3 - 1$. (C) $-\ln 2 - 1$. (D) $\ln 2 - 1$.

27*. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^y + \tan(xy) = 0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

28. (06 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的某邻域内可导, 且 $f(x) = e^{f(x)}$, $f(2) = 1$, 则 $f''(2) =$ _____.

29. 设由 $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\arctan \frac{y}{x}}$ ($a > 0$) 确定 y 是 x 的函数, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

30. (05 4 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 求曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ 处的法线与 x

轴交点的横坐标.

31*. 设 $x = \cos(t^2)$, $y = t \cos(t^2) - \int_1^{t^2} \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos u du$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的值.

32. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 求 $y^{(n)}$

33*. 求 $f(x) = \sin^2 ax \cos bx$ 的 n 阶导数.

34. (01 3 分) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为 _____.

35. (02 6 分) 已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos \theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

36. (02 7 分) 已知两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线相同, 写出此切线方程, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2}{n}\right)$.

37. (01 3 分) 曲线 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

38*. 设 $f(x) = x^{1/3}$, 证明 $(0, 0)$ 是 $f(x)$ 图像的一个拐点, 虽然 $f'(0)$ 和 $f''(0)$ 都不存在.

39. 设 $f(x) = x^4$, $f(x)$ 的图像有没有拐点?

40. 当 $x =$ _____ 时, 函数 $y = x2^x$ 取得极小值.

41. 当 $x > 1$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$ ().

(A) 有且仅有水平渐近线

(B) 有且仅有铅直渐近线

(C) 既有水平渐近线也有铅直渐近线

(D) 既无水平渐近线又无铅直渐近线

42. 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ ().

(A) 没有渐近线

(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

43. 若 $f(x) = -f(-x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内 ().

(A) $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$

(B) $f(x) < 0$, $f'(x) > 0$

(C) $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$

(D) $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$

44. (97 3 分) 设在 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx$, $S_2 = f(b)(b-a)$, $S_3 =$

$\frac{1}{2}[f(b) + f(a)](b-a)$, 则 ().

(A) $S_1 < S_2 < S_3$

(B) $S_2 < S_1 < S_3$

(C) $S_3 < S_1 < S_2$

(D) $S_2 < S_3 < S_1$

45. 设在 $[0, 1]$ 上 $f'(x) > 0$, $f(0)$, $f(1)$, $f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是 ().

(A) $f(1) > f(0) > f(1) - f(0)$

(B) $f(1) > f(1) - f(0) > f(0)$

(C) $f(1) - f(0) > f(1) > f(0)$

(D) $f(1) > f(0) - f(1) > f(0)$

46. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则 ().

(A) 对任意 x , $f'(x) > 0$

(B) 对任意 x , $f'(-x) \leq 0$

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加

(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加

47*. 设函数 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$, 求: (1) 函数的增减区间及极值; (2) 函数图形的凹凸区间及拐点; (3) 渐近线;

(4) 作出其图形.

48*. (99 3 分) 已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, 求: (1) 函数的增减区间及极

值; (2) 函数图形的凹凸区间及拐点; (3) 函数图形的渐近线.

49. 将长为 a 的铁丝切成两段, 一段围成正方形, 另一段围成圆形, 问这两段铁丝各长为多少时, 正方形与圆形的面积之和为最小.

50. 作半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积最小, 并求出该最小值.

51*. 如图 2-2, 设曲线 L 的方程为 $y = f(x)$, 且 $y'' > 0$, 又 MT , MP 分别为该曲线在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线和法线. 已知线段 MP 的长度为

$\frac{(1 + y_0'^2)^{3/2}}{y_0''}$, 其中 $y_0' = y'(x_0)$, $y_0'' = y''(x_0)$, 试推导出点 $P(\xi, \eta)$ 的坐标表达式.

式.

52. (01 7 分) 设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y)$ ($x \geq 1$) 处的曲率半径 $\rho = \rho(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值. (在直角坐标系下曲率公式为 $K =$

$\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$).

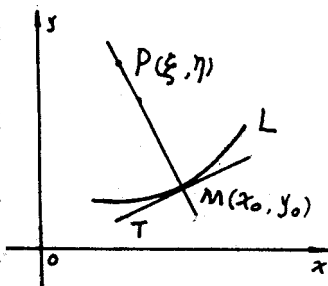


图 2-2

简明解答

1. (C). 由 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$ 得 $h \rightarrow 0$ 时 $\frac{f(h^2)}{h^2} = 1 + \text{无穷小}$, $f(h^2) = (1 + \text{无穷小})h^2$ 又因 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,

续, $\lim_{h \rightarrow 0} f(h^2) = f(0) = 0$. 其次 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2) - f(0)}{h^2} \stackrel{h^2 = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'_+(0) = 1$ 存在.

应选(C).

2. (C). $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2} = 0 = f(0)$ 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 但

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\sqrt{x}}$$

不存在, 从而知 $f'(0)$ 必不存在. 亦即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导, 应选(C).

$$3. f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{1}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \left(\arctan \frac{1}{x^2} \right)' = \arctan \frac{1}{x^2} + x \cdot \frac{-2/x^3}{1 + 1/x^4} = \arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{x^4 + 1}$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{x^4 + 1} \right] = \frac{\pi}{2}$ 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f(0)$, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

$$4. f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt - x}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2 - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x^2 \cdot 2x}{2} = 0, f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2}{x^2}(1 - \cos x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1 - \cos x) - x^2}{x^3}$$

$$\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x - 2x}{3x^2} \stackrel{0}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{1} = 0.$$

可见 $f'_-(0) = f'_+(0) = f(0)$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 可导必连续, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续可导.

$$5. \varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt \stackrel{xt = u}{=} \int_0^x f(u) \frac{du}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \quad (x \neq 0 \text{ 时})$$

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, $f(x)$ 连续, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, $\varphi(0) = \int_0^1 f(0) dt = 0$.

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时 } \varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时 } \varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}, \text{ 于是得}$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0 \\ \frac{A}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du \right] = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \varphi'(0)$$

可见 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

$$6. (B) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a) - [f(a-x) - f(a)]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a-x) - f(a)}{-x} = f'(a) + f'(a)$$

$$= 2f'(a) \quad \text{答(B).}$$

本题不能用洛必达法则求之,因 $f(x)$ 在 $x = a$ 的去心邻域内未必可导,不满足洛必达法则的条件.

$$7. (C). \quad f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \leq 0 \\ 4x^3, & x > 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 6x^2, & x \leq 0 \\ 12x^2, & x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 12x, & x \leq 0 \\ 24x, & x > 0 \end{cases} \quad f'''(x) = \begin{cases} 12, & x < 0 \\ 24, & x > 0 \end{cases}$$

可见 $f(0)$ 存在, $f'(0)$ 存在, 但 $f'''(0)$ 不存在, $n = 2$, 应选(C).

$$8. f(x) = |x|(x-1)|x-1|(x+1)|(x+1)| \quad f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处不可导, 但 } f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 处 } x=-1 \text{ 处均可导}$$

直接计算 $f_-(0)$, $f_-(1)$, $f_+(-1)$ 以及 $f_+(0)$, $f_+(1)$, $f_+(-1)$ 便知 $f_-(0) \neq f_+(0)$, $f_-(1) = f_+(1) = 0$, $f_-(1) = f_+(-1) = 0$.

$$9. \text{ 设 } f(x) \text{ 连续, 则 } \frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt \stackrel{\text{令 } x^2 - t^2 = u}{=} -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = x f(x^2) \text{ 应选(A).}$$

10. 记 $\varphi(x) = xf(x)$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 据拉格朗日中值定理在 (a, b) 内至少存在一点 ζ , 使得有

$$\varphi(b) - \varphi(a) = bf(b) - af(a) = \varphi'(\zeta)(b-a) = [f(\zeta) + \zeta f'(\zeta)](b-a)$$

$$\text{即} \quad \frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = f(\zeta) + \zeta f'(\zeta) \quad \zeta \in (a, b).$$

11. (B). 由函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 仅知 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 在闭区间 $[a, b]$ 上未必连续, 对 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不能应用罗尔定理和拉格朗日中值定理, 也不能应用零点定理, (A)、(C)、(D) 全不对. 因 $\xi \in (a, b)$, $f(x)$ 在点 ξ 处连续, 故 $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) - f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) - f(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0$, 应选(B).

12. 由题意 $af(h) + bf(2h) - f(0) = o(h)$, 又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 令 $h \rightarrow 0$ 得 $af(0) + bf(0) - f(0) = 0$, 即 $(a+b-1)f(0) = 0$, 因 $f(0) \neq 0$ 得 $a+b=1$, 再据题意, 并利用洛必达法则, 得 $0 = \lim_{h \rightarrow 0}$

$$\frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} \stackrel{0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} [af(h) + 2bf(2h)] = (a+2b)f(0) = 0, \text{ 而 } f(0) \neq 0, \quad a+2b=0 \text{ 解}$$

联立方程 $a+2b=0$, $a+b=1$ 得 $a=2$, $b=-1$.

13. 证(1) 任给非零 $x \in (-1, 1)$, 由拉格朗日中值定理得 $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x))$, ($0 < \theta(x) < 1$), 因为 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续, 且 $f''(x) \neq 0$, 所以 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内不变号, 不妨设 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内严格单调增加, 故 $\theta(x)$ 唯一.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

$$\text{所以} \quad xf'(\theta(x)) = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

$$\text{从而} \quad \frac{f'(\theta(x)) - f'(0)}{\theta(x)} = \frac{1}{2}f''(\xi)$$

$$\text{由于} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\theta(x)) - f'(0)}{\theta(x)} = f''(0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f''(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f''(\xi) = f''(0)$$

$$\text{代入上式} \quad f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}f''(0) \text{ 题设 } f''(x) \neq 0 \text{ 故有 } \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

14. 不妨设 $f(a) > 0$, $f(b) > 0$ (对 $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ 时类似可证)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x-a} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x-b} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x-b} > 0$$

故存在 $x_1 \in (a, a+\delta_1)$ 和 $x_2 \in (b-\delta_2, b)$ 使 $f(x_1) > 0$ 及 $f(x_2) < 0$, 其中 δ_1, δ_2 为充分小的正数, 显然 $x_1 < x_2$, 在区间 $[x_1, x_2]$ 上应用介值定理知, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$.

再由 $f(a) = f(\xi) = f(b)$ 及罗尔定理, 知存在 $\eta_1 \in (a, \xi)$ 和 $\eta_2 \in (\xi, b)$ 使 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$, 又在区间 $[\eta_1, \eta_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理知存在 $\eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$ 使 $f''(\eta) = 0$.

15. 当 $x > 1$ 时原不等式等价于 $(1+x)\ln(1+x) > x\ln x$, 为证此不等式作辅助函数 $\varphi(t) = t\ln t (t \geq 1)$. $\varphi'(t) = \ln t + 1 > 0$ 故在 $t \in [1, +\infty)$ 内 $\varphi(t)$ 单调增加函数 故知当 $x > 1$ 时有 $(1+x)\ln(1+x) > x\ln x$ 即 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$.
16. 由 $(a+x)^a < a^{a+x}$ 两边取对数得 $a\ln(a+x) < (a+x)\ln a$ 此不等式又等价于 $\frac{\ln(a+x)}{a+x} < \frac{\ln a}{a}$, 为证此不等式, 作辅助函数 $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t} (t > e)$ $\varphi'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2} < 0$ 故 $\varphi(t)$ 在 $(e, +\infty)$ 上为单调减少函数 由此知 $x > 0, a > e$ 时有 $\frac{\ln(a+x)}{a+x} < \frac{\ln a}{a}$ 即 $(a+x)^a < a^{a+x}$.
17. 设 $\varphi(x) = 1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ 则 $\varphi'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 令 $\varphi'(x) = 0$ 得唯一驻点 $x = 0$ 由 $\varphi''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ 可知 $x = 0$ 为极小值点 亦即最小值点 $\varphi(x)$ 的最小值为 $\varphi(0) = 0$ 于是对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $\varphi(x) \geq 0$ 即 $1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2} (-\infty < x < +\infty)$.
18. 记 $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} (0 < x < +\infty)$ $f'(x) = -\frac{1}{x(1+x)^2} < 0$
因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少 再由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}] = 0$,
及 $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}] = +\infty$ 知对于任意 $0 < x < +\infty$ $f(x) > 0$ 即 $\ln(1 + \frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x} (0, +\infty)$
(注: 本题亦可用拉格朗日中值定理证之).
19. 记 $f(x) = x + p + q\cos x$ $f'(x) = 1 - q\sin x > 0$ $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调增加函数 故 $f(x) = 0$ 至多有一实根 另一方面 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 知存在 a 使 $f(a) < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 知存在 b 使 $f(b) > 0$ 由在 $[a, b]$ 上连续函数的介值定理 知 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 上至少有一个实根 综上所述 $x + p + q\cos x = 0$ 恰有一个实根.
20. 点 $A(0, f(0))$ 与点 $B(1, f(1))$ 的连线方程为 $y = f(0) + [f(1) - f(0)]x$ 令 $\varphi(x) = f(x) - f(0) - [f(1) - f(0)]x$ 则 $\varphi(0) = 0$ $\varphi(1) = 0$ $\varphi(c) = f(c) - f(0) - [f(1) - f(0)]c = 0$ (题设曲线 $y = f(x)$ 与 AB 连线交于点 $(c, f(c))$) 则 $\varphi(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, 1]$ 上各满足罗尔定理的条件 于是至少存在 $\xi_1 \in (0, c)$ $\xi_2 \in (c, 1)$ 使 $\varphi'(\xi_1) = 0$ $\varphi'(\xi_2) = 0$. 今对 $\varphi'(x)$ 来说在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上又满足罗尔定理的条件 故至少存在一点 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \in (0, 1)$ 使 $\varphi''(\xi) = f''(\xi) = 0$.
- 另法提示 在 $[0, c]$ 上对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理存在 $\xi_1 \in (0, c)$ 使 $f(\xi_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$ 同理在 $[c, 1]$ 上对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理存在 $\xi_2 \in (c, 1)$ 使 $f(\xi_2) = f(1) - f(0)$ 最后在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对 $f(x)$ 应用罗尔定理使得 $f'(\xi) = 0$ $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$.
21. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足罗尔定理的条件 存在 $c \in (0, 1)$ 使 $f(c) = 0$ 作辅助函数 $\varphi(x) = (1-x)^2 f(x)$ $\varphi'(x) = -2(1-x)f(x) + (1-x)^2 f'(x)$ $\varphi(c) = 0$ $\varphi(1) = 0$ 在 $[c, 1]$ 上对 $\varphi(x)$ 应用罗尔定理 便知存在 $\xi \in (c, 1) \subset (0, 1)$ 使有 $\varphi'(\xi) = -2(1-\xi)f(\xi) + (1-\xi)^2 f'(\xi) = 0$ 亦即 $f'(\xi) = 2f(\xi)/(1-\xi)$ $\xi \in (0, 1)$.
22. 原方程两边微分得 $2dy - dx = \ln(x-y)(dx - dy) + dx - dy$ 移项整理得 $[3 + \ln(x-y)]dy = [2 + \ln(x-y)]dx$ 故 $dy = \frac{2 + \ln(x-y)}{3 + \ln(x-y)}dx$.
23. $(\ln 2 - 1)dx$. 原方程两边微分得 $2^{xy} \ln 2 \cdot (ydx + xdy) = dx + dy$ 再把 $x = 0$ 代入原方程两边得 $2^{0 \cdot y(0)} = 0 + y(0)$ 故 $y(0) = 1$. 把 $x = 0, y(0) = 1$ 代入上微分方程得 $2^0 \ln 2 (dx + 0) = dx + dy|_{x=0}$, $dy|_{x=0} = (\ln 2 - 1)dx$.
24. (D). 函数的微分是函数改变量的线性主部 于是由题意 $\varphi(x) = f(x^2)$ 在点 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 的改变量的线性主部为 $\varphi'(-1)\Delta x = \varphi'(-1)(-0.1) = [f(x^2) \cdot 2x \cdot \Delta x]|_{x=-1, \Delta x=-0.1} = f(1) \cdot 2(-0.1)$

$$1) \cdot (-0.1) = 0.1, \quad f(1) = \frac{0.1}{0.2} = 0.5. \text{ 应选(D).}$$

25. 由 $y = 1 - xe^y$, 令 $x = 0$ 得 $y(0) = 1$. 原方程两边对 x 求导得 $\frac{dy}{dx} = -e^y - xe^y \frac{dy}{dx}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -e^{y(0)} = -e$.

26. (C). 由 $h(x) = e^{1+g(x)}$, 两边对 x 求导 $h'(x) = e^{1+g(x)} g'(x)$, 把 $x = 1$ 代入得 $h'(1) = e^{1+g(1)} g'(1)$, 即 $1 = e^{1+g(1)} \cdot 2$, 即 $e^{1+g(1)} = \frac{1}{2}$

即对数 $1 + g(1) = -\ln 2$. $g(1) = -1 - \ln 2$ 应选(C).

27. 由方程 $y^y + \tan(xy) = 0$ 两边对 x 求导 $y \cdot y^{y-1} \cdot y' + y^y \ln y \cdot y' + \sec^2(xy)(y + xy') = 0$, $y' = -y \sec^2(xy) / [y^y(1 + \ln y) + x \sec^2(xy)]$.

28. 因 $f(2) = 1$, $f(x) = e^{f(x)}$, $f'(2) = e$, $f''(x) = e^{f(x)} f'(x)$, $f''(2) = e^2$
 $f'''(x) = e^{f(x)} [f'(x)]^2 + e^{f(x)} f''(x)$, $f'''(2) = e^3 + e^3 = 2e^3$

29. 取对数得 $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + \arctan \frac{y}{x}$, 对 x 求导 $\frac{x+y \cdot y'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}$, 由此解得 $y' = \frac{x+y}{x-y}$, 再对 x 求导得

$$y'' = \frac{(x-y)(1+y') - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}$$

在以上的计算中假定 $x \neq y$, $x \neq 0$. 最后一步是把 $y' = (x+y)/(x-y)$ 代入化简而得.

30. $x = 3$ 时对应 $t = 1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+t} / (2t+2)$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=3} = \frac{1}{8}$ 所求法线方程为 $y - \ln 2 = -8(x - 3)$, 令 $y = 0$ 得

$$x_0 = 3 + \frac{1}{8} \ln 2$$

31. $\frac{dy}{dx} = \frac{[\cos(t^2) - 2t^2 \sin(t^2) - \cos(t^2)] dt}{-\sin(t^2) \cdot 2t dt} = t$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(t) = -\frac{dt}{2t \sin^2 t dt} = -\frac{1}{2t \sin^2 t}$$

故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\sqrt{\pi/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\sqrt{\pi/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

32. $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}$, $f'(x) = -2(x+1)^{-2}$, $f''(x) = 2(-1)^2 2!(x+1)^{-3}$, $f'''(x) = 2(-1)^3 3!(x+1)^{-4}$, ..., $f^{(n)}(x) = 2 \cdot (-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}$

33. $f(x) = \frac{1}{2} \cos bx \cdot (1 - \cos 2ax) = \frac{1}{2} \cos bx - \frac{1}{4} \cos(2a+b)x - \frac{1}{4} \cos(2a-b)x$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} b^n \cos(bx + \frac{n}{2}\pi) - \frac{1}{4} (2a+b)^n \cos[(2a+b)x + \frac{n\pi}{2}] - \frac{(2a-b)^n}{4} \cos[(2a-b)x + \frac{n\pi}{2}]$$

34. $y = 1 + \frac{1}{2}x$. 方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 两边对 x 求导得

$$e^{2x+y}(2+y') + \sin(xy)(y+xy') = 0.$$

$$y' = \frac{-y \sin(xy) - 2e^{2x+y}}{e^{2x+y} + x \sin(xy)}$$

$$y'|_{(0,1)} = \frac{-2e}{e} = -2$$

所求法线方程为 $y = 1 + \frac{1}{2}x$.

35. 曲线的参数方程为 $x = (1 - \cos \theta) \cos \theta$, $y = (1 - \cos \theta) \sin \theta$, 即 $x = \cos \theta - \cos^2 \theta$, $y = \sin \theta - \sin \theta \cos \theta$, 在 $\theta =$

$$\frac{\pi}{6} \text{ 处, 切点的直角坐标为 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\pi/6} = \frac{\cos \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{-\sin \theta + 2 \cos \theta \sin \theta} \Big|_{\theta=\pi/6} = 1. \text{ 所求切线方程为}$$

$$y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}, \text{ 即 } x - y - \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{5}{4} = 0. \text{ 所求法线方程为 } y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = -\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}\right),$$

$$\text{即 } x + y - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

36. 由已知条件 $y(0) = f(0) = 0$, $f(x) = e^{-\arctan^2 x} \frac{1}{1+x^2}$, $f(0) = 1$. 所求切线方程为 $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$ 即 $y - x = 0$.

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n} - 0} = 2f'(0) = 2$. (注 这里利用导数定义求这个极限, 不能利用洛必达法则求之).

37. (C). 先作变换 $Z = x - 2$, 原曲线方程化简为 $y = (Z^2 - 1)^2 \frac{dy}{dZ} = 2(Z^2 - 1) \cdot 2Z = 4(Z^3 - Z)$, $\frac{d^2 y}{dZ^2} = 4(3Z^2 - 1) = 4(\sqrt{3}Z - 1)(\sqrt{3}Z + 1) \stackrel{\text{令}}{=} 0$ 得 $Z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, 容易看出在点 $Z = 1/\sqrt{3}$ 或 $Z = -1/\sqrt{3}$ 的两侧, $\frac{d^2 y}{dZ^2}$ 的符号不同, 故知 $x_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ 为曲线 $y = (x - 1)^2(x - 3)^2$ 的拐点的横坐标, 应选(C).

38. 曲线 $y = x^{1/3}$ 在点 $(0, 0)$ 处有切线, y 轴就是它的切线, 当 $x \neq 0$ 时 $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $y'' = \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})x^{-5/3}$, 在 $x = 0$ 两侧 y'' 的符号不同, 由正变负, 因此点 $(0, 0)$ 是曲线 $y = x^{1/3}$ 的一个拐点.

39. $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, 虽然 $f''(0) = 0$ 但在 $x = 0$ 两侧 $f''(x)$ 不变号, 故曲线 $f(x) = x^4$ 无拐点.

40. $-1/\ln 2$. $y = x^{2^x}$, $y' = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x(1 + x \ln 2)$, 令 $y' = 0$ 得唯一驻点 $x = -1/\ln 2$. 又当 $x < -1/\ln 2$ 时 $y' < 0$, 函数单调减少, 当 $x > -1/\ln 2$ 时 $y' > 0$, 函数单调增加. 故当 $x = -1/\ln 2$ 时, 函数 $y = x^{2^x}$ 取得极小值.

41. (A). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} / \frac{1}{x} = 1$. 故有水平渐近线 $y = 1$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, 在任何其他点 $x_0 \neq 0$ 处 $\lim_{x \rightarrow x_0} x \sin \frac{1}{x} = x_0 \sin \frac{1}{x_0} \neq$ 故 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 无铅直渐近线, 考察 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$, 可见无斜渐近线. 应选(A).

42. (D). $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 1$, 故有水平渐近线 $y = 1$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} =$ 故有铅直渐近线 $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{x(1 - e^{-x^2})} = 0$ 故无斜渐近线, 应选(D).

43. (C). 设 $f(x) = -f(-x)$, $f'(x) = -f'(-x)(-x)' = f'(-x) > 0$, 当 $x \in (-\rho)$ 时 $f'(x) = -f'(-x) < 0$, 当 $x \in (-\rho)$, 应选(C).

44. (B). $S_1 = \int_a^b f(x)dx$ 为曲边梯形的面积, $S_2 = f(b)(b-a)$ 为矩形面积, S_3 为梯形面积, $f(b)$, $f(a)$ 表示梯形的上下底, $b-a$ 表示梯形的高, 按照题目条件知 $y = f(x)$ 表示在 x 轴上方的单调下降而向上凹的曲线, 由(图 2-3)的图形便可看出 $S_2 < S_1 < S_3$, 应选(B).

45. (B). 因在 $[0, 1]$ 上 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调增加, 而 $f(1) - f(0) = f(\xi)(1-0) = f(\xi)$, $0 < \xi < 1$, 知有 $f(0) < f(\xi) = f(1) - f(0) < f(1)$, 应选(B).

46. (D). $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为严格单调增加函数时, 未必有 $f(x) > 0$, 例如 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为严格单调增加函数, 但 $f(x) = 3x^2 \geq 0$, 故(A)不成立, 因为 x 是 $(-\infty, +\infty)$ 内任意数, 则 $f(-x) \leq 0$ 与 $f(x) \leq 0$ 为同一条件, 故(B)不成立, 若 $f(x)$ 为单调增加, 则 $f(-x)$ 为单调减少, 故(C)亦不成立, 应选(D).

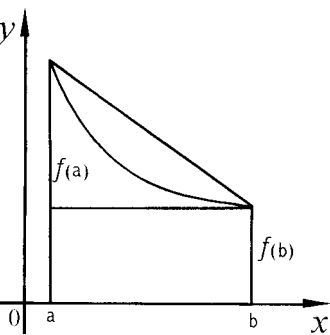


图 2-3

$$47. y = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}, y' = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}, y'' = 24/x^4 > 0, \text{令 } y' = 0 \text{ 得唯}$$

一驻点 $x = 2$. 当 $x < 0$ 时 $y' > 0$, 曲线向上升, 当 $0 < x < 2$ 时 $y' < 0$, 曲线下降, 当 $2 < x < +\infty$ 时, 曲线向上升. $y(2) = 3$ 为函数的极小值. $x = 0$ 为铅直渐近线, $y = x$ 为斜渐近线, 无水平渐近线. 在 $(-\infty, 0)$ 上及 $(0, +\infty)$ 上曲线都是向上凹, 无拐点. 曲线图参见图 2-4.

$$48. y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \text{令 } y' = 0 \text{ 得驻点 } x = 0 \text{ 及 } x = 3, y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}, \text{令 } y'' =$$

0 得 $x = 0$, 知在区间 $(-\infty, 1)$ 和 $(3, +\infty)$ 上函数为单调增加, 在区间 $(1, 3)$ 上函数为单调减少. 函数极小值为 $y|_{x=3} = 27/4$. 在区间 $(-\infty, 0)$ 上曲线向下凹, 在区间 $(0, 1)$ 及 $(1, +\infty)$ 上曲线向上凹. 点 $(0, 0)$ 为曲线的拐点. $x = 1$ 是铅直渐近线, $y = x + 2$ 是斜渐近线, 无水平渐近线.

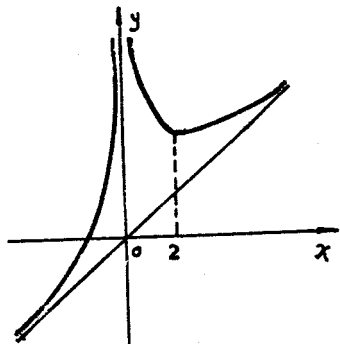


图 2-4

$$49. \text{设围成圆的一段铁丝长为 } x, \text{ 围成正方形的一段铁丝长便为 } a - x, \text{ 于是圆的面积为 } \pi \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}, \text{ 正方形面}$$

积为 $\left(\frac{a-x}{4} \right)^2$. 二者面积之和记作 $S(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{a-x}{4} \right)^2, S'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{a-x}{8}, \text{令 } S'(x) = 0 \text{ 得驻点 } x =$

$$\frac{\pi a}{4 + \pi}, S''(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} > 0. \text{ 故 } S(x) \text{ 在驻点处达到极小值. 由问题的实际意义知存在最小值, 且驻点是唯}$$

一的. 这个极小值就是最小值. 亦即长为 a 的铁丝分为一段长为 $\frac{\pi a}{4 + \pi}$ 围成圆, 另一段长为 $\frac{4a}{4 + \pi}$ 围成正方形时, 所得圆与正方形的面积和为最小.

50. 设圆锥底面半径为 R , 则由图 2-5 知有

$$\frac{BC}{SC} = \frac{OD}{SD}, \text{ 即 } \frac{R}{h} = \frac{r}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}},$$

从而 $R = \frac{rh}{\sqrt{h^2 - 2hr}}$, 圆锥体积为

$$V(h) = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi}{3} \frac{r^2 h^2}{h - 2r}, \quad 2r < h < +\infty,$$

$$V'(h) = \frac{\pi r^2}{3} \frac{h^2 - 4rh}{(h - 2r)^2},$$

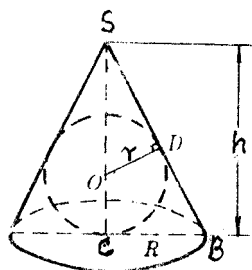


图 2-5

令 $V'(h) = 0$ 得 $h = 4r$ ($h = 0$ 舍去). 当 $h \in (4r - \delta, 4r)$ 时, $V'(h) < 0$; 当 $h \in (4r, 4r + \delta)$ 时, $V'(h) > 0$. 由此知 V 在 $h = 4r$ 时达到极小值. 由于圆锥的最小体积一定存在, 且在区间 $(2r, +\infty)$ 内, $V(h)$ 只有一个驻点. 在这个驻点的极小值就必是最小值. V 在 $h = 4r$ 时取得的最小值为 $V(4r) = \frac{8\pi r^3}{3}$.

51. 图 2-2 中 $\overline{PM}$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的曲率半径, 从而知有

$$(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 = \frac{(1 + y_0'^2)^3}{(y_0'')^2} \quad (A)$$

又因切线 TM 与法线 PM 相互垂直, 所以 $y_0' = -\frac{x_0 - \xi}{y_0 - \eta}$, 亦即 $x_0 - \xi = -y_0'(y_0 - \eta)$. 代入式 (A) 得

$$y_0'^2(y_0 - \eta)^2 + (y_0 - \eta)^2 = (y_0 - \eta)^2(1 + y_0'^2) = \frac{(1 + y_0'^2)^3}{(y_0'')^2}$$

从而得

$$(y_0 - \eta)^2 = \frac{(1 + y_0'^2)^2}{(y_0'')^2},$$

由于 $y'' > 0$, 曲线 L 是凹的, 故 $y_0 - \eta < 0$, $y_0 - \eta = -\frac{1 + y_0'^2}{y_0''}$,

又 $x_0 - \xi = -y_0'(y_0 - \eta) = y_0' \frac{(1 + y_0'^2)}{y_0''}$

于是得

$$\begin{cases} \xi = x_0 - \frac{y'_0(1 + y_0'^2)}{y_0''} \\ \eta = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''} \end{cases}$$

52. $y = \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ 抛物线在点 $M(x, y)$ 处的曲率半径 $\rho = \rho(x) = \frac{1}{K} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{1}{2}(4x$

$+ 1)^{\frac{3}{2}}$ 抛物线上 $\widehat{AM}$ 的弧长 $s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx, ds = \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$

故

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} (4x + 1)^{1/2} \cdot 4dx}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx} = 6\sqrt{x}$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d}{ds}(6\sqrt{x}) = \frac{3x^{-1/2} dx}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx} = \frac{6}{\sqrt{4x + 1}}$$

因此

$$3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{dp}{ds}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}(4x + 1)^{3/2} \frac{6}{\sqrt{4x + 1}} - 36x = 9$$

第二部分 一元函数积分学

第三章 不定积分、定积分、反常(广义)积分及其应用*

考试要求

1. 理解原函数的概念,理解不定积分和定积分的概念.
2. 掌握不定积分的基本公式,掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理,掌握换元积分法与分部积分法.
3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.
4. 理解积分上限的函数,会求它的导数,掌握牛顿—莱布尼茨公式.
5. 了解反常(广义)积分的概念,会计算反常(广义)积分.
6. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心)及函数的平均值.

考试要点分析与题型预测

1. 要熟悉原函数概念,原函数与不定积分间的关系,定积分概念也要十分熟悉,这三个概念都是考试的重点内容.
2. 微积分学第一基本定理 $\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$ (其中 $f(t)$ 为连续函数, $\varphi(x)$ 为可导函数) 和牛顿—莱布尼茨公式都是每年必考内容.
3. 积分中值定理和 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ ($a < b$) 均是常考的内容.
4. 换元积分法,分部积分法,有理函数积分法必须熟练掌握,特别注意分部积分法的技巧.
5. 三角函数有理式的积分和无理函数积分 $\int R\left[x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right] dx$ 能熟练地计算出来.
6. 定积分的应用是每年必考的内容,特别是平面区域面积的计算年年都考,旋转体体积的计算几乎每年都考,其次像变力作功,已知变速求路程、引力、弧长、压力、质心、函数平均值等都是常考的内容.
7. 掌握反常(广义)积分的定义及其敛散性的判断.

在以上的重点内容中的尤为重要者为:积分中值定理 $\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$, 牛顿—莱布尼茨公式,换元积分法,分部积分法,有理函数积分法以及定积分在物理和几何上的应用.

§3-1 一元函数积分学中的基本概念和理论

一、原函数与不定积分概念

若在区间 (a, b) 上有 $F'(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 在 (a, b) 上是 $f(x)$ 的一个原函数,今后“在区间 (a, b) 上”常省略不说.

连续函数 $f(x)$ 必存在原函数, $\int_a^x f(t) dt$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数.

* 不定积分、定积分、反常(广义)积分及其应用,数学一、数学二要求完全相同

若 $f(x)$ 存在一个原函数 $F(x)$ 则必存在无穷多个原函数, 但 $f(x)$ 的任意两个原函数之差为一常数, $f(x)$ 的任一原函数可用 $F(x) + C$ 表示之.

不定积分定义为原函数的一般表达式, 用记号 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的不定积分, 亦即若 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

二、定积分的定义、性质与基本定理

1. 定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的有界函数, 今作

第一步 分割 用区间 (a, b) 内任意的 $n-1$ 个数及边界点 a, b 把区间 $[a, b]$ 分割成 n 个小区间.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

并记 $x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_i - x_{i-1} = \Delta x_i, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

第二步 作乘积 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 上任取一点 ξ_i , 作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

第三步 求和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

第四步 取极限 若不论把区间 $[a, b]$ 如何分割, 在每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的 ξ_i 如何选取, 总存在一个极限:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{其中 } \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|.$$

(这个极限值与区间 $[a, b]$ 的分割无关, 也与点 ξ_i 的选取无关) 则称此极限值为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分, 记作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

并称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, x 为积分变量, $[a, b]$ 为积分区间, b 为积分上限, a 为积分下限, $f(x)$ 为被积函数.

定积分存在定理 I 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定积分存在定理 II 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且除去有限个点外, $f(x)$ 都连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定积分存在定理 III 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

【注1】 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个常数, 而不定积分 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的任一原函数.

【注2】 当 $\max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i| \rightarrow 0$ 时, 必有 $n \rightarrow \infty$, 反之不然.

【注3】 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 今把 $[0, 1]$ 等分为 n 个小区间 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 并取 $\xi_i =$

$$\frac{i}{n} \quad \text{则} \quad \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

【注4】 定积分也称常义积分, 前提是被积函数有界, 积分区间有限, 不要与反常(广义)积分混淆.

2. 性质 在定积分的运算中, 经常用到下列重要性质.

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, c_1, c_2 为常数, 则有

$$1) \int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{其中 } a < c < b.$$

$$3) \text{ 设 } f(x) \geq 0, a < b, \text{ 则 } \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

4) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则在 (a, b) 内必至少存在一点 ξ , 使

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi) \quad a < \xi < b$$

成立, 这个性质叫积分中值定理.

3. 积分学基本定理与公式

微积分学第一基本定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则有

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad x \in [a, b]$$

推论 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)$ 可导, 则有 $\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$.

牛顿—莱布尼茨公式 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$, 则

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

上述定理与公式是一元函数微积分学的核心内容, 它把导数与积分、定积分与不定积分紧密地联系成为一个有机整体.

§ 3 - 2 不定积分法

一、基本积分方法

除利用原函数与不定积分的定义, 直接由微分法的反运算求出不定积分外, 有两个十分重要的基本积分方法: 即分部积分法与换元积分法.

1. 分部积分法

分部积分法的公式是 $\int u dv = uv - \int v du$ 即 $\int u v' dx = uv - \int u' v dx$

当被积函数是超越函数与其他函数的乘积时, 常用分部积分法. 在绝大多数的情况下, 按下列由经验归纳出的口诀: 按“反—对—幂—指—三”的前后次序来把被积函数 $f(x)$ 看作 uv' 的乘积经常是有效的. 所谓“反”是指反三角函数, “对”是指对数函数, “幂”指幂函数, “指”为指数函数, “三”是指三角函数. 在把被积函数 $f(x)$ 视作两个函数的乘积中, 把口诀中先念出的函数视作 u , 后念出的函数视作 v' , 然后据分部积分公式写出 $uv - \int u' v dx$. 一般说来, $\int v u' dx$ 常比 $\int u v' dx$ 简单一些. 例如计算不定积分 $\int x e^x dx$ 时, $f(x) = x e^x$, x 为幂函数, e^x 为指数函数, 幂函数在口诀中先念出来, 指数函数在口诀中后念出来, 故用分部积分公式时取 $u = x$, $v' = e^x$, 从而 $u' = 1$, $v = e^x$, 据该公式有 $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x + C$

又如计算不定积分 $\int x \ln x dx$, 对数函数在口诀中先念出来, 幂函数在口诀中后念出来, 故取 $u = \ln x$, $v' = x$ 从而 $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$, 由分部积分公式有 $\int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$

再如计算不定积分 $\int \arctan x dx$, 把被积函数 $\arctan x$ 看作 $1 \cdot \arctan x$, 反三角函数在口诀中最先念出来, 故取 $u = \arctan x$, $v' = 1$, 从而 $u' = \frac{1}{1+x^2}$, $v = x$, 由分部积分公式有

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

当上述口诀失效时, 再以其他方式选取 u 与 v' 来试探之, 看看能否实现 $\int v u' dx$ 比 $\int u v' dx$ 简单一点.

2. 换元法

凑微分法(也叫第一换元法) 设 $u = g(x)$, $f(x)$ 是连续函数, $g'(x)$ 也是连续函数, 有

$$\int f[g(x)] g'(x) dx = \int f(u) du \quad u \text{ 为新积分变量.}$$

第二换元法 设 $\varphi(x)$ 是单调可微函数, $f(x)$ 为连续函数有

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

几个常用的变量代换, 一般说来

1) 对于 $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ 可令 $x = a \sin t$ (或令 $x = a \cos t$)

2) 对于 $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ 可令 $x = a \tan t$ (或令 $x = a \sinh t$)

3) 对于 $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ 可令 $x = a \sec t$ (或令 $x = a \csc t$)

4) 对于三角有理式的积分, 即 $\int R(\sin x, \cos x) dx$, 可作万能代换

$$\tan \frac{x}{2} = t, \text{ 于是 } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

5) 对于形如 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ 的无理式积分, 可令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$.

6) 对于形如 $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ 的无理式积分, 可令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, 其中 n 是 n_1, n_2 的最小公倍数.

二、有理函数积分法

1) 如果 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理假分式, 首先进行除法, 使

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{多项式 } M(x) + \text{有理真分式 } \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

2) 把分母 $Q(x)$ 分解为一次和二次实因子的乘积

$$Q(x) = (x-a)^n \dots (x^2+px+q)^m \quad \text{其中 } p^2 - 4q < 0.$$

3) 把有理真分式分解为简单分式之和

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{x-a} + \dots \\ &+ \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^m} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \dots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}. \end{aligned}$$

4) 求出待定系数 $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_m, C_m$.

§ 3 - 3 常用的定积分公式

以下的叙述中, 都假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

1. 估值公式 I 若 $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$ 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

2. 估值公式 II $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ 其中 $a < b$.

3. 分部积分法

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx$$

其中记号 $uv \Big|_a^b$ 表示 $u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

4. 换元积分法

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad \text{其中 } a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta).$$

$\varphi'(t), f[\varphi(t)]$ 均是区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上的连续函数

5. $\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx & \text{若连续函数 } f(x) \text{ 是 } [-a, a] \text{ 上的偶函数} \\ 0 & \text{若连续函数 } f(x) \text{ 是 } [-a, a] \text{ 上的奇函数} \end{cases}$

6. $\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ 其中 $f(u)$ 在 $[0, 1]$ 上连续.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & \text{当 } n \geq 3 \text{ 的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{当 } n \geq 2 \text{ 的偶数} \end{cases}$

8. 若可积函数 $f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数, 则有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

【注】 公式 7 叫 Wallis 公式.

§ 3 - 4 反常(广义)积分

一、无界函数反常(广义)积分收敛的定义

定义 1 设 $x \rightarrow b - 0$ 时 $f(x) \rightarrow \infty$, 且对任意小的 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在区间 $[a, b - \varepsilon]$ 上可积. 若

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = I$ 存在, 则称反常(广义)积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛. 其值为 I , 记为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

或 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$, 否则称反常(广义)积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在区间 $[a, b]$ 上发散.

仿此可定义唯一无穷间断点在 $x = c$ 处的情况.

定义 2 设 $x \rightarrow c$ 时 $f(x) \rightarrow \infty$, 其中 $c \in (a, b)$, 且对任意小的 $\varepsilon > 0, \eta > 0$, $f(x)$ 在区间 $[a, c - \varepsilon]$ 及 $[c + \eta, b]$ 上可积. 若

$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\eta}^b f(x)dx \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{c+\eta}^b f(x)dx = I$ 存在, 则称反常(广义)积分

$\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 其值为 I , 记作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{c+\eta}^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow c^-} \int_a^x f(x)dx + \lim_{y \rightarrow c^+} \int_y^b f(x)dx;$$

否则称反常(广义)积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散. 显然, 其中 ε, η 是相互独立的, 假若 $\int_a^c f(x)dx, \int_c^b f(x)dx$ 中任意一个发散, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

二、无有限反常(广义)积分收敛的定义

定义 1 设 $f(x)$ 对于任意 $A (A > a)$ 在区间 $[a, A]$ 上可积, 若极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx = I$ 存在, 则称反常(广义)

积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 其值为 I , 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$$

否则, 则称上述反常(广义)积分发散.

类似地可定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x)dx$$

定义 2 设 $f(x)$ 对任意的 A, B 在区间 $[A, B]$ 上可积, 若极限

$\lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x)dx = I$ 存在, 则称反常(广义)积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 其值为 I , 否则称上述反常(广义)积分发散. 定义中的 A, B 是相互独立的.

【注 1】 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{收敛} & \text{当 } p > 1 \text{ 时} \\ \text{发散} & \text{当 } p \leq 1 \text{ 时} \end{cases} \quad \text{其中 } a > 0$

【注 2】 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \begin{cases} \text{发散} & \text{当 } p \geq 1 \text{ 时} \\ \text{收敛} & \text{当 } p < 1 \text{ 时} \end{cases} \quad \text{其中 } a < b$
 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \begin{cases} \text{发散} & \text{当 } p \geq 1 \text{ 时} \\ \text{收敛} & \text{当 } p < 1 \text{ 时} \end{cases} \quad \text{其中 } a < b$

【注3】 设 $f(x), g(x)$ 对于任意 $A (A > a)$ 在区间 $[a, A]$ 上可积, 并设 $f(x) > 0, g(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = k (0 < k < +\infty)$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 具有相同的敛散性. 若 $k = 0$ 且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 若 $k = +\infty$ 且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散. 对于无界函数的反常(广义)积分也有类似的结论.

§ 3 - 5 定积分的应用

在以下的叙述中, 积分号下出现的函数都假定在 $[a, b]$ (或 $[\alpha, \beta]$) 上连续或分段连续.

一、平面图形面积的计算公式

1. 设域 $D: f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b$. 则域 D 的面积为 $A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$
2. 设在极坐标系中, 域 $D: 0 \leq r \leq r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, 则域 D 的面积为 $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta$

二、物体体积的计算公式

1. 设在 $O - xyz$ 坐标系中, 物体 G 与平面 $x = x_0$ 的截面积是 $A(x_0), a \leq x_0 \leq b$. 则物体 G 的体积是

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

2. 在 xOy 坐标面上域 $D: 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$. 则域 D 绕 ox 轴旋转一周所得旋转体体积是

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

3. 在 xOy 坐标面上域 $D: 0 \leq x \leq \varphi(y), c \leq y \leq d$. 则域 D 绕 oy 轴旋转一周所得旋转体体积是

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$$

4. 柱壳法 由曲线 $y = f(x)$, x 轴以及 $x = a, x = b$ (其中 $f(x) > 0, 0 < a < b$) 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积如下计算

$$V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

- 由曲线 $x = \varphi(y)$, y 轴, $y = c, y = d$ 其中 $\varphi(y) > 0, 0 < c < d$ 所围成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V_x = 2\pi \int_c^d y\varphi(y)dy$$

三、旋转曲面的面积计算公式

光滑曲线 $y = f(x) > 0, a \leq x \leq b$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的面积为

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

四、平面曲线弧长的计算公式

光滑曲线 $y = f(x), a \leq x \leq b$ 的弧长为

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

- 设 $x = x(t), y = y(t)$ 是曲线的参数方程, 并且假设 $x(t), y(t)$ 连续. 那么, 对应于参数 t 从 t_1 变到 t_2 的曲线的弧长为

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \quad (t_1 < t_2)$$

- 若由极坐标方程 $r = r(\theta), (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 决定的曲线光滑, 则它的弧长为

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

【注】 对分段光滑曲线, 四中各个结论仍成立.

五、物理应用

变力做功 沿 ox 轴作用的变力 $y = f(x)$ 在线段 $[x_0, x_1]$ 所作的功等于

$$W = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$$

已知沿直线运动的速度, 求在时间间隔 $[t_0, t_1]$ 内质点经过的路程为

$$L = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

水压力 设受水压力的平面区域与水平面垂直且由曲线 $y = f(x) > 0$ ($0 \leq x \leq b$) $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成. x 轴正向朝下, y 轴在水平面上, 水的密度为 μ , 则该平面区域所受的水压力为

$$P = \int_a^b g\mu x f(x) dx$$

引力 质量分别为 m_1, m_2 相距为 r 的两质点间的引力的大小 $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$, 其中 k 为引力系数, 引力的方向沿着两质点的连线方向.

六、函数平均值

函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值为 $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

§ 3 - 6 需要熟记的积分公式

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1) & \int \tan x dx &= -\ln |\cos x| + C \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + C & \int \cot x dx &= \ln |\sin x| + C \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1) & \int \sec x dx &= \ln |\sec x + \tan x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C & \int \csc x dx &= \ln |\csc x - \cot x| + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C & \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C \\ \int \sec^2 x dx &= \tan x + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \\ \int \csc^2 x dx &= -\cot x + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \\ \int \sec x \tan x dx &= \sec x + C & \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + C & \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \end{aligned}$$

§ 3 - 7 典型例题分析与最新考试题型预测

典型题型 1. 利用定积分定义求极限

例 1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0)$

分析 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$. 本题的和的极限可写作 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^p \frac{1}{n}$, 而 x^p ($p > 0$) 为在 $[0, 1]$ 上的连续函数, 故可直接利用定积分定义求之.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right] \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^p \frac{1}{n} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \quad (p > 0) \end{aligned}$$

评述 利用定积分定义求极限是常考内容之一, 近年来尤其频繁. 因定积分概念是微积分学中最基本的概念之一, 且可直接用来表达一些物理量与几何量, 故必须熟练掌握定积分定义.

例2 (04 A 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$. (B) $2 \int_1^2 \ln x dx$. (C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$. (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$.

分析 利用对数的递算规律 $\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln a^p = p \ln a$,

故
$$\begin{aligned} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} &= \frac{2}{n} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = 2 \int_0^1 \ln(1+x) dx \stackrel{1+x=t}{=} 2 \int_1^2 \ln t dt \\ &= 2 \int_1^2 \ln x dx \end{aligned}$$

应答(B).

评述 本例的极限之所以能以定积分 $2 \int_0^1 \ln(1+x) dx$ 表示, 由于函数 $\ln(1+x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续.

例3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n-2}{n} \pi \right)$.

分析 这是一个和式的极限, 但与积分和相比缺少两项, 得设法补上而又减去.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n} \pi - \sin \frac{n-1}{n} \pi - \sin \frac{n\pi}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n-1}{n} \pi + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \\ &= \int_0^1 \sin \pi x dx - 0 = - \frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

评述 $\sin \pi x$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 故上述极限等于定积分 $\int_0^1 \sin \pi x dx$.

例4* 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(nx+i)(nx+i+1)}}{n^2} \quad (x > 0)$.

分析 这个极限不能直接化为定积分, 借助夹逼定理求之.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(x + \frac{i}{n}\right) \left(x + \frac{i}{n}\right)} \frac{1}{n} &< \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(nx+i)(nx+i+1)}}{n^2} < \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(x + \frac{i+1}{n}\right) \left(x + \frac{i+1}{n}\right)} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(x + \frac{i}{n}\right) \left(x + \frac{i}{n}\right)} \frac{1}{n} - \sqrt{\left(x + \frac{1}{n}\right)^2} \frac{1}{n} + \sqrt{\left(x + \frac{n+1}{n}\right)^2} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 因 $x+t$ 是连续函数, 得

$$\int_0^1 (x+t)dt \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(nx+i)(nx+i+1)}}{n^2} \leq \int_0^1 (x+t)dt + 0 + 0$$

由夹逼定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(nx+i)(nx+i+1)}}{n^2} = \int_0^1 (x+t)dt = x + \frac{1}{2}$$

评述 $x > 0$ 这个条件, 是为了保证根式有意义, 平方根号下不致出现负数. 这个例题一些处理技巧, 望读者掌握之.

例 5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \cos \frac{i\pi}{2n}}$.

分析 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\frac{n+1}{n^2+2} = \frac{1+1/n}{n+2/n} \sim \frac{1}{n}$

解
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \cos \frac{i\pi}{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \cos \frac{i\pi}{2n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2+n}{n^2+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \cos \frac{i\pi}{2n}} \cdot \frac{1}{n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2+2} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + \cos \frac{\pi t}{2}} \quad (\text{令 } \frac{\pi t}{2} = x) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sec^2 \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sec^2 \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

评述 $1/(1 + \cos \frac{\pi}{2}t)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 故以上等式均成立.

例 6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right]$

分析 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\sin x = x + o(x^2)$. 故 $n \rightarrow \infty$ 时 $\sin \frac{i\pi}{n^2} = \frac{i\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), 而 $n \times o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$, 从而知高阶无穷小可略去.

解
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[\frac{\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left[\frac{2\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \left[\frac{(n-1)\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\pi}{n} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \frac{2\pi}{n} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \frac{(n-1)\pi}{n} \right] \frac{1}{n} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \left(1 + \frac{2}{n}\right) o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \pi \int_0^1 (1+x) x dx + 0 = \pi \int_0^1 (x+x^2) dx = \frac{5}{6} \pi \end{aligned}$$

评述 在 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = x + o(x^2)$, 又当 k 为非零常数时 $o(kx^2)$ 与 $o(x^2)$ (当 $x \rightarrow 0$ 时) 都是 $o(x^2)$, 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \left(1 + \frac{2}{n}\right) o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} o\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} \right] \lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{1}{n}\right) \\
 &= \int_0^1 (1+x) dx \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

在题解部分的运算中,把每一项 $\left(1 + \frac{i}{n}\right) \sin \frac{i\pi}{n^2}$ 实质上分解为如下两部分即

$$\left(1 + \frac{i}{n}\right) \sin \frac{i\pi}{n^2} = \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{i\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

前一部分当 $n \rightarrow \infty$ 时是 $\left(1 + \frac{i}{n}\right) \sin \frac{i\pi}{n^2}$ 的主部,后一部分是比 $\left(1 + \frac{i}{n}\right) \sin \frac{i\pi}{n^2}$ 更高阶的无穷小,即 $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,这里是保留了主部而把高阶无穷小略去,许多实际物理量、几何量用定积分表示之时,也是采取了这一思想模式.

例 7* 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有定义且是单调增加有界函数,试求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(a + \frac{b-a}{n})}{n+1} + \frac{f(a + \frac{2(b-a)}{n})}{n+1/2} + \dots + \frac{f(a + \frac{n(b-a)}{n})}{n+1/n} \right]$$

分析 首先注意,若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有定义且是单调有界函数,则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 必存在. 本题仍得借助夹逼定理和定积分定义以及定积分存在定理求之.

$$\text{解} \quad \sum_{i=1}^n \frac{f(a + i(b-a)/n)}{n+1} < \sum_{i=1}^n \frac{f(a + i(b-a)/n)}{n+1/i} < \sum_{i=1}^n f(a + i(b-a)/n) \frac{1}{n}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 取极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a + i(b-a)/n) \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{f(a + i(b-a)/n)}{n+1/i} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a + i(b-a)/n) \frac{1}{n}$$

$$\text{即} \quad \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{f(a + i(b-a)/n)}{n+1/i} \leq \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{得} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{f[a + i(b-a)/n]}{n+1/i} &= \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx \\
 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \quad (\text{令 } a + (b-a)x = t)
 \end{aligned}$$

评述 例 7 中的 $f(x)$ 可以是十分广泛的函数,因此它实际上代表很多题的题型,如当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少有界时,仍有同样的结果(推导过程要作适当的修改). 这样一来,对单调区间 $[a, b]$ 上任何连续函数,例 7 的结论均成立.

$$\text{例 8} \quad \text{求} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$$

分析 乍一眼看去,这题似与定积分无关,但记

$$\begin{aligned}
 y_n &= \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n-1)2n}{n^n}} \\
 &= \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 + \frac{n-1}{n}\right)\left(1 + \frac{n}{n}\right)} \\
 \text{于是有} \quad \ln y_n &= \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

得到积分和的形式.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\
 &= \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \ln 2 - 1 + \ln(1+x) \Big|_0^1
 \end{aligned}$$

$$= 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - \ln e = \ln \frac{4}{e} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{4}{e} \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \frac{4}{e}.$$

评述 $\ln(1+x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1+x) dx$. 又因 $\ln x$ 为连续函数, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

典型题型 2. 以下的例题有关原函数与不定积分概念

例 9 设 $f(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ x, & 1 < x < +\infty \end{cases}$ $f(0) = 0$ 求 $f(x)$

分析 应首先求出 $f(x)$ 然后求 $f(x)$.

解 设 $t = \ln x$ 则 $f(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \leq 0 \\ e^t, & 0 < t < +\infty \end{cases}$

于是

$$f(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x + c_1, & -\infty < x \leq 0 \\ e^x + c_2, & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

由假定 $f(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$. 又由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导, 可导必连续, 于是据连续函数定义得 $f(0) = f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + c_2) = 1 + c_2 = 0$, 有 $c_2 = -1$ 从而知

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } -\infty < x \leq 0 \\ e^x - 1, & \text{当 } 0 < x < +\infty \end{cases}$$

评述 这是求一个复合函数的原函数, 且给定的复合函数是分段表示的, 读者要注意利用在分界点处的原函数的连续性确定 c_1, c_2 的值, 这是很常用的方法.

例 10* 设 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$ 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$ 求 $\int \varphi(x) dx$

分析 先求 $f(x)$ 再求 $\varphi(x)$ 然后求 $\int \varphi(x) dx$.

解 由 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2} = \ln \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1 - 1}$ 知 $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$, 又据假设 $f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$, $\ln x$ 为单调函数, 从而有 $\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x$ 解出 $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$, 于是

$$\int \varphi(x) dx = \int \frac{x+1}{x-1} dx = 2\ln|x-1| + x + C$$

评述 像例 10 这样的题型经常见, 读者务须掌握解法.

例 11 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x^3 f(x) dx$.

分析 由题意 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = f(x)$

解 $\int x^3 f(x) dx = x^3 f(x) - 3 \int x^2 f(x) dx$ (由分部积分公式)

$$= x^3 f(x) - 3 \int x^2 d\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= x^3 f(x) - 3 \left[x^2 \frac{\sin x}{x} - 2 \int \sin x dx \right] \quad (\text{仍由分部积分公式})$$

$$= x^3 \left(\frac{\sin x}{x}\right)' - 3x \sin x - 6 \cos x + C$$

$$= x^3 \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - 3x \sin x - 6 \cos x + C$$

$$= x^2 \cos x - 4x \sin x - 6 \cos x + C$$

评述 本题演算中原函数概念用了两次,分部积分公式也用了两次,是一个很典型的考研题.

例 12 已知 $f(x) = f(x+4)$, $f(0) = 0$, 且在 $(-2, 2)$ 上有 $f(x) = |x|$, 求 $f(9)$.

分析 $f(x)$ 为以 4 为周期的周期函数, $f(x)$ 在一个基本周期区间上用绝对值表示, 首先要按绝对值定义把 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上分段表示之.

$$\text{解 由 } f(x) = |x| \quad x \in (-2, 2) \text{ 即 } f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$\text{于是 } f(x) = \begin{cases} -x^2/2 + c_1, & -2 < x \leq 0 \\ x^2/2 + c_2, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

因 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上可导, 可导必连续, 选取 c_1, c_2 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $f(0-0) = f(0) = f(0+0) = 0$, 于是有 $c_1 = c_2 = 0$ 得

$$f(x) = \begin{cases} -x^2/2, & x \in (-2, 0) \\ x^2/2, & x \in (0, 2) \end{cases}$$

再由周期性知有 $f(9) = f(5) = f(1) = 1/2$.

评述 这个题解中用了好几个考点的知识, 是一个很值得注意的题.

例 13 求 $\int \max(1, x^2) dx$

分析 首先把被积函数 $\max(1, x^2)$ 分段表示之, 然后分段积分, 今记 $\varphi(x) = \int \max(1, x^2) dx$.

$$\text{解 } \max(1, x^2) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ x^2, & |x| > 1 \end{cases}$$

于是

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3/3 + c_1, & x < -1 \\ x + c_2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3/3 + c_3, & x > 1 \end{cases}$$

由于 $\varphi(x)$ 的连续性得 $\varphi(-1) = \varphi(-1+0) = \varphi(-1-0)$ 有 $-1 + c_2 = -\frac{1}{3} + c_1$, 再由 $\varphi(1) = \varphi(1-0) = \varphi(1+0)$ 有 $1 + c_2 = \frac{1}{3} + c_3$. 由此得 $c_1 = c_2 - \frac{2}{3}$, $c_3 = c_2 + \frac{2}{3}$, 并改写为 c_2 为 c , 代入上式得

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3/3 - 2/3 + c, & x < -1 \\ x + c, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3/3 + 2/3 + c, & x > 1 \end{cases}$$

评述 求分段表示的函数的不定积分都像以上二例处理之, 需要注意的是: 一个不定积分的表达式中最终只能有一个任意常数.

典型题型 3. 以下讨论不定积分的计算

例 14 计算 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ 其中 a, b 是不全为零的非负常数.

分析 要分 (1) $a \neq 0, b \neq 0$, (2) $a \neq 0, b = 0$, (3) $a = 0, b \neq 0$ 三种情况分别讨论.

解 当 $a \neq 0, b \neq 0$ 时

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x dx}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \int \frac{d \tan x}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a \tan x}{b}\right) + C$$

当 $a = 0, b \neq 0$ 时 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \sec^2 x dx = \frac{1}{b^2} \tan x + C$

当 $a \neq 0, b = 0$ 时 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{a^2} \int \csc^2 x dx = -\frac{1}{a^2} \cot x + C$

评述 是用凑微分法或直接利用积分公式.

例 15* 求 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

分析 x^3 可写作 $x^2 \cdot x dx = \frac{1}{2} x^2 dx^2 = \frac{1}{2} (x^2 + 1 - 1) d(x^2 + 1)$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\frac{1}{2} x^2 d(x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+x^2}} d(x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} d(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + C \end{aligned}$$

评述 仍用凑微分法

例 16 求 $\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx$

分析 $1+x = (1+x)(1+xe^x - xe^x)$

, $\frac{1+x}{x(1+xe^x)} = \frac{(1+x)(1+xe^x) - (1+x)xe^x}{x(1+xe^x)} = \frac{1+x}{x} - \frac{(1+x)e^x}{1+xe^x} = \frac{1+x}{x} - \frac{(1+xe^x)'}{1+xe^x}$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{(1+x)dx}{x(1+xe^x)} &= \int \frac{1+x}{x} dx - \int \frac{(1+xe^x)'}{1+xe^x} dx = \ln|x| + x - \ln|1+xe^x| + C \\ &= x + \ln \left| \frac{x}{1+xe^x} \right| + C \end{aligned}$$

评述 根据分母由两因式相乘的特点, 把被积函数化为较简单的两分式之和, 然后把后一积分利用凑微分法积分之.

例 17 求 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$

分析 被积函数的分母为二因式的乘积, 设法把被积函数化为较简单的二分式之和, 注意 $\frac{1}{x^2(1+x^2)} =$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{\arctan x}{x^2} dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = - \int \arctan x d\left(\frac{1}{x}\right) - \int \arctan x d(\arctan x) \\ &= -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C \end{aligned}$$

在以上的计算中, 对 $\int \arctan x d\left(\frac{1}{x}\right)$ 利用了分部积分法, 再计算有理函数的积分

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right] dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

代入上式得

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx = -\frac{1}{x} \arctan x + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C$$

评述 用分部积分法计算 $\int \frac{1}{x^2} \arctan x dx$ 时, 令 $u = \arctan x, v' = \frac{1}{x^2}, v = -\frac{1}{x}, u' = \frac{1}{1+x^2}$, 凡被积函数为分式且分母为二因式的乘积时, 每化为较简单的分式之和, 再分项积分之. 本例两次出现这样的情况.

例 18 (06 10 分) 求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$.

分析 被积函数为超越函数 $\arcsin e^x \cdot e^{-x}$ 的乘积, 应用分部积分法, 其中取 $u = \arcsin e^x$, $v' = e^{-x}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx &= - \int \arcsin e^x de^{-x} \\ &= - [e^{-x} \arcsin e^x - \int e^{-x} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx] \\ &= -e^{-x} \arcsin e^x + \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} \end{aligned}$$

其中求 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, 作变换 $\sqrt{1-e^{2x}} = t$, $1-e^{2x} = t^2$, $e^{2x} = 1-t^2$

$$x = \frac{1}{2} \ln(1-t^2), \quad dx = \frac{-t dt}{1-t^2}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} &= - \int \frac{t dt}{t(1-t^2)} = - \int \frac{dt}{1-t^2} = - \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} + C \\ &= - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}} + C \end{aligned}$$

故 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = -e^{-x} \arcsin e^x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}} + C.$

评述 这是一个很典型的部分积分法的题. 部分积分法是考研热点内容之一. 像此类积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, 常作变换 $\sqrt{1-e^{2x}} = t$ 试求之, 也是常考的内容. 由于 $t = \sqrt{1-e^{2x}}$, 显然有 $0 \leq t < 1$ 才有意义, 故写 $\ln \frac{1+t}{1-t}$, 而可不必写 $\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|$, 同样, 可写 $\ln \frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}}$, 不必写 $\ln \left| \frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}} \right|$. 若一时判断不出正负号, 写上 $\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|$, $\ln \left| \frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}} \right|$, 总是对的.

例 19 (01 6 分) 求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$.

分析 被积函数为二超越函数的乘积 $\arctan e^x \cdot e^{-2x}$, 试用分部积分法求之. $u = \arctan e^x$, $v' = e^{-2x}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx &= -\frac{1}{2} \int \arctan e^x de^{-2x} = -\frac{1}{2} \left[e^{-2x} \arctan e^x - \int e^{-2x} \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[e^{-2x} \arctan e^x - \int \left(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}} \right) de^x \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left(e^{-2x} \arctan e^x + \arctan e^x + \frac{1}{e^x} \right) + C \end{aligned}$$

评述 $e^{-2x} \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2} = \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})} = \left(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}} \right) de^x$

例 20 (02 6 分) 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$

分析 首先求出 $f(x)$, 代入不定积分, 看看是什么情况.

解 令 $u = \sin^2 x$, $\sin x = \sqrt{u}$, $x = \arcsin \sqrt{u}$, 于是

$$f(u) = \frac{\arcsin \sqrt{u}}{\sqrt{u}}, \quad f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

代入 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx = \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = -2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{1-x}$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \left[\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} - \int \sqrt{1-x} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right] \text{ (据分部积分公式)} \\
 &= -2 \left(\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} - \int d\sqrt{x} \right) = -2 \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C
 \end{aligned}$$

评述 被积函数 $\frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ 是超越函数 $\arcsin \sqrt{x}$ 与 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ 的乘积, 故试用分部积分公式探求之. 以上四例都用了分部积分公式, 且都可按经验口诀“反一对一幂一指一三”进行分部获得成功, 当然也有例外情况, 请看下例.

例 21* 求 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

分析 被积函数的分母为二因式的乘积, 按常规, 试探化为两个较简的分式之和.

解
$$\begin{aligned}
 \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= \int \frac{(1+x-1)e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{e^x}{1+x} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx \\
 &= \int \frac{e^x}{1+x} dx - \int e^x (1+x)^{-2} dx = \int \frac{e^x}{1+x} dx - \left[-\frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{1+x} dx \right] \\
 &= \frac{e^x}{1+x} + C
 \end{aligned}$$

评述 计算 $\int e^x (1+x)^{-2} dx$ 时, 令 $u = e^x, v' = (1+x)^{-2}$, 与口诀不一致, 但这种例外情况不多见.

例 22 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 且当 $x \geq 0$ 时 $f(x)F(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 已知 $F(0) = 1, F(x) > 0$, 试求 $f(x)$.

分析 由题意 $F'(x) = f(x)$, 于是当 $x \geq 0$ 时 $f(x)F(x) = F(x)F'(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 再由上题立知有 $dF^2(x) = d\left(\frac{e^x}{1+x}\right)$, 从而得 $F(x)$.

解 由题意 $F(x)F'(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$ 即 $2F(x)F'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$, 利用上题结果得

$$dF^2(x) = d\left(\frac{e^x}{1+x}\right) \quad (\text{当 } x \geq 0 \text{ 时})$$

两边积分
$$F^2(x) = \frac{e^x}{1+x} + C$$

已知 $F(0) = 1$ 代入得 $F^2(0) = 1 = \frac{e^0}{1+0} + C = 1 + C$ 故 $C = 0$

从而
$$F(x) = \pm \sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$$

又因 $F(x) > 0$, 舍去负号得
$$F(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$$

,
$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^x}{1+x} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2}$$

化简得
$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{xe^{x/2}}{(1+x)^{3/2}}$$

评述 在考研中, 分部积分法几乎是每年都考到的方法, 像上述二例的题型十分常见, 要多加注意.

例 23 求 $\int \cos(\ln x) dx$.

分析 用分部积分法, 令 $u = \cos(\ln x), v' = 1$

解
$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int x \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \frac{dx}{x} \quad (\text{再据分部积分公式}) \\
 &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx
 \end{aligned}$$

移项、合并,并除以2得

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$$

评述 有些题需要连续作几次分部积分,像 $\int \sin(\ln x) dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$ 均如此,有关不定积分的分部积分法的例题先列举到这里. 以下讲不定积分中的换元法.

例 24 (01 6 分) 求 $\int \frac{dx}{(2x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1}}$

分析 属于被积函数中含有 $\sqrt{a^2 + x^2}$ 的积分,作变换 $x = \tan u$

解 设 $x = \tan u$, 则 $dx = \sec^2 u du$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{\sec^2 u du}{(2 \tan^2 u + 1) \sqrt{\tan^2 u + 1}} = \int \frac{\sec u du}{2 \tan^2 u + 1} = \int \frac{\cos u du}{2 \sin^2 u + \cos^2 u} \\
 &= \int \frac{d \sin u}{\sin^2 u + 1} = \arctan(\sin u) + c = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C
 \end{aligned}$$

例 25 求 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

解 令 $u = \sqrt{e^x - 1}$, $x = \ln(1 + u^2)$, $dx = \frac{2u}{1 + u^2} du$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{(1 + u^2) \ln(1 + u^2)}{u} \cdot \frac{2u}{1 + u^2} du = 2 \int \ln(1 + u^2) du \\
 &= 2u \ln(1 + u^2) - \int \frac{4u^2}{1 + u^2} du = 2u \ln(1 + u^2) - 4u + 4 \arctan u + C \\
 &= 2x \sqrt{e^x - 1} - 4 \sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.
 \end{aligned}$$

评述 这个题是先换元,后用分部积分法,然后再换成原来的变元 x 表示最终结果. 这个题的换元,虽然不是很典型,但据经验,一般被积函数形如 $f(x) e^x, \sqrt{a e^x + b}$ 者,常作变换 $u = \sqrt{a e^x + b}$ 试求之.

例 26* 求 $\int \frac{dx}{\sin(2x) + 2 \sin x}$.

分析 先把被积函数化为 $\sin x, \cos x$ 的有理式,然后作万能变换.

解 $\int \frac{dx}{\sin(2x) + 2 \sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x + 1)}$ 令 $\tan \frac{x}{2} = u$, $\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$, $\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$, $dx =$

$\frac{2du}{1 + u^2}$ 代入上式,化简得

$$\int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x + 1)} = \frac{1}{4} \int \frac{1 + u^2}{u} du = \frac{1}{8} u^2 + \frac{1}{4} \ln |u| + C = \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

评述 万能变换也叫 Weierstrass 变换,求三角函数有理式的积分,利用这个变换常行之有效,它是求三角函数有理式积分的一般方法.

例 27 求 $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

分析 被积函数为三角函数有理式,若未发现有简便方法积分之时,不妨作 $\tan \frac{x}{2} = u$, $\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$, $dx =$

$$= \frac{2du}{1 + u^2}.$$

解
$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{2du}{(u+1)^2} = -\frac{2}{u+1} + C = -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C$$

评述 可见作万能变换, 十分简便. 本题亦可如下求之.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx - \int \tan x \sec x dx \\ &= \tan x - \sec x + C \end{aligned}$$

或 原式
$$= \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= 2 \int \frac{d\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C.$$

把求这个积分的三个方法比较一下, 在考试场上还是采取万能变换好(好在是一个通用方法, 不必临时去探索新的技巧).

例 28 求 $\int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx$.

分析 这个题用凑微分法求之.

解
$$\begin{aligned} \int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx &= \int \frac{\ln \tan x}{\tan x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\ln \tan x}{\tan x} \sec^2 x dx \\ &= \int \frac{\ln \tan x}{\tan x} d \tan x = \int \ln \tan x d \ln \tan x = \frac{1}{2} (\ln \tan x)^2 + C \end{aligned}$$

评述 由于 $\ln \tan x$ 中的 $\tan x$ 变化的余地很小, 故设法把该积分化为以 $\tan x$ 为变元的积分.

例 29 求 $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$

分析 采取分项求积, 让每一项都稍简一些.

解
$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{x}{1 + \cos x} dx + \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx - \int \frac{d(1 + \cos x)}{1 + \cos x} \\ &= \int x \tan \frac{x}{2} - \ln(1 + \cos x) = x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} dx - \ln(1 + \cos x) \\ &= x \tan \frac{x}{2} + 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| - \ln(1 + \cos x) + C \end{aligned}$$

评述 分项积分也是把被积函数化繁为简的一条重要途径. 计算不定积分时, 常常是凑微分法与其他方法混在一起, 灵活使用, 技巧性较强, 平时要多看题、多做题.

典型题型 4. 以下求有理函数的不定积分.

例 30 求 $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$

分析 被积函数为真分式, 把分母分解因式, 然后化真分式为部分分式之和.

解 $2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$ 今选取 a, b, c 使

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{2x - 1} + \frac{c}{x + 2}$$

即 $x^2 + 2x - 1 = a(2x - 1)(x + 2) + bx(x + 2) + cx(2x - 1)$

令 $x = 0$ 得 $a = \frac{1}{2}$, 令 $x = \frac{1}{2}$ 得 $b = \frac{1}{5}$, 再令 $x = -2$ 得 $c = -\frac{1}{10}$.

于是

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{5(2x - 1)} - \frac{1}{10(x + 2)}$$

积分之得

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{2x - 1} - \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x + 2} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{10} \ln \left| \frac{2x - 1}{x + 2} \right| + C \end{aligned}$$

评述 有理真分式分母中多项式只有不同的一次实因式的乘积时,如上处理.

例 31* 求 $\int \frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} dx$

分析 分母的实因式全为一次,但三个相同的一次实因式.

解 此时把被积函数化为如下形式的部分分式之和

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{a}{x} + \frac{b_1}{x - 1} + \frac{b_2}{(x - 1)^2} + \frac{b_3}{(x - 1)^3}$$

即

$$x^3 + 1 = a(x - 1)^3 + b_1x(x - 1)^2 + b_2x(x - 1) + b_3x$$

比较两边同次幂的系数,得联立方程组

$$\begin{cases} a + b_1 = 1 \\ -3a - 2b_1 + b_2 = 0 \\ 3a + b_1 - b_2 + b_3 = 0 \\ -a = 1 \end{cases}$$

解得 $a = -1, b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 2$, 从而有

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{(x - 1)^3}$$

分项积分

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} dx &= -\ln |x| + 2\ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{(x - 1)^2} + C \\ &= -\frac{x}{(x - 1)^2} + \ln \frac{(x - 1)^2}{|x|} + C \end{aligned}$$

评述 注意对应于分母中有实因式 $(x - a)^n$ 时的部分分式和为

$$\frac{a_1}{x - a} + \frac{a_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{a_n}{(x - a)^n}$$

例 32 (99 3 分) 求 $\int \frac{x + 5}{x^2 - 6x + 13} dx$

分析 被积函数为真分式,但 $(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 < 0, x^2 - 6x + 13 = 0$, 分母中无一次实因式.

解

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 5}{x^2 - 6x + 13} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 13)' + 5 + 3}{x^2 - 6x + 13} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 6x + 13)}{x^2 - 6x + 13} + \int \frac{8dx}{(x - 3)^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x - 3}{2} + C \end{aligned}$$

评述 若被积函数为 $\frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}$ 且 a, b, c, d, e 是实数 $b^2 - 4ac < 0$ 时,则把分子改写为

$$dx + e = \frac{d}{2a}(ax^2 + bx + c)' + e - \frac{bd}{2a}.$$

由于 $x^2 - 6x + 13 > 0$, 故写 $\ln(x^2 - 6x + 13)$ 未写 $\ln |x^2 - 6x + 13|$.

例 33* 求 $\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} dx$

分析 被积函数为有理函数,分母中有一次实因式又有不能分解为一次实因式的相同的二次实因式

$$\text{解 设 } \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}$$

两边同乘以 $(x-2)(x^2+1)^2$ 得

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 13 &= a(x^2+1)^2 + (b_1x+c_1)(x-2)(x^2+1) + (b_2x+c_2)(x-2) \\ &= (a+b_1)x^4 + (c_1-2b_1)x^3 + (b_1+b_2-2c_1+2a)x^2 \\ &\quad + (c_1+c_2-2b_1-2b_2)x + a-2c_1-2c_2 \end{aligned}$$

比较两边同次幂的系数得方程组

$$a+b_1=0, \quad c_1-2b_1=0, \quad b_1+b_2-2c_1+2a=2,$$

$$c_1+c_2-2b_1-2b_2=2, \quad a-2c_1-2c_2=13$$

由这个方程组解出 $a=1, b_1=-1, c_1=-2, b_2=-3, c_2=-4$

$$\text{故 } \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-x-2}{x^2+1} + \frac{-3x-4}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx &= \ln|x-2| - \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)' + 2}{x^2+1} dx - \int \frac{\frac{3}{2}(x^2+1)' - 4}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2\arctan x + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+1} - 4 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{又 } \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x \right) + C$$

$$\text{故 } \int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \ln \frac{|x-2|}{(x^2+1)^{1/2}} - 4\arctan x + \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + C.$$

评述 有理函数是很重要的一类函数,如何求有理函数的积分,必须系统、全面、熟练地掌握,望读者要全面复习,几乎每年都直接或间接地考到这部分内容。

$$\text{例 34}^* \quad \text{求 } \int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$$

分析 被积函数为无理函数.

$$\text{解 作变换 } t = \sqrt[6]{x}, x = t^6, dx = 6t^5 dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3-t^2} = 6 \int \frac{t^3}{t-1} dt \\ &= 6 \int \left(t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 6 \left(\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 + t + \ln|t-1| \right) + C \\ &= 2x^{1/2} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6 \ln|x^{1/6}-1| + C \end{aligned}$$

评述 变换 $t = \sqrt[6]{x}$ 中的 6 是 $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$ 中二次方根中的 2 与三次方根中的 3 的最小公倍数,于是便把无理式化为有理式了。

$$\text{例 35} \quad \text{求 } \int \frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} dx$$

分析 分子、分母均为无理式,今把分母有理化,就把原被积函数大大化简

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \int \frac{\sqrt{x(1+x)}(\sqrt{x}-\sqrt{1+x})}{x-(1+x)} dx = - \int x \sqrt{1+xdx} + \int (1+x) \sqrt{xdx} \\ &= - \int (1+x-1) \sqrt{1+xdx} + \int \sqrt{xdx} + \int x^{3/2} dx \\ &= - \int (1+x)^{3/2} dx + \int \sqrt{1+xdx} + \int \sqrt{xdx} + \int x^{3/2} dx \\ &= - \frac{2}{5} (1+x)^{5/2} + \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{2}{5} x^{5/2} + C \end{aligned}$$

评述 由这个题给我们一个启发,不是任一无理函数都可作变元代换化为有理函数,有的题把分子或分母有理化后便不难求得积分了. 因此解题时的思维要多方设想,不要拘于一格.

典型题型 5. 以下讨论求定积分的值.

例 36 计算定积分 $\int_{-2}^2 (|x| + x)e^{-|x|} dx$.

分析 积分区间对称于原点, $|x|e^{-|x|}$ 为 $[-2, 2]$ 上的偶函数, $xe^{-|x|}$ 为 $[-2, 2]$ 上的奇函数, $\int_{-2}^2 xe^{-|x|} dx = 0$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{-2}^2 (|x| + x)e^{-|x|} dx &= \int_{-2}^2 |x|e^{-|x|} dx = 2 \int_0^2 |x|e^{-|x|} dx \\ &= 2 \int_0^2 xe^{-x} dx = 2 \left[-xe^{-x} \Big|_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx \right] = 2[-2e^{-2} - e^{-2} + 1] \\ &= 2 - 6e^{-2}. \end{aligned}$$

评述 计算奇、偶函数的定积分,几乎是每年都要考的内容.

例 37 (01 3 分) 计算 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx$.

分析 积分区间为对称区间, $x^3 \cos^2 x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为奇函数,其积分为零, $\sin^2 x \cos^2 x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为偶函数.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \cos^2 x dx = 2 \left[\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx - \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

评述 这里利用了 Wallis 公式: 当 n 为偶数时

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Wallis 公式是一个常用的公式,每逢计算 $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$, $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ 时,便可直接写出结果了,要熟记 Wallis 公式.

例 38* (02 3 分) 设 $f(x)$ 连续,则下列函数中,必为偶函数的是

- (A) $\int_0^x f(t^2) dt$ (B) $\int_0^x f^2(t) dt$
(C) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt$ (D) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$

分析 若 $F(-x) = F(x)$, 则 $F(x)$ 为偶函数,若 $F(-x) \neq F(x)$, 则 $F(x)$ 不是偶函数,这是判别 $F(x)$ 是否为偶函数的唯一标准.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{(A)} \quad \text{设 } F(x) &= \int_0^x f(t^2) dt, F(-x) = \int_0^{-x} f(t^2) dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x f[(-u)^2](-1) du = - \int_0^x f[u^2] du = - \\ & \int_0^x f(t^2) dt = -F(x), \text{可见 } \int_0^x f(t^2) dt \text{ 为奇函数.} \end{aligned}$$

$$\text{(B)} \quad \text{设 } F(x) = \int_0^x f^2(t) dt, F(-x) = \int_0^{-x} f^2(t) dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x f^2(-u) du \neq \int_0^x f^2(u) du = F(x)$$

可见 $\int_0^x f^2(t) dt$ 未必是偶函数.

$$\begin{aligned}
 \text{(C) 设 } F(x) &= \int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt, F(-x) = \int_0^{-x} t[f(t) - f(-t)]dt \\
 &\stackrel{t=-u}{=} \int_0^x -u[f(-u) - f(u)](-1)du = \int_0^x u[f(-u) - f(u)]du \\
 &= \int_0^x t[f(-t) - f(t)]dt = -F(x), \text{ 可见 } \int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt \text{ 为奇函数.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(D) 设 } F(x) &= \int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt, F(-x) = \int_0^{-x} t[f(t) + f(-t)]dt \\
 &\stackrel{t=-u}{=} \int_0^x u[f(u) + f(-u)]du = \int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt = F(x),
 \end{aligned}$$

可见 $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$ 为偶函数.

综上所述, 应选(D).

评述 这个题中出现的函数, 是否为偶函数, 不是很明显, 要严格按照偶函数定义判断. 在论证中, 还多次利用定积分与积分变量写法无关这一性质, 即 $\int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$.

例 39 计算 $I_n = \int_0^\pi \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$.

分析 关于定积分 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx$, 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则有公式

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

解 $I_n = \int_0^\pi \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$

但 $\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x dx}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} \stackrel{x = \pi/2 - t}{=} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\cos^{2n} t}{\sin^{2n} t + \cos^{2n} t} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$

又因被积函数 $\cos^{2n} x / (\sin^{2n} x + \cos^{2n} x)$ 是以 π 为周期的周期函数, 从而有

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx = \int_0^\pi \frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx \quad (*)$$

故 $I_n = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^\pi dx = \frac{\pi^2}{4}.$

评述 利用几何图形不难直接看出 $\int_0^\pi \sin^{2n} x dx = \int_0^\pi \cos^{2n} x dx$, 故关系式(*)的成立可以预见. 若记 $J_n = \int_0^\pi \frac{x \cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$, 更知 $J_n = I_n = \pi^2/4$.

例 40 计算 $\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx$. 设其中 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续.

分析 因 $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx$, 预计应有 $\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx$

解 $\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx \stackrel{x = \frac{\pi}{2} - t}{=} \int_{\pi/2}^0 \frac{f(\cos t)}{f(\cos t) + f(\sin t)} dt$
 $= \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos t)}{f(\cos t) + f(\sin t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx$

从而有 $\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x) + f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{4}$

评述 几何直觉常是严格证明的指路明灯, 以上各个例题都利用了各种各样的几何对称性.

例 41 设 $x \geq -1$, 求 $\int_{-1}^x (1 - |t|) dt$.

分析 被积函数实为分段表示的函数, 当 $x < 0$ 时, 被积函数为 $1 - |t| = 1 + t$, 当 $0 \leq t$ 时, 被积函数为 $1 - t$, 要分 $-1 \leq x < 0$ 与 $x \geq 0$ 两种情况考虑之.

解 当 $-1 \leq x < 0$ 时

$$\int_{-1}^x (1 - |t|) dt = \int_{-1}^x (1 + t) dt = \frac{1}{2} (1 + t)^2 \Big|_{-1}^x = \frac{1}{2} (1 + x)^2$$

当 $x \geq 0$ 时

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x (1 - |t|) dt &= \int_{-1}^0 (1 - |t|) dt + \int_0^x (1 - |t|) dt = \int_{-1}^0 (1 + t) dt + \int_0^x (1 - t) dt \\ &= \frac{1}{2} (1 + t)^2 \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2} (1 - t)^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - x)^2 + \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} (1 - x)^2. \end{aligned}$$

评述 计算分段表示的被积函数的定积分是考试的一个热点内容.

例 42 设 $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x - 2) dx$.

分析 先把被积函数 $f(x - 2)$ 化为 $f(t)$ 积分上下限要相应改变.

解 $\int_1^3 f(x - 2) dx \xrightarrow{x-2=t} \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt$
 $= \int_{-1}^0 (1 + t^2) dt + \int_0^1 e^{-t} dt = \frac{7}{3} - \frac{1}{e}.$

例 43* 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$ 且 $f(x) = x, x \in [0, \pi]$, 计算 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$.

分析 因 $f(x)$ 仅在区间 $[0, \pi]$ 上已知, 故要把 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$ 化为在 $[0, \pi]$ 上的积分.

解 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{3\pi} [f(x - \pi) + \sin x] dx = \int_{\pi}^{3\pi} f(x - \pi) dx - \cos x \Big|_{\pi}^{3\pi}$
 $= 0 + \int_{\pi}^{3\pi} f(x - \pi) dx \xrightarrow{x-\pi=t} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t) dt$
 $= \int_0^{\pi} t dt + \int_{\pi}^{2\pi} [f(t - \pi) + \sin t] dt = \frac{1}{2} \pi^2 - 2 + \int_{\pi}^{2\pi} f(t - \pi) dt$
 $\xrightarrow{t-\pi=u} \frac{1}{2} \pi^2 - 2 + \int_0^{\pi} f(u) du = \frac{1}{2} \pi^2 - 2 + \int_0^{\pi} u du = \pi^2 - 2.$

评述 给出函数解析式的区间与积分区间不完全相同或完全不同是近年考试试题中的常见题型.

例 44 (99 6 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x tf(2x - t) dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, 已知 $f(1) = 1$, 求 $\int_1^2 f(x) dx$ 的值.

分析 先换元把 $\int_0^x tf(2x - t) dt$ 中的 $f(2x - t)$ 化为 $f(u)$, 以便求 $\int_1^2 f(x) dx$ 的值.

解 $\int_0^x tf(2x - t) dt \xrightarrow{2x-t=u} \int_{2x}^x (2x - u) f(u) du = \int_x^{2x} (2x - u) f(u) du$

从而有 $2x \int_x^{2x} f(u) du - \int_x^{2x} uf(u) du = \frac{1}{2} \arctan x^2$

两边对 x 求导得

$$2 \int_x^{2x} f(u) du + 4xf(2x) - 2xf(x) - 4xf(2x) + xf(x) = \frac{x}{1 + x^4}$$

即

$$2 \int_x^{2x} f(u) du - xf(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

令 $x = 1$ 得

$$\int_1^2 f(x) dx = \frac{f(1)}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

即 $\int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{4}$

评述 求导时, 用到公式 $\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(u) du = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x)$, 每年的考研题中都要用到这个非常重要的公式.

例 45 (98 3 分) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt$.

(A) $xf(x^2)$ (B) $-xf(x^2)$ (C) $2xf(x^2)$ (D) $-2xf(x^2)$

分析 首先换元把被积函数化为单元函数, 以便对积分所确定的函数求导.

解
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt &= \frac{\frac{x^2 - t^2 = u}{-2t dt = du}}{-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 f(u) du} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = \frac{1}{2} f(x^2) \cdot 2x = xf(x^2) \end{aligned}$$

所以, 应选 (A).

评述 一般公式为

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt = f[x, \psi(x)]\psi'(x) - f[x, \varphi(x)]\varphi'(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, t) dt.$$

其中 $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 均为可微函数.

例 46 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$ 其中 $x > 0$, 求 $f(x) + f(\frac{1}{x})$.

分析 主要问题为如何化简 $f(\frac{1}{x})$, 得出 $f(x) + f(\frac{1}{x})$.

解
$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t} dt \xrightarrow{t = \frac{1}{u}} \int_1^x \frac{-\ln u}{(1+u)/u} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)} du \\ f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt + \int_1^x \frac{\ln t}{t(1+t)} dt = \int_1^x \left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t(1+t)} \right] \ln t dt = \int_1^x \frac{1}{t} \ln t dt \\ &= \int_1^x \ln t d \ln t = \frac{1}{2} \ln^2 t \Big|_1^x = \frac{1}{2} \ln^2 x. \end{aligned}$$

评述 定积分与积分变量写法无关, 故 $\int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)} du = \int_1^x \frac{\ln t}{t(1+t)} dt$

例 47 已知 $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = 0$ 及 $\int_0^2 f(x) dx = 1$, 求 $\int_0^1 x^2 f'(2x) dx$

分析 利用积分变量变换及分部积分公式 $\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx$ 化简 $\int_0^1 x^2 f'(2x) dx$.

解
$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f'(2x) dx &\xrightarrow{2x = t} \frac{1}{8} \int_0^2 t^2 f'(t) dt = \frac{1}{8} \left[t^2 f(t) \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 t f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[0 - 2 \int_0^2 t f(t) dt \right] = -\frac{1}{4} \left[t f(t) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(t) dt \right] = -\frac{1}{4} (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

评述 经常有用分部积分法来计算定积分或论证某个结论的试题.

例 48* 求 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$ 的最大值与最小值.

分析 $f(-x) = \int_0^{(-x)^2} (2-t)e^{-t} dt = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt = f(x)$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为偶函数, 只要求

$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值与最小值.

解 $f(x) = (2 - x^2)e^{-x^2} \cdot 2x \stackrel{\text{令}}{=} 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一驻点 $x = \sqrt{2}$, 当 $0 < x < \sqrt{2}$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增, 当 $x > \sqrt{2}$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 内单调减, 所以当 $x = \sqrt{2}$ 时 $f(x)$ 达到极大值, 这个极大值即最大值, 其最大值为

$$f(\sqrt{2}) = \int_0^2 (2 - t)e^{-t} dt = - (2 - t)e^{-t} \Big|_0^2 - \int_0^2 e^{-t} dt = 1 + e^{-2}.$$

又 $\int_0^+ (2 - t)e^{-t} dt = - (2 - t)e^{-t} \Big|_0^+ + e^{-t} \Big|_0^+ = 2 - 1 = 1$ 及 $f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 的最小值在 $x = 0$ 处达到, 最小值为 $f(0) = 0$.

评述 求变积分限的定积分所确定的函数的极值与最大值、最小值是常见的试题.

例 49 (00 6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$. 试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

分析 问题的实质为证方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, \pi)$ 内至少有两个实根, 由于给的条件是 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, 作辅助函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 内可导, $F(0) = 0$, $F(\pi) = 0$. 若能证得在 $(0, \pi)$ 内还存在一点 ξ 使 $F(\xi) = 0$, 则在 $[0, \xi]$ 及 $[\xi, \pi]$ 上可分别利用罗尔定理, 而 $F'(x) = f(x)$, 欲证的结果就得到了.

证明 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $F(0) = 0$, $F(\pi) = 0$, 今考察条件

$\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$, 利用分部积分公式, 视 $u = \cos x$, $v' = f(x)$, 于是

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi f(x) \cos x dx = \cos x F(x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x) \sin x dx \\ &= \cos \pi F(\pi) - \cos 0 \cdot F(0) + \int_0^\pi F(x) \sin x dx \quad (\because F(0) = 0, F(\pi) = 0) \\ &= \int_0^\pi F(x) \sin x dx = \pi F(\xi) \sin \xi = 0 \quad (\text{据积分中值定理}) \end{aligned}$$

其中 $0 < \xi < \pi$, 因 $\sin \xi \neq 0$, 必有 $F(\xi) = 0$, 于是在 $[0, \xi]$ 及 $[\xi, \pi]$ 上各利用罗尔定理, 便各至少存在一个 ξ_1, ξ_2 有 $F'(\xi_1) = 0$, $F'(\xi_2) = 0$.

亦即 $f(\xi_1) = 0$, $f(\xi_2) = 0$, 其中 $0 < \xi_1 < \xi < \xi_2 < \pi$.

评述 以上各例都用到了分部积分公式, 有关积分的试题中, 屡屡与分部积分有关, 这是考试的一大热点.

典型题型 6. 以下讨论积分不等式或等式.

例 50 设 $f(x), g(x)$ 及其平方在 $[a, b]$ 上可积, 求证

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$$

分析 这个不等式是下面不等式

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

的推广.

证明 考察

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx &= \int_a^b [f^2(x) + \lambda^2 g^2(x) - 2\lambda f(x)g(x)] dx \\ &= \int_a^b f^2(x) dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

而二次三项式 $a\lambda^2 - 2b\lambda + c \geq 0$ 的充分必要条件为 $b^2 - ac \leq 0$. 故有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$$

评述 这个不等式叫做 Cauchy 或叫 Schwarz 不等式, 是一个十分重要的不等式.

例 51 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续可导, $f(a) = 0$, 且 M 是 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 证明不等式

$$M^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$$

分析 由于 M 是 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 故要求证明对于 $[a, b]$ 内任一 x 均有 $|f(x)|^2 = f^2(x) \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$.

证明 已知 $f(a) = 0$, $f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x) dx$ 两边平方, 并利用 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\int_a^x f'(x) dx \right)^2 \leq \int_a^x dx \cdot \int_a^x f'^2(x) dx \\ &= (x-a) \int_a^x f'^2(x) dx \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx \end{aligned}$$

以上不等式对 $[a, b]$ 上任一 x 均成立, 在 $|f(x)|$ 达到最大值 M 的点处亦必成立, 因而有

$$M^2 \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx$$

评述 这个例题用到了数个知识点: (1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上亦必连续; (2) 闭区间上连续函数必达到最大值和最小值; (3) 牛顿—莱布尼茨公式; (4) Cauchy 不等式等.

例 52 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 连续, 且 $f(x) > 0$, 求证有不等式

$$\int_0^1 f^2(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} \geq 1$$

证明 因 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(x) > 0$, 故 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[0, 1]$ 上亦必连续, 积分 $\int_0^1 f^2(x) dx$, $\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)} dx$ 均必存在, 于是由 Cauchy 不等式有

$$1 = \left(\int_0^1 dx \right)^2 = \left(\int_0^1 f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)}$$

例 53* 证明 $\ln(1 + \sqrt{2}) < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} < 1$ 其中 $n > 2$

证明 当 $0 < x < 1$ 且 $n > 2$ 时, $x^2 > x^n$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} < 1$

两边积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} dx < \int_0^1 1 dx = 1$

于是 $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}) < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} < 1$.

例 54 设 n 为正整数且 $n \geq 2$, 求证有不等式

$$\frac{1}{2(n+1)} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \theta d\theta < \frac{1}{2(n-1)}$$

证明 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 时 $\rho < \tan \theta < 1$, 从而有

$$\tan^{n+2} \theta < \tan^n \theta < \tan^{n-2} \theta$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^{n+2} \theta d\theta < \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta < \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} \theta d\theta \quad (*)$$

但 $\int_0^{\pi/4} \tan^{n+2} \theta d\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\tan \theta - \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta$$

故由(*)有
$$\frac{1}{n+1} - \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta < \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta \text{ 即 } \frac{1}{2(n+1)} < \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta.$$

同理
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta &= \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} \theta \cdot (\sec^2 \theta - 1) d\theta \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} \theta \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} \theta d\theta = \frac{1}{n-1} - \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} \theta d\theta \end{aligned}$$

移项得
$$\frac{1}{n-1} - \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} \theta d\theta > \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta$$

,
$$\frac{1}{2(n-1)} > \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta$$

由此可见
$$\frac{1}{2(n+1)} < \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta < \frac{1}{2(n-1)} \quad \text{其中 } n \geq 2.$$

评述 例53证明中关键的一步是当 $0 < x < 1$ 且 $n > 2$ 时有 $x^2 > x^n$. 在本例中,关键的一步是当 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 时,由考察不等式 $\tan^{n+2} \theta < \tan^n \theta < \tan^{n-2} \theta$ 下手,以下的推导,都在常理之中,读者阅读时,要在这些三叉路口处多多注意. 本例另一证法如下:

令 $\tan \theta = t$, 记 $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta = \int_0^1 t^n \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{2t} dt = \int_0^1 \frac{1}{2} t^{n-1} dt = \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-2}$. 另一方面
$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta \stackrel{\tan \theta = t}{=} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt > \int_0^1 \frac{t^n}{2} dt = \frac{1}{2(n+1)}$$
 故有 $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$.

例55 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$ 其中 $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$

解 $|\sin t|$ 为以 π 为周期的周期函数,而

$$\int_0^\pi |\sin t| dt = \int_0^\pi \sin t dt = -\cos t \Big|_0^\pi = 2.$$

设 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$, 则

$$\int_0^x |\sin t| dt = \int_0^{n\pi} |\sin t| dt + \int_{n\pi}^x |\sin t| dt = 2n + \int_{n\pi}^x |\sin t| dt.$$

从而有

$$\begin{aligned} 2n &\leq \int_0^x |\sin t| dt \leq 2n + 2 \\ \frac{2n}{(n+1)\pi} &\leq \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} \leq \frac{2n+2}{n\pi} \end{aligned}$$

据夹逼定理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} = \frac{2}{\pi}$$

评述 找出 $\int_0^x |\sin t| dt$ 在任一基本周期区间 $[n\pi, (n+1)\pi]$ 上的上界与下界,是解答本题的关键.

例56 (05 B分) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的导数连续, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$, 证明: 对任何 $a \in [0, 1]$ 有

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1)$$

分析 不等式 $\int_0^a g(t)f'(t)dt + \int_0^1 f(t)g'(t)dt \geq f(a)g(1)$ 等价于不等式 $\int_0^a g(t)f'(t)dt + \int_0^1 f(t)g'(t)dt - f(a)g(1) \geq 0$, 然后作辅助函数
$$F(x) = \int_0^x g(t)f'(t)dt + \int_0^1 f(t)g'(t)dt - f(x)g(1) \quad x \in [0, 1]$$
 今证 $F(x)$

的图形在 x 轴上方即可.

证明 $F(x)$ 显然具有连续导数.

$$F'(x) = g(x)f(x) - f(x)g(1) = f(x)[g(x) - g(1)]$$

由于 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$, 因此 $F'(x) \leq 0$, 即 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减.

$$\begin{aligned} \text{考察 } F(1) &= \int_0^1 g(t)f(t)dt + \int_0^1 f(t)g'(t)dt - f(1)g(1) \\ &= g(1)f(1) - g(0)f(0) - \int_0^1 g'(t)f(t)dt + \int_0^1 f(t)g'(t)dt - f(1)g(1) \\ &= -g(0)f(0) = 0 \end{aligned}$$

因此 $x \in [0, 1]$ 时 $F(x) \geq 0$, 由此可得对任何 $a \in [0, 1]$ 有

$$\int_0^a g(x)f(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1)$$

评述 本例证明的基本思想是把一个证明不等式的问题, 转化为考察辅助函数的图形是否在 x 轴上方的问题, 不少不等式均类此证明之.

例 57 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导数, $f(0) = f(1) = 0$, 且 $f(x) \neq 0, x \in (0, 1)$,

求证 $\int_0^1 \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4$.

分析 因 $f(0) = 0, f(1) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 从而知 $\int_0^1 \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| dx$ 为反常(广义)积分. 若反常(广义)积分 $\int_0^1 \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| dx$ 发散, 题中的积分不等式显然成立, 今就设该积分收敛情况证之.

证明 因 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) \neq 0, x \in (0, 1)$, 今取 $|f(x_0)| = \max_{0 < x < 1} |f(x)|$, 由拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x_0) - f(0) = f'(\alpha)x_0 \quad 0 < \alpha < x_0 \\ f(x_0) &= f(x_0) - f(1) = f'(\beta)(x_0 - 1) \quad x_0 < \beta < 1 \\ \int_0^1 \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| dx &\geq \frac{1}{|f(x_0)|} \int_0^1 |f'(x)| dx \geq \int_\alpha^\beta |f'(x)| dx \cdot \frac{1}{|f(x_0)|} \\ \text{而 } \int_\alpha^\beta |f'(x)| dx &\geq \left| \int_\alpha^\beta f'(x) dx \right| = |f(\beta) - f(\alpha)| = \left| \frac{f(x_0)}{x_0 - 1} - \frac{f(x_0)}{x_0} \right| \\ &= |f(x_0)| \left| \frac{x_0 - (x_0 - 1)}{x_0(x_0 - 1)} \right| = \frac{|f(x_0)|}{x_0(1 - x_0)} \\ &\geq \frac{|f(x_0)|}{(1/2)^2} = 4|f(x_0)| \end{aligned}$$

代入上式, 便有

$$\int_0^1 \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| dx \geq \int_\alpha^\beta |f'(x)| dx \cdot \frac{1}{|f(x_0)|} \geq \frac{4|f(x_0)|}{|f(x_0)|} = 4.$$

评述 因设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续二阶导数, 故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上必连续. 又因在 $(0, 1)$ 上 $f(x) \neq 0$, 知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上必恒为正或恒为负. 闭区间上的连续函数必达到最大值、最小值, 当 $f(x)$ 恒为正时取 $|f(x_0)| = f(x_0) = \max_{0 < x < 1} |f(x)| = \max_{0 < x < 1} f(x)$, 当 $f(x)$ 恒为负时, 取 $|f(x_0)| = \max_{0 < x < 1} |f(x)| = \max_{0 < x < 1} (-f(x)) = -\min_{0 < x < 1} f(x) = -f(x_0)$, 不论哪种情况 $|f(x_0)|$ 均大于零. x_0 必为 $(0, 1)$ 的内点, 又 x_0 与 $1 - x_0$ 二数之和为 1, 和为 1 的二数之积以 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 为最大.

典型题型 7. 以下讨论反常(广义)积分.

例 58* 试判别下列反常(广义)积分的敛散性

$$(1) \int_e^+ \frac{\ln x}{x} dx \quad (2) \int_e^+ \frac{1}{x \ln x} dx \quad (3) \int_e^+ \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$(4) \int_e^+ \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx \quad (5) \int_0^+ e^{-x^2} dx$$

$$\text{解} \quad (1) \int_e^+ \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \ln x d \ln x = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_e^b = +$$

故该反常(广义)积分发散.

$$(2) \int_e^+ \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \ln x \Big|_e^b = + \quad \text{故该积分发散.}$$

$$(3) \int_e^+ \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{d \ln x}{(\ln x)^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_e^b = 0 + 1 = 1 \quad \text{故该积分收敛.}$$

$$(4) \int_e^+ \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{d \ln x}{\sqrt{\ln x}} = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln x} \Big|_e^b = + \quad \text{故该积分发散.}$$

$$(5) \int_0^+ e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^+ e^{-x^2} dx$$

其中 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 是一个正常积分, e^{-x^2} 在 $[0, 1]$ 上连续, $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 存在. 在 $[1, +\infty)$ 上 $0 < \frac{1}{e^{x^2}} < \frac{1}{x^2}$, 则 $\int_1^+ \frac{1}{x^2} dx$ 收敛, 故 $\int_1^+ e^{-x^2} dx$ 收敛, 从而知 $\int_0^+ e^{-x^2} dx$ 收敛.

评述 (1) - (4) 诸小题, 直接根据反常(广义)积分的收敛定义判断, (5) 题是据比较判定法判断. 这两种判断法都是常用的基本方法, 也可用极限形式的比较判定法判断出(5)题的收敛性. 因

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x^2} 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

$$\text{例 59} \quad \text{求} \int_1^+ \frac{dx}{e^{1+x} + e^{3-x}}.$$

分析 根据定义求之.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{e^{1+x} + e^{3-x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{e^{x-3}}{e^{2(x-1)} + 1} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{e^{-2}}{(e^{x-1})^2 + 1} dx = e^{-2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{de^{x-1}}{(e^{x-1})^2 + 1} \\ &= e^{-2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan e^{x-1} \Big|_1^b \\ &= e^{-2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} e^{-2}. \end{aligned}$$

评述 解本例关键的一步是把被积函数的分子分母同乘以 e^{x-3} , 然后再利用凑微分法, 化为可用 $\int \frac{du}{u^2 + a^2}$ 的积分公式, 以上既判定 $\int_1^+ \frac{dx}{e^{1+x} + e^{3-x}}$ 收敛, 同时又求得其值.

$$\text{例 60} \quad \text{求} \int_0^+ \frac{x}{(1+x)^3} dx.$$

分析 因 $\frac{x}{(1+x)^3} < \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ 而 $\int_a^+ \frac{1}{x^2} dx (a > 0)$ 收敛, 由比较判定法知

$$\int_0^+ \frac{x}{(1+x)^3} dx = \int_0^a \frac{x}{(1+x)^3} dx + \int_a^+ \frac{x}{(1+x)^3} dx (a > 0) \text{ 收敛.}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^+ \frac{x}{(1+x)^3} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x}{(1+x)^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x+1-1}{(x+1)^3} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right] dx. \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right] \Big|_0^b = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

评述 把 $\frac{x}{(1+x)^3}$ 化为部分分式的和,按通常的办法是写 $\frac{x}{(1+x)^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{(1+x)^3}$,两边乘以 $(1+x)^3$ 得

$$x = A(1+x)^2 + B(1+x) + C$$

然后令 $x=0$ 、 $x=-1$ 、 $x=1$ 得关于 A 、 B 、 C 的方程组 求得 $A=0$ 、 $B=1$ 、 $C=-1$ 对本例来说,这样求 A 、 B 、 C 太繁了,解答中采取了较简便的方法,望读者注意及之.

例 61 求 $\int_3^+ \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}}$.

分析 首先设法化简被积函数,把根号下的二次式配方,换元去根号.

解 原式 $= \int_3^+ \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{(x-1)^2-1}} \xrightarrow{x-1=\sec\theta} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec\theta \tan\theta d\theta}{\sec^4\theta \tan\theta}$
 $= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^3\theta d\theta = \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1-\sin^2\theta) d\sin\theta = \frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}.$

评述 本例原是反常(广义)积分,但通过换元后变为通常的定积分.

例 62* 判定下列反常(广义)积分的敛散性

(1) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ (2) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ (3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$

(4) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (5) $\int_0^1 \ln x dx$

分析 被积函数都具有无穷间断点.

解 (1) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^3 (x-1)^{-\frac{1}{2}} d(x-1)$
 $= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{x-1} \Big|_{1+\varepsilon}^3 = 2\sqrt{2}.$

该反常(广义)积分收敛,其值为 $2\sqrt{2}$.

(2) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon_2}^2 \frac{dx}{x}$

这两个极限都不存在,故 $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ 发散.

(3) 因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} \right) / \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ 而 $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ 发散,据极限形式的比较判定法,知反常(广义)积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ 发散.

(4) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 $= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{-1+\varepsilon_1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
 $= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon_1}^0 + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon_2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

这两个极限都存在,故 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

(5) $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon_1}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \left[x \ln x \Big|_{\varepsilon_1}^1 - \int_{\varepsilon_1}^1 dx \right]$
 $= 1 \ln 1 - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \varepsilon_1 \ln \varepsilon_1 - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} (1 - \varepsilon_1) = 0 - 0 - 1 + 0 = -1$

其中 $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \varepsilon_1 \ln \varepsilon_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_1}{t} \ln t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t} \right) = 0.$

可见 $\int_0^1 \ln x dx$ 为收敛的反常(广义)积分, 其值为 -1 .

评述 以上(1)(2)(4)(5)等四小题都是直接据反常(广义)积分敛散性的定义判定它们各自的敛散性, 若不注意它们是反常(广义)积分, 按正常积分去处理就可能出现错误, 如例(2).

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

以上的计算为什么是错误呢? 因在 $x=0$ 处 $\ln|x|$ 的导数不存在, 不能利用牛顿—莱布尼茨公式计算 $\int_{-1}^2$

$\frac{dx}{x}$. 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$, $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ 是反常(广义)积分, 必须按反常(广义)积分来处理它. 今后遇见 $\int_a^b f(x)dx$ 时, 首先注意它是正常积分还是反常(广义)积分, 这一点十分重要.

例 63 (98 6 分) 求 $\int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$

分析 被积函数 $\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}$ 在 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ 内点 $x=1$ 处有无穷间断点, 故该积分为反常(广义)积分.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} &= \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} + \int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{1/2}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon_2}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{1/2}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon_2}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{-(x-x^2)}} \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{1/2}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon_2}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \arcsin \frac{x - 1/2}{1/2} \Big|_{1/2}^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \ln \left| \left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right| \Big|_{1+\varepsilon_2}^{3/2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \ln \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

评述 不能写

$$\int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} + \int_{1+\varepsilon}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} \right].$$

在上述解答中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是互相独立的.

例 64 (00 3 分) 求 $\int_2^+ \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$

分析 这个积分一方面是积分区间为 $[2, +\infty)$ 的反常(广义)积分, 另一方面又是被积函数具有无穷间断点的反常(广义)积分.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_2^+ \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} &\stackrel{\sqrt{x-2}=t}{=} \int_0^+ \frac{2dt}{t^2+9} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{2dt}{t^2+9} \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \arctan \frac{t}{3} \Big|_0^b = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

例 65* 判断反常(广义)积分 $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ 的敛散性.

分析 当 $x \rightarrow 1-0$ 时, $\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} \rightarrow \infty$, 它是反常(广义)积分.

解 现用极限形式的比较判定法判断之, 与 $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ 比较得

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left[\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} / \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{\cos 1}{\sqrt[3]{2}}$$

因 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ 收敛, 从而知 $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ 收敛.

例 66 判断 $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^x-1}$ 的敛散性.

分析 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$ (等价无穷小因子代换) $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +$

故 $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^x-1} dx$ 是反常(广义)积分.

解 利用极限形式的比较判定法判断之, 与 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 比较得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^x-1} / \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \ln(1+\sqrt{x})}{e^x-1} \quad (\text{等价无穷小因子代换}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \sqrt{x}}{x} = 1$$

而 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 收敛, 故 $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^x-1} dx$ 收敛.

评述 由以上例题可见, 用极限形式比较判定法判断反常(广义)积分的敛散性十分有效.

典型题型 8. 以下研究由变限积分所确定的函数的性质.

例 67 (06 4 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

分析 本题意义为确定 a 的值使得 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a = f(0)$.

$$\text{解 } \frac{1}{3}. \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

故应取 $a = \frac{1}{3}$.

评述 本题利用了连续函数定义, 洛必达法则, 微积分学第一基本定理等重要的知识点, 这是常考的题型.

例 68 (97 6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 单调不减且 $f(0) \geq 0$, 试证函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x t^n f(t) dt, & \text{若 } x > 0 \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调不减(其中 $n > 0$).

分析 因已知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $n > 0$, 故 $\int_0^x t^n f(t) dt$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 从而知当 $x > 0$ 时 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 但还要证 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 并证 $F'(x) \geq 0$ (当 $x \in (0, +\infty)$ 时).

证明 当 $x > 0$ 时, $F(x)$ 连续, 又由洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t^n f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n f(x) = 0 = F(0)$$

故 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

又当 $x > 0$ 时, 求 $F(x)$ 的导数, 并利用积分中值定理, 则有

$$F'(x) = \frac{x^{n+1} f(x) - \int_0^x t^n f(t) dt}{x^2} = \frac{x^{n+1} f(x) - \zeta^n f(\zeta) x}{x^2} = \frac{x^n f(x) - \zeta^n f(\zeta)}{x}$$

其中 $0 < \zeta < x$, 由于 $x^n f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调不减的, 所以 $F'(x) \geq 0$, 故 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调不减.

评述 由于 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 故由 $F'(x) \geq 0, x \in (0, +\infty)$, 便有 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的单调不减性.

例 69 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 则方程 $\int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt = 0$ 在开区间 (a, b) 内的根有

- (A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 无穷多个

分析 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 故 $1/f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$ 与 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上均可导, 亦即 $\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$ 与 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上都是连续函数.

解 记 $F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$

$$F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)}dt = - \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt < 0, F(b) = \int_a^b f(t)dt > 0$$

由闭区间上连续函数的介值定理, 知在 (a, b) 内至少存在一个 ξ 使 $F(\xi) = 0$.

另一方面 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$, 故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 为单调增加函数, 故 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内至多有一个根.

综上所述知方程 $\int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt = 0$ 在开区间 (a, b) 内的根有且仅有一个, 应选(B).

评述 判断方程在某个区间内实根的个数, 是常见的考题.

例 70* 求由积分 $\int_0^1 t|t-x|dt$ 所确定的函数的表达式.

分析 记 $S(x) = \int_0^1 t|t-x|dt$. 为了去掉被积函数中的绝对值, 考虑分别就 $x < 0, 0 \leq x \leq 1, x > 1$ 等三种不同情况积分之.

解 当 $- \infty < x < 0$ 时, 而 $0 \leq t \leq 1$, $t-x > 0, |t-x| = t-x$

$$\int_0^1 t|t-x|dt = \int_0^1 t(t-x)dt = \int_0^1 (t^2 - tx)dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x.$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^1 t|t-x|dt &= \int_0^x t|t-x|dt + \int_x^1 t|t-x|dt = \int_0^x t(x-t)dt + \int_x^1 t(t-x)dt \\ &= \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{1-x^3}{3} - \frac{1-x^2}{2} \cdot x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

当 $x > 1$ 时, 而 $0 \leq t \leq 1$, $t-x < 0, |t-x| = x-t$

$$\int_0^1 t|t-x|dt = \int_0^1 t(x-t)dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$$

从而得由积分 $\int_0^1 t|t-x|dt$ 所确定的函数的表达式为

$$S(x) = \int_0^1 t|t-x|dt = \begin{cases} \frac{1}{3} - x/2, & x < 0 \\ x^3/3 - x/2 + 1/3, & 0 \leq x \leq 1 \\ x/2 - 1/3, & x > 1 \end{cases}$$

评述 本例是一个很典型的题, 上述具体计算, 望读者务必掌握.

例 71 设函数 $f(x)$ 连续, $f(x) > 0$, 证明当 $x > 0$ 时, 函数

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt - \int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

单调增加

分析 只要证明 $F'(x) \geq 0$ 即可

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad F'(x) &= \left[\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} - 1 \right]' = \frac{\int_0^x f(t)dt \cdot xf(x) - \int_0^x tf(t)dt \cdot f(x)}{\left[\int_0^x f(t)dt \right]^2} \\ &= \frac{f(x) \left[x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \right]}{\left(\int_0^x f(t)dt \right)^2} = \frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt \right)^2} \int_0^x (x-t)f(t)dt \end{aligned}$$

已知 $f(x) > 0, x > 0$, 因而 $\int_0^x (x-t)f(t)dt$ 中的被积函数 $(x-t)f(t) \geq 0, \int_0^x (x-t)f(t)dt > 0$, 可见 $F'(x) > 0$, $F(x)$ 于 $(0, +\infty)$ 上单调增加.

评述 若要证明 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 则首先要定义 $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+}$

$$\frac{\int_0^x tf(t)dt - \int_0^x f(t)dt \cdot \frac{0}{0}}{\int_0^x f(t)dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - f(x)}{f(x)} = -1, \text{因而 } F(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上有定义且单调增加.}$$

典型题型 9. 以下讨论定积分在一些几何问题上的应用.

例 72 求曲线 $y = -x^3 + x^2 + 2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

分析 首先要了解曲线的哪些部分在 x 轴上方, 哪些部分在 x 轴下方, 为此分解因式 $y = -x(x^2 - x - 2) = -x(x-2)(x+1)$, 曲线与 x 轴相交于 $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$ 三点处, 当 $-1 < x < 0$ 时 $y < 0$, 当 $0 < x < 2$ 时 $y > 0$, 仅在 $-1 \leq x \leq 2$ 上该曲线与 x 轴围成平面图形, 现求这图形的面积.

解 所求的面积

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 |y| dx = \int_{-1}^0 |-x^3 + x^2 + 2x| dx + \int_0^2 |-x^3 + x^2 + 2x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2 \\ &= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) + \left(-\frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

评述 不论 y 为正为负, 但平面图形的面积总为一正数.

例 73 求由曲线 $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面图形的面积.

分析 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\cos x > \sin x > 0$, 当 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $0 < \cos x < \sin x$.

解 所求图形的面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \sin x| dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-\cos x + \sin x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} + (-\sin x - \cos x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

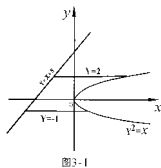
评述 做这类题, 要先画一个草图, 然后再写积分式子.

例 74* 求由曲线 $y^2 = x, y = -1, y = 2, y = x + 5$ 所围成的平面图形的面积.

分析 首先作图 (如图3-1) 这个题如取 x 为积分变量, 计算起来较繁, 若取 y 为积分变量, 计算起来就简单多了.

解 所求面积为

$$A = \int_{-1}^2 [y^2 - (y - 5)] dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 5y \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{33}{2}$$



评述 若取 y 为积分变量, 则被积函数为右边曲线的横坐标减去左边曲线的横坐标. 若取 x 为积分变量, 则本例的积分为

$$A = \int_{-6}^{-3} [x + 5 - (-1)] dx + \int_{-3}^0 [2 - (-1)] dx + \int_0^4 (2 - \sqrt{x}) dx + \int_0^1 [-\sqrt{x} - (-1)] dx$$

例 75 求过曲线 $y = -x^2 + 1$ 上的一点, 使过该点的切线与这条曲线及 x, y 轴在第一象限围成图形的面积最小, 最小面积是多少?

分析 先求出切线的 x 轴上的截矩 a 与 y 轴上的截矩 b , 所求面积即为 $\frac{1}{2}ab$ 减去抛物线以下在第一象限中部分的面积.

解 设所求之点为 (x_1, y_1) , 于是 $y'|_{x=x_1} = -2x_1$, 过 (x_1, y_1) 的切线方程为

$$y - y_1 = -2x_1(x - x_1)$$

令 $x = 0$ 得切线的 y 轴截矩为 $b = x_1^2 + 1$.

令 $y = 0$ 得切线的 x 轴截矩为 $a = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2x_1}$ 于是所求的面积为

$$S(x_1) = \frac{1}{2}a \cdot b - \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = \frac{1}{4} \left(x_1^3 + 2x_1 + \frac{1}{x_1} \right) - \frac{2}{3}$$

$$S'(x_1) = \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4x_1^2} = \frac{1}{4} \left(3x_1 - \frac{1}{x_1} \right) \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right) \stackrel{\text{令}}{=} 0$$

得唯一驻点 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 又 $S''(x_1) = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2x_1^3} \Big|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}} > 0$. $S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{9}(2\sqrt{3} - 3)$ 为极小值, 可微函数 $S(x_1)$ 在

$(0, +\infty)$ 上只有一个驻点, 且在 $(0, +\infty)$ 内存在 S 的最小值, 故这个极小值就是最小值, 最小值为 $\frac{4}{9}\sqrt{3} - \frac{2}{3}$,

所求切点为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$.

评述 把定积分应用与微分学应用(极大、极小、最大、最小) 结合在一起的试题, 在考研试题中是十分常见的.

例 76 (06, 12 分) 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \quad (t \geq 0)$

(I) 讨论 L 的凹凸性

(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) 并写出切线的方程

(III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积

分析 题目较长, 小题较多, 这时一定要按小题的给定先后次序依次求解, 因为后一小题常常要用到前面小题的结果, 为讨论 L 的凹凸性, 必须先求 $\frac{d^2y}{dx^2}$, 并确定 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的正负号.

解 (I) 由于 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \quad (t \geq 0)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{(4 - 2t)dt}{2tdt} = \frac{2 - t}{t} = \frac{2}{t} - 1$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{-\frac{2}{t^2}dt}{2tdt} = -\frac{1}{t^3}$$

当 $t \geq 0$ 时, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. 故 L 上凸(即向下凹).

(II) 当 $t = 0$ 时, L 上的点的坐标为 $(1, \rho)$, 曲线 L 在点 $(1, \rho)$ 处的切线方程为 $x = 1$ ($\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = \infty$). 曲线 L 上凸, 切线与 L 及 x 轴围不成一有界平面区域, 故不合题意. 因此以下仅就 $t > 0$ 考察. 设所求切线的切点坐标为 (x_0, y_0) , 对应于 $t = t_0$, 则过点 $(-1, \rho)$ 的切线方程为

$$0 - y_0 = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} (-1 - x_0)$$

即
$$0 - 4t_0 + t_0^2 = \left(\frac{2}{t_0} - 1\right)(-1 - t_0^2 - 1)$$

化简即得
$$t_0^2 + t_0 - 2 = 0 \quad \text{即} \quad t_0 = 1, t_0 = -2 \text{ (舍去)}$$

于是切点坐标为 $(2, 3)$, 切点处 L 的斜率为 1, 故所求切线方程为

$$y - 3 = 1 \cdot (x - 2) \quad \text{即} \quad y - x = 1$$

(III) 所求平面图形的面积为 (对应于 $x \leq x_0 = 2$, 即 $t \leq 1$ 的部分)

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_1^2 y dx = \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) 2tdt \\ &= \frac{9}{2} - 2 \int_0^1 (4t^2 - t^3) dt = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

评述 点 $(-1, \rho)$ 是切线上的点, 但不是 L 上的切点. 切点是 $(2, 3)$. 曲线 L 为用参数方程表示, 它的直角坐标方程为 $y = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$, 是一段抛物线, 其弧口向下与 x 轴交于 $x = 1, x = 17$ 两点. 本题为求参数方程表示的曲线的凹凸性, 切线方程和平面图形的面积, 综合性较强, 是一个很有特点的新型试题.

例 77 考虑函数 $y = \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$, 问

(1) t 取何值时, (图 3-2) 中阴影部分的面积 S_1 和 S_2 之和 $S = S_1 + S_2$ 最小?

(2) t 取何值时, 面积 $S = S_1 + S_2$ 最大?

解

$$\begin{aligned} S_1 &= t \sin t - \int_0^t \sin x dx = t \sin t + \cos t - 1 \\ S_2 &= \int_t^{\pi/2} \sin x dx - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin t = \cos t - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin t \\ S &= S_1 + S_2 = 2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \sin t + 2 \cos t - 1 \end{aligned}$$

令 $S' = 2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cos t = 0$, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内得唯一驻点 $t = \frac{\pi}{4}$, $S''(t) = 2 \cos t -$

$2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \sin t$, $S''(\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0$, 故 $S(t)$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处达到极小值. 此

极小值即最小值, 其值为 $S(\frac{\pi}{4}) = 2 \cos \frac{\pi}{4} - 1 = \sqrt{2} - 1$. 又因在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内无极

大值, 最大值必在边界上达到. 比较区间端点上的函数值 $S(0) = 1$, $S(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$, 知 $S(t)$ 于 $t = 0$ 处达到最大值, 最大值为 1.

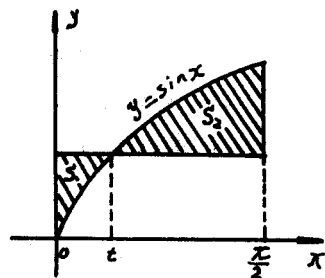


图 3-2

评述 又是一个求面积与求最大值最小值结合在一起的综合题, 下一例仍是这种类型的题, 望读者充分重视.

例 78 (98.9 分) 设直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围图形的面积为 S_1 , 它们与直线 $x = 1$ 所围成的图形面积为 S_2 , 并且 $a < 1$.

(1) 试确定 a 的值, 使 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解 (1) 当 $0 < a < 1$ 时, (如图 3-3) 直线与抛物线相交于 $x = a$ 处

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \int_0^a (ax - x^2) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx \\ &= \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^a + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right) \Big|_a^1 = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

令 $S' = a^2 - \frac{1}{2} = 0$ 得 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (唯一驻点).

又 $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} > 0$ 则 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 是极小值, 即最小值, 其值为

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}$$

当 $a \leq 0$ 时 (如图 3-4)

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^0 (ax - x^2) dx + \int_0^1 (x^2 - ax) dx = -\frac{a^3}{6} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$$

$$S' = -\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(a^2 + 1) < 0$$

$S \downarrow$ 故 $a = 0$ 时 S 取得最小值, 此时 $S = \frac{1}{3}$.

综上所述, 当 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 为所求最小值, 最小值为 $\frac{2 - \sqrt{2}}{6}$.

(2) 该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}x^2 - x^4\right) dx + \pi \int_{1/\sqrt{2}}^1 \left(x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} + \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^3\right) \Big|_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{\sqrt{2} + 1}{30} \pi \end{aligned}$$

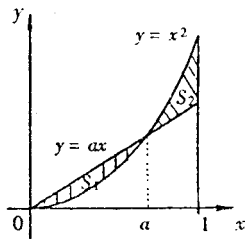


图 3-3

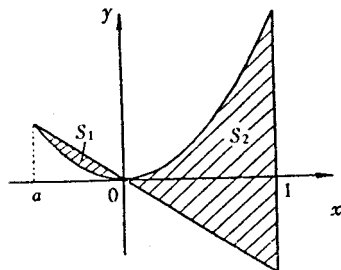


图 3-4

评述 这是一个综合性较强的题, 要研究 a 不同的情况, 画出不同的图形, 计算不同的积分, 还要求面积的最小值和旋转体体积, 在一题中考查了多个知识点, 近年的不少考研题每具有这一特点.

例 79 求双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为

(A) $2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$

(B) $4 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$

(C) $2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\theta} d\theta$

(D) $\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\cos 2\theta)^2 d\theta$

分析 若曲线方程用极坐标表示为 $r = r(\theta)$, 则由 $r = r(\theta)$ $\theta = \alpha$ $\theta = \beta$ ($\alpha < \beta$) 所围成的平面区域 $0 \leq r \leq r(\theta)$ $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 的面积为 $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$.

解 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 的极坐标方程为 $r^4 = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$, 即 $r^2 = \cos 2\theta$, 当 $r = 0$ 时 $2\theta = \frac{\pi}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{4}$, 第一象限中双纽线与 ox 轴所围成的区域面积为 $\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$, 整条双纽线所围成的区域面积为 $4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta d\theta$, 应选 (A).

评述 近年考研题中经常出现求极坐标表示的曲线的切线方程, 弧长及其所围成的面积等等.

例 80* 求在圆 $r = 3\sin \theta$ 之内, 心脏线 $r = 1 + \sin \theta$ 之外的区域的面积 (见图 3-5).

分析 圆 $r = 3\sin \theta$, 即 $r^2 = 3r\sin \theta$ $x^2 + y^2 = 3y$, 也就是说, 所给的圆的直角坐标方程为 $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$, 先求圆与心脏线的交点处 θ 的值,

由 $3\sin \theta = 1 + \sin \theta$, 得 $\sin \theta = \frac{1}{2}$, 从而知 $\theta = \frac{\pi}{6}$ $\theta = \frac{5\pi}{6}$, 所求面积为当 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$ 时圆内部分减去其相应的心脏线内部分, 由于图形对称于射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 在以下的计算的第二个等号中, 利用了对称性.

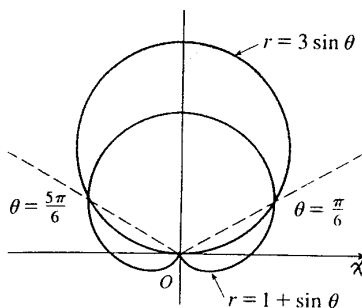


图 3-5

解 所求区域的面积为

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3\sin\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \sin\theta)^2 d\theta \\
 &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} 9\sin^2\theta d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta) d\theta \\
 &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} 8\sin^2\theta d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2\sin\theta) d\theta \\
 &= 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2\sin\theta) d\theta \\
 &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4\cos 2\theta - 2\sin\theta) d\theta = (3\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos\theta) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

评述 圆与心脏线都是经常见到的曲线,由圆与心脏线的极坐标方程要能画出相应的图形.

例 81* 证明椭圆 $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ 的弧长等于正弦曲线 $y = \sqrt{a^2 - b^2} \sin \frac{x}{b}$ 的一波之长.

证明 椭圆的全长为

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt \\
 &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt \\
 &\quad t = \frac{\pi}{2} - \theta \\
 &\quad \underline{\underline{=}} -4a \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad \text{其中 } \varepsilon^2 = (a^2 - b^2)/a^2
 \end{aligned}$$

正弦曲线 $y = \sqrt{a^2 - b^2} \sin \frac{x}{b}$ 的一波是指 $0 \leq \frac{x}{b} \leq 2\pi$ 间的一段弧线,其长为

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2b\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_0^{2b\pi} \sqrt{1 + (a^2 - b^2) \cos^2 \frac{x}{b} \cdot \frac{1}{b^2}} dx \\
 &\quad \underline{\underline{=}} \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta.
 \end{aligned}$$

可见,二者之长相等.

评述 用来表示椭圆周长的积分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta$ 叫做第二类椭圆积分, $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta}$ 的原函数不能用一个初等函数表示出来,把 $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta}$ 展为级数再逐项积分可求得该椭圆积分的近似值,或直接查第二类椭圆积分数值表.

例 82* 求曲线 $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ 的弧长.

分析 当 θ 由 0 增加至 3π 时, $\frac{\theta}{3}$ 由 0 增加至 π , $\sin \frac{\theta}{3}$ 的值由 0 增加到 1 再减少到 0, $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ 描成一封闭曲线. 当 $\theta > 3\pi$ 时 r 为负数了,故求封闭曲线 $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ 的弧长

时只需在区间 $[0, 3\pi]$ 上计算之(参见图 3-6)

解 所求的弧长为

$$S = \int_0^{3\pi} \sqrt{r'^2 + r^2} d\theta = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\theta}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3}} d\theta$$

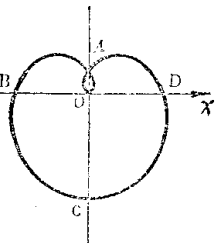


图 3-6

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta \xrightarrow{\theta=3t} 3 \int_0^{\pi} a \sin^2 t dt \\
 &= 6 \int_0^{\pi/2} a \sin^2 t dt = 6a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi a.
 \end{aligned}$$

评述 本例关键的一步是考察清楚 θ 的取值范围,即积分区间.

例 83 求心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的全长,其中 $a > 0$ 是常数.

分析 由于心脏线对称于极轴,只计算对应于 $0 \leq \theta \leq \pi$ 的上半部分心脏线的弧长再二倍之.

解 心脏线的全长为

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi} a \sqrt{2 + 2\cos\theta} d\theta = 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}} d\theta \\
 &= 2a \cdot 2^2 \int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2} = 8a
 \end{aligned}$$

评述 有关心脏线所围区域的面积及心脏线的周长是必须能熟练计算出其数值的内容.

例 84 求摆线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ 一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的弧长.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + (1 - \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4 \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8
 \end{aligned}$$

例 85* 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定,求图形 A 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积 (参见图 3-7)

分析 圆的方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 阴影部分圆弧的方程为 $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$, 该圆弧上的各点到直线 $x = 2$ 的距离为 $2 - (1 - \sqrt{1-y^2})$, 直线 $y = x$ 上各点到直线 $x = 2$ 的距离为 $2 - x = 2 - y$.

解 所求旋转体体积为

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 \{ \pi [2 - (1 - \sqrt{1-y^2})]^2 - \pi (2-y)^2 \} dy \\
 &= \int_0^1 2\pi [\sqrt{1-y^2} - (1-y)^2] dy \\
 &= 2\pi \left[\frac{y}{2} \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \arcsin y + \frac{(1-y)^2}{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2}{3} \pi.
 \end{aligned}$$

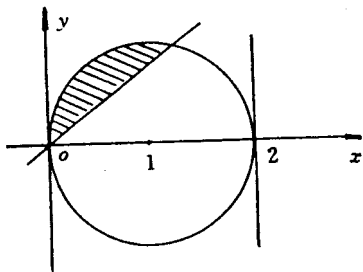


图 3-7

评述 不少人会把本题错成如下形式

$$V = \int_0^1 \pi [2 - (1 - \sqrt{1-y^2}) - (2-y)]^2 dy$$

后者为一实心的很小的旋转体体积,前者为一空心的旋转体体积,如用柱壳法计算本题将是

$$V = 2\pi \int_0^1 (2-x)(\sqrt{1-(x-1)^2} - x) dx$$

例 86 已知点 A 与 B 的直角坐标分别为 $(1, 0, 0)$ 与 $(0, 1, 1)$, 线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S, 求由 S 及两平面 $z = 0, z = 1$ 所围成的立体体积.

分析 线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转体是什么样子,直观上不易想像得出,但线段是由点构成,线段上每一点绕 oz 轴旋转一周为一圆,这个圆面积不难计算出来,所求旋转体体积可以看作是由这些圆面“薄片”沿子轴“累积”而成.

解 直线 AB 的方程为 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ 即 $\begin{cases} x = 1 - z \\ y = z \end{cases}$, 在 z 轴上截矩为 z 的水平面截此旋转体所得截面为

一个圆,此截面与 z 轴关于点 $Q(0, \rho, z)$ 与 AB 交于点 $M_1(1-z, z, z)$, 故圆截面半径 $r(z) = \sqrt{(1-z)^2 + z^2} = \sqrt{1-2z+2z^2}$, 从而

$$\text{截面面积为} \quad S(z) = \pi r^2(z) = \pi(1-2z+2z^2)$$

$$\text{旋转体体积为} \quad V = \pi \int_0^1 (1-2z+2z^2) dz = \frac{2}{3}\pi$$

评述 这个题的解题思路颇有特点,不少不能直接代入旋转体体积公式计算的题,可参考这个思路求之. 本例的旋转曲面为单叶双曲面.

例 87 (02, 7 分) 设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a$, $x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域, D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0$, $x = a$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$. (见图 3-8)

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 , D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2 ;

(2) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 试求此最大值.

分析 求 V_1 用横截面法公式 $\pi \int_a^2 f^2(x) dx$, 求 V_2 用柱壳法公式 $2\pi \int_0^a xf(x) dx$.

$$\text{解} \quad (1) \quad V_1 = \pi \int_a^2 (2x^2)^2 dx = 4\pi \int_a^2 x^4 dx = \frac{4}{5}\pi(32 - a^5)$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^a x \cdot 2x^2 dx = 4\pi \int_0^a x^3 dx = \pi a^4$$

$$(2) \quad \text{设 } V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5) + \pi a^4$$

由 $V = 4\pi a^3 - 4\pi a^4 = 4\pi a^3(1 - a) \stackrel{\text{令}}{=} 0$ 得区间 $(0, 2)$ 内的唯一驻点 $a = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时 $V' > 0$, 当 $a > 1$ 时 $V' < 0$, 因此 $a = 1$ 是极大值点即最大值点.

此时 $V_1 + V_2$ 取得最大值等于 $\frac{129}{5}\pi$.

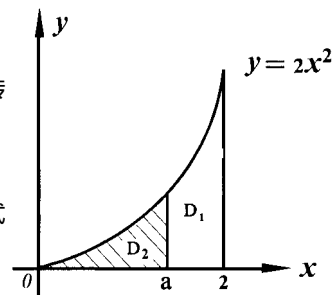


图 3-8

评述 这是一个十分典型的考研题,综合性较强,仅考查一些基本方法,紧扣基本内容,求旋转体的体积是考研的一个热点.

例 88 求由直线 $y = 1 - |x|$ 与曲线 $y = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x$ 所围成的区域绕 y 轴旋转所得的旋转体体积.

分析 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 恒有 $1 - |x| \geq \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x \geq 0$. 并注意所围成的区域对称于 y 轴, 故只要求第一象限中平面区域绕 y 轴旋转所得旋转体体积即可.

解 所求旋转体体积为

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^1 x(1 - |x| - \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x) dx = 2\pi \int_0^1 x(1 - x - \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 4 \int_0^1 x \cos \frac{\pi}{2}x dx = \frac{\pi}{3} - 4 \left[\frac{2}{\pi} x \sin \frac{\pi}{2}x \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2}x dx \right] \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi^2}. \end{aligned}$$

评述 求旋转体体积的柱壳法与横截面法同样重要.

例 89 求平面区域 $0 \leq \alpha \leq \theta \leq \beta \leq \pi$, $\rho \leq r \leq r(\theta)$ (r 和 θ 为极坐标) 绕极轴旋转一周所成的旋转体体积.

解 极坐标系中平面面积微元为 $dA = r dr d\theta$, dA 绕极轴旋转一周所得旋转体体积为

$$2\pi y dA = 2\pi r \sin \theta r dr d\theta = 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta$$

小扇形 $[\theta, \theta + d\theta]$ 绕极轴旋转一周的旋转体体积为

$$\left(\int_0^{r(\theta)} 2\pi r^2 \sin\theta dr \right) d\theta = \frac{2}{3} \pi r^3(\theta) \sin\theta d\theta.$$

所求的体积为

$$V_x = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin\theta d\theta.$$

评述 平面区域 $0 \leq \alpha \leq \theta \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho \leq r \leq r(\theta)$ 绕直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 旋转一周所成的旋转体体积为 $V_y = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \cos\theta d\theta$.

例 90* 求双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 所围成的平面区域绕直线 $y = x$ 旋转一周所成的旋转体体积.

分析 双纽线的极坐标方程为 $r^4 = r^2 a^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$, 即 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $r = a \sqrt{\cos 2\theta}$, 右半平面中双纽线上任一点 (r, θ) 到直线 $y = x$ 的距离为 $r \sin(\frac{\pi}{4} - \theta)$.

解 由对称性, 知双纽线所围成的平面区域绕直线 $y = x$ 旋转一周所成的旋转体体积为

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \frac{2}{3} \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^3 \sin(\frac{\pi}{4} - \theta) d\theta = \frac{4}{3} \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^3 \sqrt{\cos^3 2\theta} \sin(\frac{\pi}{4} - \theta) d\theta \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos^3 2\theta} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \right] d\theta \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos^3 2\theta} \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

令作变换 $\sqrt{2} \sin\theta = \sin x$ 于是 $\sqrt{2} \cos\theta d\theta = \cos x dx$

$$\sqrt{\cos 2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - 2\sin^2\theta} = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$$

且当 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 时 $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 对应于 $x = -\frac{\pi}{2}$; $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 对应于 $x = \frac{\pi}{2}$, 代入上式得

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 x dx = \frac{4}{3} \pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx = \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \pi^2 a^3$$

评述 由本例的解法, 便可推知在极坐标系中一平面区域绕直线 $y = x \tan\varphi$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 旋转一周所得旋转体体积求法.

例 91 求由已知直线 $y = x$, $y = \pi - x$, $y = \sin x$ 所围成的平面区域绕直线 $y = x$ 旋转一周所得旋转体体积.

分析 先求曲线 $y = \sin x$ 上任一点到直线 $y = x$ 的距离, 然后由横截面法求得旋转体体积.

解 在曲线 $y = \sin x$ 上任取一点 $P(x, \sin x)$, 过点 P 作垂直于直线 $y = x$ 的直线, 这两条相互垂直直线的交点记为 Q , Q 的坐标为 $(\frac{\sin x + x}{2}, \frac{\sin x + x}{2})$, PQ 的长为 $\sqrt{\frac{1}{4}(\sin x - x)^2 + \frac{1}{4}(\sin x - x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \sin x)$, 又 x

轴上长为 dx 的线段在直线 $y = x$ 上投影长为 $\frac{1}{\sqrt{2}}dx$, 从而知所求的旋转体体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (x - \sin x)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi} (x^2 - 2x\sin x + \sin^2 x) dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{x^3}{3} - 2x\sin x + 2x\cos x + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^3}{3} - 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

评述 由本例的解法, 便知在直角坐标系中一平面区域绕直线 $y = kx$ 旋转一周所得旋转体体积求法, 求旋转体体积是考研的一个热点, 但像以上二例这样的题型还没有考过, 读者务必注意.

例 92* 求心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 绕极轴旋转一周的旋转曲面的面积.

分析 旋转曲面的面积公式为 $S = 2\pi \int_A^B y dS$.

$$\begin{aligned} \text{解 } dS &= \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2} d\theta \\ &= a \sqrt{2 + 2\cos\theta} d\theta = 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta \end{aligned}$$

$$y = r \sin\theta = a(1 + \cos\theta) \sin\theta = 2a \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 4a \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2}$$

于是所求旋转面面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi 8a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} d\theta = -32\pi \int_0^\pi a^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} d\cos \frac{\theta}{2} \\ &= -\frac{32\pi}{5} a^2 \cos^5 \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = \frac{32}{5} \pi a^2 \end{aligned}$$

评述 利用极坐标求旋转面的面积是在考试要求范围之内,但是过去没有考过,每年的考研试题中都至少有一题的内容是过去从来没有考过的.

例 93 (98 8 分) 设有曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 过原点作其切线,求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.(见图 3-9)

分析 首先确定切点,作出切线方程,所求旋转体的表面积由切线绕 x 轴旋转成的旋转面($0 \leq x \leq 2$)与抛物线绕 x 轴旋转成的旋转面($1 \leq x \leq 2$)两部分所构成.

解 设切点坐标为 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$, 曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 在切点处的斜率为 $\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}$, 于是切线方程为

$$y - \sqrt{x_0-1} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x - x_0)$$

又因它经过原点,以点 $(0, 0)$ 代入得 $-2(x_0-1) = -x_0$, 解得 $x_0 = 2$. 于是切线方程为 $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$ 即 $y = \frac{1}{2}x$, 切点为 $(2, 1)$, 由曲线段 $y = \sqrt{x-1}$ ($1 \leq x \leq 2$) 绕 x 轴旋转一周所得的旋转面的面积为

$$S_1 = \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+y^2} dx = \pi \int_1^2 \sqrt{4x-3} dx = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

由直线段 $y = \frac{x}{2}$ ($0 \leq x \leq 2$) 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_2 = \int_0^2 2\pi \cdot \frac{1}{2}x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx = \sqrt{5}\pi$$

故所求旋转体的表面积为

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$$

评述 有的教材中未包含有求旋转体表面积的内容,但考研的教学大纲中是含有这个内容的,且确实考过.复习时,必须按照《全国硕士研究生入学统一考试教学考试大纲》中内容来复习.

例 94 (04, 12 分) 曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 与直线 $x = 0$, $x = t$ ($t > 0$) 及 $y = 0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体,其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x = t$ 处的底面积为 $F(t)$. (I) 求 $\frac{S(t)}{V(t)}$ 的值; (II) 计算极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{S(t)}{F(t)} \right)$.

$$\text{解 (I)} S(t) = \int_0^t 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^t \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx$$

$$V(t) = \pi \int_0^t y^2 dx = \pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx$$

所以 $\frac{S(t)}{V(t)} = 2$

$$(II) \quad F(t) = \pi y^2 \Big|_{x=t} = \pi \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{F(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx}{\pi \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2t} + 4t - e^{-2t}}{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4te^{-2t} - e^{-4t}}{1 + 2e^{-2t} + e^{-4t}} = 1 \end{aligned}$$

评述 计算本题,没有任何技巧.但由求旋转体体积、旋转体侧面积与求极值问题或极限问题相结合而组成的综合性题是近年来的常见考题.

典型题型 10. 以下讨论定积分在物理中的应用

例 95* 设线密度 $\rho = 1$ 求圆弧 $x = a \cos \theta$ $y = a \sin \theta$ ($|\theta| \leq \alpha \leq \pi$) 的质量中心的坐标.

分析 平面物质曲线的质量中心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 公式为

$$\bar{x} = \int_A^B x \rho ds / \int_A^B \rho ds, \quad \bar{y} = \int_A^B y \rho ds / \int_A^B \rho ds.$$

解 由于所绘圆弧对称于 x 轴,物质曲线的质量中心必在 x 轴上,因而 $\bar{y} = 0$. 圆弧的极坐标方程为 $r = a$ ($-\alpha \leq \theta \leq \alpha$) 其质量为

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{a^2 + 0} d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} a d\theta = 2a\alpha$$

$$\text{而} \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho x \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} a \cos \theta \cdot a d\theta = a^2 \sin \theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2a^2 \sin \alpha$$

$$\bar{x} = 2a^2 \sin \alpha / 2a\alpha = a \sin \alpha / \alpha.$$

所求的质量中心坐标为 $(a \sin \alpha / \alpha, 0)$.

例 96 x 轴上有线密度为常数 μ , 长度为 l 的细杆, 有一质量为 m 的质点到杆右端的距离已知为 a , 引力系数为 k 则质点和细杆之间的引力的大小为

$$(A) \int_{-1}^0 \frac{k\mu dx}{(a-x)^2}$$

$$(B) \int_0^1 \frac{k\mu dx}{(a-x)^2}$$

$$(C) 2 \int_{-1/2}^0 \frac{k\mu dx}{(a+x)^2}$$

$$(D) 2 \int_0^{1/2} \frac{k\mu dx}{(a+x)^2}$$

解 坐标系的选取(如图 3-10), 在直线杆上任取一段微元 $[x, x+dx]$, 质量为 μdx 与质量为 m 的质点间的引力为 $\frac{k\mu dx}{(a-x)^2}$, 则所求引力的大小为 $\int_{-1}^0 \frac{k\mu dx}{(a-x)^2}$. 应选(A).

例 97* 设有密度为 1 的圆形薄板, 其内半径为 r_0 , 外半径为 R_0 , 一质量为 m 的质点 P 位于过圆环中心的垂直线上, 且离中心的距离为 z 求圆环与质点 P 间的引力大小.

解 由对称性, 圆环对质点 P 的引力在 x, y 方向上的分力为零, 因此只需求出 z 方向的分力大小.

在圆环内, 任取一内半径为 r , 外半径为 $r+dr$ 的小圆环为微元, (见图 3-11), 此小圆环与质点 P 间沿 z 方向的引力大小为

$$dF = \frac{k 2\pi r dr \cdot m}{z^2 + r^2} \cos \theta$$

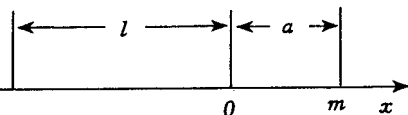


图 3-10

因为

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

所以

$$dF = \frac{k2\pi m r z dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

故整个圆环与质点 m 间的引力大小为

$$\begin{aligned} F &= \int_{r_0}^{R_0} k2\pi m \frac{r z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dr = -2\pi m k \int_{r_0}^{R_0} z d\left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right) \\ &= -\frac{2\pi k z m}{\sqrt{z^2 + r^2}} \Big|_{r_0}^{R_0} = 2\pi k m z \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + r_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R_0^2}} \right] \end{aligned}$$

例 98 (99 6 分) 为清除井底的污泥用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口, 已知井深 30m, 抓斗自重 400N, 缆绳每米重 50N, 抓斗抓起的污泥重 2000N, 提升速度为 3m/s, 在提升过程中, 污泥以 20N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉, 现将抓起污泥的抓斗提升至井口, 问克服重力需作多少焦耳的功?

(说明 ① $1N \times 1m = 1J$, m, N, s, J 分别表示米、牛顿、秒、焦耳 ② 抓斗的高度和位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

分析 克服抓斗、缆绳、污泥重力需作的功, 各分别单独计算

解 作 x 轴如(图 3-12)所示将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

其中 W_1 是克服抓斗自重所作的功, W_2 是克服缆绳重力所作的功, W_3 为提出污泥所作的功, 由题意知

$$W_1 = 400 \times 30 = 12000$$

将抓斗由 x 处提升到 $x + dx$ 处, 克服缆绳重力所作的功为

$$dW_2 = 50(30 - x)dx$$

$$\text{从而 } W_2 = \int_0^{30} 50(30 - x)dx = 22500$$

在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内提升污泥需作功为

$$dW_3 = 3(2000 - 20t)dt$$

$$\text{将污泥从井底提升至井口共需时间 } \frac{30}{3} = 10, \text{ 所以 } W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 20t)dt = 57000$$

$$\text{因此, 共需作功 } W = 12000 + 22500 + 57000 = 91500(J)$$

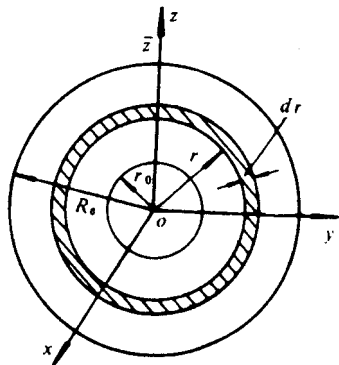


图 3-11

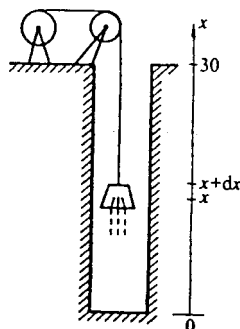


图 3-12

评述 计算引力和功, 都是考研试卷中的常见内容.

例 99 (03 10 分) 某建筑工程打地基时, 需用汽锤将桩打进土层, 汽锤每次击打, 都将克服土层对桩的阻力而作功, 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k, k > 0$). 汽锤第一次击打将桩打进地下 a 米, 根据设计方案, 要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0 < r < 1)$, 问(1) 汽锤击打三次后, 可将桩打进地下多深?(2) 若击打次数不限, 汽锤至多能将桩打进地下多深?

分析 当桩被打进地下的深度为 x 时, 土层对桩的阻力的大小为 kx .

解 (1) 设第 i 次击打后, 桩被打进地下 x_i , 第 i 次击打时, 汽锤所作的功为 w_i , 由题意知有

$$W_1 = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} ka^2 \quad (x_1 = a)$$

$$W_2 = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \frac{k}{2} (x_2^2 - a^2)$$

$$\text{由于 } W_2 = rW_1 \text{ 得 } x_2^2 - a^2 = ra^2 \text{ 即 } x_2^2 = (1+r)a^2$$

$$W_3 = \int_{x_2}^{x_3} kx dx = \frac{k}{2} (x_3^2 - x_2^2) = \frac{k}{2} [x_3^2 - (1+r)a^2]$$

$$\text{由于 } W_3 = rW_2 = r^2 W_1 \text{ 可得 } x_3^2 - (1+r)a^2 = r^2 a^2$$

$$\text{从而 } x_3 = \sqrt{1+r+r^2} a$$

即汽锤击打三次后,可将桩打进地下 $\sqrt{1+r+r^2}a$ 米.

(2) 由归纳法,设 $x_n = \sqrt{1+r+\dots+r^{n-1}}a$ 则

$$W_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} kx dx = \frac{k}{2}(x_{n+1}^2 - x_n^2) = \frac{k}{2}[x_{n+1}^2 - (1+r+\dots+r^{n-1})a^2]$$

由于 $W_{n+1} = rW_n = r^2W_{n-1} = \dots = r^nW_1$

故得 $x_{n+1}^2 - (1+r+\dots+r^{n-1})a^2 = r^na^2$

从而 $x_{n+1} = \sqrt{1+r+\dots+r^na^2} = \sqrt{\frac{1-r^{n+1}}{1-r}}a$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1-r^{n+1}}{1-r}}a = \frac{a}{\sqrt{1-r}}$

也就是说,若不限击打次数,汽锤至多能将桩打进地下 $\frac{a}{\sqrt{1-r}}$ 米.

评述 上例是克服重力做功的题,本例为克服阻力做功的题,二者都很典型很重要.

例 100 (02, 7 分) 某闸门的形状与大小如图 3-13 所示,其中直线 ox 为对称轴,闸门的上部为矩形 $ABCD$,下部由二次抛物线与线段 AB 所围成,当水面与闸门的上端相平时,欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5:4,闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)?

分析 把 y 轴放在水平面上, x 轴为闸门的对称轴,正向朝下,于是抛物线经过 $(h, -1)$, $(h+1, 0)$ 三点,抛物线方程为 $x = h+1-y^2$

解 用 ρ 表示水的密度, g 为重力加速度,于是闸门矩形部分承受的水压力为

$$P_1 = 2 \int_0^h \rho g x dx = \rho g h^2$$

闸门下部承受的水压力为

$$\begin{aligned} P_2 &= 2 \int_h^{h+1} \rho g x \sqrt{h+1-x} dx \quad (\text{令 } \sqrt{h+1-x} = t) \\ &= 4\rho g \int_0^1 (h+1-t^2)t^2 dt = 4\rho g \left[(h+1) \frac{t^3}{3} - \frac{1}{5}t^5 \right] \Big|_0^1 = 4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right) \end{aligned}$$

为使 $P_1 : P_2 = 5 : 4$ 有 $h^2 : 4 \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right) = 5 : 4$, 即 $3h^2 - 5h - 2 = 0$ 解得 $h = 2$, $h = -\frac{1}{3}$ (舍去).

故 h 应为 2 米高.

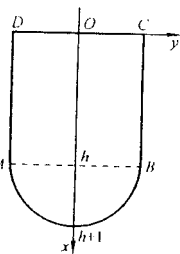


图 3-13

评述 若选取坐标系,使 x 轴与水平面平行并在水面下 $h+1$ 米水深处,闸门对称轴为 y 轴, y 轴的正向朝上,于是抛物线方程为 $y = x^2$, 闸门矩形部分承受的水压力为 (见图 3-14)

$$P_1 = 2 \int_1^{h+1} \rho g (h+1-y) dy = \rho g h^2$$

$$P_2 = 2 \int_0^1 \rho g (h+1-y) \sqrt{y} dy = 4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right)$$

不同的坐标系,计算 P_1 , P_2 的积分便相应地不同,但最后结果必是相同的.

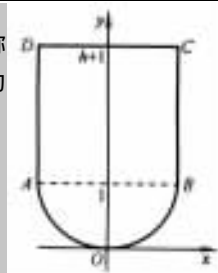


图 3-14

例 101 求初速度为 v_0 , 从时刻 $t = 0$ 到 $t = T$ 的时间间隔内之自由落体的速度之平均值.

解 初速为 v_0 的自由落体的速度为 $v = v_0 + gt$, 从 $t = 0$ 到 $t = T$ 的时间间隔内的速度平均值为

$$\frac{1}{T} \int_0^T (v_0 + gt) dt = \frac{1}{T} \left[v_0 T + \frac{1}{2} g T^2 \right] = v_0 + \frac{1}{2} g T.$$

评述 $v_0 + \frac{1}{2} g T = \frac{2v_0 + gT}{2} = \frac{v_0 + (v_0 + gT)}{2} = \frac{\text{初速} + \text{末速}}{2}$.

预测·强化训练三

1. 计算下列不定积分

1) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx$

2) $\int x^3 e^{x^2} dx$

3) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

4) $\int x \sin^2 x dx$

5) (97 3 分) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

6) (97 5 分) $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx$

7) (98 3 分) $\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$

8) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+3} dx$

9) $\int e^{\sqrt{2x-1}} dx$

10) $\int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{(\sin x)^3} dx$

11) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx$

12) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$

13) $\int (\arcsin x)^2 dx$

14) (00 3 分) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

15) (03 9 分) $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

2. (00 5 分) 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ 计算 $\int f(x) dx$.

3. (02 3 分) 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$ 则 $\int x f(x) dx = ?$

4. 计算下列定积分

1) $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx$

2) $\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx$

3) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$

4) $\int_0^1 x \arcsin x dx$

5) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$

6) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

7) $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{1+\cos 2x} dx$

8) $\int_0^1 x(1-x^4)^{3/2} dx$

9) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx$

10) $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$

11) (00 3 分) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$

12) $\int_1^+ \frac{\ln x}{x^2} dx$

13) $\int_1^+ \frac{dx}{x(x^2+1)}$

14) (97 3 分) $\int_0^+ \frac{dx}{x^2+4x+8}$

15) (99 6 分) $\int_1^+ \frac{\arctan x}{x^2} dx$

16) $\int_0^+ \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$

17) (00 6 分) $\int_1^+ \frac{dx}{e^{1+x} + e^{3-x}}$

18) (02 3 分) $\int_e^+ \frac{dx}{x \ln^2 x}$

19) $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x} dx$

20) (06 4 分) $\int_0^+ \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$

21) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

22) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

23) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$

5. 求连续函数 $f(x)$,使它满足 $\int_0^1 f(tx)dt = f(x) + x \sin x$

6. (99 6 分) 已知 $f(x)$ 连续, $\int_0^x t f(x-t)dt = 1 - \cos x$ 求 $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$ 的值.

7. 选择题

1) (06 4 分) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) \leq g(x)$ 则对任何 $C \in (0, 1)$

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^C f(t)dt \geq \int_{\frac{1}{2}}^C g(t)dt$

(B) $\int_{\frac{1}{2}}^C f(t) \leq \int_{\frac{1}{2}}^C g(t)dt$

(C) $\int_C^1 f(t)dt \geq \int_C^1 g(t)dt$

(D) $\int_C^1 f(t)dt \leq \int_C^1 g(t)dt$

2) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 设 $F(x) = \int_1^x f(t)dt (0 \leq x \leq 2)$ 则 $F(x)$ 为

(A) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1; \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1; \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

3)* 设 $f(x)$ $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) < f(x) < m$ (m 为常数) 则曲线 $y = g(x)$ $y = f(x)$ $x = a$ 及 $x = b$ 所围平面图形绕直线 $y = m$ 旋转而成的旋转体体积为

(A) $\int_a^b \pi [2m - f(x) + g(x)] [f(x) - g(x)] dx;$

(B) $\int_a^b \pi [2m - f(x) - g(x)] [f(x) - g(x)] dx;$

(C) $\int_a^b \pi [m - f(x) + g(x)] [f(x) - g(x)] dx;$

(D) $\int_a^b \pi [m - f(x) - g(x)] [f(x) - g(x)] dx.$

4) 下列反常(广义)积分发散的是

(A) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx;$

(B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

(C) $\int_0^+ e^{-x^2} dx;$

(D) $\int_2^+ \frac{1}{x \ln^2 x} dx.$

8. (05 11 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$ 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}.$

9. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t)dt$ 则 $f(x) =$ _____.

10. (01 7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导 $f(0) = 0$ 且其反函数为 $g(x)$ 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2 e^x$ 求 $f(x)$.

11. (01 6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足 $f(1) = 3 \int_0^{1/3} e^{1-x^2} f(x)dx$ 证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

12. (02 6 分) 设函数 $f(x)$ $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) > 0$ 利用闭区间上连续函数性质, 证明存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.

13. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数, 且 $m \leq f(x) \leq M$.

(1) 求 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)]dt;$

(2) 证 $\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| \leq M - m, (a > 0)$

14. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件 $f(x) + f(-x) = A$ (A 为常数)

(1) 证明 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx$

(2) 利用(1)的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$

15. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(b)$, 求证在 (a, b) 内至少存在 ζ 使 $f'(\zeta) = 0$.

16. 设河面在某处的宽度为 $2b$, 河流的横断面为一抛物线弓形, 河床的最深处在河流的中央, 深度为 h , 求河床的平均深度.

17*. (01 3分) 设 $g(x) = \int_0^x f(u)du$ 其中

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)/2 & \text{若 } 0 \leq x \leq 1 \\ (x - 1)/3 & \text{若 } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内

(A) 无界 (B) 递减 (C) 不连续 (D) 连续

18. (02 7分) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x + 3x^2/2, & -1 \leq x < 0 \\ xe^x/(e^x + 1)^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ 求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ 的表达式.

19. (00 5分) 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$ (1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$. (2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$.

20. 由曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = (e+1) - x$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积是_____.

21. 由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $y = ex$ 所围成的图形的面积 $S =$ _____.

22. (06 8分) 在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1, \rho)$, 其上任意点 $P(x, y)$ ($x \neq 0$) 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$) (I) 求 L 的方程. (II) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 确定 a 的值.

23. 假设曲线 $L_1: y = 1 - x^2$ ($0 \leq x \leq 1$)、 x 轴和 y 轴所围区域被曲线 $L_2: y = ax^2$ 分为面积相等的两部分, 其中 a 是大于零的常数, 试确定 a 的值.

24. (00 5分) 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 及直线 $l: x + y = t$ ($t \geq 0$), 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 右下方部分面积, 试求 $\int_0^x S(t)dt$ ($x \geq 0$).

25. 求曲线 $y = \sqrt{x}$ 的一条切线 L , 使曲线与切线 L 及直线 $x = 0, x = 2$ 所围成的图形面积最小.

26. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形面积为 $\frac{1}{3}$, 试确定 a, b, c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V 最小.

27. 过点 $P(1, \rho)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形, 求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体体积.

28. 曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体体积.

29. 求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转一周所得的旋转体体积.

30. 设曲线方程为 $y = e^{-x}$, x 轴, y 轴和直线 $x = \zeta$ ($\zeta > 0$) 所围成平面图形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 求此旋转体体积, 求满足 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} V(\zeta)$ 的 a .

31. 已知一抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1, \rho), B(3, \rho)$.

(1) 求证: 两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积;

(2) 计算上述两平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比.

32. (97 7 分) 求曲线 $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ 所围成的平面图形的面积 S , 并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V .

33. (00 8 分) 设曲线 $y = ax^2$ ($a > 0$, $x \geq 0$) 与 $y = 1 - x^2$ 交于点 A , 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成一平面图形, 问 a 为何值时, 该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大? 最大体积是多少?

34. 计算曲线 $y = \ln(1 - x^2)$ 上相应于 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

35. 把立方抛物线 $a^2y = x^3$ 在 $x = 0$ 与 $x = a$ ($a > 0$) 间一段弧绕 ox 轴旋转一周得一旋转曲面, 求此旋转曲面的面积.

36. 把椭圆 $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ 绕 ox 轴旋转一周得一旋转曲面, 求此旋转曲面的面积.

37*. 求曲线 $y = \int_0^x (t-1)(t-2)dt$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线在 $x = 0$, $x = 1$ 间的线段绕 ox 轴旋转一周所得旋转曲面的面积.

38. 质点以速度 $t\sin(t^2)$ 米/秒作直线运动, 则从时刻 $t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2 = \sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于_____米.

39. 边长为 a 和 b 的矩形薄板与液面成 θ 角斜沉于液体中, 长边平行于液面且近液面的长边位于深 h 处, 设 $a > b$, 液体比重为 W , 求薄板侧面所受的压力.

40*. 求物质均匀分布的无穷长直线对距此直线距离为 a 质量为 m 的质点的引力.

简明解答

$$1. 1) \int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{\cos x}} dx = - \int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} d\cos x = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$$

$$2) \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 e^{x^2} dx \stackrel{x^2 = t}{=} \frac{1}{2} \int t e^t dt = \frac{1}{2} \int t d e^t = \frac{1}{2} [t e^t - \int e^t dt] \\ = \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + C.$$

$$3) \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}} d(1+x^2) \\ = \frac{1}{2} \int [\sqrt{x^2+1} - (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}] d(1+x^2) = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \right] + C \\ = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x^2+1} + C$$

$$4) \int x \sin^2 x dx = \int x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \int x d \sin 2x \\ = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C \text{ 或 } \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{2} + C.$$

$$6) \int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx = \int e^{2x} (\tan^2 x + 2 \tan x + 1) dx = \int e^{2x} \sec^2 x dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx \\ = \int e^{2x} \sec^2 x dx + e^{2x} \tan x - \int e^{2x} \sec^2 x dx = e^{2x} \tan x + C.$$

$$7) \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = \int (\ln x - 1) d(-\frac{1}{x}) = - \int \ln x d(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x} = - \frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{x} = - \frac{1}{x} \ln x + C$$

$$8) \int \frac{x+1}{x^2-2x+3} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2-2x+3)' + 2}{x^2-2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+3) + \int \frac{2dx}{(x-1)^2+2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 3) + \sqrt{2} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

$$9) \int e^{\sqrt{2x-1}} dx \xrightarrow{\sqrt{2x-1}=t} \int e^t dt = te^t - \int e^t dt = e^t(t-1) + C = e^{\sqrt{2x-1}}(\sqrt{2x-1}-1) + C$$

$$\begin{aligned} 10) \int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{(\sin x)^3} dx &= \int x \cdot \frac{\cos^4 \frac{x}{2}}{8(\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2})^3} dx = \frac{1}{8} \int x \frac{\cos \frac{x}{2}}{(\sin \frac{x}{2})^3} dx = -\frac{1}{4} \int x \cot \frac{x}{2} d \cot \frac{x}{2} \\ &= -\frac{1}{8} x (\cot \frac{x}{2})^2 + \frac{1}{8} \int (\cot \frac{x}{2})^2 dx = -\frac{1}{8} x \cot^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \int (\csc^2 \frac{x}{2} - 1) dx \\ &= -\frac{1}{8} x \cot^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{8} x + C = -\frac{1}{8} x \csc^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11) \int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx &= \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \arctan x dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) \arctan x dx = \int \arctan x dx - \int \arctan x d \arctan x \\ &= -\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12) \int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx &= -\int \arctan e^x d e^{-x} = -e^{-x} \arctan e^x + \int e^{-x} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\ &= -e^{-x} \arctan e^x + \int \frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = -e^{-x} \arctan e^x + x - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13) \int (\arcsin x)^2 dx, \text{ 令 } \arcsin x = t, x = \sin t, dx = \cos t dt, \text{ 于是 } \int (\arcsin x)^2 dx &= \int t^2 \cos t dt = \int t^2 ds \sin t = t^2 \sin t - \\ &\int 2t \sin t dt = t^2 \sin t + 2 \{ t \cos t - \int \cos t dt \} = t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + C = x(\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \\ &2x + C, \text{ 亦可一开始就用分部积分法解之.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14) \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \arcsin \sqrt{x} d \sqrt{x} = 2 \left(\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} - \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) \\ &= 2 \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2 \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \sqrt{1-x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15) \text{ 设 } x = \tan t \text{ 则原式} &= \int e^t \sin t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + c = \frac{1}{2} e^{\arctan x} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) + c \\ &= \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + c \end{aligned}$$

$$2. \text{ 设 } \ln x = t, \text{ 则 } x = e^t, f(t) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}.$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx = -\int \ln(1+e^x) d e^{-x} = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{1}{1+e^x} dx \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx = -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C \\ &= x - (1+e^{-x}) \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

3. 已知 $(\ln^2 x)' = f(x)$, 从而

$$\int x f(x) dx = \int x \cdot (\ln^2 x)' dx = 2 \int x \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = 2 \int (1 - \ln x) d \ln x = 2(\ln x - \frac{1}{2} \ln^2 x) + C = 2 \ln x - \ln^2 x + C$$

$$\begin{aligned} 4. 1) \int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{-1}^1 (x^2 + 1 - x^2 + 2x \sqrt{1-x^2}) dx = \int_{-1}^1 (1 + 2x \sqrt{1-x^2}) dx \\ &= 2 + \int_{-1}^1 2x \sqrt{1-x^2} dx = 2 \end{aligned}$$

$$2) \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx \xrightarrow{\sqrt{1-x}=t} \int_1^0 (1-t^2)(-2t^2) dt = \int_0^1 (2t^2 - 2t^4) dt = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

$$3) \int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int_0^2 2e^t dt = 2 \left[te^t \right]_0^2 - \int_0^2 e^t dt = 4e^2 - 2e^t \Big|_0^2 = 4e^2 - 2(e^2 - 1) = 2e^2 + 2 = 2(e^2 + 1).$$

$$4) \int_0^1 x \arcsin x dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

$$5) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx = \int_0^1 \ln(1+x) \cdot (2-x)^{-2} dx = \frac{1}{2-x} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(2-x)}$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{3} \ln 2.$$

$$6) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \int_0^3 \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_0^3 = 2\pi/3.$$

$$7) \int_0^{\pi/4} \frac{x}{1+\cos 2x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x \sec^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x \tan x = \frac{1}{2} \left(x \tan x \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \ln \cos x \Big|_0^{\pi/4} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2.$$

$$8) \int_0^1 x(1-x^4)^{3/2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^4)^{3/2} dx^2 \stackrel{x^2=\sin t}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{32} \pi$$

$$9) \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx \stackrel{e^{-x}=\sin t}{=} \int_{\pi/2}^{\pi/6} \cos t \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin t} dt - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin t dt$$

$$= \ln(\csc t - \cot t) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \cos t \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$10) \int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int_1^2 \frac{2dt}{t(1+t)} = 2 \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2 \ln \frac{4}{3}.$$

$$11) \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx = \frac{\pi}{4} \text{ (被积函数为一圆弧,由几何图形立知它是单位圆面积的四分之一).}$$

$$12) \int_1^+ \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^+ + \int_1^+ \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^+ = 1.$$

$$13) \int_1^+ \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_1^+ \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Big|_1^+ = \ln \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} \Big|_1^+ = 0 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$14) \int_0^+ \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int_0^+ \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{2} \Big|_0^+ = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

$$15) \int_1^+ \frac{\arctan x}{x^2} dx = \int_1^+ \arctan x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \arctan x \Big|_1^+ + \int_1^+ \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \text{ [据13)题]. 或}$$

令 $\arctan x = t$ 原式 $= -\int_{\pi/4}^{\pi/2} t \operatorname{dcot} t$ 再用分部积分公式)

$$16) \int_0^+ \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \int_0^+ \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx = -\int_0^+ x d\left(\frac{1}{1+e^x}\right) = -\frac{x}{1+e^x} \Big|_0^+ + \int_0^+ \frac{1}{1+e^x} dx = 0 + \int_0^+ \frac{dx}{1+e^x}$$

$$\stackrel{e^x=t}{=} \int_1^+ \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^+ \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = \ln \frac{t}{1+t} \Big|_1^+ = \ln 2$$

$$17) \int_1^+ \frac{dx}{e^{1+x}+e^{3-x}} = \int_1^+ \frac{e^{x-3}}{e^{2(x-1)}+1} dx = e^{-2} \int_1^+ \frac{de^{x-1}}{e^{2(x-1)}+1} = e^{-2} \arctan e^{x-1} \Big|_1^+ = e^{-2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{4} e^{-2}.$$

$$18) \int_e^+ \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_e^+ \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^+ = 1.$$

$$19) \int_0^\pi \sqrt{1-\sin x} dx = \int_0^\pi \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^\pi \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right| dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}) dx = 4(\sqrt{2} - 1).$$

$$20) \int_0^+ \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{b \rightarrow +} \int_0^b \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +} \int_0^b \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +} \frac{1}{1+x^2} \Big|_0^b = \frac{1}{2}$$

$$21) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+ \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0^+}} \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+ \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0^+}} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} = \pi.$$

$$22) \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \quad \text{令 } \sqrt{1-x} = t, 1-x = t^2, x = 1-t^2, dx = -2tdt, \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2 \int_1^0 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$23) \text{ 当 } x \rightarrow 0^+ \text{ 时, } \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \rightarrow +\infty, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \text{ 为 } 0 \cdot \infty \text{ 型未定式,}$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{u}, \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt = \lim_{u \rightarrow +} \int_{1/u}^1 \frac{\cos t}{t^2} dt / u = \lim_{u \rightarrow +} \left[-\frac{\cos \frac{1}{u}}{\frac{1}{u}} - \frac{1}{u^2} \right] = \lim_{u \rightarrow +} \cos \frac{1}{u} = 1.$$

$$5. \text{ 令 } tx = u, \int_0^1 f(tx) dt = \int_0^x f(u) \frac{du}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, \text{ 代入原等式 } \int_0^1 f(tx) dt = f(x) + x \sin x \text{ 得 } \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du = f(x) + x \sin x, \text{ 亦即 } \int_0^x f(u) du = xf(x) + x^2 \sin x, \text{ 两边对 } x \text{ 求导得}$$

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$\text{从而有 } f'(x) = -2 \sin x - x \cos x,$$

$$\text{积分之 } f(x) = 2 \cos x - \int x \cos x dx = 2 \cos x - x \sin x + \int \sin x dx = 2 \cos x - x \sin x - \cos x + c = \cos x - x \sin x + c$$

$$6. \text{ 令 } x-t = u \text{ 有 } \int_0^x tf(x-t) dt = - \int_x^0 (x-u) f(u) du = \int_0^x (x-u) f(u) du \text{ 代入原等式得 } \int_0^x (x-u) f(u) du = 1 - \cos x, \text{ 即 } x \int_0^x f(u) du - \int_0^x uf(u) du = 1 - \cos x, \text{ 两边对 } x \text{ 求导得 } \int_0^x f(u) du + xf(x) - xf(x) = \sin x, \text{ 即 } \int_0^x f(u) du = \sin x, \text{ 令 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 得 } \int_0^{\pi/2} f(x) dx = 1.$$

$$7. 1) \text{ 当 } C > \frac{1}{2} \text{ 时, } (A) \text{ 不成立. 当 } 0 < C < \frac{1}{2} \text{ 时, } (B) \text{ 不成立.}$$

$$C \in (0, 1) \text{ 中任何数, } (C) \text{ 均不成立, 只有 } (D) \text{ 对. 应选 } (D).$$

$$2) (D). \text{ 当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时 } F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_1^x = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3}, \text{ 而当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时}$$

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x dt = x - 1.$$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} x^3/3 - 1/3, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \text{ 应选 } (D).$$

$$3) (B). \text{ 因 } V_{y=m} = \int_a^b \pi [(m-g(x))^2 - (m-f(x))^2] dx = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)][2m - g(x) - f(x)] dx \text{ 应选 } (B).$$

$$4) (A). \text{ 因 } \int_2^+ \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_2^+ \frac{1}{\ln^2 x} d \ln x = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^+ = \frac{1}{\ln 2}, \text{ 故积分 } (D) \text{ 收敛. 又 } \lim_{x \rightarrow +} \frac{e^{-x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +} \frac{1}{x^2 e^{x^2}} = 0, \text{ 由极}$$

$$\text{限形式的比较判定法知积分 } (C) \text{ 收敛. } \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \text{ 知积分 } (B) \text{ 在点 } -1 \text{ 及 } 1 \text{ 处均}$$

$$\text{收敛. } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin x} / \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \text{ 而 } \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \text{ 发散, 由极限形式的比较判定法知积分 } (A) \text{ 发散, 应选 } (A).$$

$$8. \text{ 原式} = \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt}{x \int_0^x f(u) du}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u) du + xf(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (0 < \xi < x)}} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

在以上计算中,先作了变换 $x - t = u$,其次用了洛必达法则,再利用了积分中值定理 ξ 在 0 与 x 之间.

9. $x - 1$. 因 $f(x)$ 为连续函数,定积分 $\int_0^1 f(t) dt$ 存在,记其值为 c ,于是 $f(x) = x + 2c$,

将之代入积分式中 $c = \int_0^1 (t + 2c) dt = \frac{1}{2} + 2c$, $c = -\frac{1}{2}$, 从而知 $f(x) = x - 1$.

10. 等式 $\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$ 两端对 x 求导得 $g[f(x)] f'(x) = e^x (2x + x^2)$, 又因 $f(x)$ 、 $g(x)$ 互为反函数有 $g[f(x)] = x$, 于是 $xf'(x) = e^x (2x + x^2)$, 即 $f'(x) = e^x (2 + x)$. 积分 $f'(x) = 2e^x + xe^x - \int e^x dx = e^x + xe^x + c$, 已知 $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处右连续, 得 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [e^x + xe^x + c] = 1 + c = 0$, $c = -1$, 因此 $f(x) = e^x (1 + x) - 1$.

11. 由积分中值定理得 $f(1) = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x) dx = e^{1-\xi^2} f(\xi_1)$ 其中 $0 < \xi_1 < \frac{1}{3}$, 令 $F(x) = e^{1-x^2} f(x)$ 则 $F(x)$ 在 $[\xi_1, 1]$ 上连续, 在 $(\xi_1, 1)$ 内可导 $F'(\xi_1) = F(1) = f(1) = e^{1-\xi_1^2} f(\xi_1)$, 由罗尔定理, 在 $(\xi_1, 1)$ 内至少存在一点 ξ 使得 $F'(\xi) = [-2xe^{1-x^2} f(x) + e^{1-x^2} f'(x)]|_{x=\xi} = 0$, 于是 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$, $\xi \in (\xi_1, 1) \subset (0, 1)$.

12. 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由最值定理知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 即 $m \leq f(x) \leq M$, 又因 $g(x) > 0$ 且在 $[a, b]$ 上连续, 故有 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, $\int_a^b mg(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b Mg(x) dx$ 亦即 $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$. 由闭区间上连续函数的介值定理知: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$, 亦即 $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$, $\xi \in [a, b]$.

13. (1) $\int_{-a}^a f(t+a) dt \xrightarrow{t+a=u} \int_0^{2a} f(u) du$, $\int_{-a}^a f(t-a) dt \xrightarrow{t-a=u} \int_{-2a}^0 f(u) du$

$$\begin{aligned}
 \text{于是} \quad & \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{2a} f(u) du - \int_{-2a}^0 f(u) du}{4a^2} \\
 &= \frac{0}{0} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{f(2a) \cdot 2 + f(-2a)(-2)}{2 \cdot 4a} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{f(2a) - f(-2a)}{4a} \\
 &= \frac{0}{0} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{2[f(2a) + f(-2a)]}{4} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} [f(2a) + f(-2a)] = f(0).
 \end{aligned}$$

以上利用洛必达法则和一阶导数 $f'(x)$ 的连续性, 本题亦可用积分中值定理再用微分中值定理然后取极限求之.

(2) 已知 $m \leq f(x) \leq M$, 从而有

$$m \leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt \leq M, \quad -M \leq -f(x) \leq -m$$

$$, \quad -(M - m) \leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \leq M - m$$

$$\text{亦即} \quad \left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| \leq M - m$$

14. (1) $\int_{-a}^a f(x)g(x) dx = \int_{-a}^0 f(x)g(x) dx + \int_0^a f(x)g(x) dx$

$$\begin{aligned}
 \text{而} \quad \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx & \stackrel{x=-t}{=} - \int_a^0 f(-t)g(-t)dt = \int_0^a f(-x)g(-x)dx \\
 & = \int_0^a f(-x)g(x)dx \quad (g(-x) = g(x)) \\
 , \quad \int_{-a}^a f(x)g(x)dx & = \int_0^a f(-x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx \\
 & = \int_0^a [f(-x) + f(x)]g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx
 \end{aligned}$$

(2) 因 $|\sin x|$ 为偶函数 $\arctan e^{-x} + \arctan e^x = \frac{\pi}{2}$, 于是由上述结果:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

15. 由积分中值定理存在 ξ 有 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi)$ 其中 $a < \xi < b$, 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 故 $f(x)$ 在 $[\xi, b]$ 上必连续且在 (ξ, b) 内可导, 还有 $f(\xi) = f(b)$, 由罗尔定理知在 $(\xi, b) \subset (a, b)$ 内至少存在一点 ζ 使有 $f'(\zeta) = 0$.

16. 选取坐标系使 x 轴在水平面上, y 轴正向朝下, 且 y 轴为抛物线的对称轴, 于是抛物线方程为 $y = h - \frac{h}{b^2}x^2$,

由积分中值定理知有 $\frac{1}{2b} \int_{-b}^b (h - \frac{h}{b^2}x^2)dx = \frac{1}{2b} (2hb - \frac{2h}{3} \frac{b^3}{b^2}) = h - \frac{1}{3}h = \frac{2}{3}h$, 故河深的平均深度为 $\frac{2}{3}h$.

17. (D) 当 $0 \leq x < 1$ 时 $g(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^x (t^2 + 1)dt = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x$, 当 $1 \leq x \leq 2$ 时 $g(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}(t^2 + 1)dt + \int_1^x \frac{1}{3}(t-1)dt = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(x-1)^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(x-1)^2$, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 及 $[1, 2]$ 上都连续, 而 $g(1-0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, $g(1) = \frac{2}{3}$, 可见 $g(1-0) = g(1) = g(1+0)$ 成立, $g(x)$ 在 $x=1$ 处亦连续, 也就是说 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 又因闭区间上连续函数必有界, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是单调增加函数, 所以(A), (B), (C) 均不成立, 应选(D).

18. 当 $-1 \leq x < 0$ 时 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^x (2t + \frac{3}{2}t^2)dt = x^2 - 1 + \frac{1}{2}(x^3 + 1) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}$.

当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_{-1}^0 (2t + \frac{3}{2}t^2)dt + \int_0^x \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}dx = t^2 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}t^3 \Big|_{-1}^0 + \int_0^x t d\left(\frac{-1}{e^t + 1}\right) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{t}{e^t + 1} \Big|_0^x + \int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} \frac{e^t = u}{e^t + 1} - \frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \int_1^{e^x} \frac{du}{u(u+1)} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \int_1^{e^x} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right]du = -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln \frac{u}{u+1} \Big|_1^{e^x} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + \ln 2$, 从而知 $F(x)$ 的表达式为

$$F(x) = \begin{cases} x^3/2 + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0 \\ \ln \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln 2 - \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

19. (1) $\int_0^\pi |\cos x|dx = 2 \int_0^{\pi/2} |\cos x|dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 2 \cdot \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 2$. 而 $|\cos x|$ 为以 π 为周期的周期函数, 故

$$\int_0^{n\pi} |\cos x|dx = 2n \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x|dx = 2n + 2 = 2(n+1) \text{ 因此当 } n\pi \leq x < (n+1)\pi \text{ 时}$$

$$2n = \int_0^{n\pi} |\cos x|dx \leq S(x) = \int_0^x |\cos x|dx < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x|dx = 2(n+1)$$

(2) 当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$$

令 $x \rightarrow 0$, 由夹逼定理得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$.

$$20. \frac{3}{2}. \text{ 因面积 } A = \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{2} = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx + \frac{1}{2} = e - (e - 1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$21. \frac{e}{2} - 1. S = \int_0^1 (e^x - xe^x) dx = \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 - [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \frac{e}{2} - 1$$

22. (I) 依题意得 $y' - \frac{1}{x}y = ax$, $y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int_1^x ax e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + 0 \right] = ax^2 - ax$. (II) L 与直线 $y = ax$ 的交点为 $(0, 0)$, $(2/a, 0)$, 则直线 $y = ax$ 与 L 围成平面图形的面积为 $S(a) = \int_0^{2/a} [ax - (ax^2 - ax)] dx = \frac{4}{3}a \stackrel{\text{令}}{=} \frac{8}{3}$, $a = 2$.

23. 曲线 $y = 1 - x^2 (0 \leq x \leq 1)$ 与 $y = ax^2$ 的交点为 $\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}, \frac{a}{1+a} \right)$.

$$S_1 = \int_0^{1/\sqrt{1+a}} [(1 - x^2) - ax^2] dx = \left[x - \frac{1}{3}(1+a)x^3 \right] \Big|_0^{1/\sqrt{1+a}} = \frac{2}{3\sqrt{1+a}},$$

$$S_2 = \int_0^1 (1 - x^2) dx - S_1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt{1+a}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3\sqrt{1+a}},$$

由题意有 $\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a}} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a}} \cdot a = 3$.

24. 由题设 $S(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0 \leq t \leq 1 \\ -t^2/2 + 2t - 1, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$

所以, 由 $0 \leq x \leq 1$ 时 $\int_0^x S(t) dt = \int_0^x t^2/2 dt = x^3/6$

当 $1 < x \leq 2$ 时 $\int_0^x S(t) dt = \int_0^1 S(t) dt + \int_1^x S(t) dt = -x^3/6 + x^2 - x + 1/3$

当 $x > 2$ 时 $\int_0^x S(t) dt = \int_0^2 S(t) dt + \int_2^x S(t) dt = x - 1$

故有 $\int_0^x S(t) dt = \begin{cases} x^3/6, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^3/6 + x^2 - x + 1/3, & 1 < x \leq 2 \\ x - 1, & x > 2 \end{cases}$

25. 设切点坐标为 $(t, \sqrt{t})$, 则切线方程为 $y - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t)$, 亦即 $y = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2}$. 切线、抛物线 $y = \sqrt{x}$ 、直线 $x = 0$ 、 $x = 2$ 所围成的平面图形的面积为

$$S(t) = \int_0^2 \left[\frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2} - \sqrt{x} \right] dx = \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} - \frac{4}{3}\sqrt{2}. \text{ 令 } S'(t) = 0, \text{ 解得在 } (0, 2) \text{ 内的唯一驻点 } t =$$

1. 又因 $S''(1) > 0$, 在 $t = 1$ 处 $S(t)$ 取得极小值, 这个极小值就是最小值, 此时切线方程为 $y = x/2 + 1/2$.

26. 因抛物线通过原点 $(0, 0)$, 故抛物线方程为 $y = ax^2 + bx$, $c = 0$, 由题意 $\int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{1}{3}$, 即 $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$, 解得 $b = \frac{2}{3}(1 - a)$, 将之代入旋转体体积 $V = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \left(\frac{a^2}{5} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2 \right) = \pi \left[\frac{a^2}{5} + \frac{1}{3}a(1 - a) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}(1 - a)^2 \right]$, 令 $\frac{dV}{da} = 0$ 解得 $a = -\frac{5}{4}$, 代入 b 式得 $b = \frac{3}{2}$, 又 $V'(-\frac{5}{4}) = \frac{4}{135}\pi > 0$, 故 $a = -\frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 0$.

27. 设抛物线的切点为 $(x_0, \sqrt{x_0 - 2})$, 切线方程为 $y - \sqrt{x_0 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{x_0 - 2}}(x - x_0)$, 切线过点 $(1, 0)$ 代入切

线方程得 $x_0 = 3$, 切线方程为 $y = \frac{1}{2}(x - 1)$, 故所求旋转体体积为 $V_x = \pi \int_1^3 \frac{1}{4}(x - 1)^2 dx -$

$$\pi \int_2^3 (\sqrt{x-2})^2 dx = \frac{\pi}{6}.$$

28. 因为 $1 \leq x \leq 2$ 时 $y = (x-1)(x-2) \leq 0$, 由柱壳法公式知所求旋转体体积为

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_1^2 x |(x-1)(x-2)| dx = 2\pi \int_1^2 x(-x^2 + 3x - 2) dx \\ &= -2\pi \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

29. 因 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 为偶函数 故只考虑 $x \geq 0$ 部分再二倍之 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y = x^2 + 2$ 当 $1 \leq x \leq 2$ 时 $y = 4 - x^2$ 故所求旋转体体积 $V = 2\pi \int_0^1 \{3^2 - [3 - (x^2 + 2)]^2\} dx + 2\pi \int_1^2 \{3^2 - [3 - (4 - x^2)]^2\} dx = \frac{448}{15}\pi$.

30. $V(\zeta) = \pi \int_0^\zeta y^2 dx = \pi \int_0^\zeta e^{-2x} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2\zeta})$, $\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} V(\zeta) = \frac{\pi}{2}$ 条件 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} V(\zeta)$ 即 $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ 解得 $a = \frac{1}{2} \ln 2$.

31. (1) 设通过点 $A(1, 0)$ $B(3, 0)$ 的抛物线方程为 $y = a(x-1)(x-3)$ 其中 a 为参数 则抛物线与两坐标轴所围平面图形的面积为 $S_1 = \int_0^1 |a(x-1)(x-3)| dx = |a| \int_0^1 (1-x)(3-x) dx = |a| \int_0^1 (3-4x+x^2) dx = \frac{4}{3}|a|$. 抛物线与 x 轴所围图形的面积为 $S_2 = \int_1^3 |a(x-1)(x-3)| dx = |a| \int_1^3 (4x-3-x^2) dx = \frac{4}{3}|a|$, 可见 $S_1 = S_2$.

(2) 抛物线与两坐标轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积 $V_1 = \pi \int_0^1 a^2(x-1)^2(x-3)^2 dx = \pi a^2 \int_0^1 (x-1)^2(x-1-2)^2 dx = \pi a^2 \int_0^1 [(x-1)^4 - 4(x-1)^3 + 4(x-1)^2] dx = \frac{38}{15}\pi a^2$. 抛物线与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为 $V_2 = \pi \int_1^3 a^2(x-1)^2(x-3)^2 dx = \pi a^2 \int_1^3 [(x-1)^4 - 4(x-1)^3 + 4(x-1)^2] dx = \frac{16}{15}\pi a^2$ 所得 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{8}$.

32. 当 $1 \leq x \leq 2$ 时 $y = x^2 - 2x \leq 0$, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时 $y = x^2 - 2x \geq 0$ 故所求面积 $S = \int_1^2 |x^2 - 2x| dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \int_1^2 (2x - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = 2$, 用柱壳法公式求旋转体体积 $V_y = 2\pi \int_1^2 x|x^2 - 2x| dx + 2\pi \int_2^3 x(x^2 - 2x) dx = 2\pi \int_1^2 (2x^2 - x^3) dx + 2\pi \int_2^3 (x^3 - 2x^2) dx = \frac{11}{6}\pi + \frac{43}{6}\pi = 9\pi$.

33. 曲线 $y = ax^2 (a > 0, x \geq 0)$ 与曲线 $y = 1 - x^2$ 的交点为 $A\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}, \frac{a}{1+a}\right)$ 直线 OA 的方程为 $y = \frac{ax}{\sqrt{1+a}}$, 直线 OA 与抛物线 $y = ax^2$ 围成的平面图形绕 x 轴一周所得旋转体体积为 $V_x = \pi \int_0^{1/\sqrt{1+a}} \left(\frac{a^2 x^2}{1+a} - a^2 x^4\right) dx = \frac{2\pi a^2}{15(1+a)^{5/2}}, \frac{dV_x}{da} = \frac{\pi(4a - a^2)}{15(1+a)^{7/2}} (a > 0)$, 令 $\frac{dV_x}{da} = 0$ 并由 $a > 0$ 得唯一驻点 $a = 4$ 且当 $0 < a < 4$ 时 $\frac{dV_x}{da} > 0$, 当 $a > 4$ 时 $\frac{dV_x}{da} < 0$, V_x 在 $a = 4$ 处达到极大值, 由题意知此极大值就是最大值, 其最大旋转体体积为 $V_x = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{16}{5^{5/2}} = \frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$.

34. $1 = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2} dx = \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^{1/2} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right) dx = \ln 3 - \frac{1}{2}$.

35. $dS = (1 + y^2)^{1/2} dx = \frac{1}{a^2}(a^4 + 9x^4)^{1/2} dx$, 所求绕 x 轴的旋转曲面面积为

$$S_x = \frac{2\pi}{a^4} \int_0^a (a^4 + 9x^4)^{1/2} x^2 dx = \frac{\pi}{27a^4} [(a^4 + 9x^4)^{3/2}] \Big|_0^a = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)a^2.$$

36. $dS = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} d\theta = (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{1/2} d\theta$, $\frac{1}{2} S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} y(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{1/2} d\theta = 2\pi b \int_0^{\pi/2} (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \sin \theta d\theta \xrightarrow{u = \cos \theta} 2\pi b \int_0^1 [a^2 - (a^2 - b^2)u^2]^{1/2} du$, 今记 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, 从而有 $S_x = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e} \arcsin e$.
37. $\frac{dy}{dx} = (x-1)(x-2)$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2$, 该曲线在点 $(0, \rho)$ 的切线方程为 $y = 2x$, 所求旋转曲面面积为 $S_x = 2\pi \int_0^1 2x \sqrt{1+4x^2} dx = 4\sqrt{5}\pi \int_0^1 x dx = 2\sqrt{5}\pi$.
38. $\frac{1}{2}$ 米. $S = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{t_1}^{t_2} t \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sin^2 dt^2 = -\frac{1}{2} \cos t^2 \Big|_{t_1}^{t_2} = -\frac{1}{2} [\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}$ (米).
39. 把坐标原点置于水平面处, x 轴正向朝下, 所受水压力 $P = W \int_h^{h+b \sin \theta} a \cdot x \cdot \frac{1}{\sin \theta} dx = \frac{1}{2} Wab(2h + b \sin \theta)$.
40. 设物质直线的线密度为 μ , 取物质直线本身为 x 轴, y 轴正向通过该质点, 记引力为 $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$, 由于物质均匀分布以及问题的对称性, 知 $F_x = 0$, $F_y = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\mu\mu}{x^2 + a^2} \frac{a}{(a^2 + a^2)^{1/2}} dx = -2k\mu\mu a \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \xrightarrow{x = a \tan \theta} -2k\mu\mu a \int_0^{\pi/2} \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^3 \sec^3 \theta} = -2k\mu\mu a^{-1} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = -2k\mu\mu a^{-1}$, 其中 k 为引力常数, 故所求引力 $\vec{F} = -(2k\mu\mu/a) \vec{j}$.

第三部分 多元函数微分学

第四章 空间解析几何与多元函数微分学*

考试要求：

1. 理解空间直角坐标系、理解向量的概念及其表示.
2. 掌握向量的运算(线性运算、标积、向量积、混合积),了解两个向量垂直、平行的条件.
3. 掌握单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式、以及用坐标表达式进行向量运算的方法.
4. 掌握平面方程和直线方程及其求法,会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.
5. 理解曲面方程的概念,了解常用二次曲面的方程及其图形,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.
6. 了解空间曲线的参数方程及一般方程.
7. 了解空间曲线在坐标平面上的投影,并会求其方程.
8. 理解多元函数的概念,理解二元函数的几何意义.
9. 了解二元函数的极限与连续性的关系,以及有界闭域上连续函数的性质.
10. 理解偏导数和全微分的概念,了解全微分存在的必要条件和充分条件,以及全微分在近似计算中的应用.
11. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.
12. 掌握复合函数一阶、二阶偏导数的求法.
13. 会求隐函数(包括由方程组确定的隐函数)的偏导数.
14. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,会求它们的方程.
15. 了解二元函数的二阶泰勒公式.
16. 理解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大值和最小值,并会解决一些简单的应用问题.

考试要点分析与题型预测

这一章的考试要点有

1. 熟练掌握向量的运算及两向量垂直、平行的条件,直接出题考向量的试题不多,但在处理多元函数微积分的试题时,到处都可能用到这方面的概念与结论.
2. 直线、平面的方程表达形式,平面与直线的关系,两平面、直线之间的关系,必须熟练掌握并能用数学形式表达出来(譬如已知两平面 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 垂直,应很快想到 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$),近 16 年考研中,解析几何部分直接命题只有 9 题,上述内容占了 6 题.
3. 二次曲面方程代表什么曲面,旋转曲面是怎么回事,必须掌握(包括对图形的熟悉),这部分内容直接考的时候不多(旋转曲面部分曾有过),但在计算三重积分、曲面积分、空间曲线积分时,选取什么坐标,用什么方法计算,灵感往往来自于对这些曲面的熟悉与掌握.
4. 熟练掌握偏导数、高阶偏导数的计算,偏导数与全微分,切平面与法线、方向导数与梯度,在多元函数微分学的命题中,占了绝大多数.
5. 在一元函数微分学中,连续、可导、可微这些重要概念的关系是清晰的,但在多元函数微分学中,它们的关系错综复杂,必须有清楚的认识与掌握,另外应该掌握多元函数极值(特别是条件极值)的计算.这些在近年来的考题中有所体现.

* 数学二只考二元函数微分学

§ 4 - 1 空间解析几何、向量代数

一、基本概念

1. 空间直角坐标系

我们在空间作三条互相垂直及相交的数轴 ox, oy, oz , 交点 o 称为原点, 就构成了空间直角坐标系, 设 P 为空间任意一点, 过 P 分别作平面与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直, 与坐标轴的交点分别为 Q, R, S , 则三个坐标轴上分别对应于 Q, R, S 的实数 x, y, z 称为 P 的坐标, 记作 $P(x, y, z)$.

空间直角坐标系中任意两点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

设在连接 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线上有一点 $P(x, y, z)$, 使得 $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda (\lambda \neq -1)$, 则点 P 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

这称为定比分点公式. 特别如 P 是中点, 此时 $\lambda = 1$, 于是

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

2. 向量

有大小和方向的量称为向量, 向量的长度称作向量的模, 向量记作 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\mathbf{a}$, 模记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量, 与 $\mathbf{a}$ 大小相等, 方向相反的向量, 记作 $-\mathbf{a}$, 模等于零的向量称为零向量, 记作 $\mathbf{o}$, 向量 $\mathbf{a}$ 在有向线段 l 上的投影是一个数, 由

$$a_l = |\mathbf{a}| \cos \theta$$

确定, 其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 l 的夹角 $0 \leq \theta \leq \pi$.

两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 之和的定义如下: 把 $\mathbf{b}$ 的起点移到 $\mathbf{a}$ 的终点后, 由 $\mathbf{a}$ 的起点到 $\mathbf{b}$ 的终点的向量, 记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

向量 $\mathbf{a}$ 与数 λ 的乘积是模等于 $|\lambda| |\mathbf{a}|$ 的向量, $\lambda > 0$ 它的方向与 $\mathbf{a}$ 相同, 当 $\lambda < 0$ 与 $\mathbf{a}$ 相反. $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

易验证

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

$$\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$$

设 $\mathbf{a}^\circ$ 是方向与 $\mathbf{a}$ 相同的单位向量, 则 $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{a}^\circ$, 或 $\mathbf{a}^\circ = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$.

3. 向量的坐标、向量的代数运算

以 i, j, k 分别记 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的单位向量, 向量 $\mathbf{a}$ 在 x, y, z 轴上的投影分别记为 a_x, a_y, a_z , 称为 $\mathbf{a}$ 的坐标, 显然有 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$

或者记 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$

模:

方向余弦:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

其中 α, β, γ 为向量 a 与 x, y, z 轴正向的夹角, 称为向量 a 的方向角, 它们的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为方向余弦, 且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

a 的单位向量的坐标表示式是

$$\begin{aligned} a^0 &= \frac{a}{|a|} = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k \\ &= \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} \end{aligned}$$

即 a 的单位向量的坐标等于它的方向余弦.

坐标轴上单位向量的坐标表示式是 $i = \{1, 0, 0\}, j = \{0, 1, 0\}, k = \{0, 0, 1\}$

若有两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标表示式是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} &= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \\ &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{模:} \\ \text{方向余弦:} \end{array} \right. \quad |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|},$$

利用向量的坐标表示式, 可以把向量的代数运算转化为数量(坐标)的代数运算.

设 $a = \{a_x, a_y, a_z\}, b = \{b_x, b_y, b_z\}$, 实数 λ ,

则 $a \pm b = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$

即两向量之和(差)的坐标就是原来两向量的相应的坐标之和(差) $\lambda a = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$

所以数量乘向量等于以该数量乘向量的所有坐标.

4. 向量的标积、向量积与混合积

向量的标积(点积)

定义 $a \cdot b = |a||b|\cos\varphi$, 其中 φ 为 a 与 b 的夹角.

坐标表示式 设 $a = \{a_x, a_y, a_z\}, b = \{b_x, b_y, b_z\}$

则 $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

由定义可知 i) 向量 a 在向量 b 上的投影为

$$a_b = \frac{a \cdot b}{|b|}$$

$$\text{ii) } \cos\varphi = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

iii) 如 a 与 b 都不是零向量则 $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$ 或 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

运算规律 (i) 交换律 $a \cdot b = b \cdot a$

(ii) 结合律 $a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b)$

(iii) 分配律 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

向量的向量积(叉积)

定义 两向量 a 与 b 的向量积, 记作 $a \times b$, 是另一个向量 $c, c = a \times b$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{模: } |c| = |a||b|\sin\varphi, \text{ 其中 } \varphi \text{ 是 } a \text{ 与 } b \text{ 的交角;} \\ \text{方向: 同时垂直于 } a \text{ 与 } b, \text{ 且 } a, b, c \text{ 构成右手系.} \end{array} \right.$

坐标表示式 设 $a = \{a_x, a_y, a_z\}, b = \{b_x, b_y, b_z\}$

$$\begin{aligned} \text{则 } a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

由定义可知

(i) $a \times b$ 等于以 a, b 为边的平行四边形面积

$$(ii) \sin \varphi = \frac{|a \times b|}{|a||b|}$$

$$(iii) a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0 \text{ 或 } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

运算规律 i) 反交换律 $a \times b = -b \times a$

ii) 与数乘的结合律 $a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$

iii) 分配律 $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

向量的混合积

定义 $(a \times b) \cdot c$ 称为向量 a, b, c 的混合积.

坐标表示式

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

几何意义

$(a \times b) \cdot c$ 等于以 a, b, c 为棱的平行六面体体积.

性质 (i) 顺次轮换三向量, 其混合积不变. 即

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$$

(ii) 交换任何两向量, 混合积变号. 如

$$(a \times b) \cdot c = - (b \times a) \cdot c$$

(iii) a, b, c 共面 $\Leftrightarrow (a \times b) \cdot c = 0$ 或

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

二、平面

1. 平面方程的不同表达形式

(1) 一般式 $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

(2) 点法式 过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 以 $n = \{A, B, C\}$ 为法线向量的平面方程是

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(3) 三点式 过不在一条直线上的三点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ 的平面方程是

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

(4) 截距式 设 a, b, c 分别是平面在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的截距, 则平面方程是 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

(5) 法线式 以 $n_0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 为单位法线向量且与原点距离为 ρ 的平面方程是 $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \rho = 0$

2. 两平面的交角以及平行、垂直条件

两平面的法线向量的交角定义为两平面的交角.

设已知两平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, 则这两平面角的交角为

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

垂直条件 $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

平行条件 $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

3. 点到平面的距离

设已知平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 及平面外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则点 P_0 到平面的距离为

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

注意 这个公式可用来(i) 求到二平行平面等距离的点的轨迹方程(ii) 求两平面交角的等分平面的方程.

4. 平面束

通过一条直线 l 的所有平面构成的集合称为平面束, 直线 l 称为平面束的轴.

设 l 的方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

则通过 l 的平面束的方程是

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 μ, λ 为实数, 且 $\mu^2 + \lambda^2 \neq 0$, $(\mu A_1 + \lambda A_2)^2 + (\mu B_1 + \lambda B_2)^2 + (\mu C_1 + \lambda C_2)^2 \neq 0$.

注意 利用平面束方程, 在给定的条件下, 求解平面方程是很有用的.

三、空间的直线

1. 空间直线方程的不同表达形式

(1) 一般式
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

显然, 这一条直线正是相应的两个平面的交线.

(2) 两点式 过 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线方程是
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

(3) 对称式

过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 直线的方向向量为 $\{l, m, n\}$ 的直线方程是
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

(4) 参数方程

在对称式条件下, 令
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$$

立即得到直线的参数方程
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

2. 两直线的夹角、平行、垂直、共面条件

两直线的夹角定义为两直线的方向向量的夹角

设有直线 $L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$

$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$

则两直线的夹角为

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

垂直条件 $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

$$\text{平行条件} \quad L_1 // L_2 \iff \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\text{共面条件} \quad L_1, L_2 \text{ 共面} \iff \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

注意 两直线共面与两向量共面的概念不完全一样,两直线共面要求它们必须同时在一平面上,而向量是可以平行移动的.

3. 点到直线的距离

$$\text{设已知点 } P_1(x_1, y_1, z_1) \text{ 和直线 } L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

则点 P_1 到直线 L 的距离 d 为

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0 P_1} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}$$

$$= \frac{\sqrt{\left| \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}|^2 + \left| \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}|^2 + \left| \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

其中 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是直线 L 上的一点 $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$.

4. 直线与平面的交角、垂直、平行条件

直线 L 与它在平面 π 上投影直线所成的夹角称为直线 L 与平面 π 的交角.

设已知平面 π : $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\text{直线 } L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$\text{则} \quad \sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

直线与平面平行 $\iff Al + Bm + Cn = 0$

直线与平面垂直 $\iff \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$

四、曲面与空间曲线

1. 曲面与空间曲线方程

含有变量 x, y, z 的方程

$$F(x, y, z) = 0$$

如果这个方程当且仅当 $P(x, y, z)$ 为曲面 K 上的点时,才为 P 点的坐标所满足,我们就称这个方程为曲面 K 的方程,而把 K 称为方程的图形.

曲面方程有时会表示成 $z = f(x, y)$ 或 $y = g(x, z)$ 或 $x = h(y, z)$

关于常用的二次曲面及其图形见 2.

$$\text{曲面也可用参数方程表示:} \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \text{变量 } u, v \text{ 叫做参数}$$

$$\text{空间曲线 } l \text{ 的一般式为} \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

如 $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ 分别是曲面 K_1, K_2 的方程,那这一表达形式显然是指它是 K_1, K_2 交线的方程.

从 l 的方程组中,如消去 z 得方程 $F(x, y) = 0$,这是母线平行于 z 轴的柱面方程,故 l 在 xoy 平面上的投影曲

线方程为
$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

同理
$$\begin{cases} G(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

是 l 在 $yo z$ 平面上的投影曲线方程
$$\begin{cases} H(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

是 l 在 zox 平面上的投影曲线方程.

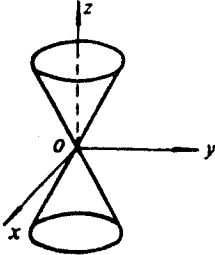
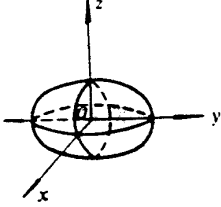
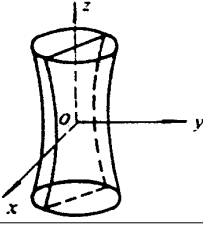
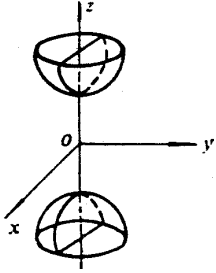
空间曲线的另一种表达形式是参数方程
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

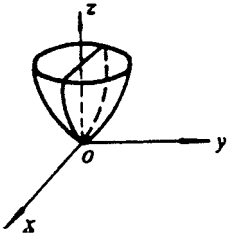
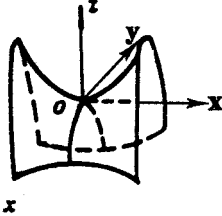
譬如,著名的螺旋线的参数方程是
$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = \nu t \end{cases}$$

由于 $x^2 + y^2 = a^2$,它始终在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上盘旋.

2. 二次曲面的方程与图形

曲面的方程和图形列于下表.

			图形
有心二次曲面	二次锥面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 当 $a = b$ 时是圆锥面	
	椭球面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 当 $a = b$ 时是以 oz 为轴的旋转椭球面	
	单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 当 $a = b$ 时是以 oz 为轴的单叶旋转双曲面	
	双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 当 $a = b$ 时是以 oz 为轴的双叶旋转双曲面	

		图形
抛 物 面	椭圆 抛物面	$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p, q > 0)$ 当 $p = q$ 时是以 oz 为轴的旋转抛物面 
	双曲 抛物面	$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z \quad (p, q > 0)$ 

§ 4 - 2 多元函数微分学的基本概念与理论

在下面的叙述中 ,以二元函数为主 ,但有时也会提到三元函数或其它多元函数.

一、极限

如果 x 与 y 在某一范围内任取一组值 ,变量 z 依某一确定法则有一个值与之对应 ,则称 z 为 x 与 y 的二元函数记作

$$z = f(x, y)$$

其中 x 与 y 称为自变量 , z 称为因变量 , x, y 的变化范围叫做函数的定义域 ,定义域是平面上的点集.

设 E 是平面上的点集 ,如 E 中任意两点 ,都可以用完全落在 E 内的折线连接起来 ,且 E 包括了自己的边界 ,则 E 称为闭区域 ,如 E 不包括自己的边界 ,则称为开区域. 我们以后 ,主要在开区域或闭区域上研究函数.

相似可定于三元函数

$$u = f(x, y, z)$$

甚至 n 元函数

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

三元函数的定义域是空间的一个区域.

二元函数 $z = f(x, y)$ 的几何意义是表示空间一个曲面.

1. 重极限

设 $f(x, y)$ 定义在 (x_0, y_0) 的邻域内 ,如任意给定一个正数 ε ,相应地必存在 $\delta > 0$,使得满足

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

的一切 (x, y) ,都有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ 成立 ,则称 A 是当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 的二重极限 ,记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

或

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$$

在二重极限中 ,要求 (x, y) 以任何方式趋于 (x_0, y_0) ,函数的极限都存在且极限值是 A ,这比一元函数的极限复杂得多 ,反之 ,如果当 (x, y) 以不同的方式趋向 (x_0, y_0) 时 $f(x, y)$ 趋向不同的数 ,就可断定它没有极限.

函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处有极限 ,它可以在这一点没有定义 ,这与一元函数的极限情况相同.

2. 累次极限

表达式 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = B$ 与 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = C$ 称为累次极限.

这里的 x 与 y 先后地趋近. 在求第一个极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 时, 是将 x 看成是 x_0 的邻域内的不动的点, 如果第一个极限存在, 再求第二个极限.

一般说来, 二重极限存在累次极限不一定存在, 累次极限存在二重极限也不一定存在, 第一个累次极限存在, 第二个也不一定存在.

但是如已知

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 存在, 则必有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

另一个累次极限也是如此.

二、连续性

如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ 则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续, $f(x, y)$ 在区域 D 内每一点连续, 则称 $f(x, y)$ 在区域 D 连续.

$f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续必须在 (x_0, y_0) 有定义 (极限存在不要求这一条件), 且有 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

容易证明 连续函数的和、差、积、商 (分母为零的点除外) 是连续函数, 连续函数的复合函数是连续函数.

对于一元函数, 在闭区间上连续就有很好的性质, 这些性质在多元函数中仍然保持.

最大最小值定理 如 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上连续, 则在 D 上必取得最大值和最小值.

介值定理 如 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上连续, $z_1 = f(x_1, y_1)$, $z_2 = f(x_2, y_2)$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 如 $z_1 < \xi < z_2$, 则

存在 $(x_0, y_0) \in D$, 使得 $f(x_0, y_0) = \xi$, 特别 $f(x, y)$ 可取得最大值与最小值之间的任何值.

重极限、累次极限与连续的定义, 易于推广到其它多元函数上去, 例如, 如果

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

我们就说三元函数 $f(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 连续.

三、偏导数

1. 一阶偏导数

定义 设 $z = f(x, y)$ 定义于含有点 (x_0, y_0) 的某一区域 D , 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称极限值为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 对 x 的偏导数, 记作 $f'_x(x_0, y_0)$ 、 $z'_x(x_0, y_0)$ 、 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}$ 或

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}$, 即

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

同样可定义

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

当函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 有偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 时, 称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可导. 如果函数 $f(x, y)$ 在 D 域的每一点均可导, 就说函数 $f(x, y)$ 在 D 域可导, 或者说 $f(x, y)$ 是在 D 域的可导函数. 这时, 对应于 D 域的每一组 (x, y) 值 $f(x, y)$ 必有一个对 x 及对 y 的偏导数, 因而在 D 域确定了一个新的二元函数, 称为 $f(x, y)$ 对 x (及对 y) 的偏导函数, 简称为偏导数, 记作

$$f'_x(x, y), z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\left(f'_y(x, y), z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

计算方法 所谓偏导数就是把 $f(x, y)$ 中的一个自变量固定, 而将二元函数 $f(x, y)$ 看作另一个变量的一元函数的导数. 所以求偏导数时, 只须对所讨论的变量求导, 而把其余的变量看作常数, 于是, 一元函数的微分法可以用到二元函数上来.

几何意义 偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 是表示曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的截线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 (x_0, y_0, z_0) ($z_0 = f(x_0, y_0)$) 处的切线的斜率

$$f'_x(x_0, y_0) = \tan \alpha$$

同理 $f'_y(x_0, y_0) = \tan \beta$, 见(图4-1).

注意 (i) 如果引用变化率的概念, 偏导数 $f'_x(x, y)$ 或 $f'_y(x, y)$ 可以看作是二元函数 $f(x, y)$ 当自变量 x 变化而 y 不变, 或 y 变化而 x 不变时所引起的瞬时变化率. (ii) 函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可导, 在该点不一定连续. 这是因为偏导数 $f'_x(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$ 存在与否, 只须考虑函数在两条特殊线段上的点的函数值, 而函数在一点连续, 需要考虑在该点某一邻域内的所有点的函数值. 这不同于一元函数可导必连续的结论. 函数在一点连续但在该点不一定可导, 这与一元函数的情形相类似.

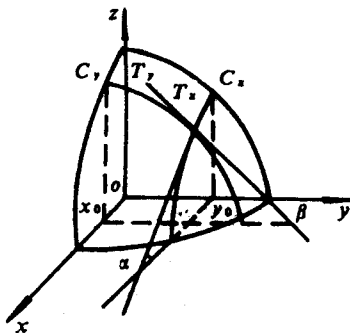


图4-1

2. 高阶偏导数

如果二元函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f'_x(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$ 仍然可导, 那么它们的偏导数称为函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数, 记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xy} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yx}$$

可以证明, 如果在 (x_0, y_0) 的邻域内 $f_{xy}(x, y)$ 与 $f_{yx}(x, y)$ 连续, 那么在该邻域内求导的结果与先后次序无关, 即 $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, 这样, 二元函数的二阶偏导数就只须算三个了.

一般地说, $n-1$ 阶偏导数的偏导数称为 n 阶偏导数. 二元函数 $z = f(x, y)$ 的任意 n 阶偏导数, 在连续的条件下, 总可以通过交换求导次序化为 $\frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$, 即先对 x 求 k 阶偏导数, 然后再对 y 求 $n-k$ 阶偏导数, 其中 k 取 $0, 1, 2, \dots, n$. 这样, 我们可以用 $n+1$ 个偏导数来表示所有的 n 阶偏导数.

四、全微分

1. 全增量

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻域内有定义, 分别给自变量 x 与 y 以增量 Δx 与 Δy , 那么相应的函数值之差

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

称为 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 对应于自变量的增量 Δx 与 Δy 的全增量.

2. 全微分

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 有偏导数 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, 表达式 $f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$ 如果与全增量 Δz

之差当 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$ 时是一个比 ρ 高阶的无穷小量,即

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o\rho \quad (*)$$

(其中当 $\rho \rightarrow 0$ 时 $o\rho \rightarrow 0$) 成立,就称该表达式为函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 关于 Δx 及 Δy 的全微分,记作 dz 或 $df(x, y)$,记自变量的微分 $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. 于是

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

当函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 有全微分 dz 时,称 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微. 从 $(*)$ 式可看到,当 $\rho \rightarrow 0$ 时 $\Delta z \rightarrow 0$,所以函数若在一点可微,则必在该点连续.

几何意义 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于 Δx 及 Δy 的全微分,是该函数所表示的曲面在 (x_0, y_0, z_0) 的切平面当自变量分别有增量 Δx 与 Δy 时的竖坐标增量.

极限、连续、可导、可微是多元函数微分学的基本概念,必须深刻理解、掌握,偏导数的运算是基本运算,必须熟练、扎实的掌握. 在一元函数中,也有连续、可导、可微这三个概念,但它们的关系是清晰的,可微与可导等价;可导的必要条件是连续,而在多元函数中,它们的关系错综复杂,连续不一定可导;可导不一定连续,可微一定可导,但可导不一定可微,但是,连续可导一定可微.

这需要我们清楚理解它们的定义以及相互的联系与区别,现将它们之间的关系用图 4-2 表示,图中箭头 $\rightarrow$ 表示可以推得, $\nrightarrow$ 表示不可以推得.

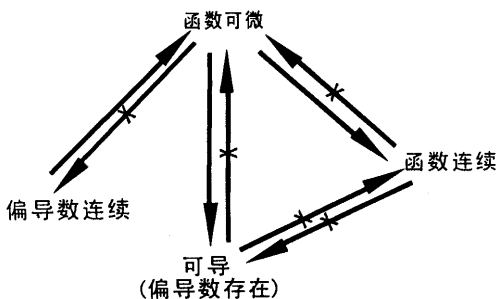


图 4-2

3. 方向导数

定义 如果极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

存在,称极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 沿 l 方向的方向导数,记作 $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{(x_0, y_0)}$,即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{(x_0, y_0)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

其中 $\rho = |P_0 P| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (如图 4-3)

计算公式 对于二元可微函数,有

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 是 l 的方向余弦.

对于三元可微函数 $u = f(x, y, z)$,有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{(x_0, y_0, z_0)} = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma$$

其中 α, β, γ 分别是 l 与 x, y, z 轴正向的夹角, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 l 的方向余弦.

这里的 $\rho = |P_0 P| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 总是正的,因此,所说的方向导数是一种单向极限,而在偏导数中的 Δx 与 Δy 的值可正可负,所以都是一种双向极限. 但方向导数,也只是考虑在点 $P_0(x_0, y_0)$ 邻近且在过点 P_0 以 l 为方向的直线上的点 $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 这是与偏导数相类似的.

可导、可微概念可以推到其它多元函数,特别是三元函数 $u = f(x, y, z)$,譬如

$$f'_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$du = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz$$

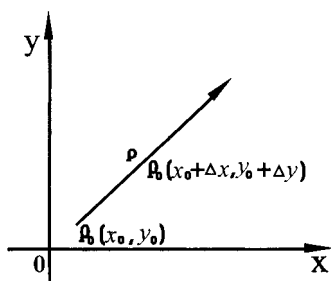


图 4-3

§ 4 - 3 多元函数微分法

一、偏导数公式

设 $Z = f(u, v)$, $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$ 则

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (4.1)$$

变量分析图 (如图 4 - 4) 所示求复合函数的偏导数, 重要的是要分清自变量、中间变量、因变量之间的复合关系, 变量分析图可帮助我们正确地使用和记忆公式 (4.1).

如 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(x)$, 实际上 z 成为 x 的函数, 上述偏导数公式成为全导数公式

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} \quad (4.2)$$

如变量分析图 4 - 5 所示.

特别若 $z = f(x, v)$, $v = \varphi(x)$ 则 (4.2) 成为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}$$

(如图 4 - 6) 所示

二、隐函数的微分法

(1) 设 $F(x, y) = 0$, 当 $F'_y \neq 0$ 时 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$

$$\text{当 } F'_x \neq 0 \text{ 时, } \frac{dx}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x}$$

(2) 设 $F(x, y, z) = 0$, 当 $F'_z \neq 0$ 时,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

(3) 设方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

确定 y, z 为 x 的函数 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}$$

其中 $J = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} \neq 0$ 称为雅可比行列式.

三、一阶全微分与二阶全微分

设 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ 则

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \quad (4.3)$$

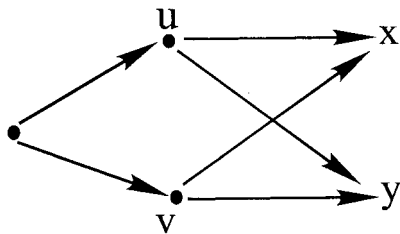


图 4 - 4

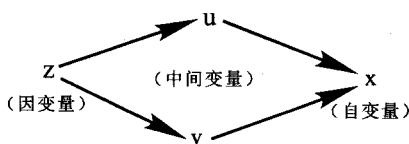


图 4 - 5



图 4 - 6

即不论 u 与 v 是自变量或是中间变量 $z = f(u)$ 的一阶全微分总保持同一形式, 称为一阶微分形式不变性.

利用全微分形式不变性可以证得全微分的和、差、积、商运算公式为

$$d(u \pm v) = du \pm dv, d(uv) = vdu + udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} (v \neq 0)$$

再来考虑二阶全微分

设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数, 又 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, 则 $d(dz) = d^2z$ 为 $f(x, y)$ 的二阶微分. 在

求 d^2z 的过程中 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 仍然是 x, y 的函数, 但 dx, dy 被看作常数, 于是有

$$d^2z = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

$$\stackrel{\text{(记)}}{=} \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z$$

如果 x, y 是中间量, 则

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y$$

这个结果表明, 高阶微分不具有微分形式不变性.

四、由参数方程确定的函数的微分法

设参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

确定了函数 $z = f(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时, 可对上述三个方程分别在等式两边对 x 求偏导数, 同时把 u, v 看作是 x, y 的函数

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

由前两个方程, 解出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$, 再代入第三式中, 即得 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 的计算公式.

同理由

$$0 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$1 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

从前两个方程, 解出 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, 再代入第三式中, 即得 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的计算公式.

§ 4 - 4 多元函数微分学的应用

一、空间曲面的切平面与法线

设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$, 则在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处切平面方程是

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程是

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

法线方程也可写为参数方程的形式

$$\begin{cases} x = x_0 + F'_x(x_0, y_0, z_0)t \\ y = y_0 + F'_y(x_0, y_0, z_0)t \\ z = z_0 + F'_z(x_0, y_0, z_0)t \end{cases}$$

在偏导数中有一个或二个为零时, 这样写合适一些.

如曲面方程是 $z = f(x, y)$, 可看成上面情况的特殊情形, 这时切平面方程是

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

法线方程是

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

或

$$\begin{cases} x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t \\ y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t \\ z = z_0 - t \end{cases}$$

二、空间曲线的切线与法平面

1. 设空间曲线有参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

这里 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 都是可导函数, 又 $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ 是曲线上的一点, 且 $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0) \neq 0$, 则在 P_0 处的切线方程是

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

或

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(t_0)(x - x_0) \\ y = y_0 + y'(t_0)(y - y_0) \\ z = z_0 + z'(t_0)(z - z_0) \end{cases}$$

法平面的方程则是

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

2. 设空间曲线方程是

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

也就是两个曲面的交线, 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在曲线上, 则曲线在 P_0 处的切线方程是

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0}}$$

或相应的参数方程.

在 P_0 处的法平面方程是

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0} (x - x_0) + \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0} (y - y_0) + \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0} (z - z_0) = 0$$

这里

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0} = \begin{vmatrix} F'_y(x_0, y_0, z_0) & F'_z(x_0, y_0, z_0) \\ G'_y(x_0, y_0, z_0) & G'_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}$$

其它两个符号含义相同.

三、二元函数的泰勒公式

设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数, 点 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 是该邻域内的任一点, 则二元函数的泰勒公式是

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right) f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f(x_0, y_0) + R_n(*) \end{aligned}$$

其中 $R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) (0 < \theta < 1)$ 称为拉格朗日余项, 这里的记号:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f(x_0, y_0) = \sum_{k=0}^n C_n^k (\Delta x)^k (\Delta y)^{n-k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \bigg|_{(x_0, y_0)}$$

当 $n=0$ 时, 公式(*)成为

$$\begin{aligned} &f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x + f'_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y \end{aligned} \quad (0 < \theta < 1)$$

称为二元函数的拉格朗日中值公式.

我们注意到二元函数的泰勒公式是一元函数泰勒公式的推广, 它建立了自变量的改变量、函数的改变量与偏导数之间的联系. 在一点的邻域内用该点的各阶导数作出一个相应的多元多项式去近似表达一个多元函数, 这就是泰勒公式的基本思想.

四、二元函数的极值

1. 定义 设 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义, 对这个邻域内所有的点 (x, y) 有

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 有极大值 $f(x_0, y_0)$, 如果在邻域内, 有

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 有极小值 $f(x_0, y_0)$, 使函数取得极值的点称为极值点.

极值点是局部概念, 不等式只要求在局部范围内成立.

2. 极值的必要条件

可导函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值的必要条件是 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

使 $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$ 的点 (x, y) 称为驻点, 对于可导函数来说, 极值点必定是驻点, 但函数的驻点不一定是极值点. 例如 $z = x^2 - y^2$, $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = -2y$. 两者在 $(0, 0)$ 处都为零, 但 $z = x^2 - y^2$ 在 $(0, 0)$ 既无极大值也无极小值.

极值也可能在偏导数不存在的点产生.

3. 极值的充分条件

设 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域内有连续的二阶偏导数, 且 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, 令 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, 则

(1) 若 $B^2 - AC < 0$, 则 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 有极值.

i) $A > 0$ (或 $C > 0$) $f(x_0, y_0)$ 为极小值;

ii) $A < 0$ (或 $C < 0$) $f(x_0, y_0)$ 为极大值.

(2) 若 $B^2 - AC > 0$, 则 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 不取得极值.

(3) 若 $B^2 - AC = 0$, 不能判断能否取得极值.

4. 条件极值

(1) 定义 如果在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内, 对于满足条件 $\varphi(x, y) = 0$ 的点 (x, y) , 有不等式

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \text{ (或 } f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \text{)}$$

则称点 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极大值点 (或极小值点).

由于 $\varphi(x, y) = 0$ 在 xoy 平面上一般表示一条曲线, 所以, 条件极值实际上就是把函数 $z = f(x, y)$ 的定义域限制在这条曲线上, 从这些点中找出极值点.

(2) 拉格朗日乘数法

设 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ 有连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 不同时为零, 作辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ (λ 为参数), 并解联立方程组

$$\begin{cases} F'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

求出函数 $F(x, y, \lambda)$ 的驻点 (x_0, y_0, λ_0) , 则 (x_0, y_0) 就是函数在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点.

这样, 我们便将条件极值问题化成了无条件极值问题, 再利用其它的条件, 判断点 (x_0, y_0) 是极大值点或是极小值点.

注意 在拉格朗日乘数法中, 自变量的地位是相同的, 即没有认为 y 是 x 的函数, 或 x 是 y 的函数, 用不着复合函数微分法, 并可避免从条件 $\varphi(x, y) = 0$ 中解出 $y = y(x)$ 来的困难, 但必须注意, 在点 (x_0, y_0) 处 φ_x 和 φ_y 应不同时为零, 才能应用拉格朗日乘数法.

最大值与最小值

与一元函数一样, 多元函数的最大、最小值也是通过求极值而得到的. 连续函数 $z = f(x, y)$ 在闭区域上的最大值 (或最小值) 的求法可按以下步骤进行:

(1) 求出函数 $f(x, y)$ 在区域内部的所有驻点, 并计算出函数在这些点上的值; (2) 求出函数 $f(x, y)$ 在区域的边界上的最大 (或最小) 值. 前面曾经指出, 由于区域一般是由一条或几条曲线围成的, 所以当二元函数被限制在这些曲线上时, 往往成为一元函数, 而求一元函数的最大 (或最小) 值的方法已为读者熟知; (3) 将在 (1) 和 (2) 中得到的所有数值进行比较, 最大 (或最小) 者即为最大 (或最小) 值.

在解决实际问题时, 有时可根据问题的实际意义, 直接判断在驻点处达到了最大 (或最小) 值.

这里的极值与驻点的定义以及极值的必要条件都易于推广到其它多元函数.

例如, 三元函数

$$u = f(x, y, z)$$

在 (x_0, y_0, z_0) 取得极值的必要条件是

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

§ 4 - 5 典型例题分析与最新考试题型预测

一、空间解析几何与向量代数

典型题型 1. 向量运算、直线与平面方程

例 1 已知矢量 a, b 不共线, 试求它们角平分线上的单位矢量 c^0

分析 由初等几何知道菱形的角平分线和对角线是重合的, 因此, 若能求得两个模相等且分别与矢量 a, b 同向的矢量, 则可用矢量的加法运算求得 a, b 夹角平分线上的矢量.

解 设 a, b 矢量的单位矢量分别为

$$a^0 = \frac{a}{|a|} \quad b^0 = \frac{b}{|b|}$$

则 $a^0 + b^0$ 是 a, b 的夹角平分线上的矢量. 故

$$c^0 = \pm \frac{a^0 + b^0}{|a^0 + b^0|} = \pm \frac{\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}}{\left| \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} \right|} = \pm \frac{\frac{|b|}{|b|} \frac{a}{|a|} + \frac{|a|}{|a|} \frac{b}{|b|}}{\left| \frac{|b|}{|b|} \frac{a}{|a|} + \frac{|a|}{|a|} \frac{b}{|b|} \right|}$$

即 a, b 角平分线上存在两个方向相反的矢量.

例2 在三角形 ABC 的 BC 边上取点 P , CA 边上取点 Q , AB 边上取点 R , 试求以矢量 AP, BQ, CR 为边构成三角形的条件

解 如果 a, b, c 构成三角形, 则有 $a + b + c = 0$, 因此, 本题即是要寻求选取分点 P, Q, R 使等式 $AP + BQ + CR = 0$ 成立的条件

设由三条边上的点所截取的线段之比为

$$\lambda = \frac{AR}{AB} \quad \mu = \frac{BP}{BC} \quad \nu = \frac{CQ}{CA}$$

或 $AR = \lambda AB, BP = \mu BC, CQ = \nu CA$

于是

$$AP = AB + BP = AB + \mu BC$$

$$BQ = BC + CQ = BC + \nu CA$$

$$CR = CA + AR = CA + \lambda AB$$

将上述三式相加, 得

$$AP + BQ + CR = AB + BC + CA + \lambda AB + \mu BC + \nu CA \quad (1)$$

由 $AB + BC + CA = 0$

$$AP + BQ + CR = \lambda AB + \mu BC + \nu CA \quad (2)$$

如果矢量 AP, BQ, CR 为边构成一个三角形, 那么, $AP + BQ + CR = 0$, 故有

$$\lambda AB + \mu BC + \nu CA = 0$$

从(1)式得 $CA = -AB - BC$, 于是上式成为

$$\lambda AB + \mu BC + \nu(-AB - BC) = 0$$

或 $(\lambda - \nu)AB = (\nu - \mu)BC$

但由于 AB 与 BC 不共线, 故必有 $\lambda - \nu = 0, \nu - \mu = 0$, 即 $\lambda = \mu = \nu$, 从而得到结论: 若矢量 AP, BQ, CR 构成三角形, 则在各边上取的分点 P, Q, R 所截成的线段与边成定比, 即

$$\frac{AR}{AB} = \frac{BP}{BC} = \frac{CQ}{CA} \quad (3)$$

反之, 若结论成立, 则由(2)式得

$$AP + BQ + CR = \lambda(AB + BC + CA)$$

而由(1)式可知 $AP + BQ + CR = 0$, 即点 P, Q, R 的取法若满足(3)式, 则以矢量 AP, BQ, CR 为边可构成一个三角形.

例3 设矢量 $a = \{1, -1, 1\}, b = \{3, -4, 5\}, x = a + \lambda b, \lambda$ 为实数, 试证使模 $|x|$ 最小的矢量 x 垂直于矢量 b .

证明 设 $x = a + \lambda b$, 于是

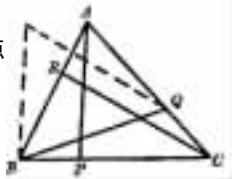
$$|x|^2 = (a + \lambda b)^2 = |a|^2 + \lambda^2 |b|^2 + 2\lambda a \cdot b$$

将 $|a|^2 = 3, |b|^2 = 50, a \cdot b = 12$ 代入, 得 $|x|^2 = 3 + 24\lambda + 50\lambda^2 = 50(\lambda + \frac{6}{25})^2 + \frac{3}{25}$, 由此可知, 当

$\lambda = -\frac{6}{25}$ 时, 模 $|x|$ 为最小, 所以

$$x = a - \frac{6}{25}b$$

$$= \{1, -1, 1\} - \frac{6}{25}\{3, -4, 5\}$$



$$= \left\{ \frac{7}{25}, -\frac{1}{25}, -\frac{5}{25} \right\}$$

由 $x = \left\{ \frac{7}{25}, -\frac{1}{25}, -\frac{5}{25} \right\}$ $b = \{3, -4, 5\}$ 故

$$x \cdot b = \frac{7}{25} \times 3 - \frac{1}{25} \times (-4) - \frac{1}{5} \times 5 = 0$$

即 $x \cdot b = 0$

所以使模最小的矢量 $x = a - \frac{6}{25}b$ 垂直于矢量 b

例4 已知三个不共面的三维矢量 a, b, c 在两个不同的轴 l, m 上投影为 $a_l = 2, b_l = -1, c_l = 5, a_m = -3, b_m = 2, c_m = 4$. 试求同时垂直于两个轴 l, m 的矢量 d .

解 设所求的矢量为 $d = \lambda a + \mu b + \nu c$, 则由 d 垂直于 l 和 m 故有 $d_l = d_m = 0$ (注 d_l 和 d_m 分别表示矢量 d 在 l 轴和 m 轴上的投影)

$$\text{即 } (\lambda a + \mu b + \nu c)_l = 0$$

$$\text{而 } (\lambda a + \mu b + \nu c)_l = \lambda a_l + \mu b_l + \nu c_l$$

$$\text{故 } 2\lambda - \mu + 5\nu = 0 \quad (1)$$

$$\text{又 } (\lambda a + \mu b + \nu c)_m = \lambda a_m + \mu b_m + \nu c_m = 0$$

$$\text{从而 } -3\lambda + 2\mu + 4\nu = 0 \quad (2)$$

由(1)和(2)解得

$$\lambda = -14\nu \quad \mu = -23\nu$$

所以, 同时垂直于 l 轴和 m 轴的矢量为

$$d = \nu(-14a - 23b + c)$$

其中 ν 为任意非零实数.

例5 一直线过点(1, 1, 1)和直线

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \quad L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$$

相交, 求它的方程.

解 所求直线 L 过(1, 1, 1) 故方程为

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-1}{n}.$$

L 与 L_1 相交, 而(1, 1, 1) $\in L$, (0, 0, 0) $\in L_1$ 故三向量(1, m , n), (1, 2, 3), (1 - 0, 1 - 0, 1 - 0) 共面, 于是

$$\begin{vmatrix} 1 & m & n \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即 } 1 - 2m + n = 0 \quad (1)$$

同理 L 与 L_2 相交, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & m & n \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即 } m - n = 0 \quad (2)$$

由 (1), (2) 解得

$$l : m : n = 1 : 1 : 1$$

因此, 通过点(1, 1, 1) 且与 L_1, L_2 共面的直线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

例6 设 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ 为有共同始点 o 的三个非零向量, 试证 $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = 0$ 的必要充分条件是 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ 的终点在一条直线上.

证明 必要性

因为 $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = 0$

$$\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 = 0$$

即 $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$

由此可知, 向量 $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 与 $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ 共线, 但因向量 $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 与 $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ 有共同的始点, 所以 $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 与 $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ 在同一直线上, 因而三向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ 的终点在同一直线上.

充分性

若向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ 的终点在同一条直线上, 则有

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

即 $\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 = 0$

由向量的向量积性质知, 上式即为

$$\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 0$$

例 7 已知两非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互相垂直, 今将 $\vec{b}$ 绕 $\vec{a}$ 右旋 θ 角得到向量 $\vec{c}$, 试将 $\vec{c}$ 用给定的 $\vec{a}, \vec{b}$ 及 θ 表出.

解 取直角坐标系, 不妨设

$$\vec{a} = a\vec{k} \quad \vec{b} = b\vec{i}$$

(如图 4-7) 注意到 $\vec{c}$ 的模 $c = b$, 从而

$$\vec{c} = c\cos\theta\vec{i} + c\sin\theta\vec{j} = b\cos\theta\vec{i} + b\sin\theta\vec{j}$$

$$= (b\cos\theta)\frac{\vec{b}}{b} + b\sin\theta(\vec{k} \times \vec{i})$$

$$= (b\cos\theta)\frac{\vec{b}}{b} + b\sin\theta\left(\frac{\vec{a}}{a} \times \frac{\vec{b}}{b}\right)$$

$$= (\cos\theta)\vec{b} + \frac{\sin\theta}{a}(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$= (\cos\theta)\vec{b} + \frac{\sin\theta}{|\vec{a}|}(\vec{a} \times \vec{b})$$

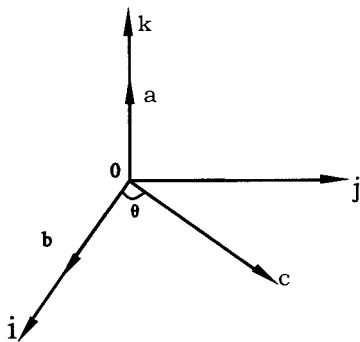


图 4-7

例 8 与两直线

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

及 $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行, 且过原点的平面方程为_____.

分析 平面平行于二直线, 它的法线应垂直于二直线.

解 平面的法向量可取为

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

据点法式, 平面方程为

$$-1 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 0) = 0$$

即 $x - y + z = 0$

应填 $x - y + z = 0$

例 9 (91 3 分) 已知两条直线的方程是

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1},$$

$$L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1},$$

则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是_____.

解 平面的法向量即垂直 L_1 又垂直 L_2 , 故可取

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

(1, 0, -1) 在平面上, 故方程为

$$(x-1) - 3(y-0) + (z+1) = 0$$

即 $x - 3y + z = 0$ 应填 $x - 3y + z = 0$

例 10 (06 4 分) 点(2, 1, 0) 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $d =$ _____.

$$\text{解 } d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \sqrt{2}.$$

例 11* 求过直线 $\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$ 且与平面 $\pi_1: x - 4y - 8z + 12 = 0$ 交成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

解法一 从所有过已知直线的平面中, 选择一个平面, 使它与已知平面 π_1 交成 $\frac{\pi}{4}$ 角, 即可求得该平面方程.

经过已知直线的平面方程可写成

$$\lambda(x + 5y + z) + \mu(x - z + 4) = 0$$

即 $(\lambda + \mu)x + 5\lambda y + (\lambda - \mu)z + 4\mu = 0$

现在要求出 $\lambda : \mu$ 的值, 使这个平面与它已知平面 π_1 交成 $\frac{\pi}{4}$ 的交角.

用 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 分别表示两平面的法线向量, 则

$$\vec{n}_1 = \{1, -4, -8\}, \quad \vec{n}_2 = \{\lambda + \mu, 5\lambda, \lambda - \mu\}$$

由两平面的夹角的计算公式

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|-9(3\lambda - \mu)|}{9 \sqrt{27\lambda^2 + 2\mu^2}} = \frac{|3\lambda - \mu|}{\sqrt{27\lambda^2 + 2\mu^2}}$$

即 $\frac{|3\lambda - \mu|}{\sqrt{27\lambda^2 + 2\mu^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 解得 $\lambda = 0$ 及 $\lambda : \mu = -4 : 3$, 于是所求平面方程为

$$x - z + 4 = 0 \text{ 或 } x + 20y + 7z - 12 = 0$$

解法二 因为平面过已知直线, 则直线上任一点, 例如点 $(0, -\frac{4}{5}, 4)$ 在所求平面上, 因此只须求出平面的法线向量, 即可求得平面方程, 读者可试用此法求解.

例 12* 试求过点 $M(1, 1, \sqrt{2})$ 和 oz 轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 且与直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

解 现已知直线过 M , 故只需利用与 oz 轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角和与已知直线相交的条件求出其方向向量, 就能得到所求的直线方程.

设所求直线方程为

$$x = lt + 1, \quad y = mt + 1, \quad z = nt + \sqrt{2} \quad (1)$$

由于直线和 oz 轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 故由两直线的夹角公式可得

$$\frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

即

因为所求直线与已知直线相交, 故有

$$\frac{lt - 1}{1} = \frac{mt}{2} = \frac{nt + \sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

即

$$2(lt - 1) = mt \quad (4)$$

由(3)式, 得 $t = \frac{2}{2l - m}$, 代入(4)式整理为

$$2\sqrt{2}l - (2 + \sqrt{2})m + 2n = 0 \quad (5)$$

联立(2),(5)两式,解得

$$l : m : n = 1 : \sqrt{2} : 1$$

或

$$l : m : n = 23 : (60 - 35\sqrt{2}) : (25 - 28\sqrt{2})$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{z-\sqrt{2}}{1}$$

或

$$\frac{x-1}{23} = \frac{y-1}{60-35\sqrt{2}} = \frac{z-\sqrt{2}}{25-28\sqrt{2}}$$

例 13* 试求两直线

$$L_1 : \begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z - 3 \end{cases} \text{ 与 } L_2 : \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = 7x + 2 \end{cases} \text{ 的公垂线方程.}$$

解 将已知直线化为对称式方程,有

$$L_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}, \text{ 方向向量为 } \vec{a}_1 = \{3, 2, 1\}$$

$$L_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-2}{7}, \text{ 方向向量为 } \vec{a}_2 = \{1, 2, 7\}$$

因为公垂线同时垂直于 L_1 和 L_2 , 所以它的方向向量为

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \{3, 2, 1\} \times \{1, 2, 7\} = \{12, -20, 4\}$$

下面求公垂线上一点, 设公垂线与 L_1 交于 P_1 , 与 L_2 交于 P_2 , 过 L_1 及 P_1P_2 作平面 π_1 , 因为 $P_1P_2 \parallel \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, 所以过 L_1 且平行于 $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ 的平面即为 π_1 , 这时公垂线 P_1P_2 必是在 π_1 上的且垂直于 L_1 的直线, 因而平面 π_1 与 L_2 的交点 P_2 即为公垂线上的一点.

因为 π_1 过 L_1 且平行于 $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, 故它的法线向量为

$$n = \vec{a}_1 \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \{3, 2, 1\} \times \{12, -20, 4\} = \{28, 0, -84\}$$

在 L_1 上取一点 $(-1, -3, 0)$, 于是 π_1 的方程为

$$28(x+1) - 84z = 0 \quad \text{即} \quad x - 3z + 1 = 0 \quad (*)$$

现在求 π_1 与 L_2 的交点 P_2 的坐标, 把 L_2 化为参数方程(求直线与平面的交点用参数方程方便), 将

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 5 \\ z = 7t + 2 \end{cases}$$

代入平面方程(*)式, 得

$$t - 3(7t+2) + 1 = 0 \text{ 解得 } t = -\frac{1}{4}, \text{ 于是点 } P_2 \text{ 的坐标为 } x = -\frac{1}{4}, y = -\frac{11}{2}, z = \frac{1}{4}, \text{ 即 } P_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{2}, \frac{1}{4}\right),$$

故所求公垂线的方程为

$$\frac{x + \frac{1}{4}}{3} = \frac{y + \frac{11}{2}}{-5} = \frac{z - \frac{1}{4}}{1}$$

例 14 求直线

$$L_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \text{ 和 } L_2 : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

之间的距离.

解 两直线之间的距离是指它们之间的最短距离, 如果这最短距离是 L_1 上的点 P_1 到 L_2 上的点 P_2 的距离 $|P_1P_2|$, 那么 P_1P_2 就是 L_1 与 L_2 的公垂线上的线段.

因为 $L_1 \perp P_1P_2$ 且交于 P_1 , 故 L_1 上的点 M_1 在 P_1P_2 上的投影即为 P_1 , 同理 L_2 上的点 M_2 在 P_1P_2 上的投影即为点 P_2 , 因此, 所求最短距离是 M_1M_2 在 P_1P_2 上的投影长, 也就是在 $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ 上的投影长.

$$|P_1P_2| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

其中 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ 分别是直线 L_1, L_2 上的方向向量.

现将两直线方程写成对称式

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$$

方向向量为 $\vec{a}_1 = \{1, 0, -1\}$

及

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{-3}$$

方向向量为 $\vec{a}_2 = \{1, -4, -3\}$

取 $M_1(0, -1, 1)$, $M_2(-2, 1, 1)$, 于是

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{-2, 2, 0\}$$

而

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \right\} = \{-4, 2, -4\}$$

$$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} = 6$$

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (-4) \times (-2) + 2 \times 2 - 4 \times 0 = 12$$

所以 L_1 与 L_2 之间的最短距离为

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{12}{6} = 2$$

例 15* 试求通过点 $(-2, 0, 0)$ 和 $(0, -2, 0)$, 且与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 交成抛物线的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

因为平面过已知两点, 所以有

$$-2A + D = 0 \quad (1)$$

$$-2B + D = 0 \quad (2)$$

另一方面, 由圆锥截线的性质知, 和锥面交成抛物线的平面与锥面的一母线是平行的, 而已知锥面是圆锥面, 所以锥面上任一条母线与 xoy 坐标面都成定角 $\frac{\pi}{4}$, 则所求平面与 xoy 坐标面也成定角 $\frac{\pi}{4}$, 于是由两个平面的夹角公式得

$$\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理为 $A^2 + B^2 - C^2 = 0$

(3)

则(1), (2), (3)式解得

$$A = \frac{1}{2}D, \quad B = \frac{1}{2}D, \quad C = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}D$$

于是所求平面方程为

$$x + y + \sqrt{2}z + 2 = 0 \quad x + y - \sqrt{2}z + 2 = 0.$$

典型题型 2. 曲面方程与综合应用.

例 16* (98, 5分) 求直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 l_0 的方程, 并求 l_0 绕 y 轴一周所成曲面的方程.

解 过直线 L 作垂直于 π 的平面 π_1 , 由于 $(1, 0, 1) \in \pi_1$, 故 π_1 的方程可写成

$$A(x-1) + By + C(z-1) = 0$$

以 $\vec{n}$ 记 π 的法线向量, $\vec{n}_1$ 记 π_1 的法线向量, 由于 $L \perp \vec{n}_1$, $\vec{n}_1 \perp \vec{n}$, 有

$$\begin{cases} A + B - C = 0 \\ A - B + 2C = 0 \end{cases}$$

解得 $A : B : C = -1 : 3 : 2$, 于是 π_1 的方程为

$$x - 3y - 2z + 1 = 0$$

从而 l_0 的方程为

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

将 l_0 写成

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = -\frac{1}{2}(y - 1) \end{cases}$$

设 $(x, y, z) \in l_0$, 而 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 是 (x, y, z) 绕 y 轴旋转后圆周上的任一点, 由于绕 y 轴旋转 $\bar{y} = y$, $\bar{x}^2 + \bar{z}^2 = x^2 + z^2$ 于是

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 + \bar{z}^2 &= x^2 + z^2 = (2y)^2 + \left(-\frac{1}{2}(y - 1)\right)^2 \\ &= \frac{17}{4}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}\bar{y}^2 - \frac{1}{2}\bar{y} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

故旋转曲面的方程为

$$4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$$

例 17* (94 分) 已知 A 点与 B 点的直角坐标分别为 $(1, 0, 0)$ 与 $(0, 1, 1)$ 线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S , 求由 S 及两平面 $z = 0, z = 1$ 所围成立体的体积.

分析 此题无公式可直接使用, 但绕 z 轴旋转, 截面应是圆, 当 $z = \bar{z}$ 时, 如能求出圆面积 $S(\bar{z})$, 即可利用 $V = \int_0^1 S(\bar{z}) d\bar{z}$ 求出旋转体体积.

解 过 $A(1, 0, 0)$ 和 $B(0, 1, 1)$ 的直线方程为

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

即

$$\begin{cases} x = 1 - z \\ y = z \end{cases}$$

当 $z = \bar{z}$ 时, $(1 - \bar{z}, \bar{z}, \bar{z})$ 与 $(0, 0, \bar{z})$ 的距离 就是圆截面的半径

$$r(\bar{z}) = \sqrt{(1 - \bar{z})^2 + \bar{z}^2}$$

从而, 圆截面的面积是

$$S(\bar{z}) = \pi[(1 - \bar{z})^2 + \bar{z}^2] = \pi(1 - 2\bar{z} + 2\bar{z}^2)$$

故旋转体体积是

$$V = \int_0^1 S(\bar{z}) d\bar{z} = \int_0^1 \pi(1 - 2\bar{z} + 2\bar{z}^2) d\bar{z} = \frac{2}{3}\pi$$

评述 此题是综合题, 而且在考灵活应用, 既用到了空间解析几何知识又用到了定积分的公式, 值得注意.

二、多元函数微分学

典型题型 1. 多元函数的极限, 连续性.

例 1 求函数的定义域

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$$

解 确定一个二元函数的定义域, 就是要找出使函数关系式 $z = f(x, y)$ 有意义的 (x, y) 所组成的集合. 本题, 由根式性质可知, 使函数有意义的数 x 与 y 必须满足不等式

$$\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2} \geq 0$$

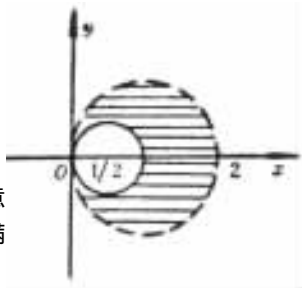


图 4 - 8

或它与等价的不等式组

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 - x \geq 0 \\ 2x - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \quad \text{或 } b) \begin{cases} x^2 + y^2 - x \leq 0 \\ 2x - x^2 - y^2 < 0 \end{cases}$$

由 a) 式得

$$x \leq x^2 + y^2 < 2x$$

而 b) 式为矛盾方程组, 所以, 函数的定义域为

$$x \leq x^2 + y^2 < 2x$$

如图(4-8)所示.

例 2* 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

解 由于 $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

(当 $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = 2\varepsilon$)

即 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

例 3 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

解 由于 $\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ 而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x = 0$

故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot x = 0$

例 4* 证明 对于函数

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \}$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} \{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \}$ 不存在, 然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$

证明 先证 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \}$ 不存在. 在累次极限中, x, y 是先后地变化, 所以它实质上是两次一元函数的单重极限. 在考察极限 $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 时, $f(x, y)$ 被看作 y 的一元函数. 对于函数 $f(x, y) = x \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, 由于

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \sin \frac{1}{y} = 0$$

所以 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x} (y \sin \frac{1}{y}) = 0$

但当 $x \neq 0, x \neq \pm \frac{1}{n\pi}$ 时, $\lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ 不存在, 所以当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 不存在, 从而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \}$ 不存在.

由对称性知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \}$ 也不存在.

以下证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$

要证明函数 $f(x, y)$ 当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时以 0 为极限, 由定义只须对于任意 $\delta > 0$, 找到一个 $\delta > 0$, 使满足不等式 $0 < \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 的一切点 (x, y) 都有

$$\left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} - 0 \right| = \left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| < \varepsilon$$

成立. 如何找 ε 与一元函数的情形一样, 我们的做法是反过来, 从 $\left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| < \varepsilon$ 出发, 作一些变化, 求出与 ε 有关的 δ .

由于 $|f(x, y) - 0| = |x + y| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \left| \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$ 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ 当 $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时, 有

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

此即 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

例 5 证明 对于函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

有 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, 然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

证明 设 $x \neq 0$, 由于分母的极限不为 0, 于是有

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{\lim_{y \rightarrow 0} x^2 y^2}{\lim_{y \rightarrow 0} (x^2 y^2 + (x - y)^2)} = \frac{0}{x^2} = 0$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

同理可证

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

当取路径 $x = 0, y \rightarrow 0$ 时, 有 $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = 0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$

当取路径 $x = y, y \rightarrow 0$ 时, 有 $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = y}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4} = 1$

由于取两条不同路径 $f(x, y)$ 不趋于一个确定的值, 故二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

例 6* 证明

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

分别对 x 和 y 是连续的, 但在原点不连续.

证明 考察 $f(x, y)$ 对 x 的连续性时 y 看作常数. 于是

当 $y_0 \neq 0$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2xy_0}{x^2 + y_0^2} = \frac{2x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0)$

当 $y_0 = 0$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0 = f(0, 0)$

所以 $f(x, y)$ 对变量 x 是连续的.

同理可证 $f(x, y)$ 对 y 也是连续的.

显然, 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时 $2xy$ 和 $x^2 + y^2$ 都是 x 与 y 的连续函数, 从而函数 $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ 也连续, 因此所给函数在除 $(0, 0)$ 以外的任一点处都是连续的. 而在点 $(0, 0)$ 处, 由于沿任意过该点的直线 $y = kx$ 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = \frac{2k}{1 + k^2}$$

随 k 取不同的值 $f(x, y)$ 趋近于不同的值, 可见极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在, 所以点 $(0, 0)$ 是函数的间断点.

典型题型 2. 多元函数的可导性, 可微性以及它们与连续性的关系.

例 7* 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处不连续, 但存在一阶偏导数.

证明 当 (x, y) 沿抛物线 $x = ky^2$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = ky^2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ky^4}{(k^2 + 1)y^4} = \frac{k}{k^2 + 1}$$

随 k 取不同的值 $f(x, y)$ 趋近于不同的值, 故极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在, 从而函数在 $(0, 0)$ 不连续.

另一方面, 直接由函数偏导数的定义有

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

显见, 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数存在且都等于零.

评述 本题是函数在一点可导, 却在一点不连续的例子. 这一情况的出现, 是由于函数在一点的连续性, 要考虑该点某个邻域内的所有点处的函数值, 它不同于偏导数存在只须考虑其中两条特殊线段上的函数值.

例 8* 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

(i) 求 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$; (ii) 问 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微.

解 (i) 对于分段函数求偏导数, 我们可先求出每段表达式的偏导数, 然后用偏导数的定义分别求出每一“交接点”处的偏导数.

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 有

$$f'_x(x, y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_x = \frac{y(x^2 + y^2) - x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

由函数 $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 关于 x, y 的对称性可得 $f'_y(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

有点 $(0, 0)$ 处, 由偏导数的定义得

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2 + 0^2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = 0$$

同理可得 $f'_y(0, 0) = 0$.

因此, 两个一阶偏导数为

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

(ii) 由 $\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$, 而当 (x, y) 沿直线 $y = x$ 趋于 $(0, 0)$, 有

$$\frac{\Delta z - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\rho} = \frac{\Delta x \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

它不随 $\rho \rightarrow 0$ 而趋于零, 所以函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不可微.

评述 本题是函数在一点可导不可微的例子, 它表明多元函数可导是可微的必要条件, 但不是充分条件.

例 9 (94.3 分) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 、 $f'_y(x_0, y_0)$ 存在是在该点连续的 ()

(A) 充分条件而非必要条件

- (B) 必要条件而非充分条件
 (C) 充分必要条件
 (D) 既非充分又非必要条件

解 应选(D). 见本书本章 §4-2 的相关内容.

例 10 (97 3 分) 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处().

- (A) 连续, 偏导数存在 (B) 连续
 (C) 不连续, 偏导数存在 (D) 不连续, 偏导数不存在

分析 在一元函数中, 可导、可微和连续之间的关系是清晰的, 可微等价于可导, 可导一定连续, 连续不一定可导, 但在多元函数中, 情况就复杂化了, 详细情况见本章 §4-2 图 4-3, 只能视函数的具体情况进行分析.

解 沿 $y = kx$ 逼近 $(0, 0)$, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xkx}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

当 k 不同时, $\frac{k}{1 + k^2}$ 不相同, 这说明 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限不存在, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不连续, 但是

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

相似可得

$$f'_y(0, 0) = 0$$

故在 $(0, 0)$ $f(x, y)$ 偏导数存在. 故应填(C).

例 11 (02 3 分) 考虑二元函数的下面四条性质:

- ① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续;
 ② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续;
 ③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微;
 ④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“ $P \Rightarrow Q$ ”表示可由性质 P 推出性质 Q , 则有().

- (A) ② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ① (B) ③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ①
 (C) ③ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ① (D) ③ $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ④

解 可选(A). 详细情况见本章 §4-2 图 4-3.

典型题型 3. 多元函数微分法, 求复合函数与隐函数的偏导数.

例 12 设 f 和 g 是连续可微函数, $u = f(x, xy)$, $v = g(x + xy)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

解 据复合函数求导公式有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + yf_2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = g'(x + xy)(1 + y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = [f_1(x, xy) + yf_2(x, xy)] \cdot g'(x + xy) \cdot (1 + y)$$

例 13* 设 $u = yf(\frac{x}{y}) + xg(\frac{y}{x})$, 其中 f, g 具有二阶连续导数, 求 $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f(\frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x}) + xg'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2}) = f(\frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x}g'(\frac{y}{x})$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y}f'(\frac{x}{y}) + g'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2}) + \frac{y}{x^2}g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^3}g''(\frac{y}{x})$$

$$= \frac{1}{y}f'(\frac{x}{y}) + \frac{y^2}{x^3}g''(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f'(\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2}) + g'(\frac{y}{x})\frac{1}{x} - \frac{1}{x}g'(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x^2}g''(\frac{y}{x})$$

$$= -\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y}) - \frac{y}{x^2}g''(\frac{y}{x})$$

由此可得

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

例 14 (90 5 分) 设 $z = f(2x - y, y \sin x)$, 其中 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2f_1 + y \cos x f_2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2f_{11}' + 2f_{12}' \sin x + \cos x f_2' - y \cos x f_{21}' + y \sin x \cos x f_{22}'$$

$$= -2f_{11}'(2x - y, y \sin x) + (2 \sin x - y \cos x) f_{12}'(2x - y, y \sin x) + \cos x f_2'(2x - y, y \sin x) + y \sin x \cos x f_{22}'(2x - y, y \sin x)$$

例 15 (91 3 分) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $dz =$ _____.

解 由隐函数求导法

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + x}{xy \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + y}{xy \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z}$$

从而

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1, 0, -1)} = 1, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1, 0, -1)} = -\sqrt{2}$$

$$dz = dx - \sqrt{2}dy \quad \text{应填 } dx - \sqrt{2}dy$$

例 16* (92 5 分) 设 $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$ 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解 令 $u = e^x \sin y, v = x^2 + y^2$ 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y f_u' + 2x f_v'$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= e^x \cos y f_u' + e^x \sin y [f_{uu}' e^x \cos y + 2y f_{uv}'] + 2x [f_{vu}' e^x \cos y + f_{vv}' 2y] \quad (f_{uv}' = f_{vu}') \\ &= e^{2x} \sin y \cos y f_{uu}' + 2e^x (y \sin y + x \cos y) f_{uv}' + 4xy f_{vv}' + e^x \cos y f_u' \end{aligned}$$

例 17 (94 3 分) 设 $u = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$ 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 在点 $(2, \frac{1}{\pi})$ 处的值为 _____.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x} \sin \frac{x}{y} + e^{-x} \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{-x} \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y^2} - e^{-x} \frac{1}{y^2} \cos \frac{x}{y} + e^{-x} \sin \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y^3}$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{(2, \frac{1}{\pi})} = \left(\frac{\pi}{e} \right)^2$$

应填 $\left(\frac{\pi}{e} \right)^2$

例 18* (95 5 分) 设 $u = f(x, y, z), \varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$, 其中 f, φ 都具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$,

求 $\frac{du}{dx}$.

分析 由 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x, \varphi'_z \neq 0, y, z$ 都是 x 的函数, 从而 u 是 x 的复合函数.

解 $u = f(x, y, z)$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}$$

而

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\varphi'_1 2x + \varphi'_2 e^y y' + \varphi'_3 \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1 + e^y \cos x \varphi'_2)$$

故

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x + \frac{\partial f}{\partial z} \left[-\frac{1}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1 + e^{\sin x} \cos x \varphi'_2) \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1 + e^{\sin x} \cos x \varphi'_2)\end{aligned}$$

例 19 (96 3 分) 已知 $\frac{(x+ay)dx + ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 a 等于().

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

解 令 $X = \frac{x+ay}{(x+y)^2}$, $Y = \frac{y}{(x+y)^2}$ 由于 $Xdx + Ydy$ 是全微分, 故

$$\frac{\partial X}{\partial y} \equiv \frac{\partial Y}{\partial x}$$

即

$$\frac{-2y(x+y)}{(x+y)^4} \equiv \frac{a(x+y)^2 - 2(x+y)(x+ay)}{(x+y)^4}$$

故

$$\begin{aligned}-2y &\equiv a(x+y) - 2(x+ay) \\ (a-2)(x-y) &\equiv 0\end{aligned}$$

只有当 $a=2$ 这一恒等式才能成立.

应选(D).

例 20* (96 5 分) 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a.

解 $z = z(u, v)$, $u = x - 2y$, $v = x + ay$ 由复合函数求导法, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}(-2) + \frac{\partial z}{\partial v}a \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{aligned}$$

代入原方程整理得

$$(10+5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

由要求知

$$6+a-a^2=0, 10+5a \neq 0$$

故

$$a=3$$

例 21 (98 3 分) 设 $z = \frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y)$, f, φ 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}f(xy) + \frac{y}{x}f'(xy) + y\varphi'(x+y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{x^2}f'(xy) + \frac{1}{x}f''(xy) + yf''(xy) + \varphi''(x+y) + y\varphi''(x+y) \\ &= yf''(xy) + \varphi''(x+y) + y\varphi''(x+y)\end{aligned}$$

应填 $yf''(xy) + \varphi''(x+y) + y\varphi''(x+y)$

例 22* (99 5 分) 设 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的函数, 其中 f

和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$.

分析 例12、13、14、16、18、21和本题都属于没有具体给出函数,只给出了函数满足的条件,要你用复合函数求导法和隐函数求导法去求导数.这样的题型在历届考题中如此密集,值得注意,也说明这是必须熟练掌握的基本要求.

解 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z) = 0$ 两端对 x 求导得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f(x+y) + xf'(x+y)(1 + \frac{dy}{dx}) \\ F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

以上两式消去 $\frac{dy}{dx}$, 可解得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(f + xf')F'_y - xfF'_x}{F'_y + xfF'_z}. \quad (\text{当 } F'_y + xfF'_z \neq 0)$$

例23 (00 5分) 设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

分析 见例22的分析, 又是一个同样的题型

解 令 $u = xy, v = \frac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_u + \frac{1}{y}f'_v - \frac{y}{x^2}g'$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{uv} + y \left(xf''_{uu} - \frac{x}{y^2}f''_{uv} \right) - \frac{1}{y^2}f''_v + \frac{1}{y} \left(xf''_{uv} - \frac{x}{y^2}f''_{vv} \right) - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g'' \\ &= f''_{uv} - \frac{1}{y^2}f''_{vv} + xyf''_{uu} - \frac{x}{y^3}f''_{vv} - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g'' \end{aligned}$$

例24 (01 6分) 设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微, 且 $f(1,1) = 1, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 2, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 3, \varphi(x) =$

$f(x, f(x,x))$, 求 $\left. \frac{d}{dx} \varphi^3(x) \right|_{x=1}$.

解 $\varphi(1) = f(1, f(1,1)) = f(1,1) = 1$

$$\frac{d}{dx} \varphi^3(x) = 3\varphi^2(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} = 3\varphi^2(x) [f'_1(x, f(x,x)) + f'_2(x, f(x,x))(f'_1(x,x) + f'_2(x,x))]]$$

$$\left. \frac{d}{dx} \varphi^3(x) \right|_{x=1} = 3[2 + 3(2 + 3)] = 51.$$

例25 设 $u = x^{yz}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$

解 求三元函数 $f(x,y,z)$ 对 x (或 y 或 z) 的偏导数, 只须把变量 y, z (或 x, z 或 x, y) 都看作常数, 然后对 x (或 y 或 z) 求导数就可以了. 本题当把 y, z 看作常数时, u 是 x 的幂函数, 于是根据幂函数求导公式, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{yz-1}$$

同样, 当把 x, z 看作常数时, 函数 x^{yz} 是 t 的指数函数 x^t 与 y 的幂函数 $t = y^z$ 的复合函数, 于是根据复合函数求导法则, 有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^t)'_t (y^z)'_y = x^{yz} \ln x y^{z-1} = y^{z-1} x^{yz} \ln x$$

最后当把 x, y 看作常数时, 得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y^z x^{yz} \ln x \ln y$$

例26 设 $f(x,y) = (x-a)^{p+1}(y-b)^q + \varphi(x) + \psi(y)$, 其中 $\varphi(x), \psi(y)$ 分别是 p 阶与 q 阶可导函数, 求 $\frac{\partial^{(p+q)} f(x,y)}{\partial x^p \partial y^q}$ 在 $(a+1, b)$ 处的值.

解 先对 x 求 p 阶偏导数, 然后对 y 求 q 阶偏导数, 即得

$$\frac{\partial^{(p+q)} f(x,y)}{\partial x^p \partial y^q} = (p+1)! q! (x-a)$$

于是

$$\left(\frac{\partial^{(p+q)} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} \right)_{(a+b)} = (p+1) q !$$

评述 一般, 形如 $z = f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ 的二元函数, 当 $\varphi^{(n)}(x)$ 与 $\psi^{(m)}(y)$ 都存在时, 那末 $f(x, y)$ 的 $n+m$ 阶偏导数公式总可以表示成

$$\frac{\partial^{(n+m)} [\varphi(x)\psi(y)]}{\partial x^n \partial y^m} = \frac{\partial^{(n)} \varphi(x)}{\partial x^n} \frac{\partial^{(m)} \psi(y)}{\partial y^m}$$

例 27* 设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

证明: $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$,

证明 为了证明 $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$, 首先求出两个一阶偏导数

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{4x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

根据定义可得点 $(0, 0)$ 处的两个混合偏导数为

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(\Delta x, 0) - f'_y(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta y}{\Delta y} \right) = -1$$

显见

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$$

评述 求函数的高阶偏导数, 只需要逐次求偏导数就可以了, 但是在高阶混合偏导数时, 要注意求导的次序, 一般说来, 是不能随意交换求导的次序的, 本例正说明了这一点.

例 28* 设 $u = f(x, y, z)$ 与 $y = y(x, t)$ $t = t(x, z)$ 都可微, 试求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的表达式.

解 本题所给的是经两次复合而成的复合函数, 第一次复合成 $y = y[x, t(x, z)]$, 其中 t 是中间变量, x, z 是自变量; 第二次复合成 $u = f[x, y[x, t(x, z)], z]$, 其中 y, t 是中间变量, x, z 是自变量, 变量分析图, 如图 4-9 所示.

由图表明 u 到达 x 的路线有三条, 这表示 u 对 x 的偏导数公式是由三项相加而成的, 依图自左到右分别沿路线 $u \rightarrow x$, $u \rightarrow y \rightarrow x$ 及 $u \rightarrow y \rightarrow t \rightarrow x$ 求出偏导数相乘, 分线相加, 得到的结果便是偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的表达式, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$$

例 29* 设 $z = f(x^2 - y^2, \cos xy)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 求 $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

解 令 $x^2 - y^2 = u$, $\cos xy = v$, 则 $z = f(u, v)$, 变量分析图, 如图 4-10 所示.

由图表明 z 到达 r 的路线有四条, 这表示 z 对 r 的偏导数公式是由四项相加而成的. 依图自左到右, 分别按联线求出偏导数相乘, 分线相加, 即得

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (1)$$

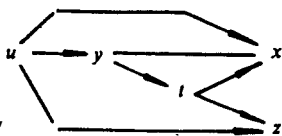


图 4-9



图 4-10

$$\text{而} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial v}{\partial x} = -y \sin xy, \frac{\partial v}{\partial y} = -x \sin xy$$

$$\text{及} \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

代入(1)式并整理,得

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2(x \cos \theta - y \sin \theta) \frac{\partial z}{\partial u} - \sin(xy)(y \cos \theta + x \sin \theta) \frac{\partial z}{\partial v}$$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -2r(x \sin \theta + y \cos \theta) \frac{\partial z}{\partial u} + r \sin(xy)(y \sin \theta - x \cos \theta) \frac{\partial z}{\partial v}$$

本题也是经两两次复合而成的复合函数, u, v 及 x, y 都是中间变量, r, θ 是自变量, 像这样经过几次复合而成的复合函数, 对某个自变量求导时, 应注意要经过一切中间变量而归结到自变量, 不得遗漏.

例 30 设 $z = f(x, y)$, $u = x + ay$, $v = x - ay$ (a 为常数), z 关于 u, v 具有二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

解 本题可先求逆变换, 然后再求导.

$$\text{由} \quad u = x + ay, \quad v = x - ay$$

$$\text{解得} \quad x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2a}(u - v)$$

变量分析图 (如图 4-11) 所示.

依图自左至右, 分别按联线求出偏导数相乘, 分线相加, 可得 z 对变量 u 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\text{而} \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2a}, \quad \text{于是}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2a} \frac{\partial z}{\partial y}$$

二阶混合偏导数为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad (1)$$

这里, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 仍然保持原来函数的复合关系 (如图 4-12) 所示.

$$\text{从而} \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(2) 式代入(1)式, 并整理, 即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

评述 在一般的函数式 $f(x, y)$ 中, 偏导数 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 是仍然保持与 $f(x, y)$ 有相同个数自变量的函数, 并且当 x, y 是变量 u, v 的函数时, 那么, 这种复合关系仍包含在偏导数 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 中, 这是在求导过程中必须注意的.

例 31 设 $x = u \cos \frac{v}{u}, y = u \sin \frac{v}{u}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

解 本题是反函数求导问题, 可利用隐函数微分法来求解. 下面我们通过求全微分来求得偏导数.

对方程组

$$x = u \cos \frac{v}{u}, \quad y = u \sin \frac{v}{u}$$

两边求微分, 得

$$dx = \cos \frac{v}{u} du - \frac{1}{u} \sin \frac{v}{u} (udv - vdu), \quad dy = \sin \frac{v}{u} du + \frac{1}{u} \cos \frac{v}{u} (udv - vdu)$$

即
$$\left(\cos \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} \right) du - \sin \frac{v}{u} dv = dx$$

$$\left(\sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} \right) du + \cos \frac{v}{u} dv = dy$$

按线性方程组解法解出 du, dv 得

$$du = \cos \frac{v}{u} dx + \sin \frac{v}{u} dy$$

$$dv = \left(\frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} - \sin \frac{v}{u} \right) dx + \left(\cos \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} \right) dy$$

与一般微分式

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

相比较即得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} - \sin \frac{v}{u}$$

评述 利用微分求偏导数的过程中,在求全微分时,由于一阶全微分形式不变性,就用不着去分辨什么自变量和中间变量,只要按法则去做就可以了. 它步骤分明,有条有素,比较方便.

例 32* 设 $f(x, y)$ 与 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ 都具有连续二阶偏导数,且 x 与 y 满足柯西 - 黎曼方程

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}, \text{证明: } \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = J \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \text{其中 } J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

证明 先对 f 求一阶偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

于是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

两式相加,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

在等式 $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$ 两边分别关于 u, v 求导,得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$$

两式相加,得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0$$

再用柯西 - 黎曼条件,得

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

及

$$\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

将以上结果代入(1)式中,即得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) = J \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

例 33* 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(I) 验证 $f'(u) + \frac{f(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

解 (I) 由 $z = f(u), u = \sqrt{x^2 + y^2}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f' \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{f'(u)}{u} \cdot x \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{f'(u)}{u} + \frac{f''(u) \cdot u - f'(u)}{u^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot x = \frac{f'(u)}{u} + \frac{f''(u) \cdot u - f'(u)}{u^3} x^2 \end{aligned}$$

由 x, y 的对称性得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{f'(u)}{u} + \frac{uf'' - f'}{u^3} y^2$$

代入已知等式得:

$$\frac{2f'(u)}{u} + \frac{uf'' - f'}{u^3} \cdot u^2 = 0$$

即得

$$f'(u) + \frac{f(u)}{u} = 0$$

(II) 由 (I) 得 $\frac{f'(u)}{f(u)} = -\frac{1}{u}$, $\ln f(u) = -\ln u + \ln c_1$, 所以 $f(u) = \frac{c_1}{u}$, 由 $f(1) = 1$ 得 $c_1 = 1$, $f(u) = \frac{1}{u}$, 进而 $f(u) = \ln u + c_2$, 由 $f(1) = 0$ 得 $c_2 = 0$, 故 $f(u) = \ln u$.

例 34* 设 $z^3 - 3xyz = a^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解法一 令 $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^2$, 求得

$$F'_x = -3yz, \quad F'_y = -3xz, \quad F'_z = 3z^2 - 3xy$$

当 $F'_z \neq 0$ 时, 由隐函数的导数公式, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{xz}{z^2 - xy}$$

解法二 在方程 $z^3 - 3xyz = a^2$ 中, 把 x, y 看作独立变量, z 是 x, y 的函数, 将方程两边对 x 求导, 得

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 3xy \frac{\partial z}{\partial x} - 3yz = 0$$

解出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}$$

同理, 将方程两边对 y 求导, 可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}$$

解法三 令 $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^2 = 0$, 两边求微分, 得

$$3z^2 dz - 3yz dx - 3xz dy - 3xy dz = 0$$

即

$$(z^2 - xy) dz = yz dx + xz dy$$

解得

$$dz = \frac{yz}{z^2 - xy} dx + \frac{xz}{z^2 - xy} dy$$

与微分公式

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

相比较,得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}$$

评述 本题用三种不同方法求得了由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数,归纳起来是:(1) 求出函数 F'_x, F'_y, F'_z , 然后应用隐函数求导公式,得 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$; (2) 在方程 $F(x, y, z) = 0$ 中,把 x, y 看作独立变量, z 是 x, y 的函数,对方程两边关于 x 或 y 求导,得到含 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的方程,从中解出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$; (3) 利用一阶全微分形式不变性和微分公式,求得

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

一般说来,求由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数的导数,通过直接解方程 $F(x, y) = 0$ 而得到函数的显式,然后按照显函数的求导方法求得它的导数是比较困难的,而隐函数存在定理,不仅能用来判定隐函数的存在,并且给出了隐函数的求导公式,从而不需要去解方程 $F(x, y) = 0$ 就能求出隐函数的导数 $y'(x)$ 来.由此可见该定理的重要意义.

例 35* 设 $F(x, y, x - z, y^2 - \omega) = 0$, 其中 F 具有二阶连续偏导数,且 $F'_{\omega} \neq 0$, 求 $\frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$ (F'_{ω} 表示 F'_y, F'_{ω}

表示 $F'_{(y^2 - \omega)}, F''_{\omega}$ 表示 $F''_{(y^2 - \omega)y}$ 等,余仿此)

解 对所给方程关于 y 求导,得

$$F'_2 + F'_{\omega} \left(2y - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = 0$$

解得

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = 2y + \frac{F'_2}{F'_{\omega}}$$

于是

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 2 + \frac{1}{(F'_{\omega})^2} \left(F'_{\omega} \frac{\partial F'_2}{\partial y} - F'_2 \frac{\partial F'_{\omega}}{\partial y} \right) \quad (1)$$

这里 F'_2, F'_{ω} 仍然都是 x, y 与 z 的复合函数,求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'_2}{\partial y} &= F''_{22} + F''_{2\omega} \left(2y - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = F''_{22} - F''_{2\omega} \frac{F'_2}{F'_{\omega}} \\ \frac{\partial F'_{\omega}}{\partial y} &= F''_{\omega 2} + F''_{\omega \omega} \left(2y - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = F''_{\omega 2} - F''_{\omega \omega} \frac{F'_2}{F'_{\omega}} \end{aligned}$$

代入(1)式整理,即得

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 2 + \frac{1}{(F'_{\omega})^3} [(F'_{\omega})^2 \cdot F''_{22} - 2F''_{2\omega} \cdot F'_2 \cdot F'_{\omega} + (F'_2)^2 F''_{\omega \omega}]$$

评述 本题所给出方程的左边是用一般形式的函数关系表示的,由它所确定的函数,既是隐函数又是复合函数,因此在求解这些问题时,重要的仍然是要分辨清楚自变量、中间变量、隐函数以及它是通过怎样的复合关系隐含在方程之中的,弄清了这些,问题也就能迎刃而解了.比如本题本质上就是把方程的左边看作是由 $F(u, v, s, t)$ 与 $u = x, v = y, s = x - z, t = y^2 - \omega$ 以及 $\omega = \omega(x, y, z)$ 复合而成的 x, y, z 的复合函数,于是,对方程 $F(u, v, s, t) = 0$ 关于 y 求导可得

$$F'_u u_y + F'_v v_y + F'_s s_y + F'_t t_y = 0$$

而由方程组 $u = x, v = y, s = x - z, t = y^2 - \omega$ 求得

$$u'_y = 0, v'_y = 1, s'_y = 0, t'_y = 2y - \omega'_y$$

于是有

$$F'_v + F'_t (2y - \omega'_y) = 0$$

从而得到一阶偏导数为 $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 2y + \frac{F'_v}{F'_t}$, 这与所得到的结果一致. 再按上法对 $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ 关于 y 求偏导数,即可求得

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}.$$

例 36 (05 4 分) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$ 其中函数 φ 具有一阶导数, ψ 具有一阶导数. 则必有

- (A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
 (C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\begin{aligned} \text{解 } u(x, y) &= \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt \\ &= \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_a^x \psi(t) dt + \int_a^{x+y} \psi(t) dt \end{aligned}$$

令 $x+y = V, x-y = W$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_V(x+y) + \varphi'_W(x-y) - \psi(x-y) + \psi(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''_{VV} + \varphi''_{WW} - \psi'_W + \psi'_V$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'_V(x+y) - \varphi'_W(x-y) + \psi(x-y) + \psi(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \varphi''_{VV} + \varphi''_{WW} - \psi'_W + \psi'_V$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''_{VW} - \varphi''_{WV} + \psi'_W + \psi'_V$$

应选(B).

评述 仅仅 4 分的选择题, 计算中, 涉及多元函数复合数求导法. 变上(下)限积分求导, 概念不清楚. 计算不熟练, 是得不出正确选择的.

例 37* 证明利用变换 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 可将方程 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$ 变换成 $\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = 0$.

解 由偏导数公式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (1)$$

对变换式 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 两边关于 x, y 求导, 在求导时 ρ, θ 看作 x, y 的函数, 于是有

$$\begin{cases} 1 = \cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ 0 = \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 0 = \cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial y} - \rho \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ 1 = \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases} \quad (3)$$

从(2), (3) 两式分别解得 $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{\rho}, \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \theta, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{\rho}$ 代入(1) 式, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \end{cases} \quad (4)$$

再将(4) 式代入所给方程化简, 即得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = 0.$$

评述 本题中的 x, y 都是自变量, 所以变换中的 ρ, θ 也应作新自变量看待, 因此, 这是将一个二元函数 $u(x, y)$ 满足的微分方程变换成以 ρ, θ 为自变量的二元函数 $u_1(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ 所满足的微分方程的问题.

一般,利用某个变换 $x = \varphi(\xi, \eta)$ $y = \psi(\xi, \eta)$ 将一个含有 $x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$ 的微分式(或方程)变换成含有 $\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \dots$ 的微分式(或方程),我们可以先利用变换把所给的微分式子(或方程)中的 $x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$ 用 $\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \dots$ 表示,然后把它们代入到所给的微分式子(或方程)中的 $x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$ 用 $\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \dots$ 表示,然后,把它们代入到所给的微分式子(或方程)中去,进行整理化简,就是所求的结果.

典型题型 4. 切平面、法线、方向导数、梯度

例 38 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$, 则点 P 的坐标是_____.

解 设 P 点的坐标是 (x_0, y_0, z_0) , P 点的法向量是 $\vec{n} = 2x_0\mathbf{i} + 2y_0\mathbf{j} + \mathbf{k}$, 切平面平行于 $2x + 2y + z - 1 = 0$ 故

$$\frac{2x_0}{2} = \frac{2y_0}{2} = \frac{1}{1}$$

从而可得 $x_0 = 1, y_0 = 1$ 代入曲面方程得 $z_0 = 2$.

应填 $(1, 1, 2)$.

例 39 (91 5 分) 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的方向导数法向量, 求函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在 $(1, 1, 1)$ 处指向外侧的法向量为

$$\vec{n} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

从而方向余弦是 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$

而 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1,1,1)} = \frac{6x}{z\sqrt{6x^2 + 8y^2}} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{6}{\sqrt{14}},$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1,1,1)} = \frac{8}{\sqrt{14}}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{\sqrt{14}},$$

则 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(1,1,1)} = \frac{6}{\sqrt{14}} \times \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}} \times \frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}} \times \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}$

例 40 (92 3 分) 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\text{grad}u|_M =$ _____.

解 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1,2,-2)} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9}$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1,2,-2)} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{4}{9}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1,2,-2)} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(1,2,-2)} = -\frac{4}{9}$$

故 $\text{grad}u|_M = \frac{2}{9}\mathbf{i} + \frac{4}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}$

应填 $\frac{2}{9}\mathbf{i} + \frac{4}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}$

例 41 (92 3 分) 在曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线()

(A) 只有 1 条

(B) 只有 2 条

(C) 至少有 3 条

(D) 不存在

解 曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 的切线向量是

$$\vec{\tau} = \mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

而平面 $x + 2y + z = 4$ 的法线向量是

$$\vec{n} = i + 2j + k$$

因 $\vec{\tau} \perp \vec{n}$ 故 $\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 1 - 4t + 3t^2 = 0$, 易验证此方程只有两个实根, 故与 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线只有 2 条, 应选(B).

例 42 (93 3 分) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为_____.

解 旋转面方程为 $3(x^2 + z^2) + 2y^2 = 12$, 令 $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 12$

则 $F'_x = 6x, F'_y = 4y, F'_z = 6z$ 在 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的法向量为 $\vec{n} = 4\sqrt{3}j + 6\sqrt{2}k$, 单位法向量为 $\vec{n}_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}j + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}k$.

应填 $\vec{n}_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}j + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}k$.

例 43 (94 3 分) 曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1, 2, \rho)$ 处的切平面方程为_____.

解 令 $F(x, y, z) = z - e^z + 2xy - 3 = 0$, 则 $F'_x = 2y, F'_y = 2x, F'_z = 1 - e^z$

曲面在 $(1, 2, \rho)$ 处的法向量为

$$\vec{n} = 4i + 2j$$

故所求切平面方程为

$$4(x - 1) + 2(y - 2) = 0$$

即 $4x + 2y - 8 = 0$

也就是

$$2x + y - 4 = 0$$

应填 $2x + y - 4 = 0$

例 44 (96 3 分) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, \rho, 1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数为_____.

解 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1, \rho, 1)} = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{(1, \rho, 1)} = \frac{1}{2}$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1, \rho, 1)} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1, \rho, 1)} = \frac{1}{2}$$

而 $\vec{AB}$ 的方向余弦是 $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$, 故 u 沿 $\vec{AB}$ 的方向导数是

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 0 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

应填 $\frac{1}{2}$.

例 45* (97 6 分) 设直线 $L: \begin{cases} x + y + b = 0 \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 在平面 π 上, 而平面 π 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切于 $(1, -2, 5)$, 求 a, b 之值.

解 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, -2, 5)$ 处的法向量为

$$\vec{n} = 2i - 4j - k$$

于是切平面为

$$2(x - 1) - 4(y + 2) - (z - 5) = 0$$

即 $2x - 4y - z - 5 = 0$

$$l_1: \begin{cases} x + y + b = 0 \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$$

可解得 $y = -x - b, z = x - 3 + a(-x - b)$, 代入切平面方程得

$$(5 + a)x + 4b + ab - 2 = 0$$

因有 $5 + a = 0, 4b + ab - 2 = 0$, 由此解得

$$a = -5, b = -2$$

例 46 (01 3 分) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近有定义, 且 $f_x(0, 0) = 3, f_y(0, 0) = 1$, 则()

(A) $\left. \frac{dz}{dz} \right|_{(0,0)} = 3dx + dy$

(B) 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的法向量为 $\{3, 1, 1\}$

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{1, 0, 3\}$

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{3, 0, 1\}$

解 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 可写成参数方程

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = f(x, 0) \end{cases}$$

则该曲线在 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{1, 0, f'_x(0, 0)\} = \{1, 0, 3\}$

应选(C).

评述 此题最易犯的错误是选(A), 但是 $f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = 1$ 并不一定可微, 可参看本章 §4 - 2.

例 47 求函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$ 在点 (x_0, y_0) 沿与过这点的等位线垂直之方向的方向导数.

解 因为函数 $z = f(x, y)$ 的梯度 $\text{grad} f = \{f'_x, f'_y\}$ 的方向是等位线 $f(x, y) = c$ 的法线方向, 而 $z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 的等位线 $\ln(x^2 + y^2) = c$ 是一族以原点为中心的同心圆, 与这些圆垂直的方向就是圆的法线方向, 它即是函数 $\ln(x^2 + y^2)$ 的梯度方向.

由于 $\text{grad} f = f'_x(x, y)\mathbf{i} + f'_y(x, y)\mathbf{j} = \frac{2x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$, 所以

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial l} \right)_{(x_0, y_0)} &= \pm |\text{grad} f|_{(x_0, y_0)} = \pm \sqrt{f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0)} \\ &= \pm \sqrt{\left(\frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2} \right)^2} = \pm \frac{\sqrt{4(x_0^2 + y_0^2)}}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^2}} = \pm \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \end{aligned}$$

典型题型 5. 多元函数的极大(小)值与最大(小)值, 条件极值的拉格朗日乘数法及其应用

例 48* 求函数 $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值.

解 讨论函数 $z = f(x, y)$ 的极值的步骤是, 先求出驻点, 即解方程组 $f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0$, 然后利用极值存在的充分条件判断驻点是否极值点.

$$f'_x(x, y) = 4x^3 - 2x - 2y, f'_y(x, y) = 4y^3 - 2x - 2y$$

令 $f'_x = 0, f'_y = 0$, 求得驻点为 $(-1, -1), (0, 0), (1, 1)$.

又 $A = f''_{xx}(-1, -1) = 10, B = f''_{xy}(-1, -1) = -2, C = f''_{yy}(-1, -1) = 10$, 因而

$$B^2 - AC < 0 \text{ 且 } A > 0$$

故 $z(-1, -1) = -2$ 为极小值.

又 $A = f''_{xx}(1, 1) = 10, B = f''_{xy}(1, 1) = -2, C = f''_{yy}(1, 1) = 10$, 因而

$$B^2 - AC < 0 \text{ 且 } A > 0$$

故 $z(1, 1) = -2$ 为极小值.

在点 $(0, 0)$ 处 $B^2 - AC = 0$, 这时不能确定是否有极值. 为了确定点 $(0, 0)$ 是否为极值点, 可以直接考察函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近的变化情况.

在点 $(0, 0)$ 处的足够小邻域内, 沿直线 $y = -x$, 有 $f(x, -x) = 2x^4 > f(0, 0) = 0$, 而沿直线 $x = 0$, 有 $f(0, y) = y^2(y^2 - 1) < f(0, 0)$, 故知点 $(0, 0)$ 不是函数的极值点.

评述 一般, 判断驻点 (x_0, y_0) 不是函数的极值点, 可以过点 (x_0, y_0) 作直线(或曲线), 如果在其中的一条或几条直线(或曲线)上靠近点 (x_0, y_0) 充分小的邻域内函数值变号, 就可判定点 (x_0, y_0) 不是极值点.

例 49* (02 7 分) 设有一小山, 取它的底面所在的平面为 xoy 坐标面, 其底部所占的区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$, 小山的高度为 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$

(1) 设 $M(x_0, y_0)$ 为区域 D 上的一个点, 问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上沿什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$, 试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点, 也就是说, 要在 D 的边界曲线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出使(1)中的 $g(x, y)$ 达到最大值的点, 试确定攀登起点的位置.

解 (1) 由梯度的几何意义知 $h(x, y)$ 在 $M(x_0, y_0)$ 处沿梯度

$$\left. \text{grad} h(x, y) \right|_{(x_0, y_0)} = (y_0 - 2x_0)i + (x_0 - 2y_0)j$$

方向的方向导数最大, 方向导数的最大值就是该梯度的模, 所以

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}$$

(2) 令 $f(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$, 显然 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 的最大值是一致的, 由题意, 只需求 $f(x, y)$ 在条件 $75 - x^2 - y^2 + xy = 0$ 下的最大值点, 用拉格朗日乘数法, 令

$$L(x, y, \lambda) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy)$$

则

$$\begin{cases} L'_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0 & \textcircled{1} \\ L'_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0 & \textcircled{2} \\ L'_\lambda = 75 - x^2 - y^2 + xy = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

①加②得 $2x + 2y + \lambda(-x - y) = 0$

即 $(x + y)(2 - \lambda) = 0$

从而得 $y = -x$ 或 $\lambda = 2$

若 $\lambda = 2$, 由①得 $y = x$, 再由③得 $x = \pm 5\sqrt{3}$, $y = \pm 5\sqrt{3}$

若 $y = -x$ 由③得 $x = \pm 5$, $y = \mp 5$.

于是得到四个可能的极值点 $M_1(5, -5)$, $M_2(-5, 5)$, $M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$, $M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$.

由于 $f(5, -5) = f(-5, 5) = 450$, $f(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}) = f(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}) = 150$, 故 $M_1(5, -5)$, $M_2(-5, 5)$ 可作为攀登的起点.

例 50* 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的极值.

解 由于 $z = f(x, y)$ 是由上述方程确定的隐函数, 为了求得 z'_x 与 z'_y , 将方程两边分别对 x, y 求偏导数

$$2x + 2zz'_x - 2 - 4z'_x = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$2y + 2zz'_y + 2 - 4z'_y = 0 \quad \textcircled{2}$$

解出 $z'_x = \frac{1-x}{z-2}$, $z'_y = -\frac{1+y}{z-2}$

令 $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ 求得 $x = 1$, $y = -1$. 将它们代入原方程解得 $z_1 = 6$ 和 $z_2 = -2$.

下面考察函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, -1, 6)$ 及 $(1, -1, -2)$ 的邻域内取值的情况.

令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10$, 由于 $F'_z(1, -1, 6) \neq 0$, $F'_z(1, -1, -2) \neq 0$, 所以原方程分别在点 $(1, -1, 6)$ 和 $(1, -1, -2)$ 的邻域内确定函数

$$z = f_1(x, y) \quad z = f_2(x, y)$$

因为题目未讲明是哪一个函数, 所以两种情况都要讨论. 下面对驻点进行判定.

方程(1)对 x 求偏导 $1 + z'^2_x + zz''_{xx} - 2z''_{xx} = 0$, 可得

$$z''_{xx}(1, -1, 6) = -\frac{1}{4} \quad z''_{xx}(1, -1, -2) = \frac{1}{4}$$

方程(1)对 y 求偏导 $z'_y z'_x + zz''_{xy} - 2z''_{xy} = 0$, 可得

$$z''_{xy}(1, -1, 6) = 0 \quad z''_{xy}(1, -1, -2) = 0$$

方程(2)对 y 求偏导 $1 + z'^2_y + zz''_{yy} - 2z''_{yy} = 0$, 可得

$$z''_{yy}(1, -1, 6) = -\frac{1}{4} \quad z''_{yy}(1, -1, -2) = \frac{1}{4}$$

由算出的二阶偏导数知,在点 $(1, -1, 6)$ 处,有

$$B^2 - AC < 0 \text{ 且 } A < 0$$

故 $z = 6$ 是极大值.

在点 $(1, -1, -2)$ 处,有

$$B^2 - AC < 0 \text{ 且 } A > 0$$

故 $z = -2$ 是极小值.

综上所述,由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 在点 $(1, -1, 6)$ 的某个邻域内确定的函数 $z = 6$ 是极大值,在点 $(1, -1, -2)$ 的某个邻域内确定的函数 $z = -2$ 是极小值.

评述 求由方程所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的极值,一般是利用隐函数微分法,先求得函数的一阶、二阶偏导数,再利用必要条件求得函数的驻点,最后根据充分条件进行判定.但在解题时,必须先检查一下方程在什么条件下确定隐函数,并且要注意隐函数的存在和唯一性只是在局部范围内成立.如本题若把所给方程化成 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$

这是一个球面方程,对于 x 和 y 的一组数值,有两个 z 值与之对应.因此,从整体来看,该方程并不确定一个单值函数.从几何图形上看, z 在 $(1, -1)$ 取得极大值 6 与极小值 -2 是显然的,因为球面上最高与最低点的坐标分别为 $(1, -1, 6)$ 与 $(1, -1, -2)$.

例 51 (04, 12 分) 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数.求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

解 因为

$$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0 \quad (1)$$

$$\text{所以对 } x \text{ 求偏导得: } 2x - 6y - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\text{对 } y \text{ 求偏导得 } -6x + 20y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} x - 3y = 0 \\ -3x + 10y - z = 0 \end{cases}$$

故 $x = 3y$, $z = y$ 代入(1)得, $x = 9$, $y = 3$, $z = 3$

或 $x = -9$, $y = -3$, $z = -3$. 由(2), (3)求偏导得.

$$\begin{cases} 2 - 2y \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \\ -6 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \\ 20 - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

以 $(9, 3, 3)$ 代入可解得

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(9, 3, 3)} = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(9, 3, 3)} = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(9, 3, 3)} = \frac{5}{3}.$$

从而 $B^2 - AC = -\frac{1}{36} < 0$, 又 $A = \frac{1}{6} > 0$. 故点 $(9, 3)$ 是 $z(x, y)$ 的极小值点, 极小值为 $z(9, 3) = 3$,

类似可得

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-9, -3, -3)} = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-9, -3, -3)} = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-9, -3, -3)} = -\frac{5}{3}.$$

$$B^2 - AC = -\frac{1}{36} < 0. \quad \text{又 } A = -\frac{1}{6} < 0.$$

所以点 $(-9, -3)$ 是 $z = z(x, y)$ 的极大值点, 极大值为 $z(-9, -3) = -3$.

例 52 设两个正数 x 与 y 之和为定值, 求函数 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ 的极值. 并证明 $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$,

其中 n 为正整数.

解 这是条件极值问题, 用拉格朗日乘数法. 设 $x + y = a$

$$\text{令 } F(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x + y - a)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x = \frac{n}{2}x^{n-1} + \lambda = 0 \\ F'_y = \frac{n}{2}y^{n-1} + \lambda = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

$$\text{得唯一驻点 } x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{2}, \text{ 即 } \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

$$\text{而 } u = \frac{1}{2}(x^n + y^n) \Big|_{y=a-x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{n}{2}(x^{n-1} + y^{n-1}) \Big|_{x=y=\frac{a}{2}} = 0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{n(n-1)}{2}(x^{n-2} + y^{n-2}) \Big|_{y=a-x}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x=y=\frac{a}{2}} > 0$$

这说明 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) \Big|_{x+y=a}$ 在点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ 达到最小值. 故

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{2}\right)^n + \left(\frac{a}{2}\right)^n \right] = \left(\frac{a}{2}\right)^n = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

评述 本题是通过求函数的极小值, 从而证得所给不等式成立. 把一些问题看作条件极值问题, 这是证明不等式的方法之一.

例 53* 求原点到曲面 $(x - y)^2 - z^2 = 1$ 上的点的最短距离.

解 设 $P(x, y, z)$ 为面上的任一点, 它到原点的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

因为 d 的表达式中含有根号, 不便于计算, 且由于 d 与 d^2 同时取得最小值, 因此, 一般取函数为

$$f = d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

由于动点 $P(x, y, z)$ 在曲面上, 故有条件

$$(x - y)^2 - z^2 - 1 = 0$$

这样问题就变为求函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $(x - y)^2 - z^2 = 1$ 下的最小值. 用拉格朗日乘数法.

$$\text{设 } F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda((x - y)^2 - z^2 - 1)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda(x - y) = 0 & (1) \\ F'_y = 2y - 2\lambda(x - y) = 0 & (2) \\ F'_z = 2z - 2\lambda z = 0 & (3) \\ (x - y)^2 - z^2 - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

由(3)式 $z(\lambda - 1) = 0$, 可得 $\lambda = 1$ 或 $z = 0$. 将 $\lambda = 1$ 代入(1)、(2)两式, 有

$$2x - y = 0, \quad -x + 2y = 0$$

解得 $x = 0, y = 0$, 代入(4)式, 得 $z^2 = -1$, 矛盾. 所以 $\lambda = 1$ 不合理.

$$\text{将 } z = 0 \text{ 代入上述方程组, 解得 } x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = -\frac{1}{2}, z_1 = 0 \text{ 或 } x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}, z_2 = 0$$

这两点到原点的距离都是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 由题意, 最短距离是存在的, 所以原点到曲面 $(x - y)^2 - z^2 - 1 = 0$ 的最短距

离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

评述 求最大(或最小)值问题可按如下步骤进行:首先根据问题中的条件列出函数式,写出定义域,把问题化为极值问题,然后求出驻点,再根据所给问题分析求得的驻点是否为所求的最大(或最小)值点.

例 54 旋转面 $4z = x^2 + y^2$ 上某点 M 处的切平面为 π ,若平面 π 过曲线 $x = t^2, y = t, z = 3(t-1)$ 上对应于 $t = 1$ 的切点处的切线 l ,试给出平面 π 的方程.

解 本题只要求得点 M 的坐标和平面的法线向量,由平面方程点法式,即可得到平面 π 的方程.

设点 $M(x_0, y_0, z_0)$,令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$,于是

$$\vec{n} = \{F'_x, F'_y, F'_z\}_M = 2\{x_0, y_0, -2\}$$

旋转面在 M 点处的切平面的 π 方程为

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - 2(z - z_0) = 0$$

即

$$x_0x + y_0y - 2z = 2z_0$$

又曲线上对应于 $t = 1$ 的点为 $(1, 1, 0)$,切线 l 的方向向量为 $\{x', y', z'\}_{t=1} = \{2, 1, 3\}$,故切线 l 的方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$$

因为平面 π 过切线 l ,故 l 上的任意两点 $(1, 1, 0), (3, 2, 3)$ 应满足 π 的方程,代入有

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 2z_0 & (1) \\ 3x_0 + 2y_0 - 6 = 2z_0 & (2) \\ x_0^2 + y_0^2 = 4z_0 & (3) \end{cases}$$

解(1),(2),(3),得 $M_1\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$ 及 $M_2(2, 2, 2)$

故所求切平面 π 的方程为 $6x + 3y - 5z = 9$ 及 $x + y - z = 2$

例 55 某养殖场养两种鱼,若甲种鱼放养 x (万尾),乙种鱼放养 y (万尾),收获时两种鱼的收获量分别为 $(3 - \alpha x - \beta y)x$ 和 $(4 - \beta x - 2\alpha y)y$ ($\alpha > \beta > 0$)

求使产鱼总量最大的放养数.

解 设产鱼总量为 Z ,则 $Z = 3x + 4y - \alpha x^2 - 2\alpha xy - 2\beta xy$.由极值必要条件,得方程组:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 3 - 2\alpha x - 2\beta y = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = 4 - 4\alpha y - 2\beta x = 0.$$

由于 $\alpha > \beta > 0$,知其系数行列式 $\Delta = 4(2\alpha^2 - \beta^2) > 0$,故方程组有唯一解.

$$x_0 = \frac{3\alpha - 2\beta}{2\alpha^2 - \beta^2}, \quad y_0 = \frac{4\alpha - 3\beta}{2(2\alpha^2 - \beta^2)}.$$

记 $A = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -2\alpha, B = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = -2\beta, C = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = -4\alpha$,有 $\beta^2 - AC = 4\beta^2 - 8\alpha^2 = -4(2\alpha^2 - \beta^2) < 0$ 且 $A < 0$,

因此 Z 在 (x_0, y_0) 处取极大值,即最大值.

容易验证 $x_0 > 0, y_0 > 0$ 且 $\begin{cases} (3 - \alpha x_0 - \beta y_0)x_0 = \frac{3x_0}{2} > 0, \\ (4 - \beta x_0 - 2\alpha y_0)y_0 = 2y_0 > 0. \end{cases}$ 综上所述, x_0, y_0 分别为所求甲和乙两种鱼

的放养数.

例 56 证明锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} + 3$ 的所有切平面都通过锥面的顶点.

证明 因为 $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,所以锥面上任一点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$-\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(x - x_0) - \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(y - y_0) + (z - z_0) = 0,$$

其中 $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = z_0 - 3$,将它代入(1)式并整理,得

$$-x_0x - y_0y + (z_0 - 3)(z - z_0) = 0$$

这说明顶点 $(0, 0, 3)$ 适合上方程. 因为 (x_0, y_0, z_0) 是锥面上任一点,故锥面的所有切平面都通过锥面的顶点.

预测·强化训练四

一、空间解析几何、向量代数

1. 一个线段被分成五等分, 第一个和最后一个分点的坐标分别为(3, -5, 7)和(-2, 4, -8), 求线段端点的坐标.
2. 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = xy + 3$ 上同时垂直于平面 $z = 0$ 与 $x + y + 1 = 0$ 的切平面方程.
3. 求经过点(5, 2, -4)且与平面 $2x + 4y - 6z - 7 = 0$ 平行的平面方程.
4. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, 则 $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ _____.
5. 若向量 $\vec{x}$ 与 $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ 共线, 且满足方程 $\vec{a} \cdot \vec{x} = -18$, 则向量 $\vec{x} =$ _____.
- 6*. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ 则()
 (A) $\vec{b} = \vec{c}$ (B) $\vec{a} \perp \vec{b}$ 且 $\vec{a} \perp \vec{c}$
 (C) $\vec{a} = 0$ 或 $\vec{b} - \vec{c} = 0$ (D) $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$
7. 原点(0, 0, 0)关于平面 $6x + 2y - 9z + 121 = 0$ 对称的点为()
 (A) (12, 8, 3) (B) (-4, 1, 3)
 (C) (2, 4, 8) (D) (-12, -4, 18)
- 8*. 求过点(1, 2, 3)与y轴相交, 且与直线 $x = y = z$ 垂直的直线方程.
- 9*. 写出 oyz 平面上的双曲线 $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 分别绕z轴和y轴旋转而产生的旋转面的方程.
10. 试求顶点在原点, 准线为 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{3} = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ 的锥面方程.

二、多元函数微分学

1. 求 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 的定义域.
2. 设 $f(x + y, \frac{x}{y}) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.
3. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} + y \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 问 $f(x, y)$ 在(0, 0)的二重极限和累次极限是否存在?
- 4*. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 问
 (1) $f(x, y)$ 在点(0, 0)处是否连续, 为什么? (2) $f(x, y)$ 在(0, 0)处是否可微?
- 5*. 证明函数 $\begin{cases} \frac{x(x - y)}{x + y}, & x + y \neq 0 \\ 0, & x + y = 0 \end{cases}$ 有偏导数 $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$, 但在点(0, 0)不可微.
6. 设 $z = xf(\frac{y}{x})$, $f(u)$ 可导, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.
7. 设 $f(x, y, z) = e^x y z^2$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由 $x + y + z + xyz = 0$ 确定的隐函数, 则 $f'_x(0, 1, -1) =$ _____.
8. 设 $u = \sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $du \Big|_{(1, 1, 1)} =$ _____.
9. 函数 $z = 2x^2 + y^2$ 在点(1, 1)处的梯度为_____.
10. 曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 在点(3, 1, 1)处的切平面方程为_____.
- 11*. 设 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, 则 $f(x, y)$ 在(0, 0)处()
 (A) 不连续 (B) 偏导数不存在
 (C) 偏导数存在但不可微 (D) 偏导数存在且可微

12. 若 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 则在 (x_0, y_0) 点下列结论中不一定成立的是()

- (A) 连续 (B) 偏导数存在
(C) 偏导数连续 (D) 切平面存在

13*. 设函数 $f(x, y) = (x - y)g(x, y)$, 其中 $g(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内连续, 试问

- (1) $g(0, 0)$ 为何值时, $f_x(0, 0)$ 、 $f_y(0, 0)$ 都存在?
(2) $g(0, 0)$ 为何值时, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的全微分存在.

$$14. f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2y^2}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

问在原点 $(0, 0)$ 处 $f(x, y)$ 是否连续, 偏导数是否存在?

15. 函数 $f(x, y) = x^2y^3$ 在点 $(2, 1)$ 沿方向 $\vec{l} = i + j$ 的方向导数为().

- (A) 16 (B) $\frac{16}{\sqrt{2}}$ (C) 28 (D) $\frac{28}{\sqrt{2}}$

16. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$, 这里 f 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

17*. 设 $e^{x+y}\sin(x+z) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

18*. 设 u, v 是 x, y 的函数, 且 $\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

19. 设 $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, $f(1, 1) = 1$, $f_1(1, 1) = a$, $f_2(1, 1) = b$, 又 $f(x, f(x, x)) = F(x)$, 求 $F(1)$, $F'(1)$.

20. 求函数 $z = f(2x - y) + g(x, xy)$ 的偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 其中 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有二阶连续偏导数.

21. 设 $\frac{x}{z} = e^{y+z}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

22*. 设 $u = f(x, y, z)$, $z = xe^y$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

23. 设 $u(x, y) = e^{3x-y}$, $x^2 + y = t^2$, $x - y = t + 2$, 求 $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0}$.

24. 设 $u = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$, 求 $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{(2, \frac{1}{\pi})}$.

25*. 设 $u = yf(\frac{x}{y}) + xg(\frac{y}{x})$, 其中 f, g 都具有二阶连续导数, 求 $y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

26*. 设 $z = \sin(xy) + \varphi(x, \frac{x}{y})$, 其中 $\varphi(u, v)$ 具有二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

27. 已知 $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求 dz .

28. 设 $x = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$, $y = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}$, $z = \frac{1}{u^3} + \frac{1}{v^3} + e^x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

29. 设 $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$, $z = z(u, v)$, 以 u, v 为自变量改变方程 $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 的形式, 成为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u}$

$$\frac{\partial z}{\partial v}.$$

30. 求函数 $z = 3axy - x^3 - y^3$ ($a > 0$) 的极值.

31*. 在椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的内接长方体中, 求体积最大的长方体的体积.

32. 若 $u(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 证明 $u(x, y) = f(x)g(y)$ 的充分必要条件是

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

33*. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 求一点 (x, y, z) , 使它到点 $(1, 2, 3)$ 的距离最远.

34. 在旋转椭球面 $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ 上求距平面 $3x + 4y + 12z = 288$ 最近和最远的点.

35*. 求函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2 (x > 0, y > 0, z > 0)$ 上的最大值, 并证明对任何正整数 a, b, c 有

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5$$

36. 设 z 是由 $\varphi(x - az, y - bz) = 0$ 所确定的 x, y 的函数, $\varphi(u, v)$ 可微, 试求 z_x, z_y , 并证明曲面上任一点处的切平面与直线 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = z$ 平行 (其中 a, b 是常数).

简明解答

一、空间解析几何、向量代数

1. 设端点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 分点 $M_3(3, -5, 7), M_4(-2, 4, 8)$, 对 M_1, M_3, M_4 用定比分点公式, 此

$$\text{时 } \lambda = \frac{1}{3}, 3 = \frac{x_1 + \frac{1}{3}(-2)}{1 + \frac{1}{3}} \text{ 即 } 3 = \frac{3x_1 - 2}{4}, \text{ 解得 } x_1 = \frac{14}{3}, \text{ 完全相似, 可解得 } y_1 = -8, z_1 = 12; x_2 = -$$

$$\frac{11}{3}, y_2 = 7, z_2 = -13, \text{ 端点为 } M_1\left(\frac{14}{3}, -8, 12\right), M_2\left(-\frac{11}{3}, 7, -13\right)$$

2. 设切点为 (x_0, y_0, z_0) , 切平面方程就是

$$(2x_0 - y_0)(x - x_0) + (2y_0 - x_0)(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

由垂直的条件, 有

$$2z_0 = 0, \quad (2x_0 - y_0) + (2y_0 - x_0) = 0$$

从而解出 $x_0 + y_0 = 0, z_0 = 0$ 代入曲面方程, 可得

$$x_0 = \pm 2, y_0 = \mp 2, z_0 = 0$$

切平面方程是 $x - y \pm 2 = 0$

3. 经过点 $(5, 2, -4)$ 的平面方程是

$$A(x - 5) + B(y - 2) + C(z + 4) = 0$$

$A : B : C = 2 : 4 : -6$ 可取 $A = 2, B = 4, C = -6$, 故平面方程是

$$2(x - 5) + 4(y - 2) - 6(z + 4) = 0$$

即 $x + 2y - 3z - 21 = 0$

4. 由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ 知 $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 故 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = 2 \quad \text{应填 } 2.$$

5. $\vec{x} = 2\lambda \vec{i} - \lambda \vec{j} + 2\lambda \vec{k}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 4\lambda + \lambda + 4\lambda = -18 \quad \text{故 } \lambda = -2, \text{ 从而有}$$

$$\vec{x} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} \quad \text{应填 } -4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ 即 $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ 应选(D)

7. $\frac{-12}{6} = \frac{-4}{2} = \frac{18}{-9}$ 应选(D).

8. 设与 y 轴交于 $(0, y_0, 0)$, 从而直线的方向数是 $1, 2 - y_0, 3$, 故 $1 \times 1 + (2 - y_0) \times 1 + 3 \times 1 = 6 - y_0 = 0, y_0 =$

$$6, \text{ 直线方程是 } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{3}.$$

9. 绕 z 轴旋转产生的旋转面方程: $\frac{z^2}{4} - \frac{x^2 + y^2}{9} = 1$

$$\text{绕 } y \text{ 轴旋转产生的旋转面方程: } \frac{x^2 + z^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

10. 方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}z^2 = \frac{y^2}{4}$, 即 $6x^2 - 4y^2 + 8z^2 = 1$.

二、多元函数微分学

1. $y \geq 0$ 及 $x - \sqrt{y} \geq 0$, 从而有 $\begin{cases} 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 \leq x < + \end{cases}$

2. 今 $x + y = u$, $\frac{x}{y} = v$, 解得 $x = \frac{uv}{v+1}$, $y = \frac{u}{v+1}$ 代入得 $x^2 - y^2 = \frac{u^2 v^2 - u^2}{(v+1)^2} = \frac{u^2(v-1)}{v+1}$ 从而

$$f(x, y) = \frac{x^2(y-1)}{y+1}$$

3. 当 $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ 时 $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ 的极限不存在, 而 $\left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |y| \rightarrow 0$, 故当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限不存在. 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\frac{xy}{x^2 + y^2} + y \sin \frac{1}{x}$ 的极限不存在, 故先 $x \rightarrow 0$ 后 $y \rightarrow 0$ 时累次极限不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$.

4. $|f(x, y) - f(0, 0)| = \sqrt{|xy|} \left| \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt{|xy|} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon (0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon)$ $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 易证 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, 但如 $f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y + \alpha p$ 就有

$$\alpha = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|} \sin(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Delta x^2 + \Delta y^2} \xrightarrow{\text{沿 } \Delta x = \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 故不可微.}$$

5. 由定义容易得出 $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$, 但是若

$$f(0 + \Delta x, y + \Delta y) - f(0, 0) = f_x(0, 0)\Delta x + \alpha p$$

即

$$\frac{\Delta x(\Delta x - \Delta y)}{\Delta x + \Delta y} - \Delta x = \alpha p$$

$$\frac{-2\Delta x \Delta y}{(\Delta x + \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \alpha$$

沿 $\Delta x = \Delta y \rightarrow 0$, 即可判断 α 不趋于零, 故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不可微.

6. $xf\left(\frac{y}{x}\right)$

7. 1.

8. $u = e^{\frac{1}{z} \ln \frac{x}{y}} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1, 1, 1)} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1, 1, 1)} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1, 1, 1)} = 0, \quad du \Big|_{(1, 1, 1)} = dx - dy.$

9. $4i + 2j$

10. $F'_x(3, 1, 1) = 18, \quad F'_y(3, 1, 1) = 2, \quad F'_z(3, 1, 1) = -2$ 切平面方程是: $9x + y - z = 27$.

11. $|f(x, y) - f(0, 0)| = \sqrt{|xy|} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon (0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon)$ $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, 显然 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, 故偏导数存在, 但若

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \alpha p$$

就有

$$\alpha = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \xrightarrow{\text{沿 } \Delta y = \Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

故不可微, 应选(C).

12. 选(C), 见本章 §4 - 2.

13. 设 $g(0, 0) = a$

(1) $\frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \frac{| \Delta x |}{\Delta x} g(\Delta x, 0)$ 当 $\Delta x \rightarrow 0^+$, 它 $\rightarrow a$, 当 $\Delta x \rightarrow 0^-$, 它 $\rightarrow -a$, 故 $f'_x(0, 0)$ 存在

的充要条件是 $g(0, 0) = a = 0$, 此时 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

(2) $g(0, 0) = 0$ 时, 由定义即可判断 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的全微分存在.

14. 容易判断 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, 但

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) \stackrel{\text{沿 } y=x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x^2}{2x^6} = +$$

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不连续.

15. 选(B).

$$16. \frac{\partial u}{\partial y} = f(x^2 + y^2 + z^2)(2y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2f(x^2 + y^2 + z^2) + 4y^2 f'(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$17. e^{x+y} \sin(x+z) + e^{x+y} \cos(x+z)(1+z_x) = 0 \quad \text{可得} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\operatorname{tg}(x+z) - 1.$$

$$\text{相似可得} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\operatorname{tg}(x+z)$$

$$18. \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu + xv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{xu + yv}{x^2 + y^2}$$

$$19. F(1) = f[1, f(1, 1)] = f(1, 1) = 1 \quad F'(x) = f_1 + f_2[f_1 + f_2]$$

$$F'(1) = a + b[a + b] = a + ab + b^2$$

$$20. \frac{\partial z}{\partial x} = 2f(2x - y) + g'_1(x, xy) + g'_2(x, xy)y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2f'(2x - y) + g''_{12}(x, xy)x + g'_2(x, xy) + xyg'_{22}(x, xy)$$

$$21. \text{改写成} \quad z = xe^{-(y+z)} \quad \text{再求导} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-z}{x(1+z)^3}$$

$$22. \frac{\partial u}{\partial x} = f_1(x, y, z) + f_3(x, y, z)e^y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= f'_{12}(x, y, z) + f'_{13}(x, y, z)xe^y + f_3(x, y, z)e^y + f'_{32}(x, y, z)e^y + f'_{33}(x, y, z)xe^{2y} \\ &= f'_{12} + xe^y f'_{13} + e^y f'_{32} + xe^{2y} f'_{33} + e^y f_3. \end{aligned}$$

$$23. t=0 \quad x^2 + y = 0 \quad x - y = 2 \quad \text{解得} \quad x = 1, y = -1, x = -2, y = -4.$$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{\substack{t=0 \\ x=1 \\ y=-1}} = \frac{5}{3}e^4, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{\substack{t=0 \\ x=-2 \\ y=-2}} = \frac{1}{3}e^2$$

$$24. \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{(2, \frac{1}{\pi})} = \left(\frac{\pi}{e} \right)^2$$

$$\begin{aligned} 25. \frac{\partial u}{\partial x} &= yf\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{y} + g\left(\frac{y}{x}\right) + xg'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) + g'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$26. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - x \sin(xy) - \frac{1}{y^2} \varphi'_v - \frac{x}{y^2} \varphi''_{uv} - \frac{x}{y^3} \varphi''_{vw}$$

$$27. dz = e^{\sqrt{x^2 - y^2}} \left(\frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right)$$

28. 设 v, y 为独立自变量, x, z, u 是 y, v 的函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial v}$ 时, 对所给方程分别在等式两边关于 v 求导, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{1}{v^2}, & 0 &= -\frac{2}{u^3} \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{2}{v^3} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= -\frac{3}{u^4} \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{3}{v^4} + e^x \frac{\partial x}{\partial v}\end{aligned}$$

由前面两式解出 $\frac{\partial u}{\partial v} = -\left(\frac{u}{v}\right)^3$, $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u-v}{v^3}$, 代入第三式中, 得

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{3}{uv^3} - \frac{3}{v^4} + \frac{u-v}{u^3} e^x$$

对所给方程分别在等式两边关于 y 求导, 得

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad 1 = -\frac{2}{u^3} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{u^4} \frac{\partial u}{\partial y} + e^x \frac{\partial x}{\partial y}$$

从前面两式解出 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}u^3$, $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{2}u$, 代入第三式中, 得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2u} + \frac{u}{2}e^x$$

29. 由变换式 $u = xy, v = \frac{x}{y}$ 求得 $u_x = y, u_y = x, v_x = \frac{1}{y}, v_y = -\frac{x}{y^2}$, 于是有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}\text{及} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{1}{y} \right) \\ &= y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x \left[x \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right] + \left[x \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{x}{y^2} \right] \left(-\frac{x}{y^2} \right) + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial z}{\partial v} \\ &= x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}$$

把 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入原方程并化简, 可得

$$4x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2x}{y} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

评述 方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u} \frac{\partial z}{\partial v}$ 可改写为 $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2u} z \right) = 0$ 这为方程求解创造了条件.

30. $z'_x = 3ay - 3x^2, z'_y = 3ax - 3y^2, z'_x = z'_y = 0$ 可解得 $x = 0, y = 0, x = a, y = a$, 在 (a, a) 取得极大值 a^3 , 在 $(0, 0)$ 不取得极值.

31. 在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ 下求 $v = 8xyz$ 的最大值, 用拉格朗日乘数法

$$F(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\begin{cases} F'_x = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ F'_y = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ F'_z = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ F'_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{可解得} \quad x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad V_{\max} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$$

$$32. \text{ 证明 必要性 设 } u(x, y) = f(x)g(y) \text{ 则 } \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x)g(y), \frac{\partial u}{\partial y} = f(x)g'(y)$$

$$\text{于是} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f'(x)g'(y)$$

$$\text{故} \quad u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x)g(y)f'(x)g'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{充分性 设 } u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = v, \text{ 有} \quad u \frac{\partial v}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{或} \quad \frac{u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}}{u^2} = 0 \quad \text{即} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{u} \right) = 0$$

$$\text{积分得} \quad \frac{v}{u} = \varphi(y) \text{ 或 } \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(y)$$

$$\text{亦即} \quad \frac{\partial(\ln u)}{\partial y} = \varphi(y)$$

$$\text{再积分得} \quad \ln u = \int \varphi(y) dy + \psi(x)$$

$$\text{故} \quad u = e^{\int \varphi(y) dy} \cdot e^{\psi(x)} = f(x) \cdot g(y)$$

33. 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下求

$$f(x, y, z) = \rho^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$$

的最大值, 用拉格朗日乘数法, 求得在点 $\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right)$ 距离最远.

34. 平面的方程是 $3x + 4y + 12z = 288$, 由点到平面距离公式知椭圆上一点 (x, y, z) 到平面的距离是

$$\rho(x, y, z) = \frac{|3x + 4y + 12z - 288|}{13} = \frac{288 - 3x - 4y - 12z}{13}$$

我们要在条件 $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ 下求 $\rho(x, y, z)$ 的极值, 用拉格朗日乘数法可求得最近点是 $\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8} \right)$, 最远

点是 $\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8} \right)$.

35. 本题是条件极值的问题, 用拉格朗日乘数法.

$$\text{设} \quad F(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 5r^2)$$

$$\text{求得} \quad F'_x = \frac{1}{x} + 2\lambda x, F'_y = \frac{1}{y} + 2\lambda y, F'_z = \frac{3}{z} + 2\lambda z$$

$$\text{令 } F'_x = 0, F'_y = 0, F'_z = 0, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} 2\lambda x^2 + 1 = 0 \\ 2\lambda y^2 + 1 = 0 \\ 2\lambda z^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{上述三式相加得} \quad 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 5 = 0$$

$$\text{即} \quad 2\lambda r^2 + 1 = 0$$

$$\text{解得} \quad \lambda = -\frac{1}{2r^2}$$

于是, 函数 $f(x, y, z)$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ 下的可能极值点为 $(r, r, \sqrt{3}r)$.

因为在第一卦限内球面的三条边界线是 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \dots$, 当点超过边界线时, $f(x, y, z) \rightarrow -\infty$, 所以最大

值必在曲面内部取得. 现驻点是唯一的, 函数 $f(x, y, z)$ 在点 $(r, r, \sqrt{3}r)$ 处取得最大值为 $f(r, r, \sqrt{3}r) = \ln(3\sqrt{3}r^5)$.

从上面所得结果知, 函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ 在 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2 (x > 0, y > 0, z > 0)$ 时有最

大值 $f(r, r, \sqrt{3}r) = \ln(3\sqrt{3}r^5)$, 故对于任意的正数 a, b, c 有

$$f(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}) = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{b} + 3\ln \sqrt{c} \leq \ln(3\sqrt{3}r^5)$$

其中 $r = \sqrt{\frac{a+b+c}{5}}$. 从而有

$$\frac{1}{2} \ln abc^3 \leq \frac{1}{2} \ln(3\sqrt{3}r^5)^2 = \frac{1}{2} \ln(27r^{10})$$

即
$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5$$

36. 设 $u = x - az, v = y - bz$, 则 $\varphi(u, v) = 0$, 将方程两边对 x 求偏导数, 得

$$\varphi'_u u_x + \varphi'_v v_x = \varphi'_u (1 - az'_x) + \varphi'_v (-bz'_x) = 0$$

解得
$$z'_x = \frac{\varphi'_u}{a\varphi'_u + b\varphi'_v}$$

同理可得
$$z'_y = \frac{\varphi'_v}{a\varphi'_u + b\varphi'_v}$$

因为曲面 $S: \varphi(x - az, y - bz) = 0$ 上任一点 $M(x, y, z)$ 处切平面的法向量为 $\vec{n} = \varphi'_x \mathbf{i} + \varphi'_y \mathbf{j} + \varphi'_z \mathbf{k}$
而 $\varphi'_x = \varphi'_u, \varphi'_y = \varphi'_v, \varphi'_z = -a\varphi'_u - b\varphi'_v$

又直线 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = z$ 的方向向量为 $\vec{l} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \mathbf{k}$

故 $\vec{n} \cdot \vec{l} = a\varphi'_x + b\varphi'_y + \varphi'_z = a\varphi'_u + b\varphi'_v - a\varphi'_u - b\varphi'_v = 0$ 即 $\vec{n} \perp \vec{l}$

所以曲面 S 上任一点的切平面与直线 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = z$ 平行

第四部分 多元函数积分学

第五章 重积分及其应用*

考试要求：

1. 理解二重积分、三重积分的概念,了解重积分的性质,了解二重积分的中值定理.
2. 掌握二重积分(直角坐标、极坐标)的计算方法,会利用对称性计算.
3. 会计算三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标),会利用对称性计算.
4. 会用重积分求一些几何量与物理量(面积、体积、质量、重心、转动惯量、引力、功等).

考试要点分析与题型预测

这一章的考试要点有

1. 会熟练地应用直角坐标、极坐标计算二重积分;会熟练地应用直角坐标、柱面坐标、球面坐标计算三重积分,包括定限、运算.
2. 面对一个重积分,第一反应是:应该选择什么坐标进行计算.即使对一个上、下限已经标定了累次积分,也不是拿起题就做,而是反过来思考:它等于怎样一个重积分,应该选择什么坐标,这里主要应考虑积分区域,其次也可适当考虑被积函数.选择得好,真有事半功倍的感觉.
3. 利用椭圆极坐标计算二重积分、椭圆面坐标计算三重积分在特殊情况下效果良好,用先2后1的方法计算三重积分同样如此,请注意例8、9、10(历届考题)的分析与评述,这是研究生考试的重要题型.
4. 利用区域的对称性与被积函数的对称性来计算重积分,往往可以巧妙地解决问题,应当掌握.请注意例1、2、5(历届考题)的分析、解与评述.这种考题也较常见.
5. 用重积分计算面积、体积、重心、重量、引力等都是常见的题型.

§5-1 重积分的概念

一、二重积分概念

定义1 设 $z = f(x, y)$ 为定义于区域 B 的有界函数.

- (1) 把 B 域分成 N 个子域 σ_K , 其面积是 $\Delta\sigma_K$ ($K = 1, 2, \dots, N$)
- (2) 在每一个子域 σ_K 中任意取一点 $P_K(\xi_K, \eta_K)$.
- (3) 作出和数:

$$\sum_{K=1}^N f(P_K) \Delta\sigma_K = \sum_{K=1}^N f(\xi_K, \eta_K) \Delta\sigma_K$$

如果不论 σ_K 怎样划分, P_K 点怎样取法, 在 $N \rightarrow \infty$ 而最大的子域直径 δ 趋于零时和数的极限存在, 那么, 这极限就称为函数 $f(x, y)$ 在 B 域上的二重积分, 记作

$$\iint_B f(x, y) d\sigma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{K=1}^N f(\xi_K, \eta_K) \Delta\sigma_K$$

这里 x 与 y 称为积分变量, $f(x, y)$ 称为被积函数, B 称为积分区域.

根据这个定义, 当 $f(x, y) \geq 0$ 时以曲面 $f(x, y)$ 为上底, xoy 平面内 B 域为下底的曲顶柱体体积等于 $f(x, y)$ 在 B 域上的二重积分

* 数学二只考二重积分

$$V = \iint_B f(x, y) d\sigma$$

特别,如果 $f(x, y) \equiv 1$,那么,相应的二重积分在数值上正好等于积分区域 B 的面积 σ ,即

$$\sigma = \iint_B d\sigma$$

因此,我们还可以利用二重积分来计算平面面积.

定理 1(存在定理) 如果 $f(x, y)$ 在积分域 B 连续,则上述二重积分必然存在.

以后我们所研究的二重积分,总假设被积函数在它的积分域连续.

二、二重积分重要性质

(1) $\iint_B Af(x, y) d\sigma = A \iint_B f(x, y) d\sigma$ (A 为常数)

(2) $\iint_B [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] d\sigma = \iint_B f_1(x, y) d\sigma \pm \iint_B f_2(x, y) d\sigma$

(3) 如果把域 B 分成两个子域 B_1 与 B_2 ,则

$$\iint_B f(x, y) d\sigma = \iint_{B_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{B_2} f(x, y) d\sigma$$

(4) 如果在 B 域 $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$,则

$$\iint_B f(x, y) d\sigma \leq \iint_B \varphi(x, y) d\sigma$$

(5) 如果在 B 域 $m \leq f(x, y) \leq M$,则 $m\sigma \leq \iint_B f(x, y) d\sigma \leq M\sigma$

其中 σ 是 B 的面积.

(6) 中值定理 如果 $f(x, y)$ 在闭域 B 连续,则存在 B 的某一点 (ξ, η) ,使得

$$\iint_B f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma$$

三、三重积分

定义 2 设函数 $u = f(x, y, z)$ 为定义于空间区域 G 的有界函数.

(1) 把 G 域分成 N 个子域 v_k ,其体积是 $\Delta v_k (k = 1, 2, \dots, N)$

(2) 在每一个子域 v_k 任意取一点 $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$;

(3) 作出和数 :

$$\sum_{k=1}^N f(P_k) \Delta v_k = \sum_{k=1}^N f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k$$

如果不论 v_k 怎样划分, P_k 点怎样取法,当 $N \rightarrow \infty$ 而且最大的子域直径 δ 趋于零时和数的极限存在,那么,这极限

就称为 $f(x, y, z)$ 在 G 域上的三重积分,记作 $\iiint_G f(x, y, z) dv = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(P_k) \Delta v_k$

对于三重积分同样有,若 $f(x, y, z)$ 在 G 连续,则三重积分存在.二重积分的六个重要性质,三重积分也都具有.

如果 $f(x, y, z) \equiv 1$ 时,那么,相应的三重积分在数值上就等于积分域 G 的体积 V ,即 $\iiint_G dv = V$

以后我们将看到,利用三重积分来计算体积,不仅可行,而且往往还显得更灵活.

§ 5 - 2 重积分的计算

一、二重积分计算

仅仅凭借积分的定义与性质,还不便于对重积分进行计算,一般需将重积分化为累次积分,下面先介绍二重积分.

1. 直角坐标

设区域 B 完全包含在与 B 的边界曲线相切的直线 $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ 所围矩形之内. 且任何平行于 x 轴或 y 轴的直线与 B 的边界曲线至多只有两个交点. 又 B 域边界上对应于 $x = a$ 与 $x = b$ 的点 M 与 N 把边界分为上、下两段, 上段 MPN 的方程是 $y = Y_2(x)$, 下段 MQN 的方程是 $y = Y_1(x)$. P 与 Q 把边界分为左右两段, 左段 PMQ 的方程是 $x = X_1(y)$, 右段 PNQ 的方程是 $x = X_2(y)$. 如图 5-1, 此时我们有

$$\iint_B f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

这就是说, 要计算等式左端的二重积分, 只需逐次算出等式右端的两个一元函数的定积分就行了. 这样接连着逐次求得的定积分称为累次积分, 可以写成

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[\int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \\ = \int_a^b \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned}$$

这是先对 y 后对 x 的累次积分, 当然也可以先对 x 后对 y 进行累次积分. 在图 5-1 情况下有,

$$\iint_B f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left[\int_{X_1(y)}^{X_2(y)} f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} f(x, y) dx$$

这就是说, 要用累次积分计算一个二重积分时, 可以颠倒积分的次序, 但在变更次序的同时, 一般说来, 上下限

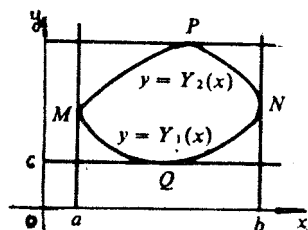


图 5-1

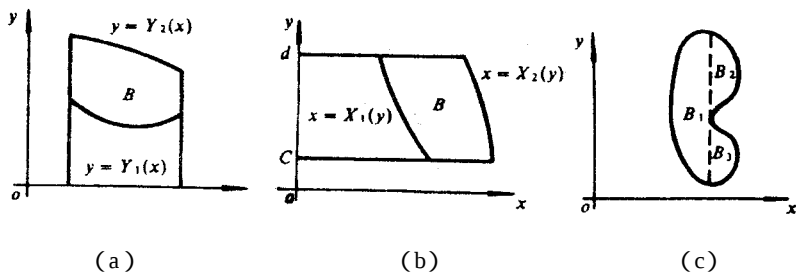


图 5-2

都应相应的改变.

如果积分域 B 像图 5-2(a) 或图 5-2(b) 那样, 重积分计算公式仍然适用. 如果平行于坐标轴的直线与积分域 B 的边界曲线的交点如图 5-2(c) 时, 那末, 一般来说, 总可以把它分成几个子域, 使每一个子域的情况如图 5-2(a) 5-2(b) 或 5-1 的情形. 这时在 B 域上的二重积分, 根据 § 5-1 性质(3), 就等于在 B_1, B_2, B_3 上的二重积分的和.

2. 极坐标

计算二重积分, 若局限在直角坐标范围内, 往往很繁甚至于不能计算. 若能根据问题的特点灵活的运用其它曲线坐标 (譬如极坐标) 进行计算, 则能收到很好的效果.

设 x 与 y 都是新变量 u 与 v 的函数

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$$

其中 $\varphi(u, v)$ 与 $\psi(u, v)$ 都有连续的一阶偏导数, 且行列式

$$D = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

此时在 xoy 平面与 uov 平面之间可以建立一种对应关系, 由 xoy 平面的区域 B 映射成 uov 平面区域 B' , 因此二重积分

$$\iint_B f(x, y) d\sigma = \iint_{B'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |D| du dv$$

$|D|$ 是指行列式的绝对值, 如果令 $f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = F(u, v)$, 则上述公式可写成

$$\iint_B f(x, y) d\sigma = \iint_B F(u, v) |D| du dv$$

如采用极坐标, 便有:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

不难验证 $|D| = r$, 于是

$$\iint_B f(x, y) d\sigma = \iint_B F(r, \theta) r dr d\theta$$

积分 $\iint_B F(u, v) |D| du dv$ 的计算一般来说可在 uov 平面采用类似于 xoy 平面内的办法化为累次积分计算. 但

对于极坐标, 为简单起见可在 xoy 平面内用下述方法确定累次积分的上、下限. 首先, 二重积分就写成

$$\iint_B f(x, y) d\sigma = \iint_B F(r, \theta) r dr d\theta$$

(1) 极点 O 在 B 域之外 如果我们先对 r 积分 (这是大多数的情况) 则可暂把 θ 视作某一定值, 于是

$$\iint_B F(r, \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{R_1(\theta)}^{R_2(\theta)} F(r, \theta) r dr d\theta$$

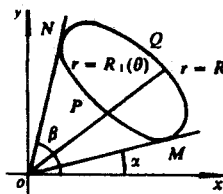


图 5-3

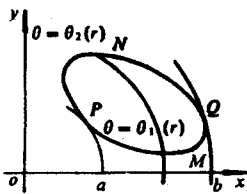


图 5-4

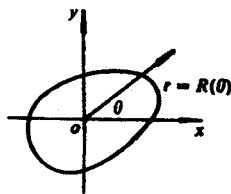


图 5-5

其中 $r = R_1(\theta)$ 、 $r = R_2(\theta)$ 分别是两段边界 MPN 与 MQN 的方程如图 5-3 $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 是 θ 的变化范围, 而 M 与 N 分别对 $\theta = \alpha$ 与 $\theta = \beta$ 的点.

如果我们先对 θ 积分, 则可暂把 r 视作某一定值, 于是

$$\iint_B F(r, \theta) r dr d\theta = \int_a^b \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} F(r, \theta) r d\theta dr$$

其中 $\theta = \theta_1(r)$ 、 $\theta = \theta_2(r)$ 分别是两段边界 PMQ 与 PNQ 的方程, 如图 5-4 $a \leq r \leq b$ 是 r 的变化范围, 而 P 与 Q 分别是对应于 $r = a$ 与 $r = b$ 的点. (2) 极点 O 在 B 域之内的这种情况, 可以认为 θ 是由 0 变化至 2π , 而 r 是由 0 变化至 $R(\theta)$, 其中 $r = R(\theta)$ 就是 B 域边界的方程, 如图 5-5, 因此

$$\iint_B F(r, \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} F(r, \theta) r dr d\theta$$

如果极点 O 就在边界曲线上, 上述积分的第一个上、下限仍然适用, 而 θ 的变化要视实际情况而定.

二、三重积分计算

三重积分的计算思想 相似于二重积分, 也可化为累次积分进行计算.

1. 直角坐标

现在, 我们来说明计算的方法. 设平行于坐标轴的直线与 G 域的边界曲面的交点不超过两点. 把 G 域投影到 xoy 平面, 得到平面区域 B 如图 5-6. 从 B 的边界作母线平行于 z 轴形成的柱面, 它与 G 域的交线把 G 域的表面分为下、上两部分, 方程分别是 $z = Z_1(x, y)$ 与 $z = Z_2(x, y)$. 由 B 内任意一点 (x, y) 作与 z 轴平行的直线, 便与下半个及上半个曲面分别相交于 Z_1 及 Z_2 . 于是

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \iint_B \left[\int_{Z_1(x, y)}^{Z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma$$

这就是先把 x 与 y 当作常数对 z 积分, 然后再求 B 域上二重积分. 如果这时先对 y , 后对 x 积分, 即得

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} \int_{Z_1(x, y)}^{Z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

但是如果我们先对 x 积分, 就应当把 G 域投影到 $yo z$ 平面, 想先对 y 积分, 则应当把 G 域投影到 zox 平面, 相应的计算也相似.

上述情况, 实际上是先计算一次定积分再计算二重积分. 当然也可以颠倒过来, 先计算二重积分再计算一次定积分. 如图 5-7, 设平行于 xoy 平面与区域 G 交成平面区域 B_z . 而 $a \leq z \leq b$. 则有

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \int_a^b \left[\iint_{B_z} f(x, y, z) d\sigma \right] dz$$

方括号内是在域 B_z 上对 x, y 的二重积分.

相同于二重积分, 三重积分的计算必须灵活地应用其它曲线坐标. 设 x, y 与 z 都是新变量 u, v, w 的函数

$$x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \chi(u, v, w)$$

其中 φ, ψ, χ 都是连续的一阶偏导数, 且行列式

$$D = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

于是三重积分

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \iiint_G F(u, v, w) |D| du dv dw$$

其中 $F(u, v, w) = f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]$, $|D|$ 是行列式的绝对值, G 是区域 G 映射到 uvw 空间中的相应区域. 最常用的曲线坐标有下列两种.

2. 柱面坐标

$$\text{由 } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$$

引入的坐标称为柱面坐标. 此时 $|D| = r$, 于是

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \iiint_G F(r, \theta, z) r dz dr d\theta$$

等式右面的积分域仍记作 G 是因为仍然可以在 xyz 空间确定累次积分的上、下限 (下面的球坐标也是这样).

3. 球面坐标

$$\text{由 } x = \rho \sin \varphi \cos \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \varphi$$

引入的坐标称为球面坐标 ($0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$). 此时不难验证 $|D| = \rho^2 \sin \varphi$, 于是

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \iiint_G F(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

重积分的计算是比较复杂的, 而灵活地选择坐标, 正确地确定次序则是求解的关键, 这些我们将在例题分析中介绍.

§ 5 - 3 典型例题分析与最新考试题型预测

典型题型 1. 二重积分的计算 (灵活地选择直角坐标、极坐标、椭圆极坐标 ... 来计算二重积分)

例 1 计算 $\iint_B (1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}) d\sigma$ $B: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_B (1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}) d\sigma &= \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 (1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(y - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{8} \right) \Big|_{-2}^2 dx = \int_{-1}^1 (4 - \frac{4}{3}x) dx \end{aligned}$$

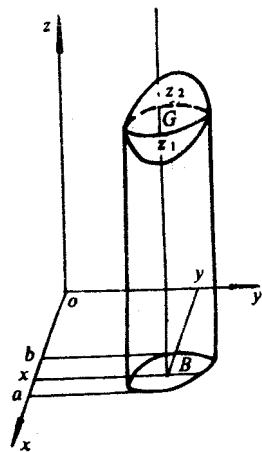


图 5 - 6

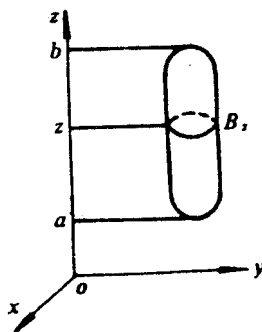


图 5 - 7

$$= 8$$

此题也可先对 x 积分, 后对 y 积分

例 2 求 $I = \iint_B (x^2 + y^2) d\sigma$ B 是由 $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$ 围成的区域

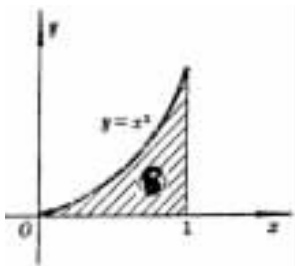


图 5 - 8

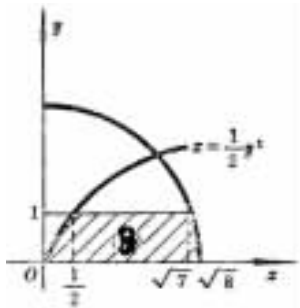


图 5 - 9

解 先对 y 后对 x 积分. (区域 B 如图 5 - 8)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \bigg|_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \frac{26}{105} \end{aligned}$$

例 3 把 $I = \iint_{(B)} f(x, y) d\sigma$ 化为累积分, 其中 (B) 是在第一象限中, 由 $x^2 + y^2 = 8$, $y = 0$, $y^2 = 2x$ 及 $y = 1$ 所围成区域 (图 5 - 9).

解 先对 y 积分, 必须分成三个区域 (参看图 5 - 9), 此时比较繁琐, 现先对 x 积分

$$I = \int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx dy$$

例 4 设 $I = \iint_{(B)} \frac{\sin x}{x} d\sigma$. (B) 是由 $y = x$ 及 $y = x^2$ 所围成的区域 (图 5 - 10)

解 先对 x 后对 y 积分

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx dy$$

求不出结果, 因为 $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数不是初等函数. 可先对 y 后对 x 积分, 则

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{\sin x}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x - x^2) dx = 1 - \sin 1$$

例 5 交换下列累次积分

$$I = \int_{-2}^0 \int_0^{\frac{2+x}{2}} f(x, y) dy dx + \int_0^2 \int_0^{\frac{2-x}{2}} f(x, y) dy dx$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \iint_{B_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{B_2} f(x, y) d\sigma \\ &= \iint_B f(x, y) d\sigma \\ &= \int_0^1 \int_{2-2y}^{2-2y} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

其中 B_1 , B_2 , B 见图 (5 - 11).

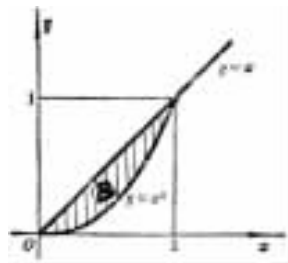


图 5 - 10

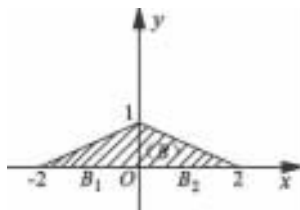


图 5 - 11

例 6* 计算 $\iint_B x^2 d\delta$ $B: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

分析 积分域是椭圆域,采用直角坐标系固然麻烦,改用极坐标系也未必简单(椭圆方程在极坐标系中仍然较繁).此时采用椭圆极坐标系比较合适,即令

$$x = a \cos \theta \quad y = b \sin \theta$$

因为在这一坐标系下,椭圆的方程是 $r = 1$. 而

$$D = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a \sin \theta \\ b \sin \theta & b \cos \theta \end{vmatrix} = ab$$

$$\text{解} \quad \iint_B x^2 d\delta = \iint_B a^2 r^2 \cos^2 \theta ab r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 a^3 b r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{1}{4} a^3 b \pi$$

评述 需要注意的是椭圆极坐标的使用范围相当窄,只对椭圆域使用方便.

例 7* 求由下列各曲线所围成的区域面积:

$$xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x (x > 0, y > 0)$$

分析 此题也可用定积分计算,但要把区域分成几个小区域分别计算,并不方便.考虑到区域由一族曲线中的两条曲线与一族直线中的两条直线所围成,若采用重积分并根据这一特点采用适当的曲线坐标进行计算,当可收到好的效果.

$$\text{令 } u = xy, v = \frac{y}{x} \text{ 即 } x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv} \text{ 引入曲线坐标,此时 } a^2 \leq u \leq 2a^2, 1 \leq v \leq 2 \text{ 而}$$

$$|D| = \left| \frac{1}{2v} \right| = \frac{1}{2v}$$

$$\text{解} \quad S = \iint_B d\delta = \int_{a^2}^{2a^2} \int_1^2 \frac{1}{2v} dv du = \frac{1}{2} a^2 \ln 2$$

典型题型 2. 灵活应用对称性或改变积分次序计算二重积分或二次积分

例 8 (91 3 分) 设 D 是 xoy 平面上以 $(1, 1)$, $(-1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于()

- (A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$ (B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$
(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$ (D) 0

分析 此类问题一般要用到积分域的对称性和被积函数的奇偶性,在这里我们把积分域对称,被积函数具有奇偶性的某些特殊规律归结如下:

1) 设 D 对称于 Y 轴, D_1 是 D 的左半部分, 如 $f(-x, y) = -f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$; 如 $f(-x, y) = f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$$

2) 设 D 对称于 X 轴, D_1 是 D 的上半部分

如 $f(x, -y) = -f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$

如 $f(x, -y) = f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$.

3) 设 D 对称于原点, 将 D 分为对称于原点的两部分 D_1 与 D_2 .

如 $f(-x, -y) = f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$

如 $f(-x, -y) = -f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$

4) 还有一种对称, 在研究生考试中也会遇到, 如 $f(x, y) = f(y, x)$ (将 x, y 调换, 函数值不改变) 我们称 $f(x, y)$ 关于直线 $y = x$ 是对称的, 设 D 对称于 $y = x$, 将 D 分为对称于 $y = x$ 的两部分 D_1, D_2 .

如 $f(x, y) = -f(y, x)$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$

如 $f(x, y) = f(y, x)$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$

有的书上把 $f(-x, y) = -f(x, y)$ 称为 $f(x, y)$ 对 x 是奇函数, 把 $f(-x, y) = f(x, y)$ 称为对 x 是偶函数, 余可类推.

解 如(图 5-12), $\triangle OAB$ 所围区域记作 D_2 , $\triangle OBC$ 所围区域记作 D_3 .

$$\iint_D xy dx dy = \iint_{D_2} xy dx dy + \iint_{D_3} xy dx dy$$

$f_1(x, y) = xy$ 在 D_2 符合 1) 的第一种情况, 在 D_3 符合 2) 的第一种情况, 故

$$\iint_D xy dx dy = 0 + 0 = 0$$

$$\iint_D \cos x \sin y dx dy = \iint_{D_2} \cos x \sin y dx dy + \iint_{D_3} \cos x \sin y dx dy$$

$f_2(x, y) = \cos x \sin y$ 在 D_2 符合 1) 的第二种情况, 在 D_3 符合 2) 的第一种情况, 故

$$\iint_D \cos x \sin y dx dy = \iint_{D_2} \cos x \sin y dx dy + 0 = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$$

应选 (A).

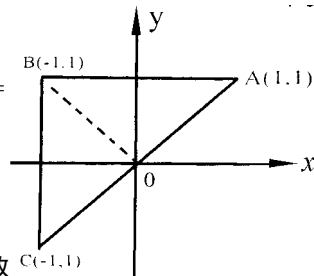


图 5-12

评述 不容易的 3 分 这种类型的题目最易犯的错误是只要看见积分域对称不考虑函数的性质就得出 $\iint_D = 2 \iint_{D_1}$, 值得注意.

例 9 设有空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$; 在 $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则 ()

(A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$

分析 对比上一题, 不难得出三重积分的类似公式, 譬如: 如 Ω 对 YOZ 平面对称的, 将 Ω 分为对称于 YOZ 平面的 Ω_1, Ω_2 . 如 $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$ (对 x 是奇函数), 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$; 如 $f(-x, y, z) = f(x, y, z)$ (对 x 是偶函数), 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv$. 又如 Ω 对原点对称的, 将 Ω 分为对称于原点的 Ω_1, Ω_2 .

如 $f(-x, -y, -z) = -f(x, y, z)$, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$; 如 $f(-x, -y, -z) = f(x, y, z)$, 则

$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv, \dots$ 其它公式, 读者不难对照推出.

以本题而论, $f(x, y, z) = z$ 在 Ω_1 内, 对 x 对 y 都是偶函数, 再加上区域的对称性, 两次应用上述公式, 立即判定 (C) 是正确的.

解 选 (C).

例 10 (90 3 分) 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值等于_____.

分析 此题看似简单, 但由于 e^{-y^2} 的原函数不是初等函数 (所谓 $\int e^{-y^2} dy$ 积不出来), 无法直接计算. 此时可利用重积分与累次积分的关系将它转化为重积分后变换积分次序进行计算.

解 以 D 表示图 5-13 所示平面区域, 则

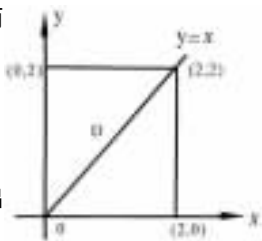


图 5-13

$$\begin{aligned}\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy &= \iint_D e^{-y^2} dx dy = \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^2 y e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-4})\end{aligned}$$

应填 $\frac{1}{2}(1 - e^{-4})$

评述 在积分中出现 e^{-x^2} , $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$... 这样“积不出来”的函数时务必要冷静, 相信一定可以变换方法达到柳暗花明又一村的。

例 11 (06, 10 分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

解 注意 $\frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2}$ 关于 x 或 y 既不是奇函数, 也不是偶函数, 但 $\frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ 关于 x (或 y) 是偶函数,

$\frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$ 关于 x (或 y) 是奇函数, 而积分域关于 x 轴对称, 所以利用上面二个函数关于 y 的奇偶性可得:

$$I_2 = \iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = 0$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1 + r^2} r dr = \pi \cdot \frac{1}{2} \ln(1 + r^2) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2.\end{aligned}$$

例 12 (95, 5 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$

分析 如图 5 - 14, 显然有

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \iint_{D_1} f(x)f(y) dx dy$$

x 与 y 互换, 函数 $f(x)f(y)$ 不变, 即是说, 它关于直线 $y = x$ 是对称的, 而 D_1 关于 $y = x$ 对称的区域是 D_2 , 故如令 $D = D_1 \cup D_2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, 据例 1 分析中的情况 4), 有 $\iint_D f(x)f(y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x)f(y) dx dy$, 问题就迎刃而解了。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy &= \iint_{D_1} f(x)f(y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D f(x)f(y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x)f(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 f(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 = \frac{1}{2} A^2\end{aligned}$$

此题还有多种解法, 试举一种解法如下:

$f(x)$ 连续, 故 $\frac{d}{dx} \int_1^x f(y) dy = f(x)$, 于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy &= - \int_0^1 dx \int_1^x f(x)f(y) dy = - \int_0^1 \left[f(x) \cdot \int_1^x f(y) dy \right] dx \\ &= - \int_0^1 \left[\int_1^x f(y) dy \right] d \int_1^x f(y) dy \\ &= - \frac{1}{2} \left(\int_1^x f(y) dy \right)^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} A^2\end{aligned}$$

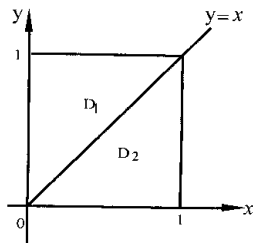


图 5 - 14

评述 例 8, 9, 12 说明, 灵活应用对称性计算某些积分, 有时会起到很好的作用. 至于重积分与累次积分的关系, 则是必须掌握的基本要求.

例 13 (02, 7 分) 计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

分析 令 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$

在 D_1 上 $e^{\max\{x^2, y^2\}} = e^{x^2}$, 在 D_2 上 $e^{\max\{x^2, y^2\}} = e^{y^2}$, 而 $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$, 参考例 10, 不难作出此题.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy &= \iint_{D_1} e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy + \iint_{D_2} e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy \\ &= \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx + \int_0^1 y e^{y^2} dy = e - 1 \end{aligned}$$

例 14 (05, 11 分) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数, 计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy$.

解 记 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$,

$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$,

则有 $[1 + x^2 + y^2] = 1, (x, y) \in D_1$,

$[1 + x^2 + y^2] = 2, (x, y) \in D_2$.

于是

$$\begin{aligned} \iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} 2xy dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 \sin\theta \cos\theta dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} 2r^3 \sin\theta \cos\theta dr \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

评述 遇上取整函数 $[\]$, 一般需要分区域处理.

例 15 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+z) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域.

分析 计算二重积分, 最好画出区域图形, 可避免一些错误. 三重积分的积分区域在空间, 我们作重分析变量的变化范围, 注意边界曲面是什么, 不一定画出图形.

本题区域, 由球面与圆锥面围成, 适宜选用球面坐标.

解 利用球面坐标进行计算

$$\iiint_{\Omega} (x+z) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 [\rho \sin\varphi \cos\theta + \rho \cos\varphi] \rho^2 \sin\varphi d\rho = \frac{\pi}{8}.$$

评述 本题也可采用考点内容提要中谈到的先进行二重积分的计算再进行定积分的计算(所谓先 2 后 1) 将在后面, 结合其它典型例子, 进行研究.

例 16* (91, 5 分) 求 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dv$ 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周的曲面与平面 $z = 4$ 所围成的立体.

分析 Ω 由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 与平面 $z = 4$ 围成, 适宜用柱面坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$. 在柱面坐标

下 Ω 由 $z = \frac{r^2}{2}$, $z = 4$ 围成, 投射到 xoy 平面的区域 Ω $r \leq \sqrt{8}$, $dv = r dr d\theta dz$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dv &= \iiint_{\Omega} (r^2 + z) r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} dr \int_{\frac{r^2}{2}}^4 (r^2 + z) r dz \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{8}} (4r^3 + 8r - \frac{5}{8}r^5) dr = \frac{256}{3}\pi \end{aligned}$$

例 17 (97 5 分) 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z = 8$ 所围成的区域.

分析 与例 16 何其相似

解 利用柱面坐标进行计算

$$I = \iiint_{\Omega} r^2 r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 r dr \int_{\frac{r^2}{2}}^8 r^2 dz = 2\pi \int_0^4 r^3 (8 - \frac{r^2}{2}) dr = \frac{1024}{3}\pi$$

评述 对基本要求必须扎实掌握, 不要抱着侥幸心理. 某种题型不久前考过, 大概不会考了.

例 18 计算

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx \\ (2) \quad & \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx \end{aligned}$$

解 (1) 原式等于在以原点为圆心, R 为半径的上半球上的三重积分, 显然采用球面坐标比较合适, 于是

$$\text{原式} = \iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv = \iiint_G \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \rho^3 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \frac{R^2\pi}{2}$$

(2) 原式等于积分域在第一卦限的半个圆柱域上的三重积分 (z 轴是一条母线), 适宜用柱坐标, 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_G z \sqrt{x^2+y^2} dv = \iiint_G x^2 dz dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^a x^2 dz dr d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \cos^3\theta d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}a^2 \end{aligned}$$

评述 上述两个积分计算都较简单, 因为积分域与被积函数在坐标的选择上是一致的. 但有时两者的选择往往不一致, 这就必须权衡利弊, 作出取舍. 在这方面注意积累经验是很重要的.

例 19 求由下列各曲面所围成的立体的体积 (上面部分):

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2 (0 < a < b) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

解 用球面坐标, 有

$$V = \iiint_G dv = \iiint_G \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^b \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \frac{2\pi}{3} (b^3 - a^3) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

例 20* 计算 $\iiint_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dv$, 其中 G 是 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

解 用椭球面坐标, 即 $x = a\rho\cos\theta\sin\varphi$, $y = b\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = c\rho\cos\varphi$

则 $|D| = abc\rho^2\sin\varphi$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} abc\rho^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho}{8} (2\rho^2 - 1) \sqrt{1 - \rho^2} + \frac{1}{8} \arcsin\rho \right]_0^1 abc \\ &= 2\pi \frac{\pi}{16} abc = \frac{1}{8}\pi^2 abc \end{aligned}$$

例 21* 计算 $\iiint_G z^2 dv$ $G: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$

分析 G 是两个球的公共部分如图 5-15. 用直角坐标显然不可取, 若采用柱面坐

标, 则 原式 $= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} z^2 r dz dr d\theta$

积分计算相当繁.

若采用球面坐标, 必须将区域 G 分成 G_1, G_2 两部分, 然后分别求积, 即

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^R \rho^2 \cos^2 \varphi \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\varphi} \rho^2 \cos^2 \varphi \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

概念不清楚往往会不分成两个区域计算.

如果考虑到平行于 xoy 的平面与 G 交成圆域而被积函数又仅显含 z , 则不难想到可以先进行二重积分再计算定积分的办法来处理.

解 当 $0 \leq z \leq \frac{R}{2}$ 时, 圆域 B_z 的半径是 $\sqrt{2Rz - z^2}$, 而当 $\frac{R}{2} \leq z \leq R$ 时, 圆域 B_z 的半径是 $\sqrt{R^2 - z^2}$. 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^R \left[\iint_{B_z} z^2 d\delta \right] dz = \int_0^R \left[z^2 \iint_{B_z} d\delta \right] dz \\ &= \pi \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 (2Rz - z^2) dz + \pi \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 (R^2 - z^2) dz = \frac{59}{480} \pi R^5 \end{aligned}$$

上述例题充分说明了选择合适的坐标系与确定积分次序的重要性.

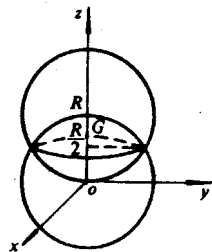


图 5-15

评述 三重积分的计算, 一般是先进行定积分计算, 再进行重积分计算(先一后二), 但在被积函数与区域比较特殊的情况下, 可以先进行二重积分再进行定积分的计算(先二后一), 从而收到较好的效果, 例 21 就是如此. 前面有的题目也可这样处理. 先看例 15.

$\iiint_{\Omega} (x+z) dv$ Ω 由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 围成, 这是锥面与单位球

$$\text{围成的区域, 交线是: } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \iiint_{\Omega} (x+z) dv = \iiint_{\Omega} x dv + \iiint_{\Omega} z dv$$

由于 Ω 关于 $yo z$ 平面前后对称, 而被积函数 x 关于 x 是奇函数, 故

$$\iiint_{\Omega} x dv = 0 \quad \text{对 } \iiint_{\Omega} z dv \text{ 采用先二后一的方法, 则}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\iint_{x^2+y^2 \leq z^2} z dx dy \right) dz + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} z dx dy \right) dz \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z \pi z^2 dz + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 z \pi (1 - z^2) dz = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

再看例 17.

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$$

Ω 是 $x^2 + y^2 = 2z$ 与 $z = 8$ 围成, 采用先二后一的方法

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \int_0^8 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz = \int_0^8 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^2 r dr \right) dz = \int_0^8 2\pi z^2 dz = \frac{1024}{3} \pi.$$

在以上三个例子中, 区域 Ω 与 $z = \bar{z}$ 的相交平面域是圆域, 被积函数或只包含 z (对 xy 进行二重积分时, 可提到积分符号外面去), 或者是 $x^2 + y^2$ (先计算二重积分时变为极坐标, 就是简单的 r^2), 这些都保证了计算简洁地进行. 当然, 如果条件合适, 也可先对 x, z 进行二重积分, 再对 y 进行定积分计算, 或是先对 y, z 进行二重积分, 再对 x 进行定积分计算.

典型题型 4. 二重积分与三重积分的应用

例 22 (00 7 分) 设有一个半径为 R 的球体 P_0 是此球表面上的一个定点, 球上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比 (比例常数 $k > 0$), 求球体的重心位置.

分析 求重心有固定的公式, 问题的关系是建立一个合适的坐标系, 利用对称性减少工作量, 简洁地完成计算.

解 取 P_0 为原点, 设球心为 O , 以 P_0O 为 z 轴正向, 于是 O 的坐标为 $(0, 0, R)$, 则密度为 $k(x^2 + y^2 + z^2)$, 球面方程为 $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - R)^2 = R^2$, 即 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$. 球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性知 $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ 而

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} kz(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iiint_{\Omega} k(x^2 + y^2 + z^2) dv}$$

用球面坐标进行计算

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \iiint_{\Omega} \rho^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} \rho^4 \sin \varphi d\rho = \frac{32}{15} \pi R^5$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2) dv &= \iiint_{\Omega} \rho \cos \varphi \rho^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} \rho^5 \sin \varphi \cos \varphi d\rho \\ &= \frac{64}{3} \pi R^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{8}{3} \pi R^6 \end{aligned}$$

故 $\bar{z} = \frac{5}{4}R$.

例 23 求高为 h , 半径为 R 的均匀正圆柱体对其一条母线的转动惯量.

解 重积分的应用思想, 与定积分相同, 我们用微元法的思想来导出公式 (读者可参阅第二部分). 我们选该母线为 z 轴, 底面的一条直径为 x 轴, 并设对 z 轴的转动惯量为 I , 体密度为 μ , 则

$$dI = (x^2 + y^2) \mu dv$$

$$\text{于是 } I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu dv$$

采用柱面坐标, 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\theta} \int_0^h \mu r^2 r dr d\theta = h\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^4 R^4 \cos^4 \theta}{4} d\theta = 8hR^4 \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{3}{2} \mu \pi R^4 h = \frac{3}{2} R^2 M \end{aligned}$$

这里 $M = \pi \mu R^4 h$ 是圆柱体的质量 (本题也可直接应用转动惯量的公式).

例 24* 设有底半径为 a , 高为 h , 质量均匀分布的圆锥体 (见图 5-17), 其质量为 M . 在圆锥顶点有一单位质量的质点, 求圆锥体对此质点的引力.

解 建立坐标系, 如图 5-16. 设体密度为 μ , 则

$$\mu = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi a^2 h} = \frac{3M}{\pi a^2 h}$$

设引力在三个坐标轴上的分力依次为 F'_x, F'_y, F'_z , 由于圆锥体对任一过 oz 轴的平面对称, 因此沿 x 轴与 y 轴方向的分力互相抵消, 故

$$F'_x = F'_y = 0$$

而

$$dF_z = -K \frac{1}{\rho^2} \frac{\mu dv}{\rho} \frac{h-z}{\rho} = -K\mu \frac{(h-z)dv}{[x^2 + y^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

所以 $F'_z = \iiint_G -K\mu \frac{(h-z)}{[x^2 + y^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}} dv$

采用柱面坐标系, 先进行二重积分, 得到

$$\begin{aligned} F'_z &= -K\mu \int_0^h \left[\iint_{B_x} \frac{(h-z)rdrd\theta}{[r^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] dz \\ &= -K\mu \int_0^h \left[\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{h}(h-z)} \frac{rdr}{[r^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] (h-z) dz \\ &= -K\mu 2\pi \int_0^h \left[-\frac{1}{[r^2 + (h-z)^2]^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{\frac{a}{h}(h-z)} (h-z) dz \\ &= 2\pi K\mu \int_0^h \left(\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - 1 \right) dz \\ &= 2\pi K\mu h \left(\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - 1 \right) \\ &= \frac{6KM}{a^2} \left(\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

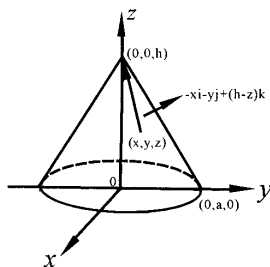


图 5-16

例 25* 求 $\iint_B |\sin(x-y)| d\delta$, $B: 0 \leq x \leq y \leq 2\pi$

解 积分域(如图 5-17), 为了能够积分, 必须将绝对值去掉.

$$|\sin(x-y)| = |\sin(y-x)|$$

将 B 分成 B_1, B_2 两个区域:

在 $B_1: 0 \leq y-x \leq \pi$, $|\sin(x-y)| = \sin(y-x)$

在 $B_2: \pi \leq y-x \leq 2\pi$, $|\sin(x-y)| = -\sin(y-x)$

于是

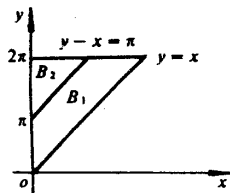


图 5-17

$$\begin{aligned} \iint_B |\sin(x-y)| d\delta &= \iint_{B_1} |\sin(x-y)| d\delta + \iint_{B_2} |\sin(x-y)| d\delta \\ &= \iint_{B_1} \sin(y-x) d\delta - \iint_{B_2} \sin(y-x) d\delta \\ &= \int_0^\pi \int_x^{x+\pi} \sin(y-x) dy dx + \int_\pi^{2\pi} \int_x^{2\pi} \sin(y-x) dy dx - \int_0^\pi \int_{x+\pi}^{2\pi} \sin(y-x) dy dx \\ &= \int_0^\pi [-\cos(y-x)]_x^{x+\pi} dx + \int_\pi^{2\pi} [-\cos(y-x)]_x^{2\pi} dx + \int_0^\pi [\cos(y-x)]_{x-\pi}^{2\pi} dx \\ &= \int_0^\pi 2 dx + \int_\pi^{2\pi} (1 - \cos x) dx + \int_0^\pi (\cos x + 1) dx = 4\pi \end{aligned}$$

例 26* 求曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 = 27abcxyz$ ($a > 0, b > 0, c > 0$)

所包区域的体积.

分析 由于必须有 $xyz \geq 0$, 所以曲面只存在于第一、第三、第六及第八等四个卦限内. 再由于曲面上的点的坐标有一个为零, 立即推得其它两个坐标为零, 故坐标轴及坐标平面与曲面只交于原点, 而以 $-x, -y$ 代替 x, y 或 $-x, -z$ 代替 x, z 或 $-y, -z$ 代替 y, z 方程都不变. 这说明在四个卦限中, 所围成的体积是相同的, 因此只需计算第一卦限内所围成的体积再乘以 4 即可.

解 用椭球面坐标

$$x = a\rho\cos\theta\sin\varphi, y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, z = c\rho\cos\varphi$$

此时 $|D| = abc\rho^2\sin\varphi$, 而曲面方程变成

$$\rho^6 = 27a^2b^2c^2\rho^3\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\cos\varphi$$

在第一卦限,即

$$\rho^3 = 27a^2b^2c^2 \cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi \cos\varphi \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

于是

$$\begin{aligned} V &= 4 \iiint_G dv = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{f(\theta, \varphi)} ab\varphi^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin\varphi \frac{1}{3} 27a^2b^2c^2 \sin\theta \cos\theta \sin^2\varphi \cos\varphi d\theta d\varphi \\ &= 36a^3b^3c^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{9}{2} a^3b^3c^3 \end{aligned}$$

这里 $f(\theta, \varphi) = (27a^2b^2c^2 \sin\theta \cos\theta \sin^2\varphi \cos\varphi)^{\frac{1}{3}}$.

典型题型 5. 巧妙地证明积分等式与不等式

例 27 证明 $\pi(R^2 - r^2) \frac{1}{R+K} \leq \iint_B \frac{d\delta}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \leq \pi(R^2 - r^2) \frac{1}{r-K}$

这里 $0 < K = \sqrt{a^2 + b^2} < r < R$, $B: r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$.

证明 函数 $\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$ 在环形闭域 $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ 连续, 由积分中值定理, 在域中存在 $p_0(\eta, \zeta)$, 使得

$$\iint_B \frac{d\delta}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\zeta-a)^2 + (\eta-b)^2}} \iint_B d\delta = \frac{1}{|p_0 p_1|} \pi(R^2 - r^2)$$

这里 $|p_0 p_1|$ 指 $p_0(\eta, \zeta)$ 与 $p_1(a, b)$ 之间的距离, 而且

$$r \leq |p_0 p_1| \leq R$$

于是根据条件有

$$r - K \leq |p_0 p_1| - K = |p_0 p_1| - |op_0| \leq |p_0 p_1| \leq |p_0 o| + |op_1| \leq R + K$$

从而有

$$\frac{1}{R+K} \leq \frac{1}{|p_0 p_1|} \leq \frac{1}{r-K}$$

即

$$\pi(R^2 - r^2) \frac{1}{R+K} \leq \iint_B \frac{d\delta}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \leq \pi(R^2 - r^2) \frac{1}{r-K}$$

例 28* 设 $f(t)$ 在区间 $[a, b]$ 连续且恒大于零, 试利用二重积分证明

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$$

证明 因为

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(y)} dy = \iint_B \frac{f(x)}{f(y)} d\delta = \iint_B \frac{f(y)}{f(x)} d\delta \quad B: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx &= \iint_B \frac{f(x)}{f(y)} d\delta + \iint_B \frac{f(y)}{f(x)} d\delta = \iint_B \frac{f^2(x) + f^2(y)}{f(x)f(y)} d\delta \\ &\geq \iint_B \frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)} d\delta = 2(b-a)^2 \end{aligned}$$

即

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$$

例 29 设 $f(x)$ 连续, $G_t: 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq t^2$ 而

$$F(t) = \iiint_{G_t} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dv$$

求 $\frac{dF}{dt}$ 与 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2}$.

分析 这是一个含参变量 t 的三重积分, 由于没有具体给出被积函数, 不可能完全积分后再对 t 求导, 需要利用上限变动的定积分的性质. 为此, 将其写成累次积分的形式. 注意到被积函数的形状与 G_t , 选用柱面坐标为宜.

解 用柱面坐标, 则

$$\begin{aligned} F(t) &= \iiint_{G_t} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dv = \int_0^{2\pi} \int_0^t \int_0^h [z^2 + f(r^2)] r dz dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^t \left[\frac{h^3}{3} + hf(t^2) \right] r dr \end{aligned}$$

于是

$$\frac{dF}{dt} = 2\pi \left[\frac{h^3}{3} + hf(t^2) \right] t = 2\pi ht \left[\frac{h^3}{3} + f(t^2) \right]$$

由 $F(t)$ 的表达式, 显然 $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = 0$, 所以 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 故

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\pi ht \left[\frac{h^3}{3} + f(t^2) \right]}{2t} = \pi h \left[\frac{h^3}{3} + f(0) \right]$$

评述 本题即使 f 具体给出, 也以上述作法为宜.

例 30* 计算 $\iint_B x[1 + yf(x^2 + y^2)] d\delta$

这里 B 是由 $y = x^2, y = 1, x = -1$ 所围成区域, f 是连续函数.

分析 此题区域 B 虽简单, 但并未具体给出 f , 要计算出积分值, 显然须用较巧妙的办法或利用特殊的性质. 有时不妨假设 $f(x)$ 的原函数是 $F(x)$ (连续函数的原函数一定存在) 以作试探.

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_B x[1 + yf(x^2 + y^2)] d\delta &= \int_{-1}^1 \int_{x^3}^1 x dy dx + \iint_B xyf(x^2 + y^2) d\delta \\ &= -\frac{2}{5} + \iint_B xyf(x^2 + y^2) d\delta \end{aligned}$$

令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $F'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} \iint_B xyf(x^2 + y^2) d\delta &= \int_{-1}^1 x dx \int_{x^3}^1 yf(x^2 + y^2) dy = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^3}^1 \frac{1}{2} f(x^2 + y^2) d(x^2 + y^2) \\ &= \int_{-1}^1 x \left[\frac{1}{2} F(x^2 + y^2) \right]_{x^3}^1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x [F(x^2 + 1) - F(x^2 + x^6)] dx \end{aligned}$$

显然 $F(x^2 + 1) - F(x^2 + x^6)$ 是偶函数, 故 $x[F(x^2 + 1) - F(x^2 + x^6)]$ 是奇函数, 从而积分值为零.

最后

$$\iint_B x[1 + yf(x^2 + y^2)] d\delta = -\frac{2}{5}$$

例 31* 设 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则有

$$\left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \cdot \int_a^b \psi^2(x) dx$$

解 对任意实数 λ , 有

$$\int_a^b [\varphi(x) + \lambda\psi(x)]^2 dx = \int_a^b \varphi^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx + \lambda^2 \int_a^b \psi^2(x) dx \geq 0$$

左边是关于 λ 的二次式恒大于等于零, 故判别式应小于等于零.

$$\left[2 \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right]^2 - 4 \int_a^b \varphi^2(x) dx \cdot \int_a^b \psi^2(x) dx \leq 0$$

即

$$\left[\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx$$

评述 这是一个著名的不等式,称为柯西—布尼亚柯夫斯基不等式,它不仅在高等数学,在其它的高深的数学领域(譬如泛函分析)内,也有广泛应用.下面我们将会看到,如果灵活应用这个不等式,会收到事半功倍的效果.

例 32* 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,证明

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$$

解 (一) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,故二元函数 $[f(x) - f(y)]^2$ 在矩形域 $B: a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ 上连续.且

$$\iint_B [f(x) - f(y)]^2 d\delta \geq 0$$

而

$$\begin{aligned} \iint_B [f(x) - f(y)]^2 d\delta &= \iint_B f^2(x) d\delta - 2 \iint_B f(x) f(y) d\delta + \iint_B f^2(y) d\delta \\ &= \int_a^b \int_a^b f^2(x) dx dy - 2 \int_a^b \int_a^b f(x) f(y) dx dy + \int_a^b \int_a^b f^2(y) dx dy \\ &= \int_a^b dy \int_a^b f^2(x) dx - 2 \int_a^b f(x) dx \int_a^b f(y) dy + \int_a^b dx \int_a^b f^2(y) dy \\ &= (b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \int_a^b f(x) dx \int_a^b f(y) dy + (b-a) \int_a^b f^2(y) dy \\ &= 2(b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

即

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$$

(二) 如果你知道柯西—布尼亚柯夫斯基不等式,这个问题变得非常简单,在柯—布不等式中,取 $\varphi(x) = f(x)$, $\psi(x) = 1$,立即得到

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$$

评述 在例 28 中,如取 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, $\psi(x) = \sqrt{f(x)}$ ($f(x) > 0$, 这样取是有意义的),立即有

$$\left[\int_a^b \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \sqrt{f(x)} dx \right]^2 \leq \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \right)^2 dx \cdot \int_a^b (\sqrt{f(x)})^2 dx.$$

$$\text{即} \quad \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$$

这说明柯西—布尼亚柯斯基不等式确实是一个有用的不等式.建议读者在用这个不等式时,先把它完整地写出来,说明是如何选取 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 的,那就表达得很清楚了.

如果要证明的不等式涉及两个定积分,而两个定积分被积函数的积比较简单,就启发我们柯—布不等式可能有用武之地,也不要忘记,常数是容易表示成一个定积分的.

例 33 设有半椭球体 $0 \leq z \leq c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, 其密度 $\mu(x, y, z) = 1$, 求半椭球体的重心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

解 据重心公式

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \mu(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dv} = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{\iiint_{\Omega} dv} = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{\frac{2}{3} \pi abc}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y dv}{\frac{2}{3} \pi abc}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\frac{2}{3} \pi abc}$$

据区域与被积函数的对称性,显然有 $\iiint_{\Omega} x dv = \iiint_{\Omega} y dv = 0$ 即 $\bar{x} = \bar{y} = 0$

采用椭球面坐标计算 $\iiint_{\Omega} z dv$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} \rho \cos \varphi ab \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 abc^2 \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^1 abc^2 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4} abc^2\end{aligned}$$

从而

$$\bar{z} = \iiint_{\Omega} z dv / \frac{2}{3} \pi abc = \frac{3}{8} c$$

重心是 $(0, 0, \frac{3}{8}c)$.

评述 由于 Ω 与 $z = \bar{z}$ 相交的区域是椭圆域,被积函数仅含 z ,如以前的例子所分析的, $\iiint_{\Omega} z dv$ 也可用先 2 后 1 的方法计算,读者不妨一试.

例 34 证明 $\int_0^1 dx \int_0^x f(y) dy = \int_0^1 (1-x)f(x) dx$, $f(x)$ 是连续函数.

分析 左端看似二重积分,但如今 $\int_0^x f(y) dy = F(x)$, 则是计算 $\int_0^1 F(x) dx$, 而 $F'(x) = f(x)$, 可用分部积分计算,轮廓已露出来了.

解 令 $F(x) = \int_0^x f(y) dy$, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_0^x f(y) dy &= \int_0^1 F(x) dx = xF(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xF'(x) dx = \int_0^1 f(y) dy - \int_0^1 xf(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 (1-x)f(x) dx.\end{aligned}$$

例 35 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,证明

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x)f(y)f(z) dz = \frac{1}{3!} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^3$$

分析 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(y) dy \int_x^y f(z) dz = \int_0^1 dx \int_x^1 \left(f(y) \int_x^y f(z) dz \right) dy$ 受上题的启发,如今 $\int_0^u f(t) dt = F(u)$, 则 $F'(u) = f(u)$, $\int_x^y f(z) dz = F(y) - F(x)$, 有利于积分的推导.

解 令 $F(u) = \int_0^u f(t) dt$, 显然 $F(0) = 0$, $F(1) = \int_0^1 f(t) dt$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) dy \int_x^y f(z) dz &= \int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) [F(y) - F(x)] dy \\ &= \int_0^1 f(x) dx \int_x^1 [F(y) - F(x)] dF(y) = \int_0^1 f(x) dx \left[\frac{1}{2} F^2(y) - F(x)F(y) \right]_x^1 \\ &= \int_0^1 f(x) \left\{ \left[\frac{1}{2} F^2(1) - F(x)F(1) \right] - \left[\frac{1}{2} F^2(x) - F^2(x) \right] \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} F^2(1) - F(1)F(x) + \frac{1}{2} F^2(x) \right] dF(x) \\ &= \left[\frac{1}{2} F^2(1)F(x) - F(1) \frac{1}{2} F^2(x) + \frac{1}{6} F^3(x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} F^3(1) - \frac{1}{2} F^3(1) + \frac{1}{6} F^3(1) \\ &= \frac{1}{3!} F^3(1) = \frac{1}{3!} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^3\end{aligned}$$

例 36 设 $f(x)$ 连续, 证明

$$\int_0^x \left\{ \int_0^v \left[\int_0^u f(t) dt \right] du \right\} dv = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

分析 此题看似困难, 其实不然. $f(t)$ 没有具体给出说明需通过变换积分次序或引进变线积分等技巧来解决困难. 从 $\int_0^v \left[\int_0^u f(t) dt \right] du$ 来看, 上、下限很简单, 说明对应的重积分区域不复杂, 适宜于变换积分次序来解决问题.

解 先计算 $\int_0^v \left[\int_0^u f(t) dt \right] du$, 由 (图 5-18), 变换积分次序, 得

$$\int_0^v \left[\int_0^u f(t) dt \right] du = \iint_D f(t) dt du = \int_0^v dt \int_t^u f(t) du = \int_0^v (v-t) f(t) dt$$

$$\int_0^x \int_0^v \left[\int_0^u f(t) dt \right] du dv = \int_0^x \left[\int_0^v (v-t) f(t) dt \right] dv \quad (\text{再一次交换次序, 如图 5-19})$$

$$= \iint_{D_1} (v-t) f(t) dt dv = \int_0^x dt \int_t^x (v-t) f(t) dv$$

$$= \int_0^x f(t) dt \int_t^x (v-t) dv = \int_0^x f(t) \left. \frac{(v-t)^2}{2} \right|_t^x dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

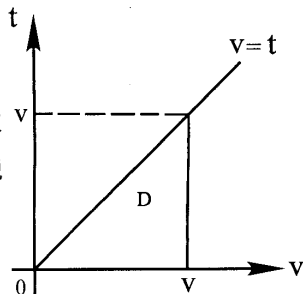


图 5-18

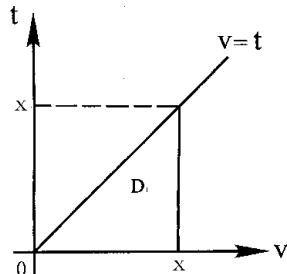


图 5-19

例 37* 计算 $\iint_D |\cos(x+y)| d\delta$, D 由 $y=x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成

分析 此题看似简单, 但有绝对值符号出现就变复杂了, 因为必须取掉绝对值符号才能积分.

解 (如图 5-20) 将 D 分为 D_1 , D_2 两个部分,

在 D_1 : $|\cos(x+y)| = \cos(x+y)$

D_2 : $|\cos(x+y)| = -\cos(x+y)$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D |\cos(x+y)| d\delta &= \iint_{D_1} \cos(x+y) d\delta + \iint_{D_2} -\cos(x+y) d\delta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \cos(x+y) dx dy - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}-x}^x \cos(x+y) dy dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

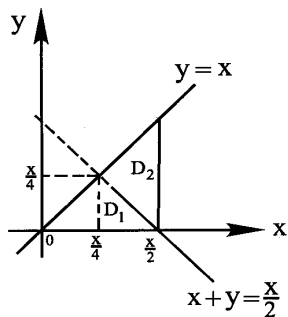


图 5-20

评述 为什么第一个积分先对 x 积后对 y 积而第二个积分先对 y 积后对 x 积, 不妨考虑一下.

例 38 设函数 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 都在有界闭域 B 上连续, 而 $\varphi(x, y) \geq 0$, 证明在 B 上存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_B f(x, y) \varphi(x, y) d\delta = f(\xi, \eta) \iint_B \varphi(x, y) d\delta$$

解 $f(x, y)$ 在 B 连续, 存在最大值 M , 最小值 m , 即在 B 上有

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

从而有

$$m\varphi(x, y) \leq f(x, y)\varphi(x, y) \leq M\varphi(x, y)$$

于是

$$m \iint_B \varphi(x, y) d\delta \leq \iint_B f(x, y) \varphi(x, y) d\delta \leq M \iint_B \varphi(x, y) d\delta$$

如果

$$\iint_B \varphi(x, y) d\delta = 0$$

可推得

$$\iint_B f(x, y) \varphi(x, y) d\delta = 0$$

此时任取一点作为 (ξ, η) 即可, 如果

$$\iint_B \varphi(x, y) d\delta > 0$$

可推得

$$m \leq \iint_B f(x, y) \varphi(x, y) d\delta \bigg/ \iint_B \varphi(x, y) d\delta \leq M$$

再由介值定理, 可知存在 (ξ, η) 使得

$$f(\xi, \eta) = \iint_B f(x, y) \varphi(x, y) d\delta \bigg/ \iint_B \varphi(x, y) d\delta$$

即

$$\iint_B f(x, y) \varphi(x, y) d\delta = f(\xi, \eta) \iint_B \varphi(x, y) d\delta$$

如果 $\varphi(x, y) = 1$, 上式就是二重积分的中值定理.

预测·强化训练五

1. 交换积分次序: $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 交换积分次序: $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 计算二重积分 $I = \iint_D e^{x^2} dx dy$, 其中 D 是第一象限中由直线 $y = x$ 和曲线 $y = x^3$ 所围成的封闭区域.

4. 求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} dx$. (提示: 交换积分次序)

5. 求二重积分 $\iint_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 是 $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$ 和 $y = 0$ 所围成的区域在第一象限部分.

6. 计算二重积分 $\iint_D x e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是曲线 $y = 1$, $y = 4x^2$ 和 $y = 9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

7. 计算二重积分 $I = \iint_D y dx dy$, 其中 D 是由 x 轴、 y 轴与曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ 所围成的区域, $a > 0$, $b > 0$. (图 5-21)

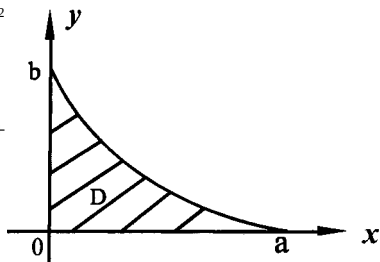


图 5-21

8. 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x + y + 1\}$.

9. 设 D 是以点 $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ 和 $B(2, 1)$ 为顶点的三角形区域, 求 $\iint_D x dx dy$. (图 5-22)

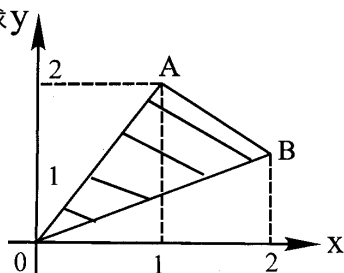


图 5-22

10. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$ 可以写成 ()

(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$

(B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$

11. 计算 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$.

12. 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$ 求 $\iint_D \sqrt{x} dx dy$.

13. 设区域 B 由 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ $y = \sqrt{a^2 - 2ax}$ ($a > 0$) 及 x 轴围成, 将二重积分 $\iint_B f(x, y) d\delta$ 化为两种次序

(先对 x 后对 y , 先对 y 后对 x) 的累次积分.

14. 设 $f(u)$ 连续, 用极坐标化简:

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy \quad (R > 0)$$

15. 变更积分次序, 计算积分 $\int_0^+ dx \int_x^{2x} e^{-y^2} dy$.

16*. 计算

$$\iint_B xy d\delta \quad B: x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0.$$

17. 求由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 - 2x + y^2 = 0$ 及平面 $z = 0$ 所围成的立体的体积.

18. 求 $\iint_B \ln(x^2 + y^2) d\delta$ 其中 B 是 $\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, 如果 B 是 $x^2 + y^2 \leq 1$ 又当如何?

19*. 计算 $\iint_B \frac{d\delta}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$ $B: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

20. 求由抛物柱面 $z = 2 - x^2$ 与椭圆抛物面 $z = x^2 + 2y^2$ 所围成的立体的体积.

21. 求曲面 $z = x^2 - y^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所围成部分的面积.

22. 计算 $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz dy dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

23*. 计算 $\iiint_G (x^2 + y^2 + z) dv$ 其中 G 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$ 所围成的

立体.

24*. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ 计算 $\iint_D |xy - 1| dx dy$

25. 求 $\iiint_G \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dv$, G 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和平面 $z = 1$ $z = 2$ 围成.

26. 求 $\iiint_G |xyz| dv$, G 域由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成.

27*. 求 $\iiint_G z^2 dv$, G 是介于两个椭圆面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 与 $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1$ ($a < a_1, b < b_1, c < c_1$) 之

间的区域.

28*. 求 $\iint_B \sqrt{|y - x^2|} d\delta$ $B: |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

29. 求 $\iint_D |x^2 + y^2 - 4| d\delta$ $D: x^2 + y^2 \leq 9$

30. 设 $f(u)$ 有连续的导数 $f(0) = 0$, 求

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_G f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv.$$

这里 $G: x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$.

31. 求 $\iint_B (y - x) d\delta$ 其中 B 由直线 $y = x + 1$ $y = x - 3$ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}$ $y = -\frac{1}{3}x + 5$ 所围成.

32. 设 $f(u)$ 连续, 证明

$$\iiint_G f(z) dv = \pi \int_{-1}^1 f(u)(1-u^2) du \quad (G: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1).$$

33. 设 B 是以 $O(0, 0)$, $A(a, \rho)$, $A_1(0, b)$ ($a > 0, b > 0$) 为顶点的三角形域, $f(x, y)$ 在 B 上有连续的二阶偏导数. 证明在线段 $\overline{AA_1}$ 上, 必须有一点 (ζ, η) , 使得

$$\iint_B f_{xy}(x, y) d\delta = f(0, \rho) - f(a, \rho) + af_x(\zeta, \eta).$$

34*. 在底半径为 R , 高为 H 的圆柱体上, 拼上一个相同半径的半球, 要使整个立体的重心位于球心处.

(1) 设球与圆柱由同一均匀材料作成, R 与 H 的关系应如何?

(2) 如球的密度是圆柱体密度的 $\frac{1}{2}$, R 与 H 的关系又将如何?

35. 设物体 (V) 由 $z+1=0$, $z-1=0$ 及 $x^2+y^2-4z^2-4=0$ 围成, 并具有变密度 $\mu(x, y, z) = |z|$, 求物体 (V) 的质量.

36. 设有一均匀物体, 密度为 1, 由圆锥及这一锥体共底的半球组成, 而锥高等于它的底半径, 求该物体对对称轴的转动惯量.

37. 有一半半径为 R , 高为 H , 密度为 ρ 的均匀正圆柱体, 在其中心轴上高出上底为 a 处有一质量为 m 的质点, 试求此柱体对该点的引力.

简明解答

1. 以 D 表示第一象限内由 $y=0$, $y=x^2$, $x^2+y^2=2$ 所围成的区域, 有

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) d\delta = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$$

$$2. \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

$$3. I = \int_0^1 dx \int_{x^3}^x e^{x^2} dy = \int_0^1 e^{x^2} (x - x^3) dx = \frac{e}{2} - 1, \text{ 此题不能先对 } x \text{ 积分, 因为 } e^{x^2} \text{ “积不出来”}.$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} dx = \iint_D \frac{\cos x}{x} d\delta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dx \int_0^x \frac{\cos x}{x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} (x - 0) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{x} \text{ 也是“积不出来”的函数}.$$

5. 用极坐标

$$\iint_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1-r^2}{1+r^2} r dr = \frac{\pi}{2} (\ln 2 - \frac{1}{2})$$

$$6. \iint_D x e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_{\frac{\sqrt{y}}{9}}^{\frac{\sqrt{y}}{4}} x e^{-y^2} dx = \int_0^1 e^{-y^2} \left(\frac{y}{4} - \frac{y}{9} \right) dy = \frac{5}{72} \int_0^1 y e^{-y^2} dy = \frac{5}{144} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

$$7. \iint_D y dx dy = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\sqrt{\frac{x}{a}})^2} y dy = \frac{ab^2}{30}$$

$$8. D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x + y + 1\} = \{(x, y) \mid (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{3}{2}\}$$

$$\text{令 } x - \frac{1}{2} = r \cos \theta, \quad y - \frac{1}{2} = r \sin \theta$$

$$\iint_D (x+y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (1 + r \cos \theta + r \sin \theta) r dr = \frac{3}{2} \pi$$

9. OA , OB , AB 的直线方程是 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=3-x$, 于是

$$\iint_D x dx dy = \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} x dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} x dy = \frac{3}{2}$$

10. (D).

$$11. \text{原式} = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}} dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 x e^{\frac{y}{x}} \Big|_{x^2}^x dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x(e - e^x) dx = \frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e} \text{ (必须改变积分次序)}$$

12. 用极坐标 $x^2 + y^2 \leq x$ 表示为 $r \leq \cos\theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

$$\iint_D \sqrt{x} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \sqrt{r} \sqrt{\cos\theta} r dr = \frac{8}{15}$$

13. 先对 x 后对 y 积分

$$\text{原式} = \int_0^{\sqrt{2/3-3} \cdot a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{a}{2}-\frac{y^2}{2a}} f(x, y) dx$$

先对 y 后对 x 积分

$$\text{原式} = \int_0^{(2-\sqrt{3})a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy + \int_{(2-\sqrt{3})a}^{\frac{1}{2}a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-2ax}} f(x, y) dy$$

14. 以 D 表示第一象限内 $x^2 + y^2 = R^2$, $y = kx$, $y = 0$ 所围成的区域.

$$\text{原式} = \iint_D f\left(\frac{y}{x}\right) d\sigma = \int_0^{\arctg R} d\theta \int_0^R f(\tg\theta) r dr = \frac{1}{2} R^2 \int_0^{\arctg R} f(\tg\theta) d\theta = \frac{1}{2} R^2 \int_0^R \frac{f(u)}{1+u^2} du$$

$$15. \text{原式} = \int_0^+ dy \int_{\frac{1}{2}y}^y e^{-y^2} dx = \int_0^+ \frac{1}{2} y e^{-y^2} dy = \frac{1}{4}.$$

16. 画出 B 的图形, 用极坐标

$$\begin{aligned} \iint_B xy d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} r^2 \cos\theta \sin\theta r dr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^4}{4} \Big|_1^{2\cos\theta} \cos\theta \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (8\cos^4\theta - \frac{1}{4}) \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

17. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$

$$V = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r dr = \frac{32}{9}$$

$$18. \iint_B \ln(x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varepsilon}^1 \ln r^2 r dr = \pi [\varepsilon^2 - \varepsilon^2 \ln \varepsilon^2 - 1]$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln(x^2 + y^2) d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_B \ln(x^2 + y^2) d\sigma = -\pi$$

19. $x = \arccos\theta$, $y = \text{brsin}\theta$

$$\text{原式} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varepsilon} \frac{ab r dr}{\sqrt{1-r^2}} = 2ab\pi$$

$$20. V = 2 \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} \sqrt{\frac{z-x^2}{2}} dz = \pi$$

$$21. S = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+4(x^2+y^2)} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} r dr = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1)\pi.$$

22. 用球面坐标

$$\text{原式} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi} \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\rho} d\rho = \left(\frac{7}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\pi$$

想一想三重积分域的图象.

23. G 由 $x^2 + y^2 = 2z$ 与 $z = 4$ 围成, 用柱面坐标

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} dr \int_{\frac{r^2}{2}}^4 (r^2 + z) r dz = \frac{256}{3}\pi$$

24. 将 D 分为三部分

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 2\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$$

$$D_3 = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq 2\}$$

$$\iint_D |xy - 1| dx dy = \iint_{D_1} |xy - 1| dx dy + \iint_{D_2} |xy - 1| dx dy + \iint_{D_3} |xy - 1| dx dy$$

$$\iint_{D_1} (1 - xy) dx dy + \iint_{D_2} (1 - xy) dx dy + \iint_{D_3} (xy - 1) dx dy = \frac{3}{2} + \ln 2.$$

25. 用柱面坐标

$$\text{原式} = \iiint_G \frac{e^z r}{r} dz d\theta dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_1^2 e^z dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dr \int_r^2 e^z dz = 2\pi e^2.$$

26. G_1 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 及 $y = 0$, $x = 0$ 围成 $\left(\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \right)$ 由区域的对称性再加上 $|xyz|$ 对 x 对 y

都是偶函数, 于是

$$\text{原式} = 4 \iiint_{G_1} xyz dv = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_r^{\sqrt{4-r^2}} r^2 \cos\theta \sin\theta r dz = \frac{4}{3}.$$

$$27. \text{令 } G_1 = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

$$G_2 = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} \leq 1 \right\}$$

$$\text{原式} = \iiint_{G_2} z^2 dv - \iiint_{G_1} z^2 dv$$

在 G_2 令 $x = a_1 \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = b_1 \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = c_1 \rho \cos\varphi$, 在 G_1 令 $x = a \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = b \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = c \rho \cos\varphi$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 c_1^2 \rho^2 \cos^2 \varphi \rho^2 \sin\varphi a_1 b_1 c_1 d\rho - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 c^2 \rho^2 \cos^2 \varphi a b c \rho^2 \sin\varphi d\rho \\ &= \frac{4}{15} \pi (a_1 b_1 c_1^3 - abc^3) \end{aligned}$$

$$28. \text{原式} = \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{-(y-x^2)} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 \sqrt{y-x^2} dy = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

$$29. \text{令 } D_1: x^2 + y^2 \leq 4 \quad D_2: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$$

$$\begin{aligned} \iint_D |x^2 + y^2 - 4| d\sigma &= \iint_{D_1} (4 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 4) d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 (r^2 - 4) r dr = \frac{41}{2} \pi \end{aligned}$$

$$30. \iiint_G f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 f(\rho) \rho^2 \sin\varphi d\rho = 4\pi \int_0^1 f(\rho) \rho^2 d\rho$$

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4\pi \int_0^t f(\rho) \rho^2 d\rho}{\pi t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4f(t)t^2}{4t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0)$$

$$31. \text{令 } y - x = u, y + \frac{1}{3}x = v. \text{ 即 } x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v, y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v, |D| = \frac{3}{4} \text{ 于是}$$

$$\iint_B (y - x) d\sigma = \int_{\frac{7}{9}}^5 \int_{-3}^1 u \frac{3}{4} du dv = -\frac{38}{3}$$

32. 先二后一

$$\iiint_G f(z) dv = \int_{-1}^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} f(z) d\sigma = \int_{-1}^1 f(z) \pi(1-z^2) dz = \pi \int_{-1}^1 f(u)(1-u^2) du$$

$$33. \overline{AA_1} \text{ 方程是 } y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$\begin{aligned} \iint_B f_{xy}(x, y) d\sigma &= \int_0^a dx \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} f_{xy}(x, y) dy = \int_0^a f_x(x, y) \Big|_0^{-\frac{b}{a}x+b} dx \\ &= \int_0^a f_x(x, -\frac{b}{a}x+b) dx - \int_0^a f_x(x, 0) dx = af_x(\xi, -\frac{b}{a}\xi+b) - f(x, 0) \Big|_0^a \\ &= f(0, 0) - f(a, 0) + af_x(\xi, \eta) \end{aligned}$$

$0 \leq \xi \leq 0$ 如令 $\eta \leq -\frac{b}{a}\xi + b$ 显然 $(\xi, \eta) \in \overline{AA_1}$ 对 $\int_0^a f_x(x, -\frac{b}{a}x + b)dx$ 用了积分中值定理.

34. 设球心为原点 $G_1 = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \right\}$,

$G_2 = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ -H \leq z \leq 0 \end{cases} \right\}$ 显然 $\bar{x} = \bar{y} = 0$ 令 $G = G_1 \cup G_2$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_G \mu z dv}{\iiint_G \mu dv} \quad \text{要 } \bar{z} = 0 \quad \text{需}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \iiint_G z dv &= \iiint_{G_1} z dv + \iiint_{G_2} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho \cos\varphi \rho^2 \sin\varphi d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_{-H}^0 z dz \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \frac{R^4}{4} - 2\pi \frac{R^2}{2} \frac{H^2}{2} = 0 \quad \text{得 } H = \frac{1}{\sqrt{2}}R. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \iiint_G \mu z dv = \iiint_{G_1} \frac{1}{2} z dv + \iiint_{G_2} z dv = 0 \quad \text{解得 } H = R.$$

35. 由于对称性 如以 G_1 表示 $z = 0, z = 1, x^2 + y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ 所围成的区域 则

$$\begin{aligned} M &= 2 \iiint_{G_1} \mu(x, y, z) dv = 2 \iiint_{G_1} z dv \\ &= 2 \int_0^1 dz \iint_{\sigma_z} z d\sigma \quad \sigma_z: x^2 + y^2 \leq 4z^2 + 4 \\ &= 2 \int_0^1 z\pi(4z^2 + 4) dz = 2\pi \int_0^1 (4z^3 + 4z) dz = 6\pi \end{aligned}$$

计算时采用了先二后一的算法.

36. 设球的半径为 R 选锥顶为原点 球心为 $(0, 0, R)$ 此时 锥的方程是 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 球的方程是 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ 我们要求的是对 z 轴的转动惯量.

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) dv$$

$$G \text{ 由锥与半球围成 用柱面坐标 } I_z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_r^{R+\sqrt{R^2-r^2}} r^2 r dz = 2\pi \int_0^R r^3 (R + \sqrt{R^2 - r^2} - r) dr = \frac{11}{30} \pi R^5$$

此题选原点是关键.

37. 选柱体下底为 xoy 平面 中心轴为 z 轴 此时圆柱体由 $x^2 + y^2 = R^2, z = 0, z = H$ 围成记作 Ω 质点处的坐标是 $(0, 0, a + H)$ 于是 $F_x = F_y = 0$.

$$\begin{aligned} F_z &= \iiint_{\Omega} \frac{z - (a + H)}{[x^2 + y^2 + (z - a - H)^2]^{\frac{3}{2}}} k\rho dv \\ &= k\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^H \frac{z - a - H}{[r^2 + (z - a - H)^2]^{\frac{3}{2}}} r dz \\ &= -2k\rho\pi (\sqrt{R^2 + a^2} + H - \sqrt{R^2 + (a + H)^2}) \end{aligned}$$

第六章 曲线积分与曲面积分*

考试要求：

1. 理解两类曲线积分的概念,了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的原函数.
2. 掌握计算两类曲线积分的方法.
3. 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路线无关的条件,会求全微分的原函数.
4. 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系,掌握计算两类曲面积分的方法,了解高斯公式、斯托克斯公式,会用高斯公式计算曲面积分.
5. 了解散度与旋度的概念,并会计算.
6. 会用重积分、曲线积分及曲面积分,求一些几何量与物理量(平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、重心、转动惯量、引力、功及流量等).

考试要点分析与题型预测

这一章的考试要点有

1. 这一部分内容繁杂,积分就有四种之多,且计算各不相同.必须扎实掌握两类曲线积分与两类曲面积分直接计算方法及条件要求.

2. 由于格林公式与随之发展起来的曲线积分与路径无关的理论,对第二型曲线积分的计算变得丰富多采或者说选择面更大了,我们要计算曲线积分

$$\int_1 Xdx + Ydy$$

首先要作的事是求偏导数 $\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}$,再看 $\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}$ 是否相等(这是比较容易的工作),如 $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$,则说明积分与路径无关,问题就变得简单了,沿任何闭线积分为零,即使不是闭合曲线,我们可选择简单,易于计算的曲线来代替原来的积分曲线,问题就大大地简化了.

例 1、4、6、18、24、26、31(都是历届考题)37、46 都属于这类型的题目,读者还可参考解题时相应的评注.这种题型考的可能性相当高.

在用上述方法计算时,当然要求考虑 $X, Y, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}$ 的连续性,如出现不连续点怎么办?利用相应理论,仍可简化计算,取得好的效果,读者可参考例 26(考题)、54 以及相应的评注.

由于 $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ 是 $Xdx + Ydy$ 为全微分的充要条件.因此,这也可以用以判断全微分方程,并提供求解的方法.见例 22(历届考题)、39.

3. 空间曲线积分除直接计算外,也可用斯托克斯公式计算,可参看例 30(历届考题)的分析.

4. 计算第二型曲面积分,除直接计算外,比较多的时候是用高斯公式计算.

直接计算,三个积分要投射到三个坐标平面分别计算,不太方便,所以对闭合曲面上的第二型曲面积分,往往用高斯公式计算,甚至不是闭合曲面,宁愿补充一块曲面(平面)也用高斯公式计算,经常这更简洁些.

第二型曲面积分的计算是硕士考试的重要题型,本章例 2、3、9、12(历届考题)、41、43、46、52 都属于这一题型,它们的分析、评注,值得注意.

用高斯公式计算,当然也有条件,见例 16 的分析、评注.

5. 在研究生数学考试中,几次出现线、面、重积分与极值的综合题,这对提高综合能力有好处,值得注意.例 8、11、13、29(历届考题)就是这样的题目.例 8、13 的评注分析了这个问题.

* 数学二不考曲线积分与曲面积分

§ 6 - 1 曲线积分、曲面积分的概念与计算

一、曲线积分概念

定义1 设函数 $f(x, y)$ 为定义于区域 B 的有界函数, 而 B 域中有一条按段光滑的曲线 C .

(1) 在 C 上任意取 $n - 1$ 个分点, 把曲线 C 分成 n 个小段, 其弧长分别为 $\Delta S_k (k = 1, 2, \dots, n)$.

(2) 在每一小段上任意取一点 $p_k(\xi_k, \eta_k)$.

(3) 作出和数:

$$\sum_{k=1}^n f(p_k) \Delta S_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k$$

如果不论将曲线 C 怎样划分及 p_k 点怎样取法, 和数当 $n \rightarrow \infty$ 而 $\max \Delta S_k \rightarrow 0$ 时有极限存在, 这极限值就称为 $f(x, y)$ 沿曲线 C 对弧长的曲线积分 (或第一型曲线积分), 记作

$$\int_C f(x, y) dS = \lim_{\max \Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(p_k) \Delta S_k$$

这个定义极易推广到空间曲线 C . 只要把 $f(x, y)$ 换成空间区域 G 的有界函数 $f(x, y, z)$ 把 $p_k(\xi_k, \eta_k)$ 换成 $p_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ 我们就有 $f(x, y, z)$ 沿空间曲线 C 对弧长的曲线积分:

$$\int_C f(x, y, z) dS = \lim_{\max \Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(p_k) \Delta S_k$$

定义2 设 $X(x, y)$ 与 $Y(x, y)$ 是定义于区域 B 的两个有界函数, 而 B 域中有一条以 M, N 为端点的按段光滑曲线 C .

(1) 在 C 上自 $M = A(x_0, y_0)$ 至 $N = A_n(x_n, y_n)$ 依次任意取 $n - 1$ 个分点 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, 把曲线 C 分成 n 个小段 $\widehat{A_{k-1}A_k} (k = 1, 2, \dots, n)$.

(2) 在每小段 $\widehat{A_{k-1}A_k}$ 上取一点 $p_k(\xi_k, \eta_k)$.

(3) 作和数:

$$\sum_{k=1}^n [X(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]$$

其中 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

如果不论将曲线 C 怎样划分及 p_k 点怎样取法, 和数当 $n \rightarrow \infty$ 而 $\max \Delta S_k \rightarrow 0$ 时有极限存在, 这极限值就称为 $X(x, y)$ 与 $Y(x, y)$ 沿积分曲线 C 自 M 至 N 的对坐标的曲线积分 (或第二型曲线积分), 记作

$$\int_{C(M)}^{(N)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \lim_{\max \Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [X(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]$$

以后在不致混淆的地方略去 (M) 与 (N) 而只记成

$$\int_C X(x, y) dx + Y(x, y) dy$$

对坐标的曲线积分也可以推广到按段光滑的空间曲线 C , 也就是:

$$\begin{aligned} & \int_C X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz \\ &= \lim_{\max \Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta y_k + Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta z_k] \end{aligned}$$

二、曲线积分性质

(1) 若被积函数连续, 则曲线积分 (两种类型) 一定存在.

(2) 若把积分路线 C 分成 C_1 与 C_2 两段 (如图 6 - 1).

$$\begin{aligned} \text{则} \quad & \int_C \dots = \int_{C_1} \dots + \int_{C_2} \dots \\ \text{或} \quad & \int_{C(M)}^{(N)} \dots = \int_{C_1(M)}^{(K)} \dots + \int_{C_2(K)}^{(N)} \dots \end{aligned}$$

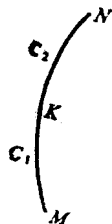


图 6 - 1

(3) 在对坐标的曲线积分中, 如果积分路线反向, 则积分值须改变正负号. 即

$$\int_{C(M)}^{(N)} Xdx + Ydy = - \int_{C(N)}^{(M)} Xdx + Ydy$$

空间曲线积分情况也是一样. 而在对弧长的曲线积分中, 积分值与方向无关.

(4) 如果由闭合曲线 C 所围成的平面区域被分为两个区域 B_1 与 B_2 , 而这两个区域的边界分别记作 C_1 与 C_2 (如图 6-2), 则沿曲线 C 的对坐标的曲线积分等于按同一方向沿 C_1 与 C_2 的曲线积分和.

这里, 可对闭合路线的方向的正负作一明确规定: 如果在某一方向沿闭合线路前进时, C 所围成的区域始终居左, 那么这一方向称为正向, 记作 $+C$; 否则便是负向, 记作 $-C$.

此外, 我们还把沿闭合路线的曲线积分记作 $\oint_C$, 以便识别. 应用这一记号, 上述性质就是

$$\oint_C Xdx + Ydy = \oint_{C_1} Xdx + Ydy + \oint_{C_2} Xdx + Ydy$$

其中 C, C_1, C_2 或者都取正向, 或者都取负向.

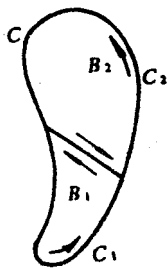


图 6-2

三、曲线积分计算法

(1) 对弧长的曲线积分 设 C 由参数方程

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

给出, 则

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

如果平面曲线 C 的方程是

$$y = y(x) \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

则

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

如果 C 是空间曲线

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

则

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

应注意, 这里 s 是随着 t 的增大则增大的, 因此化为定积分后下限必须小于上限.

(2) 对坐标的曲线积分 如果平面曲线 C 的方程是

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

而 C 的起点 M 与终点 N 分别对应于 α, β , 则

$$\int_{C(M)}^{(N)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

如果平面曲线 C 的方程是

$$y = y(x) \quad a \leq x \leq b$$

则

$$\int_{C(M)}^{(N)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_a^b [X(x, y(x)) + Y(x, y(x))y'(x)] dx$$

如果 C 是空间曲线

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

那么

$$\begin{aligned} & \int_{C(M)}^{(N)} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

必须强调指出, 这里的上、下限应对应于 C 的起点与终点, 不能错乱, 因为对坐标的曲线积分是和 C 的方向有关.

四、曲面积分

定义3 设函数 $f(x, y, z)$ 是定义于空间区域 G 的有界函数, 而在 G 内有一块按块光滑的曲面 K .

(1) 把 K 任意分成 N 个小块 τ_k , 各小块的面积记作 $\Delta\tau_k (k = 1, 2, \dots, N)$.

(2) 在每一小块上任意取一点 $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$.

(3) 作和数:

$$\sum_{k=1}^N f(P_k) \Delta\tau_k = \sum_{k=1}^N f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta\tau_k$$

如果不论曲面如何划分及点 P_k 如何取法, 和数当 $N \rightarrow \infty$ 而最大的小块直径 $\delta \rightarrow 0$ 时有极限存在, 这极限值就称为 $f(x, y, z)$ 在曲面 K 上对面积的曲面积分 (或第一型的曲面积分), 记作

$$\iint_K f(x, y, z) d\tau = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(P_k) \Delta\tau_k$$

如果 $f(x, y, z)$ 连续, 则它的曲面积分存在, 如果 K 的方程是 $z = z(x, y)$, 则

$$\iint_K f(x, y, z) d\tau = \iint_B f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} d\sigma$$

其中 B 是 K 的 xoy 平面上的投影区域. 如果 K 的方程由 $y = y(z, x)$ 或 $x = x(y, z)$ 给出, 也可以把曲面积分换成相应的二重积分.

在引入对坐标的曲面积分之前, 先介绍有向曲面的概念. 如果对两侧曲面给定了法线方向, 我们就说确定了曲面方向. 如果把所确定的方向称为正向, 记作 $+K$, 那么, 取相反的法线方向所确定的有向曲面, 就称为负向, 记作 $-K$.

如果取定的法线方向向上, 即曲面上任一点的法线与 z 轴的夹角是锐角, 那么我们规定曲面在 xoy 平面的投影是正的; 反之, 是负的. 曲面在其它坐标平面上的投影的正负也有同样的规定. 因此当曲面的方向改变时, 它在坐标平面上的投影也要改变正负号.

若取法线方向向上, 所确定的有向曲面习惯上称为曲面的上侧, 相应地有下侧、左侧、右侧等等. 对于有上下两侧的曲面, 通常总以上侧作为正向; 对于闭合曲面, 则以外侧 (法线方向向外) 作为正向.

定义4 设 $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ 是定义于空间区域 G 的有界函数, 而在 G 内有一个按块光滑的有向曲面 K .

(1) 把 K 任意分成 N 个小块 τ_k , 其面积分别为 $\Delta\tau_k (k = 1, 2, \dots, N)$, τ_k 在 yoz , zox , xoy 面上的投影分别为 $\Delta\tau_{k,yz}$, $\Delta\tau_{k,zx}$, $\Delta\tau_{k,xy}$.

(2) 在每一块上任意取一点 $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$.

(3) 作和数:

$$\sum_{k=1}^N [X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta\tau_{k,yz} + Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta\tau_{k,zx} + Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta\tau_{k,xy}]$$

如果不论曲面如何划分及点 P_k 如何取法, 和数在 $N \rightarrow \infty$ 而最大的小块直径 $\delta \rightarrow 0$ 时有极限存在, 这极限值称为函数 X, Y, Z 在 K 上对坐标的曲面积分 (或第二型的曲面积分), 记作

$$\begin{aligned} & \int_K [X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dzdx + Z(x, y, z) dxdy] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N [X(P_k) \Delta\tau_{k,yz} + Y(P_k) \Delta\tau_{k,zx} + Z(P_k) \Delta\tau_{k,xy}] \end{aligned}$$

如果 X, Y, Z 连续, 则曲线积分存在. 另外, 如有向曲面反向, 积分值也要相应变号.

设 K 的方程为 $z = z(x, y)$, 而 K 在 xoy 面上投影域为 B , 则

$$\iint_K Z(x, y, z) dxdy = \pm \iint_B Z(x, y, z(x, y)) d\sigma$$

上侧取正, 下侧取负.

设 K 的方程为 $x = x(y, z)$, 而 K 在 yoz 平面上的投影域为 B_1 , 则

$$\int_K X(x, y, z) dydz = \pm \int_{B_1} X(x(y, z), y, z) d\sigma$$

前侧取正, 后侧取负.

设 K 的方程为 $y = y(z, x)$, 而 K 在 zox 平面上的投影域为 B_2 , 则

$$\iint_K Y(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{B_2} Y(x, y(z, x), z) d\sigma$$

右侧取正, 左侧取负.

各种类型的曲面积分, 可以概括如下: 定积分、二重积分、三重积分以及对弧长的曲线积分与对面积的曲面积分, 它们定义的步骤和形式是完全一样的, 只是积分区域与被积函数不同而已, 而对坐标的曲线、曲面积分则有不同, 它们用投影来构造和数, 因而与方向有关.

§ 6 - 2 格林公式、高斯公式与斯托克斯公式及其应用

我们首先介绍区域及其边界上的积分彼此之间关系的三个极为重要的定理.

定理 1 (格林公式)

设 $X(x, y)$ 与 $Y(x, y)$ 及其偏导数 $\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}$ 在由一条简单封闭平面曲线 C 所围成的平面闭域 B 上连续, 则有

$$\iint_B \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{+C} X dx + Y dy$$

定理 2 (高斯公式)

设 $X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)$ 在闭域 G 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_G \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dv = \oint_K X dy dz + Y dz dx + Z dx dy$$

其中 K 是空间闭域 G 的边界曲面的外侧.

定理 3 (斯托克斯公式)

设 $X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)$ 在包含曲面 K 的某个空间域 G 有一阶连续偏导数, C 为 K 的边界曲线, 则有

$$\iint_K \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C X dx + Y dy + Z dz$$

其中有向曲面 K 与积分路线 C 的方向要符合下述规则: 如有人, 他站立的方向始终与曲面 K 的法线方向一致, 当沿着 C 按积分路线的方向行走时, 曲面 K 始终在他的左侧.

这三个定理揭示了各种区域上的积分之间的内在联系. 格林公式表达了平面封闭曲线 C 上的曲线积分与相应的一个以 C 为边界曲线的 B 域上的二重积分之间的关系, 斯托克斯公式则表达了空间封闭曲线 C 上的曲线积分与相应的一个以 C 为其边界曲线的有向曲面 K 上的曲面积分之间的关系 (注意, 当曲面 K 是 xoy 平面上的闭域时, 斯托克斯公式就是格林公式, 所以有时称为空间的格林公式), 而高斯公式则阐明了空间区域 G 上的三重积分与其边界曲面 K 上相应的曲面积分之间的关系.

从数学上看, 这就像一元函数积分理论中的牛顿 - 莱布尼茨公式.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx$$

给出了区间 $[a, b]$ 上的定积分和该区间两端点的原函数值之间的关系一样.

利用这些公式可以丰富各类积分的计算. 在某些情况下, 根据需要, 可将一种类型的积分转化为另一种类型的积分, 使繁复冗长的计算变得简捷易行. 而以格林公式作为理论基础的平面曲线积分与路径无关的问题则更有其重要意义. 这些都将在例题中得到反映. 此外, 由上述公式导出的格林第一公式、第二公式在数理方程与变分学中有广泛的应用. 至于场论, 则更是以这些公式作为理论基础的, 它们都是研究生必须掌握的知识.

下面我们介绍平面曲线积分与路线无关的问题. 根据定义, 曲线积分

$$\int_C X dx + Y dy$$

的值, 一般说来, 应该与被积函数 $X(x, y), Y(x, y)$ 及积分路线 C 都有关系. 但是, 如果某一曲线积分, 在起点与终点固定时沿任何积分路线, 积分值均相等, 那么, 我们就说, 该曲线积分与路线无关. 容易证明: 曲线积分与路线无关问题与曲线积分沿闭合曲线积分值等于零的问题是等价的.

定理 4 设 $X(x, y), Y(x, y)$ 及偏导数 $\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}$ 都在单连域 B 连续, 那么曲线积分

$$\int_C Xdx + Ydy$$

在 B 域内与路线无关的充要条件是,下述条件之一成立:

(1) 在 B 内的所有点上

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \text{成立.}$$

(2) 在 B 内 $Xdx + Ydy$ 为某一个二元函数 $F(x, y)$ 的全微分,即

$$dF = Xdx + Ydy$$

这个定理是重要的. 第一个充要条件给出了简洁的判别条件,同时也给出了 $Xdx + Ydy$,它是全微分的充要条件,在微分方程中,也很有意义.

(3) C 为 B 内任一条封闭曲线 $\oint_C Xdx + Ydy = 0$

如果

$$\int_C Xdx + Ydy$$

与路线无关,那么就有二元函数

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Xdx + Ydy$$

这里 (x_0, y_0) 与 (x, y) 分别是 B 内的固定点与变动点. 而且函数 $F(x, y)$ 就是 $Xdx + Ydy$ 的原函数,即

$$dF = Xdx + Ydy.$$

$Xdx + Ydy$ 的原函数不止一个, $F(x, y) + C$ 是它的原函数的全体. 如果求得任一原函数 $G(x, y)$ 则有

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Xdx + Ydy = G(x_1, y_1) - G(x_0, y_0)$$

最后,我们要说明,两种曲线积分之间是可以互相转化的,两种曲面积分之间也是可以互相转化的. 即

$$\int_C Xdx + Ydy + Zdz = \int_C (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma) dS$$

其中 α, β, γ 是 C 上任一点 $p(x, y, z)$ 的切线的方向角(方向与积分路线同). 显然,它们也是 x, y, z 的函数. 而

$$\iint_K Xdydz + Ydzdx + Zdxdy = \iint_K [X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma] d\tau$$

其中 α, β, γ 是有向曲面 K 上任一点 $p(x, y, z)$ 的法线的方向角.

§ 6 - 3 典型例题分析与最新考试题型预测

典型题型 1. 曲线积分的直接计算

例 1 求 $\int_C xds$ 其中 C 是连接点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 的直线段

解 线段 AB 的参数方程是

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} dt \\ &= Ldt (L \text{ 是 } AB \text{ 的长度}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C xds &= \int_0^1 (x_1 + (x_2 - x_1)t) Ldt \\ &= L \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$

例 2 求 $\int_C yds$ C 是抛物线 $y^2 = 4x$

从 $(1, 2)$ 到 $(1, -2)$ 的一段.

解 $x = \frac{y^2}{4} \quad (-2 \leq y \leq 2)$

$$\int_C y ds = \int_{-2}^2 y \sqrt{1+x^2} dy = \int_{-2}^2 y \sqrt{1+(\frac{y}{2})^2} dy = 0$$

例3 求 $I = \oint_{+C} y^2 dx - x^2 dy$ C 是圆周

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

解
$$I = \int_0^{2\pi} [\sin^2 t (-\sin t) - \cos^3 t \cos t] dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} [\sin^3 t + \cos^3 t] dt = 0$$

例4* 求 $I = \int_C 6x^2 y dx + 10xy^2 dy$ C 是 $y = x^3$

从(1, 1)到(2, 8)的一段

解
$$I = \int_1^2 [6x^2 x^3 + 10x(x^3)^2 3x^2] dx$$

$$= \int_1^2 (6x^5 + 30x^9) dx = 3132$$

例5 求 $I = \int_C x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz$ 其中 C 是从 $A(3, 2, 1)$ 到 $B(0, 0, 0)$ 的直线段.

解 C 的方程是 $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$, 也就是

$$x = 3z, \quad y = 2z, \quad z \text{ 从 } 1 \text{ 到 } 0$$

$$I = \int_1^0 (3z)^3 3dz + 3z4z^2 2dz - (3z)^2 2z dz$$

$$= \int_1^0 87z^3 dz = -\frac{87}{4}$$

例6 设平面曲线 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$ _____.

解 沿 L $x^2 + y^2 = 1$ 故 $\int_L (x^2 + y^2) ds = \int_L ds = \pi$

例7 (90分) 质点 P 沿着以 AB 为直径的圆周, 从点 $A(1, 2)$ 运动到点 $B(3, 4)$ 的过程中受变力 F 的作用(见图6-3), F 的大小等于点 P 到圆心 O 之间的距离, 其方向垂直于线段 OP , 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 求变力 F 对质点 P 所作的功.

分析 关键在于写出 $\vec{F}$.

解 $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, 圆心为 $C(2, 3)$, 设 $P(x, y)$, 由题设可知 $F = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, 圆弧方程是 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$, 写成参数方程是

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2}\cos t \\ y = 3 + \sqrt{2}\sin t \end{cases} \quad \left(-\frac{3}{4}\pi \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

从而

$$W = \int_{AB} -y dx + x dy = \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} -(3 + \sqrt{2}\sin t)(-\sqrt{2}\sin t) dt + (2 + \sqrt{2}\cos t)\sqrt{2}\cos t dt = 2(\pi - 1)$$

例8 (91分) 在过点 $O(0, 0)$ 和 $A(\pi, 0)$ 的曲线族 $y = a \sin x (a > 0)$ 中求一条曲线 L , 使沿该曲线从 O 到 A 的积分

$$\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$$

的值最小.

解 $l: y = a \sin x (a > 0)$

$$I(a) = \int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy = \int_0^\pi [1 + a^3 \sin x + (2x + a \sin x) a \cos x] dx$$

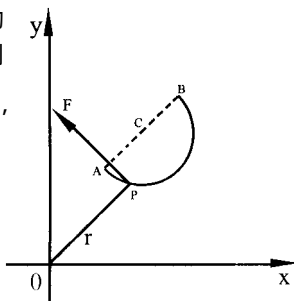


图 6-3

$$= \pi - 4a + \frac{4}{3}a^3$$

$$I'(a) = -4 + 4a^2$$

令 $I'(a) = 0$ 得 $a = 1$ ($a = -1$ 不在考虑范围内, 舍去), 又 $I''(1) = 8$, $I(a)$ 在 $a = 1$ 取得极小值, 且是唯一极值, 故 $I(a)$ 在 $a = 1$ 取得最小值, 所求曲线为

$$y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$$

例 9* (92 分) 在变力 $F = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ 的作用下, 质点由原点沿直线运动到椭圆面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

第一卦限点 $M(\xi, \eta, \zeta)$, 问当 ξ, η, ζ 取何值时, 力 F 所作的功最大, 并求出 W 的最大值.

解 原点到 M 点的直线方程为
$$\begin{cases} x = \xi t \\ y = \eta t \\ z = \zeta t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

故
$$W = \int_{OM} yzdx + zxdy + xydz = \int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2 dt = \xi\eta\zeta$$

以下求 $W = \xi\eta\zeta$ 在条件 $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$ ($\xi \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0$) 下的最大值.

用拉格朗日乘数法, 令 $F(\xi, \eta, \zeta) = \xi\eta\zeta + \lambda(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2})$ 由

$$\begin{cases} F'_\xi = \eta\zeta - \frac{2\lambda}{a^2}\xi = 0 \\ F'_\eta = \xi\zeta - \frac{2\lambda}{b^2}\eta = 0 \\ F'_\zeta = \xi\eta - \frac{2\lambda}{c^2}\zeta = 0 \\ F'_\lambda = 1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0 \end{cases}$$

可得 $\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2} = \frac{1}{2\lambda}\xi\eta\zeta$, 代入 $F'_\lambda = 0$ 解得 $\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2} = \frac{1}{3}$,

于是 $\xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}}$

由问题的实际意义知

$$W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9}abc$$

评述 在历届的考题中, 已经多次出现综合题型了, 既考数学在力学上的应用又考线、面积分或是既考线、面积分又考极值, 例 9 更是把力学应用、积分、极值揉合在一起了, 这些题目并不太难, 但对综合能力提出了要求, 还是值得注意.

例 10 (97 分) 计算曲线积分 $\oint_C (z - y)dx + (x - z)dy + (x - y)dz$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$, 从 z 轴

正向往 z 轴负向看, C 的方向是顺时针方向.

解 曲线 C 的参数方程是 $x = \cos t, y = \sin t, z = 2 - \cos t + \sin t$, 从规定的方向看, t 从 $2\pi \rightarrow 0$.

$$\oint_C (z - y)dx + (x - z)dy + (x - y)dz$$

$$= \int_{2\pi}^0 (2 - \cos t)(-\sin t)dt + (-2 + 2\cos t - \sin t)\cos tdt + (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t)dt = -2\pi$$

评述 此题也可利用斯托克斯公式进行计算, 但既然能简捷地写出曲线的参数方程(不必分段表示), 当然以直接计算为宜.

例 11 (98 分) 设 l 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 则 $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2)ds =$ _____.

解 椭圆 1 的方程可改写为 $3x^2 + 4y^2 = 12$, 代入积分式得

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} (2xy + 3x^2 + 4y^2) dx &= \oint_{\Gamma} (2xy + 12) ds \\ &= 2 \oint_{\Gamma} xy ds + 12 \oint_{\Gamma} ds\end{aligned}$$

由于 xy 关于 x 是奇函数, 曲线 Γ 关于 y 轴对称, 故

$$\oint_{\Gamma} xy ds = 0, \quad \oint_{\Gamma} ds = a$$

故
$$\oint_{\Gamma} (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = 12a.$$

故应填 $12a$.

典型题型 2. 灵活地运用格林公式、斯氏公式计算曲线积分

例 12 设位于点 $(0, 1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ ($k > 0$ 为常数, r 为质点 A 与 M 之间的距离)

质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $B(2, 0)$ 运动到 $O(0, 0)$, 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

分析 此题关键是写出引力 $\vec{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 的表达式, 就可以利用变力作功的公式了.

解 引力 $\vec{F}$ 与 $\vec{MA}$ 方向一致, $\vec{MA} = (0 - x)\mathbf{i} + (1 - y)\mathbf{j}$

据条件
$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \frac{\vec{MA}}{|\vec{MA}|} = \frac{k}{r^2} \frac{-x\mathbf{i} + (1 - y)\mathbf{j}}{[x^2 + (1 - y)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-kx\mathbf{i} + k(1 - y)\mathbf{j}}{[x^2 + (1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

于是
$$\begin{aligned}W &= \int_{BO} \frac{-kxdx + k(1 - y)dy}{[x^2 + (1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}} = -k \int_{BO} \frac{\frac{1}{2}d[x^2 + (1 - y)^2]}{[x^2 + (1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{k}{[x^2 + (1 - y)^2]^{\frac{1}{2}}} \Big|_{(2, 0)}^{(0, 0)} = k(1 - \frac{1}{\sqrt{5}})\end{aligned}$$

评注 有的读者会问: 我没有想到 $\frac{-kxdx + k(1 - y)dy}{[x^2 + (1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 是全微分, 计算会不会很困难?

由于格林公式与由之发展起来的曲线积分与路径无关的理论, 我们碰到曲线积分 $\int_{\Gamma} Xdx + Ydy$, 首先要作的事是求偏导数 $\frac{\partial X}{\partial y}$,

$\frac{\partial Y}{\partial x}$, 再看 $\frac{\partial X}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Y}{\partial x}$ 是否相等 (这并不是困难的工作). 如相等, 积分 $\int_{\Gamma} Xdx + Ydy$

与路径无关, 沿任何闭合曲线积分为零 (事实上 $Xdx + Ydy$ 是全微

分的充要条件也是 $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$), 问题就变得简单了, 以本题而论

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-3kx(1 - y)}{[x^2 + (1 - y)^2]^{\frac{5}{2}}}$$

积分与路径无关, 本来沿圆弧由 B 到 O 等于沿 x 轴 ($y = 0$)

由 B 到 O (见图 6-4), 故

$$W = \int_2^0 \frac{-kxdx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = k(1 - \frac{1}{\sqrt{5}})$$

当然也应考虑 $X, Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}$ 的连续性问题, 但以本题而论, 只在 $(0, 1)$ 不连续, 而 $(0, 1)$ 在我们研究的区域的范围外面.

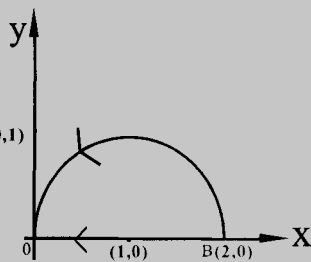


图 6-4

例 13 (05, 12 分) 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分

$$\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$$

的值恒为同一常数.

(I) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$;

(II) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

解(I) 如图, 设 C 是半平面 $x > 0$ 内的任一分段光滑简单闭曲线, 在 C 上任意取定两点 M, N , 作围绕原点的闭曲线 $\overline{MQNRM}$, 同时得到另一围绕原点的闭曲线 $\overline{MQNPM}$.

根据题设可知

$$\oint_{\overline{MQNRM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overline{MQNPM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$$

根据第二类曲线积分的性质, 利用上式可得

$$\begin{aligned} & \oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \oint_{\overline{NRM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} + \oint_{\overline{MPN}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \oint_{\overline{NRM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overline{NPM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \oint_{\overline{MQNRM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overline{MQNPM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(II) 设 $P = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}$, $Q = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$, P, Q 在单连通区域 $x > 0$ 内具有一

阶连续偏导数. 由(I)知, 曲线积分 $\int_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 在该区域内与路径无

关, 故当 $x > 0$ 时, 总有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{2y(2x^2 + y^4) - 4x \cdot 2xy}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} \quad (2)$$

比较①、②两式的右端, 得

$$\begin{cases} \varphi'(y) = -2y, \\ \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5. \end{cases} \quad (3)$$

$$\quad (4)$$

由③得 $\varphi(y) = -y^2 + c$, 将 $\varphi(y)$ 代入④得 $2y^5 - 4cy^3 = 2y^5$,

所以 $c = 0$, 从而 $\varphi(y) = -y^2$.

例14 (95 β分) 设函数 $Q(x, y)$ 在 xoy 平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分 $\int_L 2xydx + Q(x, y)dy$ 与路径无关, 并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0, \rho)}^{(t, 1)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_{(0, \rho)}^{(1, 1)} 2xydx + Q(x, y)dy$$

求 $Q(x, y)$.

分析 由于与路径无关, 有 $\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 在进一步确定 $Q(x, y)$ 过程中, $(0, \rho) \rightarrow (t, 1)$ 的积分等于 $(0, 0) \rightarrow (t, \rho)$ 再从 $(t, \rho) \rightarrow (t, 1)$ 的沿折线的积分, 可帮助我们求出 $Q(x, y)$.

解 由于曲线积分与路径无关, 有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$, 故 $Q(x, y) = \int 2xdx + \varphi(y) = x^2 + \varphi(y)$

$$\begin{aligned} \int_{(0, \rho)}^{(t, 1)} 2xydx + Q(x, y)dy &= \int_{(0, \rho)}^{(t, \rho)} 2xydx + Q(x, y)dy + \int_{(t, \rho)}^{(t, 1)} 2xydx + (x^2 + \varphi(y))dy \\ &= \int_0^1 |t^2 + \varphi(y)|dy = t^2 + \int_0^1 \varphi(y)dy \end{aligned}$$

$$\int_{(0, \rho)}^{(1, 1)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_{(0, \rho)}^{(1, \rho)} 2xydx + [x^2 + \varphi(y)]dy + \int_{(1, \rho)}^{(1, 1)} 2xydx + [x^2 + \varphi(y)]dy$$

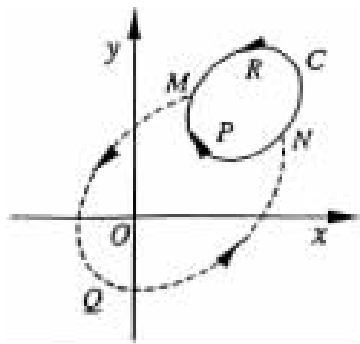


图 6-4-1

$$= \int_0^t [1 + \varphi(y)] dy = t + \int_0^t \varphi(y) dy$$

于是有

$$t^2 + \int_0^1 \varphi(y) dy = t + \int_0^t \varphi(y) dy$$

两边对 t 求导, 得 $2t = 1 + \varphi(t)$, $\varphi(t) = 2t - 1$

从而 $\varphi(y) = 2y - 1$, $Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$.

评述 此题反复利用线积分与路径无关的条件, 方法值得注意, 也应该思考.

例 15 (99 5 分) 求 $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$ 其中 a, b 为正的常数 L 为从点 $A(2a, 0)$

沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到 $O(0, 0)$ 的弧.

分析 $\frac{\partial Y}{\partial x} = e^x \cos y - a$, $\frac{\partial X}{\partial y} = e^x \cos y - b$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = b - a$$

$y = \sqrt{2ax - x^2}$ 即圆 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ 的上半部分, 加上一段 x 轴就成为闭合曲线, 此题用格林公式作较简单.

解 $I = \int_L = \int_L + \int_{OA} - \int_{OA} = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy - \int_{OA}$

$$= \iint_D (b-a) dxdy - \int_{OA} (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$$

$$= (b-a) \frac{\pi a^2}{2} - \int_0^{2a} (-bx)dx = (b-a) \frac{\pi a^2}{2} + b \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2a}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3$$

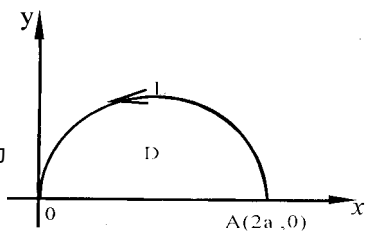


图 6-5

评述 通过对例 12、13、14 以及本题的分析与评述, 怎样利用曲线积分与路径无关的理论以及格林公式来处理第二型曲线积分已经讨论得很清楚了(有的曲线积分不是与路径无关, 但 $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ 是简单的函数, 仍可利用格林公式巧妙地解决, 本题就是例子), 望读者综合起来仔细思考, 这是出现率很高的题型, 必须扎实掌握.

至于被积函数出现不连续点怎么办? 将在以后的例子中分析解决.

例 16* (00 6 分) 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$ 其中 L 是点 $(1, 0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R > 1$) 取逆时针方向.

分析 尽管 $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, 但不能得出结论 $I = 0$ 因为被积函数有一个“洞”(不连续点)在原点. 线积分理论告诉我们, 绕洞任一条闭合连续曲线上的积分值是相同的(方向当然指向一致). 选取新的曲线时, 尽量选得使积起来方便, 以本题而论, 可选 $4x^2 + y^2 = 1$, 代入之后, 计算简单.

L 的参数方程是 $x = 1 + R \cos t$, $y = R \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 直接代入计算也行, 但代入以后, 积分成为三角有理函数的积分, 计算要繁一些.

解 (1) 以 L_1 表示 $4x^2 + y^2 = 1$, 它的参数方程是 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 则有

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \oint_{L_1} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos t \cos t dt + \frac{1}{2} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi.$$

(2) 直接计算 L 的参数方程是 $\begin{cases} x = 1 + R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_L = \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + R\cos t)R\cos t dt + R^2 \sin^2 t dt}{4(1 + R\cos t)^2 + R^2 \sin^2 t} = \pi$$

例 17* (02 8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 $(y > 0)$ 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) , 记

$$I = \int_L \left[\frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy \right]$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关;

(2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.

解 (1) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] \right) = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] \right]$

在上半平面处处成立, 故 I 与路径无关.

(2) 取 L 为由点 (a, b) 到 (c, b) 再到 (c, d) 的折线段

$$\begin{aligned} I &= \int_a^c \frac{1}{b} [1 + b^2 f(bx)] dx + \int_b^d \frac{c}{y^2} [y^2 f(cy) - 1] dy \\ &= \frac{c-a}{b} + \int_a^c bf(bx) dx + \int_b^d cf(cy) dy + \frac{c}{d} - \frac{c}{b} \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{bc} f(t) dt + \int_{bc}^{cd} f(t) dt \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t) dt \end{aligned}$$

当 $ab = cd$ 时, $\int_{ab}^{cd} f(t) dt = 0$. $I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

例 18* (06 12 分) 设在上半平面 $D = \{(x, y) | y > 0\}$ 内, 函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$. 证明: 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$$

证 由格林公式可得 (注意 L 的方向可为正向或负向)

$$\begin{aligned} \oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy &= \pm \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (-xf) - \frac{\partial}{\partial y} (yf) \right] dx dy \\ &= \mp \iint_D (2f(x, y) + yf'_2(x, y) + xf'_1(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (*)$$

由于对任意 $(x, y) \in D$ 及 $t > 0$ 都有

$$f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y),$$

两边对 t 求导得

$$xf'_1(tx, ty) + yf'_2(tx, ty) = -2t^{-3} f(x, y),$$

特别地取 $t = 1$ 上式也成立, 即

$$2f(x, y) + xf'_1(x, y) + yf'_2(x, y) = 0,$$

代入 $(*)$ 式即得证:

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0.$$

例 19* 计算 $\int_C (y^3 e^x - my)dx + (3y^2 e^x - m)dy$. 其中曲线 C 从 E 到 F 再到 G , $\widehat{FG}$ 是半圆弧 (如图 6-6).

分析 由于 $\frac{\partial Y}{\partial x} = 3y^2 e^x$ $\frac{\partial X}{\partial y} = 3y^2 e^x - m$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = m$$

这促使人想到可用格林公式计算. 但曲线 C 不是闭合的, 怎么办呢? 我们可加上一段辅助曲线使之成为闭曲线, 然后再减去辅助曲线上的积分即可. 当然,

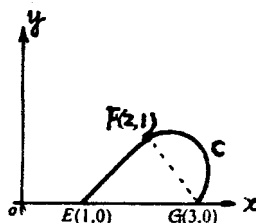


图 6-6

所加辅助曲线应力求简单.

以本题而论,可加一段直线 GE,因 GE 在坐标轴上,所以计算简便.

$$\begin{aligned}\text{解} \int_C (y^2 e^x - my) dx + (3y^2 e^x - m) dy &= \int_C + \int_{GE} - \int_{GE} = - \iint_B m d\sigma - 0 \\ &= - m \iint_B d\sigma = - mS = - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)m\end{aligned}$$

在格林公式中,曲线积分是沿正向的,而本题(加上 GE 段后)则沿负向,故二重积分前应加负号.

例 20* 计算

$$\oint_{+C} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y-4}{(x-3)^2 + (y-4)^2} \right) dx + \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} - \frac{x-3}{(x-3)^2 + (y-4)^2} \right) dy$$

其中 C 是如图 6-7.

分析 容易验证

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{[x^2 + y^2]^2} + \frac{(x-3)^2 - (y-4)^2}{[(x-3)^2 + (y-4)^2]^2}$$

尽管如此,我们并不能立即判断 $\oint_{+C} = 0$, 因为被积函数在区域 B 内有两个“洞”(即不连续点) $(0, 0)$ 与 $(3, 4)$. 但是曲线积分理论告诉我们,绕包含这两个“洞”在内的任一闭合曲线其曲线积分均相等. 我们可以根据被积函数的形状选择最方便的积分路线. 为此,本题最好分成两个积分进行计算.

$$\begin{aligned}\text{解} \oint_{+C} \dots &= \oint_{+C} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} + \oint_{+C} \frac{(y-4) dx - (x-3) dy}{(x-3)^2 + (y-4)^2} \\ &= \oint_{C_1} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} + \oint_{C_2} \frac{(y-4) dx - (x-3) dy}{(x-3)^2 + (y-4)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt + \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -4\pi\end{aligned}$$

$$C_1: x^2 + y^2 = 1, \quad C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$$

例 21* 设 $f(x)$ 二阶连续可导,且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 求 $u(x, y)$, 使得

$$du = y[f(x) + 3e^{2x}]dx + f'(x)dy$$

解 成为全微分的充要条件是

$$\frac{\partial X}{\partial y} = f(x) + 3e^{2x} = f'(x) = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

即

$$f'(x) - f(x) = 3e^{2x}$$

由微分方程理论可得方程的通解是

$$f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x}, \text{再由 } f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ 可确定 } c_1 = -1, c_2 = 0.$$

即

$$f(x) = -e^x + e^{2x}$$

于是

$$\begin{aligned}du &= y(-e^x + e^{2x} + 3e^{2x})dx + (-e^x + 2e^{2x})dy \\ &= y(-e^x + 4e^{2x})dx + (-e^x + 2e^{2x})dy\end{aligned}$$

故

$$u(x, y) = \int_0^y (-e^x + 2e^{2x})dy + c = (2e^{2x} - e^x)y + c$$

例 22* 计算

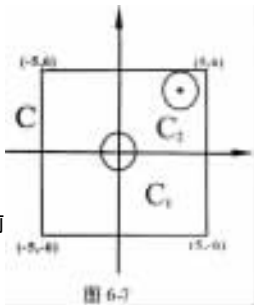
$$(1) \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

其中点 (x_1, y_1, z_1) 与 (x_2, y_2, z_2) 分别在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 上 ($a > 0, b > 0$).

$$(2) \int_{(1, 2, 3)}^{(3, 2, 1)} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

解(1) 由于

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\frac{1}{2} dx^2 + \frac{1}{2} dy^2 + \frac{1}{2} dz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$



说明曲线积分与路线无关,故

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = b - a$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz &= (x+y+z)d(x+y+z) - (xdx + ydy + zdz) \\ &= d\frac{(x+y+z)^2}{2} - d\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2\right) \\ &= d\left[\frac{(x+y+z)^2}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\right] \end{aligned}$$

于是

$$\int_{(1, 2, 3)}^{(3, 2, 1)} \dots = \frac{(3+2+1)^2}{2} - \frac{1}{2}(9+4+1) - \frac{(1+2+3)^2}{2} + \frac{1}{2}(1+4+9) = 0$$

评述 空间曲线积分与路线无关的理论与平面情况相似,常用的判别公式是

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

读者可参阅教材中的相关内容.

例 23 求 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{+C} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$ 这里 $C: x^2 + y^2 = R^2$

解 将 C 改写为参数方程

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

于是

$$\oint_{+C} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-R^2\sin^2 t - R^2\cos^2 t}{R^4(\cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t)^2} dt = -\frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2}$$

因 $\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2}$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上连续,故

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{+C} \dots = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2} \right] = 0$$

典型题型 3. 直接计算或利用高斯公式计算曲面积分

例 24* 计算 $\iint_K xyz dx dy + y dy dz$, 其中 K 是柱面 $x^2 + z^2 = a^2$ 在 $x \geq 0, y \geq 0$ 两卦限内被平面 $y = 0$ 及 $y = h$ 所截下部分的外侧,如图 6-8

解 此可分成两个积分,分别进行计算

$$\iint_K xyz dx dy, \quad \iint_K y dy dz$$

对前者而言, K 可看作由 K_1 与 K_2 两半片所连成,其中 K_1 与 K_2 的方程分别是

$z = \sqrt{a^2 - x^2}, z = -\sqrt{a^2 - x^2}$. 在 K_1 是对上侧积分,在 K_2 是对下侧积分,于是

$$\begin{aligned} \iint_K xyz dx dy &= \iint_{K_1} xyz dx dy + \iint_{K_2} xyz dx dy = \iint_B xy \sqrt{a^2 - x^2} d\sigma - \iint_B xy (-\sqrt{a^2 - x^2}) d\sigma \\ &= 2 \iint_B xy \sqrt{a^2 - x^2} d\sigma = 2 \int_0^a \int_0^h xy \sqrt{a^2 - x^2} dy dx = \frac{1}{3} h^2 a^3 \end{aligned}$$

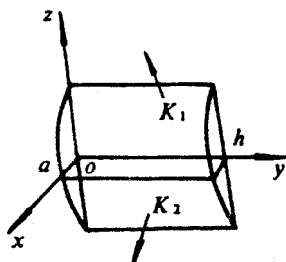


图 6-8

对后者而言, K 不必分成两片,它的方程是 $x = \sqrt{a^2 - z^2}$,即曲面的前侧. K 投影到 $yo z$ 平面上是矩形域 B_1 , $0 \leq y \leq h, -a \leq z \leq a$. 故

$$\iint_K y dy dz = \iint_{B_1} y d\sigma = \int_{-a}^a \int_0^h y dy dz = 2a \times \frac{h^2}{2} = ah^2$$

于是

$$\text{原式} = \frac{1}{3}a^3h^2 + ah^2$$

例 25* 求曲面积分

$$\iint_K x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

其中 K 是 $z = x^2 + y^2$ 在第一卦限中 $0 \leq z \leq 1$ 部分的上侧面.

解(1) 直接计算

$$\begin{aligned} \text{原式} &= - \iint_{\substack{y^2 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \sqrt{z - y^2} d\sigma - \iint_{\substack{x^2 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \sqrt{z - x^2} d\sigma + \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0}} (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= - \int_0^1 \int_{y^2}^1 \sqrt{z - y^2} dz dy - \int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{z - x^2} dz dx + \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = - \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

解(2) 用高斯公式计算, 先补上平面 K_1, K_2, K_3 如图 6-9 成为闭合曲面 K^* . 此题由于方向向内, 用奥-高公式时须加负号, 于是

$$\begin{aligned} \iint_K \dots &= \iint_K \dots + \iint_{K_1} \dots + \iint_{K_2} \dots + \iint_{K_3} \dots - \iint_{K_1} \dots - \iint_{K_2} \dots - \iint_{K_3} \dots \\ &= \oint_{K^*} \dots - \iint_{K_1} \dots - \iint_{K_2} \dots - \iint_{K_3} \dots \\ &= - \iiint_G 3dv - 0 - 0 - \left(- \iint_B d\sigma \right) \\ &= - 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r^2}^1 r dz dr d\theta + \frac{\pi}{4} \\ &= - 3 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^1 r(1 - r^2) dr + \frac{\pi}{4} = - \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

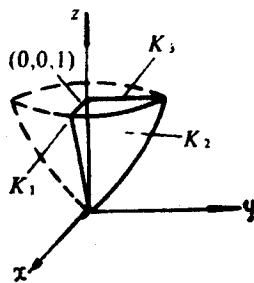


图 6-9

例 26* 计算 $\iint_{x^2+y^2+z^2=a^2} f(x, y, z) d\tau$

其中 $f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0, & z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

解 原式 $= \iint_{K_1} (x^2 + y^2) d\tau + \iint_{K_2} 0 d\tau = \iint_{K_1} (x^2 + y^2) d\tau$

这里 $K_1: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}, K_2: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

将 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 联立, 解得 $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$, 故该曲面在 xoy 平面上的投影区域是 $B: x^2 + y^2 \leq a^2/2$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_B (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma = \iint_B (x^2 + y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r^2 \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta = 2\pi a \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr \\ &= - 2\pi a \int_a^{\frac{a}{\sqrt{2}}} (a^2 - t^2) dt = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{6} \pi a^4 \quad (\sqrt{a^2 - r^2} = t) \end{aligned}$$

例 27 计算曲面积分

$$I = \iint_S x(8y + 1) dy dz + 2(1 - y^2) dz dx - 4yz dx dy$$

其中 S 是由曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases} (1 \leq y \leq 3)$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面, 它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于

$$\frac{\pi}{2}.$$

分析 用第二型曲面积分计算时, 需分别投影到三个坐标平面再进行二重积分的计算, 除特殊情况外, 相当繁琐. 人们喜欢利用高斯公式转化为三重积分计算. 不是封闭曲面往往采用补面的方法来计算.

旋转面的方程是 $x^2 + z^2 = y - 1$, 当 $y = 3$ 时, $x^2 + z^2 = 2$ 最简单是补上平面上的圆域 $S_1: \begin{cases} x^2 + z^2 \leq 2 \\ y = 3 \end{cases}$, 法线方向与 Y 轴相同.

解 补 $S_1: \begin{cases} x^2 + z^2 \leq 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 设 S_1 和 S 所围成的区域为 Ω

(见图 6-10), 由高斯公式得:

$$\begin{aligned} & \iint_S (8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzxdy \\ &= \iint_{S+S_1} (8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzxdy - \iint_{S_1} (8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzxdy \\ &= \iiint_{\Omega} [(8y+1) - 4y - 4y]dv - \iint_{S_1} 2(1-y^2)dzdx = \iiint_{\Omega} dV - \iint_{x^2+z^2 \leq 2} 16dzdx \\ &= \pi \int_1^3 (y-1)dy + 16 \times 2\pi = 2\pi + 32\pi = 34\pi \end{aligned}$$

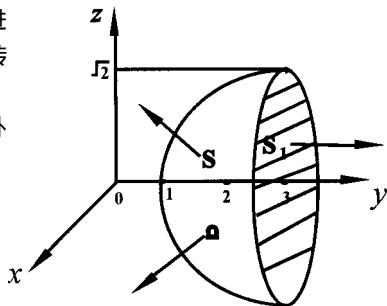


图 6-10

评述 此题看似平淡, 因为所用的方法是我们熟知的, 但如果空间概念不清晰, 基础不扎实, 是做不好的.

例 28 (05 4 分) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧, 则 $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 先用高斯公式再用球面坐标计算

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy &= \iiint_{\Omega} (1+1+1)dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R \rho^2 \sin\varphi d\rho \\ &= 3 \cdot 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{R^3}{3} \\ &= (2 - \sqrt{2})\pi R^3 \end{aligned}$$

应填 $(2 - \sqrt{2})\pi R^3$

例 29* 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 上, 问当 R 取何值时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分面积最大.

分析 先求出 Σ 在定球面内的部分面积 $S(R)$, 再求 $S(R)$ 的最大值, 由球的对称性, Σ 的球心不妨取在 z 轴上, 即取在 $(0, 0, a)$.

解 Σ 的方程为 $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = R^2$ 两球面交线是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-a)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

解得 $z = a - \frac{R^2}{2a}$, $x^2 + y^2 = R^2 - \frac{R^4}{4a^2}$, 从而交线在 xoy 平面的投影曲线是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - \frac{R^4}{4a^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } R^2 - \frac{R^4}{4a^2} = b^2 (b > 0)$$

从而 Σ 在定球面内那一部分的面积为

$$\begin{aligned} S(R) &= \iint_{x^2+y^2 \leq b^2} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq b^2} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}} dr = 2\pi R^2 - \frac{\pi R^3}{a} (R > 0) \end{aligned}$$

$S'(R) = 4\pi R - \frac{3\pi}{a}R^2$, 令 $S'(R) = 0$, 得 $R = \frac{4}{3}a$, 且 $S''\left(\frac{4}{3}a\right) < 0$, 故 $R = \frac{4}{3}a$ 是极大值点, 又极值点唯一, 故当

$R = \frac{4}{3}a$ 时, 球面 Σ 在定球面内的部分面积最大.

评述 这是一道综合题, 考查了曲面面积计算和函数的极值, 这也是一道难题, 最难的部分是空间解析几何的内容: 如何确定空间曲面的交线在坐标平面上的投影. 我们在前面假定 $R^2 - \frac{R^4}{4a^2} = R^2\left(1 - \frac{R^2}{4a^2}\right) > 0$, 读者不妨想像一下, 如 $R^2 - \frac{R^4}{4a^2} \leq 0$, 也就是说 $R \geq 2a$, 空间图像应是什么样子.

例 30 (06 4 分) 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧, 则 $\iint_{\Sigma} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy =$ _____.

分析 在例 27 中已经分析过计算这类型题目的方法: 补曲面使之成为闭合曲面, 利用高斯公式进行计算, 再减去补充曲面(注意方向)上的曲面积分.

解 补 xoy 平面上的平面区域 $S: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 1 \end{cases}$, 其法线方向与 z 轴方向相同, Σ 与 S 围成的区域记为 Ω , 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy \\ &= \oint_{\Sigma+S} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy - \iint_S xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} 6dV - 0 = 6 \cdot V_{\text{正圆锥}} = 6 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 1}{3} = 2\pi. \end{aligned}$$

例 31 (92 8 分) 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x^3 + az^2)dydz + (y^3 + ax^2)dzdx + (z^3 + ay^2)dxdy$$

其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

分析 补充平面, 利用高斯公式, 此题不困难.

解 以 Σ_1 记平面区域 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z = 0 \end{cases}$ 的下侧, Ω 为 $\Sigma\Sigma_1$ 所围成的区域

(见图 6-11), 则由高斯公式

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \oint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^3 + az^2)dydz + (y^3 + ax^2)dzdx + (z^3 + ay^2)dxdy \\ &\quad - \iint_{\Sigma_1} (x^3 + az^2)dydz + (y^3 + ax^2)dzdx + (z^3 + ay^2)dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)dV + \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} ay^2dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a 3\rho^2 \sin\varphi d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a ar^2 \sin^2\theta r dr = \frac{29}{20}\pi a^5 \end{aligned}$$

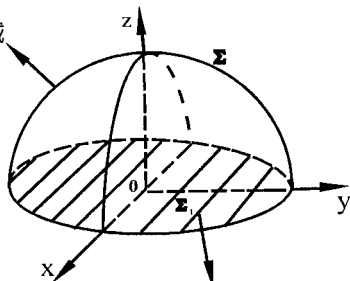


图 6-11

例 32 (93 6 分) 计算 $\oint_{\Sigma} 2xzdydz + yzdzdx - z^2dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围

立体表面的外侧.

分析 此题明显用高斯公式转化为三重积分后再用球面坐标计算.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \oint_{\Sigma} 2xzdydz + yzdzdx - z^2dxdy &= \iiint_{\Omega} (2z + z - 2z)dv = \iiint_{\Omega} zdv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi d\rho = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

其中 Ω 是 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域.

例 33 (94 6 分) 计算曲面积分 $\iint_S \frac{xydz + z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 S 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面 $z = R, z = -R (R > 0)$ 所围成的立体表面的外侧.

分析 在一个闭合曲面上的第二型曲面积分, 看来可以利用高斯公式简便地计算, 且慢! 被积函数

$$Y(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Z(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

均在原点不连续, 原点在曲面包围的区域内, 这不符合高斯公式的条件, 此题不能用高斯公式计算, 只能直接计算.

解 设 S_1, S_2, S_3 依次为 S 的上下底和圆柱面部分 (如图 6-12), 因为 S_1, S_2 在 $yo z$ 平面上的投影面积为零, S_3 在 xoy 平面上的投影面积为零, 故

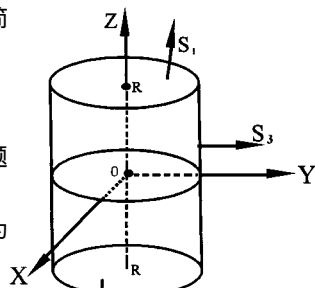


图 6-12

$$\iint_{S_1} \frac{xydz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{S_2} \frac{xydz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{S_3} \frac{z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

记 S_1, S_2 在 xoy 面上的投影为 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{S_1+S_2} \frac{z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{S_1} \frac{z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2} + \iint_{S_2} \frac{z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{R^2dxdy}{x^2 + y^2 + R^2} - \iint_{D_{xy}} \frac{(-R)^2dxdy}{x^2 + y^2 + (-R)^2} = 0 \end{aligned}$$

记 S_3 在 $yo z$ 平面上的投影区域为 $D_{yz} = \{(y, z) | -R \leq y \leq R, -R \leq z \leq R\}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \frac{xydz}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}dydz}{R^2 + z^2} - \iint_{D_{yz}} \frac{-\sqrt{R^2 - y^2}dydz}{R^2 + z^2} \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dydz = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy \int_{-R}^R \frac{dz}{R^2 + z^2} \\ &= \frac{\pi^2}{2} R \quad \text{所以} \quad \text{原积分} = \frac{\pi^2}{2} R \end{aligned}$$

评述 高斯公式、格林公式都是很有用的公式, 但是必须注意条件, 不要犯想当然的错误.

例 34 (95 6 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} zds$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱体 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内的部分.

解 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$

Σ 在 xoy 平面上的投影区记为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$, 则

$$\iint_{\Sigma} zds = \sqrt{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r dr = \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{32}{9}\sqrt{2}.$$

例 35 (96 6 分) 计算曲面积分 $\iint_S (2x + z)dydz + zdx dy$, 其中 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

解 补平面 $S_1: \{(x, y, z) | \begin{matrix} z = 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{matrix}\}$, 则

$$\begin{aligned}
& \iint_S (2x+z)dydz + zdx dy \\
&= \iint_{S+S_1} (2x+z)dydz + zdx dy - \iint_{S_1} (2x+z)dydz + zdx dy \\
&= - \iiint_{\Omega} (2+1)dV + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \\
&= -3 \int_0^1 \pi z dz + \pi = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

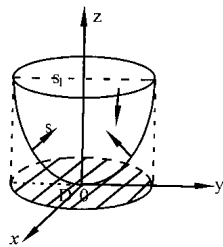


图 6-13

其中 Ω 是 S, S_1 围成的区域, D 是 S_1 在 xoy 平面的投影 (如图 6-13).

评述 为什么用高斯公式转化为三重积分时前面加了负号.

例 36 (98 7 分) 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ 其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧 a 为

大于零的常数.

解 直接计算

$$\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \iint_{\Sigma} \frac{axdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(z+a)^2 dx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

用 D_{xy} 表示下半球面 Σ 在 xoy 平面的投影域 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 用 D_{yz} 表示下半球面 Σ 在 $yo z$ 平面的投影域 $D_{yz} = \{(y, z) | y^2 + z^2 \leq a^2, z \leq 0\}$ (如图 6-14), 则

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \frac{ax}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} dydz &= -2 \iint_{D_{yz}} \frac{a \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}}{a} dydz \\
&= -2 \int_{-\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = -\frac{2}{3} \pi a^3 \\
\iint_{\Sigma} \frac{(z+a)^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} dx dy &= \iint_{D_{xy}} \frac{[a - \sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}]^2}{a} dx dy \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a - \sqrt{a^2 - r^2})^2 r dr \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 + a^2 - r^2 - 2a \sqrt{a^2 - r^2}) r dr = \frac{\pi}{6} a^3
\end{aligned}$$

$$\text{原式} = \frac{\pi}{6} a^3 - \frac{2}{3} \pi a^3 = -\frac{\pi}{2} a^3$$

例 37 (99 7 分) 设 S 为椭圆面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分, 点 $P(x, y, z) \in S$, π 为 S 在点 P 处的切平面,

$\rho(x, y, z)$ 为点 $O(0, 0, 0)$ 到平面 π 的距离, 求 $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$

解 设 (X, Y, Z) 为 π 上的任一点, 则在点 (x, y, z) 处切平面方程为

$$x(X-x) + y(Y-y) + 2z(Z-z) = 0$$

即

$$\frac{x}{2}X + \frac{y}{2}Y + zZ = 1$$

据点到平面的距离公式知

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2}}$$

由

$$Z = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}$$

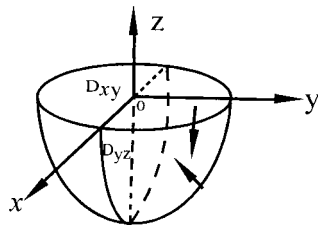


图 6-14

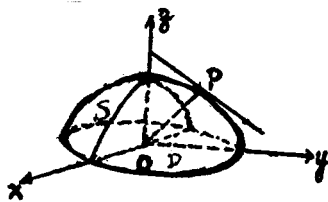


图 6-15

$$dS = \sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2} d\sigma = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}} d\sigma$$

以 D 记 S 在 xoy 平面上投影区域 $D: \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}$ 从而

$$\iint_S \frac{zdS}{\rho(x, y, z)} = \frac{1}{4} \iint_D (4 - x^2 - y^2) d\sigma = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4 - r^2) r dr = \frac{3}{2} \pi$$

评述 点到平面的距离、切平面方程 ... 未必一定直接考,但在多元函数积分学中,却是会碰到的问题.

例 38 (00 7 分) 设有一半径为 R 的球体 P_0 是此球表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例系数 $k > 0$),求球体的重心位置.

解 取球心为原点,原点与 P_0 的连线为 z 轴,则 P_0 的坐标为 $(0, 0, R)$,球面的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,设 Ω 为球体密度 $\rho(x, y, z) = k[x^2 + y^2 + (z - R)^2]$.

设 Ω 的重心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$,由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$,而

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} kz[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dV}{\iiint_{\Omega} k[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dV}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \iiint_{\Omega} [x^2 + y^2 + (z - R)^2] dV &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV - 2R \iiint_{\Omega} z dV + \iiint_{\Omega} R^2 dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \rho^2 \sin\varphi d\rho + \frac{4}{3} \pi R^5 = \frac{32}{15} \pi R^5 \\ \iiint_{\Omega} z[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dV &= -2R \iiint_{\Omega} z^2 dV + \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2 + R^2) dV \\ &= -2R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \sin^2\varphi \rho^2 \sin\varphi d\rho = -\frac{8}{15} \pi R^6 \end{aligned}$$

故 $\bar{z} = -\frac{R}{4}$

由于 Ω 对称于 xoy 平面,而函数 $z(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)$ 对 z 是奇函数,故 $\iiint_{\Omega} z dV = \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2 + R^2) dV = 0$.

例 39 (01 8 分) 设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米,时间单位为小时),已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数为 0.9)问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时?

解 设 V 为雪堆体积, S 为雪堆的侧面积,它们与 $h(t)$ 的关系是

$$V = \iiint_{\Omega} dV = \int_0^{h(t)} dz \iint_{x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}[h^2(t) - h(t)z]} dx dy = \int_0^{h(t)} \pi \frac{1}{2} [h^2(t) - h(t)z] dz = \frac{\pi}{4} h^3(t)$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}h^2(t)} \sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2} dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}h^2(t)} \sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h^2(t)}} d\sigma \\ &= \frac{1}{h(t)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{h^2(t) + 16r^2} r dr = \frac{13\pi h^2(t)}{12} \end{aligned}$$

由题意知 $\frac{dV}{dt} = -0.9S$

即 $\frac{dh}{dt} = -\frac{13}{10}$

$$h(t) = -\frac{13}{10}t + C$$

由 $h(0) = 130$ 得 $C = 130$ 故

$$h(t) = -\frac{13}{10}t + 130$$

令 $h(t) \rightarrow 0$ 时, 得 $t = 100$ (小时).

全部融化需时 100 小时.

例 40 设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 及 $\eta(x, y)$ 在平面区域 B 上有一阶连续偏导数, C 是 B 的边界曲线, 证明

$$\oint_B \left(P \frac{\partial \eta}{\partial x} + Q \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{+C} P \eta dy - Q \eta dx - \iint_B \eta \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\sigma$$

证明 应用格林公式, 闭曲线的积分为

$$\begin{aligned} \oint_{+C} P \eta dy - Q \eta dx &= \iint_B \left[\frac{\partial(P\eta)}{\partial x} - \frac{\partial(-Q\eta)}{\partial y} \right] d\sigma = \iint_B \left[\eta \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta \frac{\partial Q}{\partial y} + Q \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] d\sigma \\ &= \iint_B \left(P \frac{\partial \eta}{\partial x} + Q \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_B \eta \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\sigma \end{aligned}$$

移项就得到了所要证的公式. (这个公式和定积分的分部积分公式相似, 值得注意.)

例 41 求一均匀球面对不在球面上的质点(质量为 m) 的引力.

解 取球心为坐标原点, 球心至质点的方向为 z 轴正向, 设球半径为 R , 则质点的坐标为 $(0, 0, a)$ ($a > 0, a \neq R$). 在球面上任取一微元 $d\tau$, 设 (x, y, z) 是 $d\tau$ 上的一点, 则 $d\tau$ 对质点的引力是

$$dF = \frac{\mu m \rho d\tau}{x^2 + y^2 + (z - a)^2} \cdot \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - a)\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}$$

其中 μ 是万有引力系数, ρ 是面密度.

由于对称的关系, 不难看出 $F'_x = F'_y = 0$, 而

$$F'_z = \iint_K \frac{\mu m \rho (z - a)}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{3/2}} d\tau = \iint_K \frac{\mu m \rho (z - a)}{[x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2]^{3/2}} d\sigma$$

这里 K 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 解得 $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. 分成上、下两个半球面分别计算, 先变为二重积分, 再采用极坐标, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_B \frac{\mu m \rho (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - a)}{(R^2 - 2a\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + a^2)^{3/2}} \frac{R d\sigma}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ &\quad + \iint_B \frac{\mu m \rho (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - a)}{(R^2 + 2a\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + a^2)^{3/2}} \frac{R d\sigma}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ &= \mu m \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(\sqrt{R^2 - r^2} - a)}{(R^2 - 2a\sqrt{R^2 - r^2} + a^2)^{3/2}} \frac{R r dr d\sigma}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ &\quad + \mu m \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(-\sqrt{R^2 - r^2} - a)}{(R^2 + 2a\sqrt{R^2 - r^2} + a^2)^{3/2}} \frac{R r dr d\sigma}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ &= -\mu m \rho \frac{\pi R}{a^2} \left(2R - \frac{R^2 - a^2}{|R - a|} - |R - a| \right) \quad (B: x^2 + y^2 \leq R^2) \end{aligned}$$

分两种情况讨论:

(1) 质点在球内, 此时 $a < R$, $|R - a| = R - a$, 则 $F'_z = 0$

(2) 质点在球外, 此时 $a > R$, $|R - a| = a - R$, 则

$$F'_z = -\frac{\mu m 4\pi R^2 \rho}{a^2} = -\frac{\mu m M}{a^2}$$

这里 $M = 4\pi R^2 \rho$ 正是均匀球面的全部质量. 这说明: 凡在均匀球面里面的点 ($a < R$), 都不承受球面对它的引力, 而外面的点 ($a > R$), 所承受的引力与全部球面质量集中于球心时对该质点的引力一样.

例 42 计算曲面积分 $\iint_K x^2 z \cos \gamma d\tau$, 其中曲面 K 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的下半部, γ 是 K 向上的法线正向与 oz 轴正向的夹角.

解 根据两种曲面积分之间的关系

$$\iint_K x^2 z \cos \gamma d\tau = \iint_K x^2 z dx dy$$

可采用两种解法:

(1) 直接计算 K 的方程是 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ K 在 XOY 平面的投影是 B $x^2 + y^2 \leq a^2$,于是

$$\begin{aligned}\iint_K x^2 z dx dy &= \iint_K x^2 (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) d\sigma = - \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \cos^2 \theta \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 \sqrt{a^2 - r^2} dr = - \frac{2}{15} \pi a^5\end{aligned}$$

(2) 作补充平面 $K_1: \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \leq a^2 \end{cases}$ 再由高斯公式

$$\begin{aligned}\iint_K x^2 z dx dy &= \iint_K x^2 z dx dy + \iint_{K_1} x^2 z dx dy - \iint_{K_1} x^2 z dx dy \\ &= - \iiint_G x^2 dv - \iint_B 0 d\sigma = - \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^a \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = - \frac{2}{15} \pi a^5\end{aligned}$$

典型题型 4. 场论

例 43 向量场 $U(x, y, z) = xy^2 \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j} + x \ln(1 + z^2) \mathbf{k}$ 在点 $P(1, 1, \rho)$ 处的散度 $\text{div} \vec{u} =$ _____.

解 由散度公式 $\vec{u} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$

$$\text{div} \vec{u} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y^2 + e^x + \frac{2zx}{1 + z^2}$$

$$\text{div} \vec{u} \Big|_P = 1 + 1 = 2$$

应填 2.

例 44 (93 3 分) 设数量场 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 则 $\text{div}(\text{grad} u) =$ _____.

解 $\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$

$$\text{div}(\text{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

由于 $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\text{知} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

类似可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

故

$$\text{div}(\text{grad} u) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

应填 $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

例 45 (98 6 分) 确定常数 λ ,使在右半平面 $x > 0$ 上的向量 $\vec{A}(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{j}$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度. 求 $u(x, y)$.

分析 平面单连通域内向量场 $\vec{A}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 为梯度的充要条件是 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 利用此式确

定 λ ,然后进一步求出 $u(x, y)$

解 $P(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda, \quad Q(x, y) = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 2xy\lambda(x^4 + y^2)^{\lambda-1} 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x(x^4 + y^2)^\lambda - x^2\lambda(x^4 + y^2)^{\lambda-1} 4x^3$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$,有

$$4x(x^4 + y^2)^\lambda(\lambda + 1) \equiv 0$$

从而可知 $\lambda = -1$ 在 $x > 0$ 处取点 $(1, 0)$ 则

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{2xydx - x^2dy}{(x^4 + y^2)} + C = \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0} dx - \int_0^y \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy + C \\ &= -\operatorname{arctg} \frac{y}{x^2} + C \end{aligned}$$

评注 在 X, Y 及其偏导数连续的条件下, 以下的结论是互为充要条件的

(1) $\int_l Xdx + Ydy$ 与路径无关;

(2) $\frac{\partial X}{\partial y} \equiv \frac{\partial Y}{\partial x}$

(3) $Xdx + Ydy$ 是全微分, 即存在 $F(x, y)$ 使

$$dF(x, y) = Xdx + Ydy \quad \text{而}$$

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Xdx + Ydy$$

本题是情况(3)在论题中的说法. 从这里也可看到, 曲线积分理论丰富多采, 应用广泛.

例 46 (01 3 分) 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) \Big|_{(1, 2, 2)} =$ _____.

$$\text{解} \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} r) = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{z^2 + x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) \Big|_{(1, 2, 2)} = \frac{2}{3}$$

应填 $\frac{2}{3}$.

典型题型 5. 利用三大公式, 巧妙地处理理论、计算与应用问题

例 47 (01 7 分) 计算 $\oint_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$ 其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向.

分析 首先, 选择什么方法计算, 直接计算还是利用斯托克斯公式?

1) 若直接计算, 交线方程是 $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$ 为了去掉绝对值, 要分四个部分分别表示, 譬如: 当 $x \geq 0, y \geq 0$ 应当是 $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 也就是 $\begin{cases} y = 1 - x \\ z = 1 \end{cases}$, 而当 $x \leq 0, y \geq 0$ 应当是 $\begin{cases} y = 1 + x \\ z = 1 - 2x \end{cases}$ 直接计算没有什么困难, 但相当繁琐且易出错.

2) 用斯托克斯公式, 有一点需注意, 积分曲面在 xoy 面的投影是清楚的, 但在 $yozy, zox$ 平面上的投影并不清晰, 所以最好把第二型曲面积分转化为第一型曲面积分, 都投影到 xoy 平面进行计算 (若学过斯托克斯公式在第一型曲面积分下的表达式, 则直接用这一公式).

下面用 2) 的方法计算.

解 记 S 为平面 $x + y + z = 2$ 上 L 所围成的部分的上侧, 它的方向余弦 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ D 是 S

在 xoy 坐标面上的投影如图 6 - 16, 由斯托克斯公式

$$\begin{aligned}
 & \oint_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz = \iint_S (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 2y)dxdy \\
 & = \iint_S (-2y - 4z) \frac{1}{\sqrt{3}}ds + (-2z - 6x) \frac{1}{\sqrt{3}}ds + (-2x - 2y) \frac{1}{\sqrt{3}}ds \\
 & = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (4x + 2y + 3z)ds = -2 \iint_D (x - y + 6)d\sigma \\
 & = -2 \iint_D x d\sigma + 2 \iint_D y d\sigma - 12 \iint_D d\sigma \\
 & = 0 + 0 - 12(\sqrt{2})^2 = -24.
 \end{aligned}$$

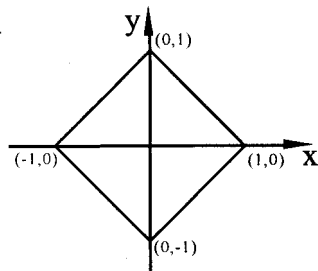


图 6 - 16

由于 D 对 y 轴对称, 被积函数 x 对 x 是奇函数, 故 $\iint_D x d\sigma = 0$, 由于 D 对 x 轴对称, 被积函数 y 对 y 是奇函数

$$\text{故 } \iint_D y d\sigma = 0.$$

例 48* 设 $F(x, y, z)$ 二阶连续可导, 且满足

$$F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz} = 0$$

证明

$$\iiint_G \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] dv = \iint_K F \frac{\partial F}{\partial n} d\tau$$

这里 G 是光滑封闭曲面 K 所围成的区域, $\frac{\partial F}{\partial n}$ 是 F 在曲面 K 上沿向外法线方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

分析 由于涉及三重积分与其界面的曲面积分的关系, 因而容易联想到用高斯公式来解决, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 表示曲面外法线的方向余弦, 于是便有

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos\gamma$$

应该怎样推导就清楚了.

$$\text{证明} \quad \iint_K F \frac{\partial F}{\partial n} d\tau = \iint_K F \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos\gamma \right) d\tau = \iint_B F \frac{\partial F}{\partial x} dydz + F \frac{\partial F}{\partial y} dzdx + F \frac{\partial F}{\partial z} dxdy$$

应用奥 - 高公式就得到

$$\begin{aligned}
 \iint_K F \frac{\partial F}{\partial n} d\tau &= \iiint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(F \frac{\partial F}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(F \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right] dv \\
 &= \iiint_G \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) F dv + \iiint_G \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] dv \\
 &= \iiint_G \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] dv
 \end{aligned}$$

(因 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$, 故前一积分为零.)

例 49 设函数 $X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)$ 有连续的二阶偏导数, K 是任何的闭合光滑曲面, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是曲面法线的方向余弦, 证明

$$\oint_K \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] d\tau = 0$$

证明 设 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是曲面 K 的向外方向余弦, 则有

$$\begin{aligned}
 \oint_K \dots &= \oint_K \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy \\
 &= \iiint_G \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} \right) dv = \iiint_G 0 dv
 \end{aligned}$$

这里 G 是 K 所围成的空间区域. 由于函数的二阶偏导数连续, 故 $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}, \dots$

如设 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是内法线的方向余弦, 则 $-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma$ 是外法线的方向余弦, 对它们等式成

立,将负号提出,积分仍然等于零.

例 50* 设 $\varphi(y)$ $\psi(y)$ 二阶连续可导,曲线积分

$$\oint_C [2[x\varphi(y) + \psi(y)]dx + [x^2\psi(y) + 2xy^2 - 2x\varphi(y)]dy = 0$$

这里 C 是平面上任意一条连续封闭曲线.

(1) 确定 $\varphi(y)$ 与 $\psi(y)$ 假定 $\varphi(0) = -1$ $\psi(0) = -2$;

(2) 对确定的 $\varphi(y)$ 与 $\psi(y)$, 计算沿任何一条曲线从 $(0, 0)$ 到 $(\pi, \frac{\pi}{2})$ 的积分.

解(1) 由于 $\oint_C \dots = 0$, 即曲线积分与路径无关, 故

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

也就是

$$2[x\varphi'(y) + \psi'(y)] = 2x\psi'(y) + 2y^2 - 2\varphi(y)$$

故需要

$$\begin{cases} \varphi'(y) = \psi(y) \\ \psi'(y) = y^2 - \varphi(y) \end{cases}$$

求得

$$\varphi''(y) = \psi'(y) = y^2 - \varphi(y)$$

这是二阶常系数线性非齐次方程, 求解得

$$\varphi(y) = C_1 \cos y + C_2 \sin y + y^2 - 2, \quad \varphi(0) = C_1 - 2 = -2$$

得 $C_1 = 0$, 而

$$\psi(y) = \varphi'(y) = C_2 \cos y + 2y$$

再由

$$\psi(0) = C_2 = 1$$

最后得到

$$\varphi(y) = \sin y + y^2 - 2, \quad \psi(y) = \cos y + 2y$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{(0,0)}^{(\pi, \frac{\pi}{2})} \dots &= \int_0^\pi 2[x\varphi(0) + \psi(0)]dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\pi^2\psi(y) + 2\pi y^2 - 2\pi\varphi(y)]dy \\ &= \int_0^\pi (2 - 4x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\pi^2 \cos y + 2\pi^2 y - 2\pi \sin y + 4\pi]dy \\ &= \pi^2 + \frac{\pi^4}{4} \end{aligned}$$

例 51* 计算

$$\oint_C 2ydx - zdy - xdz \quad C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + z = R \end{cases}$$

C 的方向由 x 轴的正向看去 (即人头与 x 轴的正向一致) 是逆时针的.

解 本题有两个解法, 一是直接计算, 二是用斯托克斯公式计算, 分述如下:

(1) 直接计算 将 $z = R - x$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 得 $2x^2 - 2Rx + y^2 = 0$ 即 $(x - \frac{R}{2})^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{R^2}{4}$, 故 C

式可改写为

$$\begin{cases} \frac{(x - \frac{R}{2})^2}{\frac{R^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{2}} = 1 \\ z = R - x \end{cases}$$

于是, 引入参数 t 可写为参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{R}{2}(1 + \cos t) \\ y = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t \\ z = \frac{R}{2}(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \oint_C 2ydx - zdy - xdz &= \int_0^{2\pi} \left[2 \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t \left(-\frac{R}{2} \sin t \right) - \frac{R}{2} (1 - \cos t) \frac{R}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{R}{2} (1 + \cos t) \frac{R}{2} \sin t \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R^2}{\sqrt{2}} \sin^2 t + \frac{R^2}{2\sqrt{2}} \cos^2 t \right] dt = -\frac{R^2}{\sqrt{2}} \pi + \frac{R^2}{2\sqrt{2}} \pi = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} R^2 \end{aligned}$$

(2) 用斯托克斯公式计算 在基本理论部分写出的斯氏公式是对坐标的曲面积分,但也可转化为对面积的曲面积分

$$\begin{aligned} \oint_C Xdx + Ydy + Zdz &= \iint_K \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_K \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\tau \end{aligned}$$

于是

$$\oint_C 2ydx - zdy - xdz = \iint_K [\cos \alpha + \cos \beta - 2\cos \gamma] d\tau$$

由公式规定的方向,这里选 K 为平面被球面所截下来的哪一部分, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \beta = 0, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, K 是圆域,半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}R$,故

$$\oint \dots = \iint_K \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) d\sigma = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_K d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} R \right)^2 = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} R^2$$

评述 在解法二中,有几点值得注意:

(1) 选用两种类型的曲面积分都可以,但以本题而论,已经看到积分号下将出现常数,故选用对面积的曲面积分为宜.

(2) 积分曲面 K 是选平面还是选球面被平面割下的那一部分?理论上讲,都是可以的,本题如选球面,那么 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 不是常数,计算要繁一些.

(3) 为什么圆域的半径是 $\frac{1}{\sqrt{2}}R$? 猜计算一下.

(4) 从本题可以看到,一般来说,用斯氏公式计算曲线积分未必方便.但斯氏公式在理论上是重要的.而在例30那样的题目中,用斯氏公式则较为方便.

例52* 计算曲线积分 $\oint_L \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}$ 其中 L 是椭圆 $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的正向.

分析 由于 $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2}$, 但 $X, Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}$ 在 $(1, 0)$ 不连续,据例26的分析,此题计算不难.

解 令 L_1 表示圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 即 $x = 1 + \cos t, y = \sin t$ (t 从 $0 \rightarrow 2\pi$), 于是

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} &= \oint_{L_1} \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \sin t (-\sin t) dt - \cos t \cos t dt \\ &= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi \end{aligned}$$

例53* 计算 $\int_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ 其中 C 由 $A(\pi, -\pi)$ 经 $y = \pi \cos x$ 到 $B(-\pi, \pi)$.

解 $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, 但在原点没有意义,令 $C_1: \begin{cases} x = \sqrt{2}\pi \cos t \\ y = \sqrt{2}\pi \sin t \end{cases}$ (t 从 $-\frac{\pi}{4}$ 到 $\frac{5\pi}{4}$),

显然 $t = -\frac{\pi}{4}$ 时 C_1 过 A , $t = \frac{5\pi}{4}$ 时 C_1 过 B , 而 $x^2 + y^2 = 2\pi^2$, 于是

$$\begin{aligned} \int_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} &= \int_{C_1} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\pi \sin t (-\sqrt{2}\pi \sin t) dt - \sqrt{2}\pi \cos t \sqrt{2}\pi \cos t dt}{2\pi^2} \\ &= -\frac{2\pi^2}{2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -\frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

评述 为什么煞费苦心选这一条曲线呢?为什么不能选直线 $y = \pi(x \text{ 从 } \pi \rightarrow -\pi)$ 呢?

例 54 计算 $\iint_S x^2 z dx dy + y^2 x dy dz + z^2 y dz dx$ S 是球面前半部分的内侧 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2; x \geq 0$.

分析 显然补平面 $S_1: \left\{ (x, y, z) \mid \begin{matrix} x = 0 \\ y^2 + z^2 \leq R^2 \end{matrix} \right\}$ 然后用高斯公式.

解
$$\begin{aligned} \iint_S x^2 z dx dy + y^2 x dy dz + z^2 y dz dx &= \iint_{S+S_1} x^2 z dx dy + y^2 x dy dz + z^2 y dz dx - \iint_{S_1} x^2 z dx dy + y^2 x dy dz + z^2 y dz dx \\ &= - \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV + 0 = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \sin\varphi d\rho \\ &= - \pi \frac{2}{5} R^5 = - \frac{2}{5} \pi R^5 \end{aligned}$$

例 55 (04, 12 分) 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy,$$

其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

解 取 Σ_1 为 xoy 平面上被圆 $x^2 + y^2 = 1$ 所围部分的下侧, 记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域, 则

$$I = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy - \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy.$$

由高斯公式知

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy &= \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (z + r^2) dz \\ &= 12\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{2} r (1 - r^2)^2 + r^3 (1 - r^2) \right] dr = 2\pi. \end{aligned}$$

$$\text{而 } \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-3) dx dy = 3\pi,$$

因此 $I = 2\pi - 3\pi = -\pi$.

例 56 以 $\rho(x, y, z)$ 表示从原点到椭球面 $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 任一点 $P(x, y, z)$ 的切平面的距离, 求

$$\iint_S \rho(x, y, z) dS$$

解 过点 $P(x, y, z)$ 切平面的方程是

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1$$

由点到平面距离的公式

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

于是

$$\iint_S \rho(x, y, z) dS = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

由于被积函数及积分区域的对称性, 上述积分等于在上半个椭球面上积分的二倍, 以 S_1 记上半个椭球面,

D 记 S_1 在 xoy 面上的投影 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, 因

$$\sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^2} + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^2}} = \frac{c^2}{z} \sqrt{\frac{z^2}{c^4} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

故

$$\begin{aligned}\iint_S \rho(x, y, z) dS &= 2 \iint_S \rho(x, y, z) dS = 2 \iint_D \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \frac{c^2}{z} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} d\sigma \\ &= 2c^2 \iint_D \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} d\sigma\end{aligned}$$

用椭圆极坐标, 令 $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, 就得到

$$\iint_S \rho(x, y, z) dS = 2c \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} ab r dr = 4abc\pi$$

例 57 计算 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{[(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2]^n}$ ($\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$) 其中 L 是椭圆 $(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 = 1$ 的正向.

解 由于 $(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 = 1$ 因而引入参数 t 令

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \cos t \\ \gamma x + \delta y = \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

又因 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ 故 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ 如令 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \frac{1}{a}$ 则可解得

$$x = a(\delta \cos t - \beta \sin t), \quad y = a(\alpha \sin t - \gamma \cos t)$$

代入积分得

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{[(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2]^n} = \int_0^{2\pi} a(\delta \cos t - \beta \sin t) da(\alpha \sin t - \gamma \cos t) - a(\alpha \sin t - \gamma \cos t) da(\delta \cos t - \beta \sin t)$$

有些项的积分容易判断是零, 整理后得到

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} a^2 (\alpha \delta \cos^2 t - \beta \gamma \sin^2 t + \alpha \delta \sin^2 t - \beta \gamma \cos^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (\alpha \delta - \beta \gamma) dt = 2\pi a.$$

预测·强化训练六

1. 设 L 为正向的圆周 $x^2 + y^2 = 9$, 计算曲线积分 $\oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy$ 的值.
2. 设平面曲线 L 为下半圆 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\oint_L (x^2 + y^2)dS$ 的值是多少?
3. 向量场 $\vec{u}(x, y, z) = xy^2\vec{i} + ye^z\vec{j} + x\ln(1+x^2)\vec{k}$ 在点 $p(1, 1, \rho)$ 处的散度 $\text{div} \vec{u}$ 等于什么值?
4. 计算曲线积分 $\int_C xdy - ydx$. C 是沿曲线 $y = |\sin 2x|$ 上从点 $(0, \rho)$ 到点 (π, ρ) 的一段.
5. 计算 $\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$

其中 C 是曲线 $2x = \pi y^2$ 上从点 $(0, \rho)$ 到点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧.

6*. 若已知连续可微函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(0) = -2$, 且能使 $\int_C (y \sin 2x - y\varphi(x) \lg x)dx + \varphi(x)dy$ 与路径无关.

1) 求函数 $\varphi(x)$;

2) 计算 $\int_{(0, \rho)}^{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})} (y \sin 2x - y\varphi(x) \lg x)dx + \varphi(x)dy$.

7*. 分别计算沿下列曲线正向回路的曲线积分:

$$\oint_{\Gamma-C} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$$

1) $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 2) $C: |x| + |y| = 1$

8. 证明: 如 $f(u)$ 为连续可导函数, 则沿光滑的任意闭路 C 的曲线积分

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0$$

9*. 计算曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,\rho)} \left(2e^{2x}\sin y - x - \frac{y}{2} \right) dx + (e^{2x}\cos y - e^{\sin y}) dy$$

其中积分路线 $C: x^2 + y^2 = x \quad (y \geq 0)$.

10*. 计算 $\oint_{+C} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 $C: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1/\pi^{\frac{2}{3}}$.

11. 计算 $\int_C \frac{(x-c)dx + ydy}{[(x-c)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$ ($c > 0$) C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($c \neq a$) 在第一象限由 $(a, 0)$ 到 $(0, b)$ 的弧.

12*. 计算 $\int_{AOB} (12xy + e^y)dx + (xe^y - \cos y)dy$ 其中 $\widehat{AOB}$ 为由点 $A(-1, 1)$ 沿曲线 $y = x^2$ 到点 $O(0, 0)$, 再沿直线 $y = 0$ 到点 $B(2, 0)$.

13*. 若对平面上任何按段光滑的封闭曲线 C , 恒有

$$\oint_C 2xyf(x^2)dx + [f(x^2) - x^4]dy = 0$$

这里 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内有连续的一阶导数, 且 $f(0) = 2$, 试确定 $f(x)$, 并计算

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} 2xyf(x^2)dx + [f(x^2) - x^4]dy$$

14*. 计算 $\oint_C x^2 y dz + (x^2 + y^2)dy + (x + y + 1)dz$

其中 C 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ 与曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 的交线 (C 的方向可任选).

15*. 计算曲线积分 $\oint_C (y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz$, 其中 C 为圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 若从 x 轴正向看去是逆时针的.

16. 证明下面的曲线积分与路径无关, 并计算

$$\int_{(1,1,1)}^{(1,1,\sqrt{3})} \frac{yzdx + xzdy + xydz}{1 + x^2 y^2 z^2}$$

17. 设 C 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则 $\oint_{C^+} (y^4 + yx)dx + (x^2 y + x)dy =$ _____.

18. 设 $u = x^2 + y^2 + z^2$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$ _____.

19*. 设 S 是平面 $x + y + z = 4$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 截出的有限部分, 则曲面积分 $\iint_S y ds$ 的值是().

(A) 0 (B) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) π

20. 计算 $\int_C \sqrt{2y^2 + z^2} dS$, $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases}$.

21*. 计算 $\int_C |y| dS$, C 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

22*. 计算 $\oint_{+C} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, 其中 C 是以 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$ 为顶点的正方形闭路.

23*. 求曲线积分 $I = \oint_l \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ 的值, 其中 l 为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 的正向.

24. 计算 $\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ 如从 x 轴正向看去, C 的方向为逆时针方向.

25. 计算曲面积分

$$\iint_K 4xyz dydz - 2yz dx + (1 - z^2) dx dy$$

其中 K 是 $z = e^y$ ($0 \leq y \leq a$) 绕 z 轴旋转成曲面的下侧.

26*. 计算 $\iint_K (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS$ 其中 K 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是球面外法线的方向余弦.

27*. 计算 $\iint_K x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ 其中 K 是由 $x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $x = 1, y = 1, z = 1$ 所围成的立方体的表面内侧.

28*. 计算曲面积分 $\iint_K |xyz| d\tau$ 其中 K 是 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 所割下的有限部分.

29. 计算 $\iint_K y^2 z dx dy + x^2 y dz dx$ 其中 K 是第一卦限内抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧.

30*. 计算 $\iint_K y^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ 其中 K 是上半球面 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 (z \geq c)$ 的上侧.

31*. 设 $f(u)$ 有连续的二阶导数, 计算

$$\oint_{+K} \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) dy dz + \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) dz dx + z dx dy$$

其中 K 是由 $y^2 = x^2 + z^2, y = 8 - x^2 - z^2$ 所围成的立体的表面.

32. 计算 $\iint_K \sqrt{x^2 + y^2} e^z (dz dx + dx dy + dy dz)$ K 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1, z = 2$ 所围成的立体的表面外侧.

33. 设 $X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)$ 都有连续的一阶偏导数, 证明对任何的按块光滑的闭合曲面 K , 都有

$$\iint_K X dy dz + Y dz dx + Z dx dy = 0$$

的充要条件是 $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$

34. 质量曲面 K 是半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 在锥 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 里面的部分, 如果 K 上每点的密度等于该点到 xoy 平面的距离的倒数, 试求 K 的质量.

35. 求质量均匀分布的球面 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$ 对原点的转动惯量.

36. 计算 $\oint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ 其中 Σ 是 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ 的外侧.

37. 设曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 其面密度为常数 μ , 试求该曲面在 $0 \leq z \leq \frac{3}{2}$ 部分的质量中心.

简明解答

1. $L: x = 3 \cos t, y = 3 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$

$$\int_L (2xy - 2y) dx + (x^2 - 4x) dy = \int_0^{2\pi} (9 \cos t \sin t - 6 \sin t)(-3 \sin t) dt + (9 \cos^2 t - 12 \cos t) \cos t dt = -18\pi$$

2. $x = \cos t, y = \sin t (\pi \leq t \leq 2\pi)$

$$\int_L (x^2 + y^2) dS = \int_{\pi}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_{\pi}^{2\pi} dt = \pi$$

3. $\operatorname{div} \vec{u} = 2$

$$4. \int_C x dy - y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos 2x dx - \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-2x \cos 2x) dx + \sin 2x dx = -4$$

5. $\frac{\partial X}{\partial y} = 6xy^2 - 2y \cos x = \frac{\partial Y}{\partial x}$ 积分与路径无关可沿折线从 $(0, \rho)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, \rho)$ 再到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$

$$\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy = 0 + \int_0^1 (1 - 2y + 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y^2) dy = \frac{\pi^2}{4}$$

6. $\frac{\partial X}{\partial y} = \sin 2x - \varphi(x) \operatorname{tg} x = \varphi'(x) = \frac{\partial Y}{\partial x}$ 解微分方程得 $\varphi(x) = -2 \cos^2 x + C, \varphi(0) = -2$ 得

$$1) \varphi(x) = -2\cos^2 x$$

$$2) \text{原式} = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-2\cos^2 \frac{\pi}{4} \right) dy = -\frac{\pi}{4}.$$

$$7. \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

$$1) C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$\oint_{+C} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$2) C: |x| + |y| = 1, \text{令 } C_1: x = \cos t, y = \sin t.$$

$$\oint_{+C} = \oint_{+C_1} = \int_0^{2\pi} -(\cos t - \sin t)\sin t dt + (\cos t + \sin t)\cos t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

2) 出现了有“洞”的情况, 参看例 26、38 的分析与作法.

$$8. \text{因为 } \frac{\partial Y}{\partial x} = 2xyf(x^2 + y^2) = \frac{\partial X}{\partial y} \text{ 积分与路径无关, 从而沿任何闭合曲线 } C \text{ 积分为零.}$$

$$9. \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{记 } O(0, \rho), A(1, \rho)$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_C + \int_{AO} + \int_{OA} = - \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) d\sigma + \int_{OA} = - \frac{1}{2} \iint_D d\sigma + \int_0^1 (-x) dx \\ &= - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} = - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$10. \text{由于 } \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-2xy - y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial y}, \text{令 } C_1: \begin{cases} x = \frac{1}{\pi} \cos t \\ y = \frac{1}{\pi} \sin t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \oint_{+C_1} = \int_0^{2\pi} \pi^2 \left[\left(\frac{1}{\pi} \cos t - \frac{1}{\pi} \sin t \right) \left(-\frac{1}{\pi} \sin t \right) dt + \left(\frac{1}{\pi} \cos t + \frac{1}{\pi} \sin t \right) \left(\frac{1}{\pi} \cos t \right) dt \right] \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi \end{aligned}$$

$$11. \text{由于 } \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ 故可改为沿折线积分, 从 } (a, \rho) \text{ 经 } (a, b) \text{ 到 } (0, b).$$

$$\int_C = \int_0^b \frac{y dy}{[(a - \bar{c})^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \int_a^0 \frac{(x - \bar{c}) dx}{[(x - \bar{c})^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{|a - \bar{c}|} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + \bar{c}^2}}.$$

沿折线积分, 不宜从 (a, ρ) 经 $(0, \rho)$ 到 $(0, b)$, 为什么?

12. 此题看似简单, 但直接计算 $y = x^2$ 代入会出现 e^{x^2} , 只好另辟蹊径. 以 C 表示点 $(2, 1)$, 现在补两折线 $\overline{AC}$ 、 $\overline{CB}$ 利用格林公式计算.

$$\begin{aligned} \int_{AOB} (12xy + e^y) dx + (xe^y - \cos y) dy &= \int_{AOB} + \int_{AC} + \int_{CB} - \int_{AC} - \int_{CB} = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) d\sigma - \int_{AC} - \int_{CB} \\ &= \iint_D (-12x) d\sigma - \int_0^1 (2e^y - \cos y) dy - \int_2^{-1} (12x + e) dx \\ &= \sin 1 - e - 1 \end{aligned}$$

这里 D 由 $y = x^2$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 2$ 围成.

$$13. \text{由于 } \frac{\partial Y}{\partial x} = 2xf(x^2) - 4x^3 = 2xf(x^2) = \frac{\partial X}{\partial y}, f(u) \text{ 应满足微分方程 } f(u) - f'(u) - 2u = 0 \text{ 及 } f(0) = 2 \text{ 由此}$$

可解得

$$f(x) = -2(x+1) + e^x$$

$$\int_{(0, \rho)}^{(1, 2)} 2xyf(x^2) dx + [f(x^2) - x^4] dy = \int_{(0, \rho)}^{(1, \rho)} + \int_{(1, \rho)}^{(1, 2)} = \int_0^2 (f(1) - 1) dy = 2(e - 5)$$

$$14. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ z = x^2 + y^2 + 1 \end{cases} \text{解得 } z = 2, \text{于是曲线方程为 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases} \text{写成参数方程 } \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \text{如选方向为 } t = 0 \text{ 到 } t = 2\pi \text{ 则}$$

$$= 2\pi \text{ 则}$$

$$\oint_C 2\cos^2 t \sin t (-\sin t) dt + \cos t dt = -\frac{\pi}{2} = \int_0^{2\pi} (-2\cos^2 t \sin^2 t + \cos t) dt = -\frac{\pi}{2}.$$

15. 以 S 记 $x + y + z = 0$ 在 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 内的部分, 据斯托克斯公式

$$\begin{aligned} \oint_C (y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz &= - \iint_S dydz + dzdx + dxdy \\ &= - \left[\iint_{y^2+z^2+yz \leq \frac{R^2}{2}} d\sigma + \iint_{x^2+z^2+xz \leq \frac{R^2}{2}} d\sigma + \iint_{x^2+y^2+xy \leq \frac{R^2}{2}} d\sigma \right] \\ &= -\sqrt{3}\pi R^2 \end{aligned}$$

16. 由于 $\text{darctg}(xyz) = \frac{yzdx + zxdy + xydz}{1 + x^2y^2z^2}$ 故积分与路径无关, 且有

$$\int_{(1,1,1)}^{(1,1,\sqrt{3})} \frac{yzdx + zxdy + xydz}{1 + x^2y^2z^2} = \text{arctg}(xyz) \Big|_{(1,1,1)}^{(1,1,\sqrt{3})} = \frac{\pi}{12}$$

17. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 代入得 πab

18. 6

19. (A)

20. 用参数方程表示 C $x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t$, $y = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t$, $z = a\sin t$

$$\int_C \sqrt{2y^2 + z^2} dS = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = a^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^2$$

21. 以 C_1 记 C 在第一象限的部分, 由对称性 $\int_C |y| dS = 4 \int_{C_1} y dS$

双纽线方程在极坐标下是 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $r' = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{r}$

$$r^2 + r'^2 = a^2 \cos 2\theta + \frac{a^4 \sin^2 2\theta}{a^2 \cos 2\theta} = a^2 \frac{1}{\cos 2\theta}$$

$$\begin{aligned} \int_C |y| dS &= 4 \int_{C_1} y dS = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \frac{\sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \\ &= 4a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2a^2 (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

22. 此一正方形, 它的边界方程是 $|x| + |y| = 1$, 在一、二、三、四象限分别表示为 $x + y = 1$, $-x + y = 1$, $-x - y = 1$, $x - y = 1$, 将方程分四段代入

$$\oint_{\partial C} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0 + \int_0^{-1} 2dx + 0 + \int_0^1 2dx = -2 + 2 = 0$$

23. 因 $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$

1) 原点不包含在圆周内 $\oint_{\Gamma_+} = 0$

2) 原点包含在圆周内, 令 l_1 $x = \cos t$, $y = \sin t$

$$\oint_{l_+} = \oint_{l_1} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -2\pi$$

3) 原点在圆周上, 积分无意义.

24. 将 C 改写为参数方程 $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1 - \cos t$

$$\begin{aligned} \oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz \\ = \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t - 1)(-\sin t) dt + (1 - 2\cos t)\cos t dt + (\cos t - \sin t)\sin t dt = -4\pi \end{aligned}$$

25. 补 S $z = e^a$ 方向向上, 用高斯公式

$$\begin{aligned}\iint_K 4xzdydz - 2zydzdx + (1 - z^2)dx dy &= \iint_K + \iint_S - \iint_S = \iiint_\Omega (4z - 2z - 2z)dv - \iint_S \\ &= - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (1 - e^{2a})dx dy = (e^{2a} - 1)\pi a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}26. \iint_K (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS &= \iint_K x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = 3 \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dv \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^a \rho^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{12}{5} \pi a^5\end{aligned}$$

$$27. \iint_K x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = - \iiint_G 2(x + y + z)dv = - \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 2(x + y + z)dz = -3$$

28. 以 K_1 表示 K 在第一卦限内的部分

$$\begin{aligned}\iint_K |xyz| d\tau &= 4 \iint_{K_1} xyz d\tau = 4 \iint_{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} xy(x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta r^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}\end{aligned}$$

29. 补三块平面 K_1, K_2, K_3 (如图 6-17)

$$\begin{aligned}\iint_K y^2 z dx dy + x^2 y dz dx &= \iint_K + \iint_{K_1} + \iint_{K_2} + \iint_{K_3} - \iint_{K_1} - \iint_{K_2} - \iint_{K_3} \\ &= \iiint_G (y^2 + x^2) dV - 0 - 0 - \iint_{K_3} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 r^2 r dz - \iint_{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} y^2 dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 (1 - r^2) dr - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta r dr = -\frac{\pi}{48}\end{aligned}$$

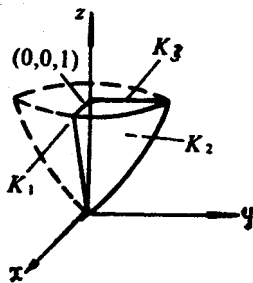


图 6-17

不嫌烦补上三块平面再用高斯公式,是因为在这三块平面上,曲面积分都很简单.

30. K_1 表示 $z = c, (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ 的下侧,则

$$\begin{aligned}\iint_K x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy &= \iint_K + \iint_{K_1} - \iint_{K_1} = \iiint_G 3(x + y + z) dV + \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} c^2 dx dy \\ &= \iiint_G 3(x + y + z) dV + c^2 \pi R^2\end{aligned}$$

令 $x - a = \rho \sin \varphi \cos \theta, y - b = \rho \sin \varphi \sin \theta, z - c = \rho \cos \varphi$ 则

$$\begin{aligned}\iiint_G 3(x + y + z) dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R 3[\rho \sin \varphi \cos \theta + \rho \sin \varphi \sin \theta + \rho \cos \varphi + a + b + c] \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \frac{4}{3} \pi R^2 (a + b + c) + \frac{1}{4} R^4\end{aligned}$$

$$\text{原式} = \frac{4}{3} \pi R^3 (a + b + c) + \frac{1}{4} R^4 + \pi R^2 c^2$$

$$31. \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{y} + \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) \left(-\frac{x}{y^2}\right) + 1 = 1$$

以 G 表示 $y^2 = x^2 + z^2, y = 8 - x^2 - y^2$ 所围成的区域,则

$$\oint_{\partial K} \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) dydz + \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) dzdx + z dx dy = \iiint_G dV = 16\pi.$$

32. 由 G 表示 K 的曲面所围成的空间区域

$$\begin{aligned}\oint_K \sqrt{x^2 + y^2} e^z (dzdx + dydz + dxdy) &= \iiint_G \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2} \right) e^z dV \\ &= \int_1^2 e^z dz \iint_{\sigma_z} \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2} \right) d\sigma \quad \sigma_z: x^2 + y^2 \leq z^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 e^z dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\cos\theta + \sin\theta + r) r dr \\
 &= \int_1^2 e^z dz \int_0^{2\pi} \left[(\cos\theta + \sin\theta) \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right] d\theta = \int_1^2 2\pi \frac{z^3}{3} e^z dz = \frac{2}{3} \pi (e^2 + 3e)
 \end{aligned}$$

三重积分采用了先二后一的算法

33. 证明

1) 充分条件, 由高斯公式, 显然.

2) 必要条件, 采用反证法, 如存在 (x_0, y_0, z_0) 使

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = a > 0 \quad (a < 0 \text{ 相似可证})$$

由于 $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ 连续, 存在 $G: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2 (r > 0)$, 在 G 内 $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \geq \frac{a}{2} > 0$, 设 G 的表面曲面为 K , 于是

$$\begin{aligned}
 \iint_K X dy dz + X dz dx + Z dx dy &= \iiint_G \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV \geq \iiint_G \frac{a}{2} dV \\
 &= \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi a r^3 > 0
 \end{aligned}$$

矛盾, 故 $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \equiv 0$.

$$34. \rho = \frac{1}{z} \quad \sigma: x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_K \rho dS = \iint_K \frac{1}{z} dS = \iint_{\sigma} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \sqrt{1 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2} d\sigma \\
 &= \iint_{\sigma} \frac{a^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma = a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} r dr = \pi a \ln 2.
 \end{aligned}$$

$$35. \text{ 设密度为 } \rho, S: x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$$

$$I_0 = \iint_S \rho(x^2 + y^2 + z^2) dS$$

$$\text{以 } S_1 \text{ 记 } z = a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, S_2 \text{ 记 } z = a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$\sqrt{1 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}; \sigma: x^2 + y^2 \leq a^2$$

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \iint_{\sigma} 2a\rho(a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma + \iint_{\sigma} 2a\rho(a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma \\
 &= 4a^3 \rho \iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 4a^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 8a^4 \pi \rho.
 \end{aligned}$$

注意 S_1, S_2 的转动惯量当然是不同的.

36. G 表示 Σ 围成的空间区域

$$\oint_{\Sigma} = \iiint_G 3(x + y + z) dV = \frac{4}{3} \pi R^3 (a + b + c) + \frac{1}{4} R^4$$

37. 设质量中心的坐标是 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由区域的对称性及被积函数的奇、偶性立即可以判断 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 记 $\sigma: x^2 + y^2 \leq 3$

$$\begin{aligned}
 \bar{z} &= \frac{\iint_S \mu z dS}{\iint_S \mu dS} = \frac{\iint_S z dS}{\iint_S dS} = \frac{\iint_{\sigma} \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} d\sigma}{\iint_{\sigma} \sqrt{1 + x^2 + y^2} d\sigma} \\
 &= \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} r^2 \sqrt{1 + r^2} r dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + r^2} r dr} = \frac{29}{35}
 \end{aligned}$$

第五部分 级数与微分方程

第七章 无穷级数*

考试要求

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念,掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.
2. 掌握几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件.
3. 掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法,会用根值判别法.
4. 掌握交错级数的莱布尼茨判别法.
5. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念,以及绝对收敛与收敛的关系.
6. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.
7. 理解幂级数收敛半径的概念,掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.
8. 了解幂级数在其收敛区间内的一些基本性质(和函数的连续性,逐项求导和逐项积分),会求一些幂级数在收敛区间内的和函数,并会由此求出某些常数项级数的和.
9. 了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件.
10. 掌握 e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林(MacLaurin)展开式,会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数.
11. 了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理,会将定义在 $[-1, 1]$ 上的函数展开为傅里叶级数,会将定义在 $[0, 1]$ 上的函数展开为正弦级数与余弦级数,会写出傅里叶级数的和的表达式.

考试要点分析与题型预测

级数主要包含:常数项级数、幂级数、傅里叶级数. 常数项级数又称数值级数.

常数项级数中最基本的概念是级数的收敛与发散,简称级数的敛散性,用部分和数列 S_n 的极限来界定. 常数项级数中主要有两大问题:第一个问题是级数的敛散性,第二个问题是级数求和. 对于第一个问题,一、有正项级数敛散性判定法,最基本的又常用的有基本定理,比较判定法一、二,比值判定法,根值判定法;二、有交错级数的莱布尼茨判定法;三、任意项级数绝对收敛判定法. 近年来考研题常用基本定理判定级数的敛散性,如 §7-1 中例12、13,有时还用柯西积分判定法来判定级数的敛散性,如 §7-1 中例20. 对于第二个问题,最常用的求和法是利用幂级数的和函数 $S(x)$,令其中 x 取某个定值 x_0 ,则 $S(x_0)$ 就是数值级数的和. 如 §7-1 中,例10,例11,例14,例15等. 级数收敛性与求和是考研中热点之一,几乎是年年出考题.

幂级数中,求收敛半径,收敛区间和收敛域(收敛域要检查区间端点是否收敛)和函数,如 §7-2 中,例2,例7,例8等. 相反地,利用幂级数的基本性质和已知函数的幂级数展开式,把另一函数展开成幂级数,如 §7-2 中,例14,例15等. 考研中经常用到的已知函数是几何幂级数 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (|x| < 1)$,它在考研中占有一定地位,这两方面内容考研中轮流出现.

$f(x)$ 在 $[-1, 1]$, $[0, 1]$ 上傅里叶级数的各种形式,狄利克雷定理,是要掌握会应用的,考研中约4~5年才出现一次.

* 无穷级数数学二不考

§ 7 - 1 常数项级数 典型例题分析与最新考试题型预测

一、基本概念

1. 常数项级数

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 是个无穷数列, 符号 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ 称为无穷级数, 简称级数. 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 或 $\sum a_n$.

其中 a_n 称为级数的通项或一般项. 由于级数的每一项 $a_n (n = 1, 2, \dots)$ 都是数, 因而又称为常数项级数.

2. 级数的部分和数列

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n (n = 1, 2, \dots)$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项部分和. 以 S_n 为通项的数列 $\{S_n\}$ 称为级数的部分和数列.

3. 级数的收敛与发散

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, S 称为级数的和, 记作

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 没有和.

4. 收敛级数的余项 (又称余和)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 和为 S , 则 $R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ 称为级数的 n 项后的余项, 简称余项.

注意 (1) 级数的收敛性和发散性是无穷多项求和的内在性质. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性与级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 极限的存在性是等价的.

(2) S_n 可作为收敛级数的和 S 的近似值, 所产生的误差是余项 R_n 的绝对值, 即 $|R_n|$.

(3) 发散级数仅仅是个符号, 不表示什么.

5. 正项级数、交错级数、任意项级数、绝对收敛级数以及条件收敛级数

级数中每一项 $a_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$ 者称为正项级数, 级数中每一项 $a_n \leq 0 (n = 1, 2, \dots)$ 者称为负项级数. 正项级数、负项级数统称为定号级数或同号级数. 级数的各项如果是正负号相间, 即形状为

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

其中 $a_1, a_2, \dots$ 是正数, 这样的级数称为交错级数. 级数中各项可以有正数、负数或零者称为任意项级数. 对于

任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 如果各项取绝对值所构成的绝对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为绝对收敛级数. 如果

绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则称其为条件收敛级数.

二、级数的基本性质

1. 去掉级数前面有限项或在级数前面加添有限项, 不影响级数的敛散性.

2. 收敛级数的余项 R_n 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 和为 S , c 为任一不等于零的实数 则 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 也收敛 且和为 cS .

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 和为 S_1 , 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 和为 S_2 , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 收敛 且和为 $S_1 \pm S_2$, 其逆不真.

· 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 发散; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 可能收敛.

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

6. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 不改变级数各项的次序, 任意添加括号所得级数必然收敛于相同值. 但是若对一个级数添加括号后的级数收敛, 原级数不一定收敛; 添加括号后的级数如果发散, 则原级数一定发散.

三、级数敛散性的判定

1. 正项级数敛散性的判定法

(1) 基本定理 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是部分和 S_n 有界.

(2) 比较判定法

比较判定法一 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 而 N 为一正整数, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n \leq b_n$. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

比较判定法二 (极限形式的比较判定法) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k (b_n \neq 0, 0 < k < +\infty)$, 则当 $0 < k < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时收敛或同时发散; 当 $k = 0$ 时, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也

收敛; 当 $k = +\infty$ 时, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

注意 使用比较判定法时, 常用来作比较的级数是几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n (|r| < 1$ 收敛, $|r| \geq 1$ 发散), p -级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散) 以及调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (发散).

(3) 达朗贝尔判定法 (比值判定法) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 则当 $0 \leq \rho < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $1 < \rho \leq +\infty$ 时,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; $\rho = 1$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在时, 不能断定级数是收敛或发散.

(4) 柯西判定法 (根值判定法) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, 则当 $0 \leq \rho < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $1 < \rho \leq +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

发散; $\rho = 1$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ 不存在时, 不能断定级数是收敛或发散.

(5)* 柯西积分判定法 若 $f(x)$ 在 $x \geq 1$ 上是连续、非负的广义单调降函数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛或同时发散.

注意 以上关于正项级数敛散性的常用的几种判定法, 对于负号级数也完全适用. 因而是同号级数敛散性的判定法.

2. 交错级数收敛的判定法

莱布尼茨判定法 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ($a_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots$) 满足条件

(1) $a_1 > a_2 \dots > a_n > \dots > 0$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛, 且余项 $|R_n| \leq a_{n+1}$

3°. 任意项级数收敛的判定法

绝对收敛判定法 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

注意一 (1) 由于绝对值级数是正项级数, 因此其敛散性可用正项级数敛散性的判定法加以判定. 如果用达朗贝尔判定法和柯西判定法判定 $\sum |a_n|$ 发散, 则原级数 $\sum a_n$ 发散. 但正项级数的其它判定法若判定 $\sum |a_n|$ 发散, 则不能断定级数 $\sum a_n$ 发散. (2) 绝对收敛级数的和等于级数的所有正项组成的级数的和减去级数的所有负项的绝对值组成的级数的和. (3) 绝对收敛级数与条件收敛级数是有很大差异的. 如果级数是绝对收敛的, 则可以象有限项和那样运用加法和乘法的运算法则, 诸如交换律、分配律等; 如果级数是条件收敛, 则有限项和的性质往往不适用.

注意二 以上关于级数敛散性的各种判定法, 只有正项级数敛散性的基本定理中的条件是充要条件, 其余判定法均是充分条件.

对于一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 首先而且最重要的问题是判定其敛散性. 如何判定? 可以先检验收敛的必要条件是否满足. 如果不满足, 则级数发散; 如果满足, 有少量的级数可以用定义检验是否收敛, 即考察 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 是否存在. 也有少量的级数可以利用已知的收敛和发散的某些级数, 结合级数的性质判断其敛散性. 如果是正项级数, 则可用正项级数的各种判定法, 其中达朗贝尔判定法应用较为方便, 但柯西判定法比达朗贝尔判定法适用的级数范围更为普遍. 上述各种方法中比较判定法是基础. 当达朗贝尔判定法和柯西判定法失效而无能为力时, 比较判定法往往行之有效. 对于交错级数, 最好先用莱布尼茨判定法, 若不满足, 则可使用绝对收敛判定法. 而任意项级数, 则一般均使用绝对收敛判定法.

四、典型例题分析与考试题型预测

典型题型 1. 判定级数敛散性的证明题或讨论题

例 1 判定下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n + \frac{1}{n})^n} \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

解 (1) $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n} > 0$. 可用比值法 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e}$

< 1 , 所以原级数收敛.

(2) $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n} > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$, 所以原级数

发散.

(3) $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n + \frac{1}{n})^n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{[(1 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}}]^{\frac{1}{n}}}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n^2}} = e$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, 所以原级数的

一般项不趋向于零, 故此级数发散.

(4) $a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}$.

分析 本题宜选 p -级数为比较对象, 讨论该级数的敛散性.

解 当 $p > 0$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{1+p}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi$, 故该级数收敛.

当 $p \leq 0$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \pi, & \text{当 } p = 0 \text{ 时,} \\ +, & \text{当 } p < 0 \text{ 时.} \end{cases}$ 故该级数发散.

评述 从题目(4)本身分析,另找一级数 $\sum_{n=1} b_n$ 与原级数 $\sum_{n=1} a_n$ 进行比较判定其收敛性,也是今后常用的一种方法,值得引起注意.

例2 判定下列级数的敛散性

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

解 所给级数为

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots \text{ 这是一个交错级数,容易验证不满足 } a_n >$$

a_{n+1} 因而可能发散. 为此,考虑把原级数加括号

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) + \dots$$

通项 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n-1}$, 而级数 $\sum_{n=2} \frac{2}{n-1} = 2 \sum_{n=2} \frac{1}{n-1}$ 发散, 故由级数的基本性质知, 原级数发散.

例3 判定下列正项级数的收敛性

$$(1) \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \dots$$

$$(2)^* \sum_{n=1} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \quad (3) \sum_{n=1} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \quad (4) \sum_{n=1} \frac{1!+2!+\dots+n!}{(2n)!}$$

解 (1) 所给级数的通项 $a_n = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$ 结构比较复杂, 不便于使用级数敛散的判定法, 为此先将 a_n 变形化简.

$$a_1 = \sqrt{2} = 2\cos \frac{\pi}{4}$$

$$a_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2 \times 2\sin^2 \frac{\pi}{8}} = 2\sin \frac{\pi}{8}$$

$$a_3 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos \frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt{2-2\cos \frac{\pi}{8}} = 2\sin \frac{\pi}{16}$$

.....

$$a_n = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n-1 \text{ 层根号}} = \sqrt{2-2\cos \frac{\pi}{2^n}} = 2\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

故所给级数可化为

$$2\left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{8} + \dots + \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} + \dots\right) = 2 \sum_{n=1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

这时可看出应该用达朗贝尔判定法判定其敛散性. 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

故原级数收敛.

(2)* 分析 所给级数为 $\sum_{n=1} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ 由于 $f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ 随 n 增大而减小, 所以可

以考虑用柯西积分判定法做此题.

解 令 $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ $x \geq 1$ 则 $f'(x) = \frac{-[2 + \ln(x+1)]}{(x+1)^2 \ln^3(x+1)} < 0$ 故 $f(x)$ 在 $1 \leq x < +\infty$ 满足 $f(x) > 0$ 、单调减少、连续.

$$\text{又} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\ln(x+1)} \right]_1^t = \frac{1}{\ln 2}$$

即积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ 收敛. 故原级数收敛.

评述 从本题解答过程启示我们, 所给与级数的通项相对应的 $f(x)$ 是连续单调减少函数, 就可用柯西积分判定法做此题.

(3) 分析 通项 $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}$ 是用一个积分表示, 如果将它计算出来, 工作量较大, 从而得到 a_n 的表示式较烦, 这不利于使用级数敛散性的判定法. 如果不将此积分计算出来, 则显然不宜于用达朗贝尔判定法和柯西判定法. 为此考虑比较判定法.

解 从 $0 < a_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3n^{3/2}} = b_n$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^{3/2}} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 是收敛的 p 级数 ($p = \frac{3}{2} > 1$), 由比较判定法一, 可知原级数收敛.

评述 从本题解答过程启示我们, 最关键步是不等式 $0 < a_n \leq b_n$ 的估计, 找出了收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, 比较法使原级数的敛散得到解决. 这种引出不等式 ($0 < a_n \leq b_n$) 的方法, 今后在考研题目中用得相当多.

(4) 通项 $a_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!}$ 的分子是 n 项之和, 且 a_n 又不含有 n 次幂, 因此不宜用达朗贝尔判别法和柯西判别法, 仍考虑比较法.

$$a_n \leq \frac{n! + n! + \dots + n!}{(2n)!} = \frac{n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)\dots(2n-1)} \leq \frac{1}{2(n+1)^2} (n \geq 3)$$

取 $b_n = \frac{1}{2(n+1)^2}$, 显然级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)^2}$ 收敛. 因此由比较判定法一得原级数收敛.

例4 (1) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$ 是条件收敛 还是绝对收敛 还是发散?

解 所给级数是交错级数 $a_n = \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$, 因此首先考虑用莱布尼茨判定法判定. 从

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n+1}\right)}{\sqrt{(3n+1)(3n+5)}} \cdot \frac{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}{\sqrt{(3n+1)(3n+5)}} < 1$$

即 $a_{n+1} < a_n$

$$\text{又} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2 - 4}} = 0$$

于是由莱布尼茨判定法, 知此级数收敛. 但因

$$\frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}} > \frac{\ln 2}{(3n+2)} > \frac{\ln 2}{3(n+1)} = \frac{\ln 2}{3} \times \frac{1}{n+1}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{3(n+1)}$ 发散, 故由比较判定法一得知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$$

发散. 因此原级数条件收敛.

(2) 确定级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^5 \ln \frac{n-1}{n+1}$ 的敛散性.

分析 这里考虑引用等价无穷小知识来确定级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^5 \ln \frac{n-1}{n+1}$ 的敛散性

解 因为 $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^5 \ln \frac{n-1}{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^5 \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)$ 而 $\ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) < 0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为负项级数. 由于通项 a_n 的结构比较复杂, 故考虑先用等价无穷小来代替其中的一些因子, 以简化通项.

$$\ln \frac{n-1}{n+1} = \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \sim -\frac{2}{n+1} \sim -\frac{2}{n} \quad (n \rightarrow \infty \text{ 时})$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad (n \rightarrow \infty \text{ 时})$$

故有 $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^5 \ln \frac{n-1}{n+1} \sim \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^5 \left(-\frac{2}{n}\right) = \frac{-1}{2^4 \times n^{1+5/2}} \quad (n \rightarrow \infty \text{ 时})$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^5 \ln \frac{n-1}{n+1}}{1/2^4 \times n^{(1+5/2)}} = 1$$

而级数 $\frac{1}{2^4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+5/2}}$ 收敛, 因此, 由极限形式的比较判定法可得级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} -(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^5 \ln \frac{n-1}{n+1}$$

收敛, 也即级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^5 \ln \frac{n-1}{n+1} \text{ 收敛.}$$

评述 这类题目系综合性的有一定深度的例题, 理解并掌握它有助于培养分析与解决问题的能力.

例 5* 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 也收敛

证明 级数的通项 $\frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sqrt{\frac{1}{n^2} a_n}$, 利用不等式

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sqrt{\frac{1}{n^2} a_n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + a_n \right)$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 都收敛, 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + a_n \right)$ 也收敛, 由比较判定法一得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛.

例 6 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = l (l > 0)$, 问正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛或是发散? (2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = l (l > 0)$, 问正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛或是发散?

解 (1) 由假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = l > 0$, 故对于 $\frac{1}{2} > 0$, 存在正整数 $N, n \geq N$, 有 $|na_n - l| < \frac{1}{2}$

即有 $na_n > \frac{1}{2}$ 或 $a_n > \frac{1}{2} \frac{1}{n} (n \geq N)$

而级数 $\sum_{n=N} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=N} \frac{1}{n}$ 发散, 故由此比较判定法一得知级数 $\sum_{n=N} a_n$ 发散, 从而级数 $\sum_{n=1} a_n$ 发散.

(2) 由假设, 对于 $\frac{1}{2} > 0$, 存在正整数 N_1 , 当 $n \geq N_1$ 时, 有 $|n^2 a_n - 1| < \frac{1}{2}$

即有 $n^2 a_n < \frac{31}{2}$ 或 $a_n < \frac{31}{2n^2}$ ($n \geq N_1$)

而级数 $\sum_{n=N_1} \frac{31}{2n^2}$ 收敛, 从而得知级数 $\sum_{n=N_1} a_n$ 收敛, 故原级数 $\sum_{n=1} a_n$ 收敛.

典型题型 2. 判定敛散性与选择填空题

例 7 填空题

(1) 已知级数 $\sum_{n=1} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1} a_{2n-1} = 5$, 则级数 $\sum_{n=1} a_n$ 等于 8.

解 因为 $2 \sum_{n=1} a_{2n-1} - \sum_{n=1} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1} a_n = 10 - 2 = 8$

(2) 级数 $\sum_{n=1} \frac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的值为 $\frac{2}{2 - \ln 3}$.

解 $\sum_{n=1} \frac{(\ln 3)^n}{2^n} = \sum_{n=1} \left(\frac{(\ln 3)}{2} \right)^n$. 因为公比 $\left| \frac{(\ln 3)}{2} \right| < 1$, 所以由几何级数求和公式 $s = \frac{1}{1 - (\ln 3)/2} = \frac{2}{2 - \ln 3}$.

例 8* 选择题

(1) 设常数 $k > 0$, 则级数 $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$ 是 (C).

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 收敛或发散与 k 的取值有关
分析 做这类交错级数题目通常都是首先检验它的条件收敛性, 其次检验它的绝对收敛性.

解 由莱布尼茨定理, 级数 $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{k}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$ 收敛. 又绝对值级数

$\sum_{n=1} \frac{k+n}{n^2}$ 发散. 综合应选 (C).

评述 类似题目考研中常常出现.

(2) 级数 $\sum_{n=1} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n} \right)$ (常数 $\alpha > 0$) 是 (C)

(A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 收敛性与 α 有关

分析 做本题的条件收敛性并不困难, 然而检查绝对收敛时, 必需从 $a_n = \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n} \right) = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2n}$ 中启示

我们去确定比较对象级数 $\sum_{n=1} \left(\frac{\alpha}{2n} \right)^2$, 因为 $\sum_{n=1} \left(\frac{\alpha}{2n} \right)^2$ 收敛, 由极限形式的比较判定法知原级数绝对收敛.

解 原级数为交错级数 $a_n = \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n} \right)$ 单调递减且极限趋于零, 由莱布尼茨定理知原级数收敛. 绝对

值级数 $\sum_{n=1} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n} \right)$ 为正项级数, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{n}}{\left(\frac{\alpha}{2n} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2n}}{\left(\frac{\alpha}{2n} \right)^2} = 2$, 由极限形式比较判定法, 知

$\sum_{n=1} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n} \right)$ 收敛. 综合, 应选 (C).

评述 从本小题 $\left(1 - \cos \frac{\alpha}{n} \right)$ 自身通过三角公式转换成 $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2n}$, 确定出级数 $\sum_{n=1} \left(\frac{\alpha}{2n} \right)^2$ 是检验原级数是否绝对收敛的关键.

(3) 设常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ 是(C).

(A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 收敛性与 λ 有关

分析 做本小题的条件收敛是很困难的, 就直接检验级数的绝对收敛性, 这只要利用不等式 $ab \leq$

$\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ($a > 0, b > 0$) 即可.

解 因为绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ 的通项: $\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \leq \frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2}(|a_n|^2 + \frac{1}{n^2})$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ 收敛. 所以应选(C).

评述 本小题所引用的不等式 $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ 是关键性的步骤, 今后做题还会用到, 值得读者重视.

(4)(95 3分) 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则级数是(C).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

解 因为 $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 单调递减且极限趋于零, 由莱布尼茨定理知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 绝对值级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 为正项级数, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ 发散, 由极限形式比较判定法, 知

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散. 综合应选(C).

(5)(96 3分) 设 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 常 $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{ntg} \frac{\lambda}{n}\right) a_{2n}$ 是(A).

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 收敛性与 λ 有关

分析 从本小题给出的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 由它偶数项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 也是收敛的. 又从所要检验的级数

中经过分析后看出, 如能证明数列 $b_n = \operatorname{ntg} \frac{\lambda}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 有界, 立刻就能检验级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{ntg} \frac{\lambda}{n}\right) a_{2n}$ 是绝对收敛的.

解 (1) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ntg} \frac{\lambda}{n} = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\lambda}{n}}{\frac{\lambda}{n}} = \lambda$ 存在, $\{\operatorname{ntg} \frac{\lambda}{n}\}$ 是收敛数列, 从而有 $|b_n| =$

$\left|n \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda}{n}\right| \leq M$ ($n = 1, 2, 3, \dots, M$ —常数). 由此, 绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \cdot \operatorname{ntg} \frac{\lambda}{n} \cdot a_{2n}\right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, 后者级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, 所以前者级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{ntg} \frac{\lambda}{n} \cdot a_{2n}$ 绝对收敛. 故(A)成立.

解 (2) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 也收敛. 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\operatorname{tg} \frac{\lambda}{n}\right) a_{2n}}{a_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\lambda}{n}\right)}{\left(\frac{\lambda}{n}\right)} = \lambda > 0$, 由极限形式的

比较判定法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{ntg} \frac{\lambda}{n}\right) a_{2n}$ 绝对收敛. 所以应选(A).

评述 (2)、(4)、(5) 的比较对象都是从题目本身分析确定出来的: (2) 是从 $\sin^2 \frac{\alpha}{2n}$ 中确定的 $\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^2$, (4) 是从 $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 中确定的 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, (5) 是从 $\left(\ln \frac{\lambda}{n} \cdot a_{2n}\right)$ 中确定的 a_{2n} . 本题的分析方法对今后分析解决问题是有指导意义的.

(6)(00 3分) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为(D).

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n} \quad (B) \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \quad (C) \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) \quad (D) \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$$

解 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 根据级数性质知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 也收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛, 故(D) 成立.

(7)(02 3分) 设 $u_n \neq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 是(C).

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 收敛性根据所给条件不能确定

解 令 $x_n = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ 知, 当 n 充分大时, 必有 $\frac{1}{2} < \frac{n}{u_n} < \frac{3}{2}$, 即 $\frac{1}{2n} < \frac{1}{u_n} < \frac{3}{2n}$, 从而

$$\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right) = x_n \geq 0, \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ 且 } x_n \searrow, \text{ 根据交错级数莱布尼茨判定定理知级数 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right) \text{ 收敛.}$$

另外, 由 $\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right) < \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right)$ 发散, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 也发散. 故(C) 成立.

(8) 设 $p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$, $q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, 则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性不定.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性不定.

分析 只要依据 p_n, q_n 的表达式及级数的四则运算即知.

证明 由 p_n, q_n 的表达式及级数四则运算知, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛, 故(B) 成立.

例 9* 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

分析 本题目要检验的是数值级数, 所给的条件是函数 $f(x)$ 的条件, 很自然的想法是把级数通项 $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 换成 $f(x)$, 从而利用 $f(x)$ 已给定的条件推导出 $f(x)$ 的一个可行的估计式, 再转回到通项 $f\left(\frac{1}{n}\right)$, 使

绝对收敛就能得到解决. 本题目给出的条件还启示需要引用在 $x = 0$ 处的一阶 Taylor 展开式.

解 由题设推知 $f(0) = 0, f'(0) = 0$. $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的邻域内的一阶 Taylor 展开式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(\theta x)x^2 = \frac{1}{2!} f''(\theta x)x^2 \quad (0 < \theta < 1).$$

再由题设 $f''(x)$ 在属于该邻域内包含原点的一个小区间上连续, 故必存在 $M > 0$, 使 $|f''(x)| < M$, 于是 $|f(x)| \leq \frac{M}{2} x^2$. 令 $x = \frac{1}{n}$, 当 n 充分大时, 有 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

评述 今后在做级数题目时,若给定函数 $f(x)$ 、 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 的条件时,首先要想到的办法就是函数 $f(x)$ 的 Taylor 展开式的应用,它是研究生入学考试中热点考题之一.

典型题型 3. 级数的收敛与求和

例 10* 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2 - n + 1)}{2^n}$ 的和.

解 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2 - n + 1)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ 其中 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

又设 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$, $x \in (-1, 1)$, 则 $\int_0^x \left[\int_0^x S(x) dx \right] dx = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}$, 故 $S(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$, 从而 $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$, $x \in (-1, 1)$. 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{4}{27}$. 综合, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2 - n + 1)}{2^n} = \frac{4}{27} + \frac{2}{3} = \frac{22}{27}$.

例 11* (96 7 分) 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)2^n}$ 的和.

分析 将级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{\frac{1}{2} \rightarrow x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 - 1}\right)x^n \right)_{x=\frac{1}{2}} = S(x)|_{x=\frac{1}{2}}$, 从而只需确定出和函数 $S(x)$.

解 设 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$ ($|x| < 1$), 取 $x = \frac{1}{2}$ 代入即为所求数值级数之和. 因为 $s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n$, 其中, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ($x \neq 0$). 设 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, 则 $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$), 于是 $g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$ ($|x| < 1$). 从而 $S(x) = \frac{x}{2} [-\ln(1-x)] - \frac{1}{2x} [-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}] = \frac{2+x}{4} + \frac{1-x^2}{2x} \ln(1-x)$ ($|x| < 1, x \neq 0$). 因此, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2$.

评述 数值级数求和转换成幂级数求和函数 $S(x)$ 之后, 再将幂级数的和函数 $S(x)$ 中自变量 x 取某一特定的 x_0 , 即得到原数值级数的和. 这种是十分好的方法, 直到今天仍被广泛采用, 是研究生入学考试中的热点考试题之一, 很值得引起读者重视.

例 12 (98 6 分) 设有两条抛物线 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$, 记它们交点横坐标绝对值为 a_n .

(1) 求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n ; (2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n}$ 的和.

解 由 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 与 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$ 联立求解得 $|x| = a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. 因图形对称于 y 轴, 所以

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \int_0^{a_n} \left[nx^2 + \frac{1}{n} - (n+1)x^2 - \frac{1}{n+1} \right] dx \\ &= 2 \int_0^{a_n} \left[\frac{1}{n(n+1)} - x^2 \right] dx = \frac{4}{3} \frac{1}{n(n+1) \sqrt{n(n+1)}} \end{aligned}$$

因此 $\frac{S_n}{a_n} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ 从而

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{a_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{4}{3}.$$

例 13 (99 7 分) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$,

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$ 的值; (2) 试证 对任意的常数 $\lambda > 0$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

证明 (1) 因为

$$\frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \sec^2 x dx$$

$$\stackrel{\tan x = t}{=} \frac{1}{n} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (a_i + a_{i+2}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$.

(2) 因为

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \stackrel{\tan x = t}{=} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

所以 $\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda (n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}$

由于 $\lambda + 1 > 1$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

例 14 (00 6 分) 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cdot \cos x dx$ $n = 0, 1, 2, \dots$ 求 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$

解 计算出 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cdot \cos x dx = \frac{1}{n+1} (\sin^{n+1} x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1}$

$\xrightarrow{\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x}$ 换成 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = S(x) \Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 和函数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径 $R = 1$, 收敛区间 $(-1, 1)$,

$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} (-1 < x < 1)$ 积分 $S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x) (-1 < x < 1)$. 最后 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n =$

$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln(2 + \sqrt{2}).$$

例 15* 设 $a_n = \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \right)$.

解 分别计算出 $a_1 = \int_0^{\pi} x \sin x dx = -(x \cos x - \sin x) \Big|_0^{\pi} = \pi$ $a_2 = \int_0^{2\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx = 2^2 \cdot \pi$ $a_3 = \int_0^{3\pi} x \sin x dx$
 $= \int_0^{\pi} x \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx = 3^2 \cdot \pi$ $\dots$ $a_n = \int_0^{n\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx + \dots + (-1)^{n-1} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x \sin x dx = n^2 \cdot \pi$. 所以,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \right) = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{1}{2^n} = \pi \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \right)_{x=\frac{1}{2}} = \pi S(x) \Big|_{x=\frac{1}{2}}$. 由于 $S(x) = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \right)' =$

$x \cdot \left(x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = x \cdot \frac{1+x}{(1-x)^3}$ 最后得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \right) = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 6\pi$.

评述 例 14 例 15 应用幂级数和函数 $S(x)$ 当 x 取某定值 x_0 计算数值级数的和 S 的方法, 是一种有效的方法, 类似的考研题经常出现, 读者应注意.

典型题型 4. 综合性杂题

例 16 (97 8 分) 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) (n = 1, 2, \dots)$. 证明

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛.

分析 从数列 $\{a_n\}$ 本身可知是正项的, 只要证明是单调减且有下界, $\{a_n\}$ 就有极限存在. 根据(1)的证明,

$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq 0$ 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 是正项级数, 用比较判定法确定它的收敛性.

证明 (1) 因 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1, a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) - a_n = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leq 0$ 故 $\{a_n\}$ 是单调递减且有下界的数列, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

(2) 由(1)知 $0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq a_n - a_{n+1}$. 记 $S_n = \sum_{n=1}^n (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$. 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛. 由比较判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛.

评述 本题解决问题的方法对今后讨论其它级数敛散性很有借鉴意义.

例 17* (98 5 分) 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 是否收敛, 并说明理由.

分析 首先来说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, 再利用比较判定法证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 收敛.

证明 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 收敛. 理由, 由于正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在. 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a \geq 0$. 若 $a = 0$, 则由莱布尼茨定理知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛, 与题设矛盾, 故 $a > 0$. 于是

$$\frac{1}{a_n + 1} < \frac{1}{a + 1}, \text{ 从而 } \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n < \left(\frac{1}{a + 1} \right)^n.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a + 1} \right)^n$ 是公比为 $\left(\frac{1}{a + 1} \right) < 1$ 的几何级数, 故收敛. 因此由比较收敛法知原级数收敛.

例 18 试证明数列 $\left\{ \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \right\}$ 的极限存在且等于零.

分析 本题目放在级数章节中, 很自然的启示我们用级数知识为工具来解决.

解 构造级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$. 利用达朗贝尔判定法 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{2}{e} < 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ 收敛. 根据级数收敛的必要条件得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \stackrel{\text{存在}}{=} 0$. 证毕.

评述 利用级数知识来解决数列极限问题是另一种思维方法, 值得引起读者注意.

例 19 设 $u_n = \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

解 (1) 利用级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \int_1^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx < \int_1^{n+1} e^{-x} dx = -(e^{-(n+1)} - e^{-1}) < e^{-1}$, 即 S_n 上有界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \stackrel{\text{存在}}{=} S$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 利用比较判定法. 估计出 $u_n = \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx < \int_n^{n+1} e^{-x} dx = -(e^{-x}) \Big|_n^{n+1} = (e^{-n} - e^{-(n+1)}) = (1 - e^{-1}) \cdot (e^{-1})^n$,

因为 $(1 - e^{-1}) > 0$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ 收敛 利用比较判定法知 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例 20 设 $f(x) > 0$ (当 $x > 0$) 为单调减函数. 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛的充要条件是广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. (柯西积分判定法)

证明 将区间 $(0, +\infty)$ 等分, 分点为 $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n, \dots$. 设 $n \leq x < n+1, f(n) \geq f(x) > f(n+1)$, 于是 $f(n) = \int_n^{n+1} f(n) dx \geq \int_n^{n+1} f(x) dx > \int_n^{n+1} f(n+1) dx = f(n+1)$, $\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x) dx > \sum_{k=1}^n f(k+1)$. 充分性 若 $\int_1^{+\infty} f(x) dx \xrightarrow{\text{收敛}} A$, 从右边不等式知 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. 必要性 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 从左边不等式知 积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

例 21 (04, 11 分) 设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数. 证明此方程存在唯一正实根 x_n , 并证明当 $\alpha > 1$ 时 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛.

分析 本题利用连续函数介值定理, 先证明 $f_n(x) = x^n + nx - 1 = 0$ 有唯一正实根 x_n , 再估算 $0 < x_n < \frac{1}{n}$.

证明 把 $f_n(x) = x^n + nx - 1$. 当 $x > 0$ 时, $f'_n(x) = nx^{n-1} + n > 0$, 故 $f_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 而 $f_n(0) = -1 < 0, f_n(1) = n > 0$, 由连续函数的介值定理知 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在唯一正实根 x_n .

另外, 由 $x_n^n + nx_n - 1 = 0$ 与 $x_n > 0$ 知 $0 < x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} < \frac{1}{n}$, 故当 $\alpha > 1$ 时, 有 $0 < x_n^\alpha < \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$. 由于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$ 收敛, 所以当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛.

评述 做本题已用到连续函数的介值定理, 方程根的存在性, 验证级数的收敛性, 总共三个知识点, 属于综合性考试题型.

§ 7 - 2 幂级数 典型例题分析与最新考试题型预测

一、基本概念

1. 函数项级数及其收敛域

设 $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 是定义在区间 I 上的函数, 序列 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ 称为函数序列, 式子

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

称为定义在区间 I 上的函数项级数, $u_n(x)$ 称为通项. 对于区间 I 上的每一个值 x_0 , 函数项级数成为常数项级数

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称点 x_0 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点; 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散, 则称点 x_0

为发散点. 所有收敛点的全体称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域; 发散点的全体称为其发散域.

一般来说, 函数项级数的收敛域和发散域的构造是比较复杂的, 此处不做详细讨论.

2. 幂级数 形如

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

或
$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

 (其中 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, x_0$ 为常数) 的函数项级数称为幂级数, $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 称为幂级数的系数, 幂级数的特点是每一项为幂函数, 前 n 项部分和是 $n-1$ 次多项式. 若令 $x - x_0 = t$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, 因而只需讨论幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 即可.

3. 幂级数的收敛半径与收敛区间

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不仅是在 $x=0$ 时收敛, 但也不是对所有实数 x (即 $-\infty < x < +\infty$) 都收敛, 在此情况下, 则对任何一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都有一个正数 R ($0 < R < +\infty$) 与之对应, 使得当 $|x| < R$ 时, 级数收敛且绝对收敛; 当 $|x| > R$ 时, 级数发散. 数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径. 由于当 $x = \pm R$ 时, 级数可能收敛也可能发散. 因此幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域总是 x 轴上的某一区间 (开区间或闭区间或半开半闭区间), 称使幂级数收敛的开区间为幂级数的收敛区间. 如果不考虑两个端点 $x = \pm R$, 则幂级数的收敛域是一个关于原点对称的开区间 $(-R, R)$. 特殊情况: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 收敛, 规定收敛半径 $R=0$; 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对一切实数 x 都收敛, 则规定收敛半径 $R=+\infty$, 此时收敛域为 $-\infty < x < +\infty$.

4. 幂级数的和函数

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在它的收敛区间内给出任意固定的 x 值, 成为一个收敛的常数项级数, 因而有确定的和, 这个和显然随着 x 变化而变化, 是 x 的函数, 记作 $S(x)$, 称它为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数. 显然, 和函数 $S(x)$ 的定义域就是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域.

5. 函数 $f(x)$ 的泰勒公式与麦克劳林公式

若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某一邻域内有直到 $(n+1)$ 阶导数, 则在这个邻域内有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n \quad (7.1)$$

其中 $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (ξ 是在 x_0 及 x 之间的某个值).

(7.1) 式称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的 n 阶泰勒公式, R_n 称为泰勒公式的余项. 当 $x_0 = 0$ 时 (7.1) 式变为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n \quad (7.2)$$

其中 $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ (ξ 是在 0 及 x 之间的某个值).

(7.2) 式称为 $f(x)$ 的麦克劳林公式, 它是泰勒公式的特殊情况.

6. 函数 $f(x)$ 的泰勒级数和麦克劳林级数

若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 任意阶可导, 称幂级数

$$\begin{aligned} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒级数.

当 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数变为

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

称它为 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

7. 函数 $f(x)$ 的泰勒展开式与麦克劳林展开式

如果在 $x = x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 能用它在 $x = x_0$ 处的泰勒级数表示, 或者 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处在泰勒级数在 $x = x_0$ 的某个邻域收敛, 且和为 $f(x)$, 即是

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (7.3)$$

则(7.3)式称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒展开式.

当 $x_0 = 0$ 时, (7.3)式变为

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (7.4)$$

(7.4)式称为 $f(x)$ 的麦克劳林展开式.

二、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径与收敛区间的求法

$$1. \text{ 收敛半径 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad 2. R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{收敛区间 } (-R, R).$$

$x = \pm R$ 时, 幂级数为常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\pm R)^n$, 可用 §7-1 常数项级数的收敛准则判定其敛散性.

注意 (1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, 则 $R = +\infty$; 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$, 则 $R = 0$.

(2) 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 缺项 (例如, 级数只包含 x 的偶次幂或只包含 x 的奇次幂), 相邻两项 x 的指数相差不是 1 时, 就不便利用上面公式, 这时应直接用达朗贝尔判别法或柯西判别法来求收敛半径.

(3) 求函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域时, 可暂把变量 x 看作常数, 这时函数项级数就成了常数项级数, 然后再按具有参变量的常数项级数讨论参变量 x 取何值时收敛或发散. 函数项级数的收敛域是各种各样的. 例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n^x}$ 的收敛域是 $x = 0$ 的点和区间 $(1, +\infty)$; 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n k^n$ 的收敛域仅有点 $x = 0$.

三、幂级数的运算与性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$, 则在公共的收敛区间内有

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x)$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x) \times g(x)$$

其中 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

$$3. \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = c^0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (b_0 \neq 0, |x| \text{ 足够小})$$

式中 $c_0, c_1, \dots$ 满足 $a_0 = b_0 c_0, a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1, a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2, \dots$

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在它收敛区间 $(-R, R)$ 内的和函数 $f(x)$ 是连续函数. 若在端点 $x = R$ 处收敛, 则

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = f(R)$$

5. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在它收敛区间 $(-R, R)$ 内可以逐项微分, 并且逐项微分后得到的幂级数的收敛半径 R 不变. 即

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x)$$

6. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在它收敛区间 $(-R, R)$ 内可以逐项积分, 并且逐项积分后所得到的幂级数的半径 R 不变. 即

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] dx = \int_0^x f(x) dx = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \dots + \frac{1}{(n+1)} a_n x^{n+1} + \dots$$

四、函数展开为幂级数

1. 函数展开为幂级数的唯一性

若 $f(x)$ 能表达为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$) 则必是它的麦克劳林展开式 (或 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒展开式). 因此求 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒展开式 (7.3) 就是要将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展开为幂级数或展开为 $(x - x_0)$ 的幂级数, 而求 $f(x)$ 的麦克劳林展开式 (7.4) 就是要将 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处展开为幂级数或展开为 x 的幂级数.

2. 函数展开为幂级数的条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ (或 $x = x_0$) 的某个邻域内有任意阶导数 $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ... 且余项 R_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ 则 $f(x)$ 能用幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ (或 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$) 表示.

3. 函数展开为幂级数的方法

(1) 直接法 首先求出 $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), 算出 $f^{(n)}(0)$ (或 $f^{(n)}(x_0)$) ($n = 1, 2, \dots$), 然后写出它的麦克劳林级数 (或泰勒级数)

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$\text{(或 } f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \text{)}$$

并求出收敛半径 R , 再证明 $|x| < R$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. 这样就得到 $f(x)$ 的麦克劳林展开式 (或泰勒展开式).

注意 用直接展开法时, 有时求 $f^{(n)}(x)$ 很复杂, 并且其规律不易寻求. 另外, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 也相当困难, 因此, 常采取间接展开法.

(2) 间接法 所谓间接展开法就是利用一些基本初等函数与初等函数的已知展开式, 根据幂级数展开的唯一性定理和幂级数的运算及分析性质, 特别是幂级数在它收敛区间可以逐项求导、逐项求积的解析性质, 把给定的函数展开为幂级数. 常用的几个初等函数的幂级数展开式为

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < +\infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < +\infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{2 \times 3} x^3 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 5} x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad |x| < 1 (\alpha \text{ 为实数}) \end{aligned}$$

当 $x = \pm 1$ 时, 级数是否收敛, 根据 α 取值而定. 有

$x = 1$ 时 $\alpha > 0$ 绝对收敛; $-1 < \alpha < 0$ 条件收敛; $\alpha \leq -1$ 发散.

$x = -1$ 时 $\alpha > 0$ 绝对收敛; $\alpha < 0$ 发散.

五、典型例题分析与考试题型预测

典型题型 1. 求幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域.

不缺项的幂级数的收敛半径按二、1. 之公式求出. 缺项的幂级数则应该按数项级数讨论敛散性的方法求, 见例 3(2)、例 5(2)、(3) 等.

例 1 求下列幂级数的收敛半径及收敛区间.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} n k^n \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1) \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$$

解 利用求收敛半径的公式. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{4}$, 由于 $R = \frac{1}{\rho}$, 所以收敛半径为 $R = 4$, 收敛区间为 $(-4, +4)$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$, 由于 $R = \frac{1}{\rho}$, 所以收敛半径为 $R = 0$, 原级数只在 $x = 0$ 处收敛.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}} \cdot \frac{a^{n^2}}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{a^{2n+1}} = 0 = \rho$, 所以收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = +\infty$, 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 故收敛半径 $R = \frac{1}{e}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

评述 求幂级数的收敛半径、收敛区间一直是考研热点之一.

例 2 求下列幂级数的收敛半径及收敛区间.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[n]{n!}}$$

解 (1) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, 由 a_n 的构造显然不适合用柯西判定法求收敛半径. 考察

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \times \frac{1}{n+1}$$

因此 $1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \frac{1}{n+1}$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

即原级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

$$(2) a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n!)(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} = (n!)^{\frac{1}{n(n+1)}} \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}},$$

而 $\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!} \sqrt[n+1]{n+1}} \leq \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq (n^{n+1})^{\frac{1}{n(n+1)}} \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} = n^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}$

但是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1$

故知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, 原级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

例3 确定下列级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + \sin n + \frac{1}{n^2}\right] x^{2n}.$$

解 (1) 令 $e^{-x} = y$, 则原函数项级数就化为 y 的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$, 由于 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ 的结构

形式适合用柯西判定法求收敛半径 R , 容易求得 $R = e$. 因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$ 在区间 $(-e, e)$ 收敛.

$$\text{当 } y = e \text{ 时, 级数变为 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^n$$

按其构造, 应该用柯西判定法判定其敛散性, 但失效. 可是, 由于 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$, 易知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^n \neq 0$$

故 $y = e$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$ 是发散的. 同理, 当 $y = -e$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$ 也发散. 因此幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$ 的收敛域是 $(-e, e)$. 再由代换 $e^{-x} = y$, 得到 $-e < e^{-x} < e$, 而 $e^{-x} > 0$, 解得 $x > -1$, 于是原

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$ 的收敛域是 $(-1, +\infty)$,

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + (-1)^n + \sin n\right) x^{2n}$ 只含 x 的偶次幂, 因此缺项的幂级数先考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^{2n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{x^{2n}} = x^2$$

又 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的 p 级数 ($p = 2$), 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^{2n}$ 的收敛域为 $[-1, 1]$. 再考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + \sin n) x^{2n}$, 由于

$$|(-1)^n + \sin n| \leq 2$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^n$ 在 $|x| < 1$ 收敛, 从而当 $|x| < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + \sin n] x^{2n}$ 收敛.

又 $|x| > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + \sin n] x^{2n}$ 由于通项的极限为无限大而发散.

而当 $x = \pm 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n + \sin n|$ 不存在, 故知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + \sin n] x^{2n}$ 在 $x = \pm 1$ 时也不收敛, 即其收敛域为 $(-1, 1)$.

综合以上情况, 得原级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

例4 填空题

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是 $[-1, 1)$.

解 因 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$, 故收敛区间是 $(-1, 1)$. 又 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 收敛, 故收敛域是 $[-1, 1)$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为 $(0, 4)$.

解 令 $x-2 = y$, 则末 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2n}}{n4^n}$ 的收敛性讨论如下. 从 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} y^{2(n+1)}}{a_n y^{2n}} \right| = \frac{1}{4} |y|^2 < 1$, 即 $|y| < 2$, $|x-2| < 2$ 得 $0 < x < 4$, 原级数收敛. 又当 $x = 0$ 和 $x = 4$ 时, 级数均发散, 故收敛域为 $(0, 4)$.

(3) (95, 3分) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R = \sqrt{3}$.

解 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)[2^n + (-3)^n]}{n[2^{n+1} + (-3)^{n+1}]} \right| \cdot |x|^2 = \frac{|x|^2}{3}$
由 $\frac{|x|^2}{3} < 1$ 得 $|x| < \sqrt{3}$, 即 $R = \sqrt{3}$.

(4) (97, 3分) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 $(-2, 4)$.

解 令 $x-1 = y$, 则末

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n+1}$$

后者幂级数收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = 3$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 在 $-3 < x-1 < 3$ 内, 即 $-2 < x < 4$ 内收敛, 所以收敛区间为 $(-2, 4)$.

例5 选择题

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 收敛, 则此级数在 $x = 2$ 处

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛 (C) 发散 (D) 收敛性不能确定

解 因为 $x = -1$ 为级数的收敛点, 可知级数在 $|x-1| < |-1-1| = 2$ 内, 即当 $-1 < x < 3$ 时绝对收敛. $x = 2$ 在 $(-1, 3)$ 内, 故选(B).

(2) (02, 3分) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为:

(A) 5 (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{5}$

解 收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n^2}{b_n^2}}{\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2 \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} \right)^2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{9} = 5$. 故选(A).

例6 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n |x-3|}{3(n+1)} = \frac{1}{3} |x-3|.$$

故当 $\frac{1}{3} |x-3| < 1$, 即 $0 < x < 6$ 时幂级数收敛.

当 $x=0$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的. 当 $x=6$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的. 总之, 所求收敛域为 $[0, 6)$.

例7* (00 6分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间, 并讨论该区间端点处的收敛性.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3^n + (-2)^n) \cdot n}{(3^{n+1} + (-2)^{n+1})(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + (-\frac{2}{3})^n) \cdot n}{3 \cdot (1 + (-\frac{2}{3})^{n+1}) \cdot (n+1)} = \frac{1}{3}$ 所以收敛半径

为 $R = \frac{1}{\rho} = 3$, 收敛区间为 $(-3, 3)$. 当 $x=3$ 时, 由于 $\frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{2n}$ ($\frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$,

当 n 充分大时 $\frac{3^n}{3^n + (-2)^n} > \frac{1}{2}$), 从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{3^n}{n}$ 发散. 当 $x=-3$ 时, 由于

$\frac{(-3)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} = (-1)^n \frac{1}{n} - \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$, 从而交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$ 是

原幂级数在其收敛区间 $(-3, 3)$ 内 $x=2$ 处的数值级数, 所以该级数是收敛的, 于是就得出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n}$

$\frac{(-3)^n}{n}$ 收敛. 总之, 原级数的收敛域为 $[-3, 3)$.

评述 本题是近年来的考研热点之一.

例8 求下列级数的收敛域: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n}{n^x}$.

解 分析 (1)、(2) 都是函数项级数.

(1) 令 $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{3n+2} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^n$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3n+2} \left| \frac{2-x}{2+x} \right|^n} = \left| \frac{2-x}{2+x} \right|$, 当 $\left| \frac{2-x}{2+x} \right| < 1$

时, 即 $|2-x| < |2+x|$, 也就是 $x > 0$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对收敛. 当 $\left| \frac{2-x}{2+x} \right| > 1$ 时, 即 $x < 0$ 时, 原级数

发散. 当 $\left| \frac{2-x}{2+x} \right| = 1$ 时, 即 $x=0$ 时, 原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$, 它是条件收敛.

(2) 令 $u_n(x) = \frac{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n}{n^x}$. 对任意 x , 当 n 足够大时, 从此开始以后的所有项都是正的, 故可按正项级数讨论. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x)}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n}{n^x}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$$

当 $x > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 收敛; 当 $x \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 发散. 所以按正项级数比较判定法的极限形式可知, 原

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$: 当 $x > 1$ 时绝对收敛, 当 $x \leq 1$ 时发散. 总之, 原级数的收敛域为 $(1, +\infty)$.

典型题型 2. 利用幂级数性质求和函数

例 9* 求下列级数在某收敛域内的和函数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}; (2) \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)(x-1)^{2n+1}; (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n \cdot n!} x^n$$

分析 例 10* 的各题有两个内容, 一是求级数的收敛域, 二是在收敛域内求级数的和函数. 关于第一个内容, 前面例中已作介绍, 这里不再一一求解, 只给出结果, 希望读者自行练习. 关于第二个内容, 如何求函数项级数的和函数, 只有少量的题目可以用定义求得, 即求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n u_k(x))$, 而对于大多数的幂级数的和函数, 是利用已知函数的幂级数和它在收敛域内的代数运算及分析性质 (特别是逐项求导和逐项求积的性质) 来求得的.

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $|x| \leq 1$. 下面求和函数 $S(x)$. 当 $x = 0$ 时, 级数和为零. 下面讨论 $x \neq 0$ 的情形.

解法一 令 $xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = g(x)$, 则

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad g''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

故

$$g'(x) = \int_0^x g''(x) dx = -\ln(1-x)$$

$$g(x) = \int_0^x g'(x) dx = (1-x)\ln(1-x) + x, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x < 1$$

又

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

故

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}, & -1 \leq x < 0, 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

解法二 $x \neq 0$ 时

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$\text{而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} [-\ln(1-x) - x] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad -1 \leq x < 0, 0 < x < 1$$

故

$$\begin{aligned} S(x) &= -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1 \\ &= 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x < 1 \end{aligned}$$

解法三 $x \neq 0$ 时

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1}, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) x^n$$

$xS'(x) + S(x)$ 得

$$xS'(x) + S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x < 1$$

即

$$S'(x) + \frac{1}{x} S(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x}$$

求解此一阶线性非齐次微分方程, 并由初始条件 $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0$, 仍可得

$$S(x) = -\ln(1-x) + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} = 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x < 1$$

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)(x-1)^{2n+1}$ 的收敛域为 $0 < x < 2$.

下面用两种方法求和函数 $S(x)$. 令 $x-1=y$ 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)(x-1)^{2n+1} \xrightarrow{x-1=y} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)y^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2ny^{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} y^{2n+1} = S_1(y) - S_2(y)$$

解法一 $S_1(y) = y^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2ny^{2n-1}$ 而

$$\int_0^y \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2nt^{2n-1} dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{2n} = \frac{1}{1-y^2} - 1 = \frac{y^2}{1-y^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2ny^{2n-1} = \left(\frac{y^2}{1-y^2} \right)' = \frac{2y}{(1-y^2)^2}, \quad \text{于是 } S_1(y) = \frac{2y^3}{(1-y^2)^2}$$

$$\text{又 } S_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{2n+1} = y^3 + y^5 + y^7 + \dots = y^3(1 + y^2 + y^4 + \dots) = \frac{y^3}{1-y^2}$$

$$\text{故 } S_1(y) - S_2(y) = \frac{2y^3}{(1-y^2)^2} - \frac{y^3}{1-y^2} = \frac{y^3(1+y^2)}{(1-y^2)^2}$$

$$\text{因此原级数的和函数 } S(x) = \frac{(x-1)^3(1+(x-1)^2)}{[1-(x-1)^2]^2}$$

解法二 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)y^{2n+1} = y^3 + 3y^5 + 5y^7 + \dots$

$$= y^3(1 + 3y^2 + 5y^4 + 7y^6 + \dots)$$

$$\text{而 } 1 + 3y^2 + 5y^4 + 7y^6 + \dots = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^{2n+1} \right)' = \left(\frac{y}{1-y^2} \right)' = \frac{1+y^2}{(1-y^2)^2}$$

$$\text{于是原级数的和函数 } S(x) = \frac{(x-1)^3(1+(x-1)^2)}{[1-(x-1)^2]^2}$$

解 (3) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n \cdot n!} x^n$ 的收敛域为 $-\infty < x < +\infty$. 又

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n \cdot n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-n+n+1}{3^n \cdot n!} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{x}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{3} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{3} \right)^n \\ &= \left(\frac{x}{3} \right)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{3} \right)^n + \frac{x}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{3} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{3} \right)^n \\ &= \left(\frac{x}{3} \right)^2 e^{x/3} + \frac{x}{3} e^{x/3} + e^{x/3} = \left(\frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} + 1 \right) e^{x/3}. \end{aligned}$$

评述 求幂级数的和函数 $S(x)$ 是近年来考研热点之一.

例 10* (01 7 分) 已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x) = f_n(x) + x^{n-1}e^x$ (n 为正整数) 且 $f_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的和函数.

分析 本题目第一步是求出一阶线性微分方程在定解条件下 $\begin{cases} f_n'(x) - f_n(x) = x^{n-1}e^x \\ f_n(1) = \frac{e}{n} \end{cases}$

的解 $f_n(x)$, 第二步再求出函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的和函数.

解 引用一阶线性微分方程的求解公式, 得出通解

$$f_n(x) = e^{\int dx} \cdot \left(\int x^{n-1} e^x \cdot e^{-\int dx} dx + c \right) = e^x \cdot \left(\frac{x^n}{n} + c \right)$$

由 $f_n(1) = \frac{e}{n}$ 推出 $c = 0$, 故 $f_n(x) = \frac{x^n e^x}{n}$. 由此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = e^x \cdot (-\ln(1-x))$, $-1 \leq x < 1$.

评述 把求解微分方程的知识点与求幂级数的和函数知识点结合, 是近年来考研热点之一.

例 11 (02, 7 分) (1) 验证函数 $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \dots$ ($-1 < x < 1$) 满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$ (2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

分析 本题目首先求出 $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, 代入微分方程左端就等于右端, 且 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. 其次, 求出微分方程满足条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ 的解 $y(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{-x}{2}} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x$ ($-1 < x < 1$). 最后, 根据微分方程满足条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ 的解是唯一的, 即 $1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \dots \xrightarrow{\text{收敛}} \frac{2}{3}e^{\frac{-x}{2}} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x$ ($-1 < x < 1$), 后者就是和函数.

解 (1) 将 $y(x)$ 对 x 求一、二阶导数

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \dots$$

$$y'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \dots$$

$$y''(x) = x^1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \dots$$

上三式相加得出

$$y'' + y' + y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x$$

又 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, 所以函数 $y(x)$ 是微分方程满足定值条件的解.

(2) 求微分方程 $y''(x) + y'(x) + y(x) = e^x$ 满足条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ 的解. 首先, 齐次方程 $y'' + y' + y = 0$ 的特征方程 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, 它的特征根 $\lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 从而齐次方程的通解 $Y(x) = e^{\frac{-x}{2}} \cdot \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$. 又非齐次方程的特解 $y^* = \frac{1}{3}e^x$. 总之非齐次方程的通解

$$y(x) = e^{\frac{-x}{2}} \cdot \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{1}{3}e^x$$

利用初始条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ 代入该通解中, 得出 $\begin{cases} C_1 + \frac{1}{3} = 1, \\ -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$, 解得 $C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = 0$. 最终

求得非齐次微分方程满足条件的解 $y(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{-x}{2}} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x$.

综合(1)、(2)说明, 已给出函数 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 和已求出的解 $y(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{-x}{2}} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x$ 都是同一微分方程在同一条件下的解. 根据微分方程解的唯一性可知: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{2}{3}e^{\frac{-x}{2}} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x$, $-1 < x < 1$, 和函数为 $\frac{2}{3}e^{\frac{-x}{2}} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x$, $-1 < x < 1$.

例 12 (05, 12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right) x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

分析 先求收敛区间, 再利用幂级数求导性质定出和函数.

解 收敛半径:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n-1)+1}{n(2n-1)} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1)(2n+1)+1} = 1. \text{ 收敛区间: } (-1, 1).$$

另外, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1 + \frac{1}{n(2n-1)}) x^{2n} = S_1(x) + 2S_2(x)$. 其中 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (x^2)^n = \frac{x^2}{1+x^2}$,

$$(|x| < 1), S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} \quad x \in (-1, 1) \quad S_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1},$$

$$S_2''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (x^2)^{n-1} = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in (-1, 1)$$

又 $S_2(0) = 0, S_2'(0) = 0$ 故

$$S_2'(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x \quad S_2(x) = \int_0^x \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \quad x \in (-1, 1) \text{ 最后得出 } f(x)$$

$$= S_1(x) + 2S_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \quad x \in (-1, 1).$$

例 13 (06, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

分析 (1) 求出幂级数的收敛区间, 同时检验区间端点的收敛性, (2) 利用逐项两次求导法算出和函数 $S(x)$.

解 (1) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3} \cdot n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)x^{2n+1}} \right| = |x|^2$, 当 $|x| < 1$ 时, 原级数收敛. 当 $x = \pm$

1 时, 级数 $\pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 是交错级数, 用莱布尼茨法则可知其收敛. 当 $x = \pm 1$ 时, 原级数收敛. 综合, 原幂级数收敛域为 $[-1, 1]$.

(2) 因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n}}{n(2n-1)} \stackrel{\text{令}}{=} x \cdot f(x)$ 其中 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} \quad x \in (-1, 1)$.

由此 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2n \cdot x^{2n-1}}{n(2n-1)} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} \quad f''(x) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (x^2)^{n-1}$

$\stackrel{|x| < 1}{=} \frac{2}{1+x^2}$, 又因 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 所以, 积分 $f(x) \stackrel{|x| < 1}{=} \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt + f(0)$

$\stackrel{|x| < 1}{=} 2 \arctan x$, 再积分一次 $f(x) \stackrel{|x| < 1}{=} \int_0^x 2 \arctan t dt + f(0) \stackrel{|x| < 1}{=} 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \quad x \in (-1, 1)$

即 $S(x) = 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \quad |x| < 1$.

评述 本题求收敛区间时, 若用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{n(2n-1)}{(-1)^{n-1}} \right| = 1$, 虽然, 计算结果, 原幂级数的收敛区间也是 $|x| < 1$ 与(1)算的相同, 然而, 这是偶然的, 计算方法也是错误的, 比如 P269 例 4. (3) 就会得出不一样的结果.

典型题型 3. 函数展开成幂级数

例 14 将下列函数按指定要求展为幂函数, 并确定收敛区间.

(1) $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ 展为 x 的幂级数;

(2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 展为 x 的幂级数;

(3) $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$ 展开 x 的幂级数;

(4) $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开 x 的幂级数. (2006)

分析 例 14 的各题也有两个要求, 一个是将函数按指定要求展为幂级数, 另一个是确定收敛域, 同五、1 一样, 第二个要求留给读者作为练习, 下面只写出结果, 对于第一个要求我们仅介绍常用的方法——间接展开法.

解 (1) $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ 是有理函数, 但显然若将 $f(x)$ 采用部分分式法, 由于

待定系数较多,可以预见运算相当复杂. 现根据函数的特点,在 $x \neq 1$ 的假定下将分子、分母同乘以 $(1-x)$, 则

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^{16}} = (1-x)(1+x^{16}+x^{32}+\dots) = 1-x+x^{16}-x^{17}+x^{32}-x^{33}+\dots \quad |x| < 1$$

容易得到此级数的收敛域为 $|x| < 1$.

评述 用例(1)同样的方法,则也很容易将分式有理函数 $\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$ 展开为 x 的幂级数,事实上,在 $x \neq 1$ 时

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1+x+x^2+x^3)} = \frac{1-x}{1-x^4} \\ &= (1-x)(1+x^4+x^8+x^{12}+\dots+(x^4)^n+\dots) \\ &= 1-x+x^4-x^5+x^8-x^9+\dots \end{aligned} \quad |x| < 1$$

显然此时幂级数的收敛域为 $|x| < 1$.

$$(2) f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{而} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}x^4 - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}x^6 + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

对上式两端从 0 到 x 积分,得

$$\begin{aligned} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= x - \frac{1}{2 \times 3}x^3 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 5}x^5 - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6 \times 7}x^7 + \dots \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n 2^n (2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| \leq 1 \end{aligned}$$

$$(3) f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$$

$$\text{解(1)} \quad \text{因为 } f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} = \int_0^x \operatorname{arctg} x dx$$

$$\text{而} \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

$$\text{所以} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3 \times 4}x^4 + \frac{1}{5 \times 6}x^6 - \frac{1}{7 \times 8}x^8 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2} + \dots \quad |x| \leq 1.$$

$$\text{解(2)} \quad \text{因为 } \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\ln \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$\text{故} \quad \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}, \quad (|x| \leq 1) \end{aligned}$$

$$(4) f(x) = \frac{x}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right) = \frac{x}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \right] \quad (|x| < 1)$$

$$= \frac{x}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \right] \quad (|x| < 1)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^{n+1} \quad (|x| < 1).$$

例 15* (1) 将函数 $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

(2) 将函数 $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - x$ 展开为 x 的幂级数.

(3) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 展开成 x 的幂级数, 并指出其收敛区间.

解 (1) 由 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $-1 < x < 1$ 得

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x) dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{因为 } f(0) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \text{ 故}$$

$$\arctg \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -1 \leq x < 1.$$

(2) 由 $f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} \quad (-1 < x < 1)$ $f(0) = 0$ 故

$$f(x) = \int_0^x f'(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

(3) 由 $f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$

$$\stackrel{|x| < 1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n \quad (|x| < 1).$$

其收敛区间为 $(-1, 1)$.

例 16 将函数 $y = \ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数, 并指出其收敛区间.

解 由 $\ln(1-x-2x^2) = \ln(1-2x)(1+x) = \ln(1+x) + \ln(1-2x)$, 又

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\ln(1-2x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \right)$$

于是, 有 $\ln(1-x-2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 2^n x^n$ 其收敛区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

典型题型 4. 利用幂级数的和函数计算某些数值级数的和

例 17* 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 在其收敛域内的和函数, 并计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^{n-1}}$ 的和.

分析 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛区间为 $(-1, 1)$. 下面先求和函数 $S(x)$, 再计算和.

解法一 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 通项 $n^2 x^{n-1}$ 逐项积分之, 得

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

令 $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, 再逐项积分之, 得

$$\int_0^x \varphi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

故 $\varphi(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

因而有 $\int_0^x S(x) dx = x \varphi(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

故 $S(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1)$

解法一 是通过先两次逐项积分, 然后再两次求导, 以求得和函数, 下面介绍的解法二是通过对幂级数两次逐项求导而得和函数 $S(x)$ 的.

解法二 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$.

两边对 x 求导, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} (|x| < 1)$$

等式两边乘 x 后, 再对 x 求导, 得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3} (|x| < 1)$$

故
$$S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad -1 < x < 1$$

在原级数中, 取 $x = -\frac{1}{2}$, 则得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{4}{27}$$

评述 用例 17* 题的同样方法或利用例 17* 题求得和函数 $S(x)$, 容易得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^{n-1}}$ 在其收敛域 $|x| > 1$ 内的和函数为 $\frac{x^2(x+1)}{(x-1)^3}$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$ 在其收敛域 $|x| < 1$ 内的和函数为 $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$. 本题是考研热点之一.

例 18 利用函数的幂级数展开式求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

解法一 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$. 若考虑求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n$ 的和函数 $S(x)$, 则 $S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$. 级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$, $x = \frac{1}{2}$ 在收敛域中.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

令 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则 $\int_0^x g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, $g(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

故
$$S(x) = \frac{2x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{x^2+x}{(1-x)^2}, \quad S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 3$$

解法二 原级数为 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \dots + (2n+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \dots \right]$$

因此若考虑求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$, 则原级数为 $\frac{1}{2}S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

将 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$ 在收敛域 $(-1, 1)$ 中逐项积分, 得

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + \dots = \frac{x}{1-x^2}$$

故
$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

$$\frac{1}{2}S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 3.$$

例 19 求下列级数的和：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1) \cdot 4^n}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!}$$

分析 (1) 从题型分析

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[\text{换成}]{\frac{1}{4} \rightarrow x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} x^n \right) \Big|_{x=\frac{1}{4}} \xrightarrow[\text{分式}]{\text{分解}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) x^{2n+1} \Big|_{x=\frac{1}{2}},$$

变成要求两个幂级数的和 相减后令 $x = \frac{1}{2}$.

解 考虑幂级数 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n+1}$, $S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$. 其中 $S_1(x) = x^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}$,
 $g'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2} (|x| < 1)$, $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) (|x| < 1)$,
 $S_1(x) = x^2 \cdot g(x) = \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) (|x| < 1)$. 又 $S_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2} (|x| < 1)$, $S_2(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt = -x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$. 从而 $S_1(x) - S_2(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + x$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \frac{1}{4^n} = (S_1(x) - S_2(x)) \Big|_{x=\frac{1}{2}} =$
 $\left(\frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + x \right) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \ln 3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 3 \right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \ln 3.$

评述 (1) 的解法有代表性, 典型性, 是考研中常考题型之一.

分析 (2) 与这种形式相近的级数有 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的展开式. 为了消除分子的 n , 应取幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{(2n+1)!}$ 其收敛区间为 $(-1, 1)$, 使(2)可以得到解决.

解 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{(2n+1)!}$. $\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n n t^{2n-1}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2 \cdot (2n+1)!}$
 $= \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2x} (\sin x - x)$, $S(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2} (0 < |x| < 1)$.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = S(1) = \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1)$.

评述 根据对题目的分析, 应灵活机动地选择幂级数形式. 本题目还可直接用数值级数“凑”的办法:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1-1)}{2(2n+1)!} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} (\cos 1 - 1) - \frac{1}{2} (\sin 1 - 1) = \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1). \end{aligned}$$

例 20 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+4)}$ 的和.

分析 根据通项特点, 先拆项 $\frac{1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+4} \right)$ 后求部分和 S_n .

解 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+4} \right)$
 $= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{1+2} + \frac{1}{1+4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{2+2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3+2} + \frac{1}{3+4} + \dots \right.$
 $\left. + \frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+4} \right)$
 $= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right),$

$$\text{所以和 } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{11}{96}.$$

评述 这种通项拆成两项或多项, 正好前后相消达到求和目的, 称此为拆项求和法.

例 21* (03 9 分) 求幂级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} (|x| < 1)$ 的和函数及其极值.

分析 利用幂级数的性质先求出和函数, 然后再求和函数的极值.

解 (1) 令 $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n} (|x| < 1)$,

显然 $f(0) = 1$. 又 $f(x) \xrightarrow[\text{求导}]{\text{逐项}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-1} = -x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \frac{-x}{1+x^2} (|x| < 1)$.

积分 $f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$, $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) (|x| < 1)$.

(2) 令 $f'(x) = \frac{-x}{1+x^2} = 0$ 唯一驻点 $x = 0$, 由于 $f''(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f''(0) = 1 > 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 取极大值, 且极大值 $f(0) = 1$.

典型题型 5. 综合性杂题

例 22* (01 8 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

分析 先用间接法把 $f(x)$ 展开成幂级数, 再令 $x = 1$ 即可计算出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解 $\arctan x = \int_0^x (\arctan t)' dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$. 在 $x = \pm 1$ 处, 上述级数收敛, 又 $\arctan x$ 在 $x = \pm 1$ 处亦连续, 所以 $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in [-1, 1]$. 由此, 当 $x \neq 0, x \in [-1, 1]$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{x} \arctan x &= (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}. \end{aligned}$$

上式右端当 $x = 0$ 时收敛于 $1 = f(0)$, 故 $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}$, 当 $x \in [-1, 1], x \neq 0$.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2} [f(1) - 1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

评述 本题是近年来考研中出现的另一类新型的热点之一.

例 23 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n-1}$ 的和函数.

分析 只要令替换 $u = \frac{x-1}{x+1}$, 因而化简再求出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} u^{2n-1}$ 的和函数, 重新返回到变量 x .

解 令 $u = \frac{x-1}{x+1}$, 原级数成为 $S(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} u^{2n-1}, x \in (-1, 1)$. $S'(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (u^2)^n = \frac{1}{1-u^2}, u \in (-1, 1)$. $S(u) = \int_0^u \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right|$. 返回到变量 x , 于是得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n-1} = \frac{1}{2} \ln$

$$|x| = \frac{1}{2} \ln x > 0.$$

评述 该题代表了一类函数项级数通过替换成幂级数的讨论问题的方法, 值得注意.

例 24 利用函数的幂级数展开式求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos^2 x \sin^2 x - x^2(1 - x^2)^{\frac{4}{3}}]}{x^6}$.

分析 所求的极限是属于 $\left(\frac{0}{0}\right)$ 型的不定式, 由于分母含有 x^6 , 如用罗必塔法则求极限, 则需使用多次, 比较麻烦, 而用函数的幂级数展开式来求, 将简便得多.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{因为 } \cos^2 x \sin^2 x &= \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x) \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (4x)^{2n} = x^2 - \frac{4^4 \times x^4}{8 \times 4!} + \frac{4^6 \times x^6}{8 \times 6!} - \cdots \\ &= x^2 - \frac{4}{3} x^4 + \frac{32}{45} x^6 - \cdots \end{aligned}$$

又由二项展开式, 有

$$x^2(1 - x^2)^{\frac{4}{3}} = x^2 \left[1 - \frac{4}{3} x^2 + \frac{2}{9} x^4 - \cdots \right] = x^2 - \frac{4}{3} x^4 + \frac{2}{9} x^6 - \cdots$$

$$\text{从而有 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos^2 x \sin^2 x - x^2(1 - x^2)^{\frac{4}{3}}]}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{32}{45} x^6 - \frac{2}{9} x^6 + \cdots}{x^6} = \frac{22}{45}.$$

例 25* (03, 12 分) 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

分析 利用幂级数的性质先展开成幂级数, 然后再求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \text{ 因 } f(x) &= \frac{-2}{1+4x^2} = -2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \text{ 又 } f(0) = \frac{\pi}{4}, \text{ 积分 } f(x) = f(0) + \\ \int_0^x f(t) dt &= \frac{\pi}{4} - 2 \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n t^{2n} \right] dt = \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \text{ 端点 } x = \frac{1}{2} \text{ 处 } f(x) \text{ 连} \\ \text{续, 级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &\text{ 收敛, 故 } f(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 从 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - f\left(\frac{1}{2}\right) \stackrel{f\left(\frac{1}{2}\right)=0}{=} \frac{\pi}{4}.$$

§ 7 - 3 傅里叶级数 典型例题分析与最新考试题型预测

所谓三角级数, 它的一般形式是:

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned}$$

其中 $a_0, a_n, b_n (n=1, 2, \dots)$ 都是常数. 这部分的主要内容是把满足狄利克雷定理中条件的函数展开为傅里叶级数.

一、基本概念

1. 三角函数系及其正交性

函数系 $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ 称为三角函数系. 在任意一个长度为 2π 的区间 $[a, a+2\pi]$ 上 (a 为任意常数), 三角函数系中任意两个不同的函数乘积从 a 到 $a+2\pi$ 的积分等于零, 而系中任一函

数的平方从 a 到 $a + 2\pi$ 的积分都不等于零. 三角函数系的这种性质称为正交性. 因此三角函数系是区间 $[a, a + 2\pi]$ 上的正交函数系.

2. 傅里叶系数与傅里叶级数

若函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上绝对可积, 则称

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数, 简称傅氏系数. 并称三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 简称傅氏级数. 不管这个级数是否收敛, 或者收敛而是否等于 $f(x)$, 都记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

注意 若两个可积函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上除去有限个点处处相等, 那么 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的所有对应的傅里叶系数都是相等的.

二、函数可展开为傅里叶级数的条件(充分条件)

傅里叶级数的收敛定理(狄利克雷条件)

如果 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是满足下列条件:

1. 连续, 或只有有限个第一类间断点;
2. 只有有限个极值点,

那么它的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 的一切点上收敛, 它的和为

$$\begin{cases} (1) f(x), & \text{当 } x \text{ 是 } f(x) \text{ 的连续点} \\ (2) \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)], & \text{当 } x \text{ 是 } f(x) \text{ 的间断点} \\ (3) \frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)], & \text{当 } x = -\pi \text{ 及 } x = \pi \end{cases}$$

为了方便, 我们把上述三种收敛情形称为傅里叶级数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于函数 $f(x)$. 此时称 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可展开为傅里叶级数, 简记为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

注意 由于傅里叶级数的各项都是以 2π 为周期的函数, 因此它所收敛的函数自然也是周期为 2π 的函数. 因此假如把在 $[-\pi, \pi]$ 上满足可展开为傅里叶级数条件的 $f(x)$ 看成是周期为 2π 的函数, 并把它按周期 2π 向左向右延拓(或开拓)出去, 即对任意整数 k , 定义

$$f(x + 2k\pi) = f(x) \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

也即将 $f(x)$ 延拓为在整个区间 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期的函数, 于是它的傅里叶级数在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上都收敛于 $f(x)$ 了. 而且计算傅里叶系数的积分区间可以换成长度为 2π 的任意区间, 例如 $[0, 2\pi]$ 等. 如果 $f(x)$ 本身就是以 2π 为周期的周期函数, 那么 $f(x)$ 当然就不存在延拓问题, 这时, 在整个区间 $(-\infty, +\infty)$ 上其傅里叶级数都收敛于 $f(x)$.

三、奇、偶函数的傅里叶级数

如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足可展开为傅里叶级数的条件, 且 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

如果 $f(x)$ 是奇函数, 则它的傅里叶系数

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

四、任意区间 $[-1, 1]$ 上的傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上满足狄利克雷条件, 作代换 $t = \frac{\pi}{l}x$, 则区间 $-1 \leq x \leq 1$ 就变成了 $-\pi \leq t \leq \pi$. 于是 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

注意 若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为偶函数, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^1 f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为奇函数, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^1 f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

五、区间 $[0, \pi]$, $[0, l]$, $[0, 2\pi]$, $[0, 2l]$, $[a, a+2l]$, $[a, b]$ 上的傅里叶级数

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0, l]$ ($l = \pi$ 时就是 $[0, \pi]$) 上满足狄利克雷条件, 那么可以把函数任意延拓至区间 $[-1, l]$, 也就是给 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上补充定义, 这就得到一个确定在区间 $[-1, l]$ 上的函数 $F(x)$, 它在区间 $[0, l]$ 上与 $f(x)$ 重合. 只要 $F(x)$ 在 $[-1, l]$ 上满足收敛定理的条件, 那么将 $F(x)$ 在区间 $[-1, l]$ 上展开为傅里叶级数, 则 $f(x)$ 也就在区间 $[0, l]$ 上被展开为傅里叶级数了. 但往往需要把 $f(x)$ 展开为只含正弦项或只含余弦项的傅里叶级数, 分别称为傅里叶正弦级数或傅里叶余弦级数, 这只要在 $[-1, l]$ 上补充 $f(x)$ 的定义, 使它在整个区间 $[-1, l]$ 上成奇函数或偶函数, 即定义

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x < l \\ -f(-x), & -1 \leq x < 0 \end{cases} \quad (f(x) \text{ 的奇式延拓})$$

$$\text{或} \quad F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x < l \\ f(-x), & -1 \leq x < 0 \end{cases} \quad (f(x) \text{ 的偶式延拓})$$

如果把 $f(x)$ 作奇式延拓得到奇函数 $F(x)$, 其傅里叶系数为

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad 0 \leq x \leq l$$

如果把 $f(x)$ 作偶式延拓得到偶函数 $F(x)$, 其傅里叶系数为

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad 0 \leq x \leq l$$

注意 (1) 按照奇函数的定义, 须有 $f(0) = 0$, 所以当所给 $f(x)$ 不满足这个条件时, 应改变它在 $x = 0$ 的值, 使符合这个要求.

(2) 如果函数 $f(x)$ 作奇式延拓或偶式延拓, 计算 b_n 或 a_n 时, 实际上只用到 $f(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上的值, 所以不必实际作出 $F(x)$.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2l]$ ($l = \pi$ 时, 就是 $[a, a+2\pi]$ 或区间 $[a, b]$) (b 可以写成 $a+2l$, 即 $b = a+2l$)

$\times \frac{b-a}{2} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ 上满足可展开为傅里叶级数的条件, 其傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

特别, 若 $a = 0$ 时, 就得到 $f(x)$ 在区间 $[0, 2l]$ 上的傅里叶级数展开式:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

综上所述, 将函数 $f(x)$ 展为傅氏级数时, 要注意以下几点:

(1) 首先明确函数 $f(x)$ 在什么区间上展开, 是 $[-\pi, \pi]$ 或是区间 $[-l, l]$ 或是区间 $[0, \pi]$ 等. 从而可确定其傅氏系数和傅氏级数的形式. 并在该区间上验证傅里叶级数收敛定理的条件. (2) 如果 $f(x)$ 是周期函数, 例如周期为 2π , 则一般在区间 $[-\pi, \pi]$ 上展开即可. (3) 如果函数 $f(x)$ 具有奇、偶性, 则计算傅氏系数将简便得多. (4) 分清函数 $f(x)$ 的傅氏级数在其连续点、间断点、以及端点处的收敛情况.

六、典型例题分析与考试题型预测

傅里叶级数不是每年都考, 平均约 4 ~ 5 年考一次.

典型题型 1. 函数展开为傅里叶级数

例 1 把周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 它在一个周期中的定义为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

解 函数 $f(x)$ 在一个周期中的图形如图 7-1, 由于 $f(x)$ 的周期性, 只要在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成傅里叶级数即可. 又因为 $f(x)$ 为奇函数, 故 $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -\frac{\pi}{2} \sin nx dx \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n} (-1)^n + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

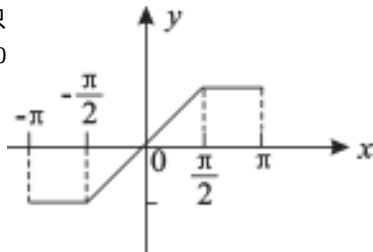


图 7-1

所给函数满足傅里叶级数收敛定理的条件, 于是得

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} \right] \sin nx$$

当 $x = \pm \pi$ 时, 傅里叶级数收敛于零.

典型题型 2. 给出函数的傅里叶级数, 要求它在指定点的收敛和

例 2 设函数 $f(x) = x^2, 0 \leq x < 1, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty$ 其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$, ($n = 1, 2, \dots$). 则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ 等于 (B).

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

解 由系数 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$ 的形式可知, 正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$ 应为函数 $f(x) = x^2, [0, 1]$ 进行奇延拓所展开的傅里叶级数, 故

$$S(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 \leq x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

$S(x)$ 在 $x = -\frac{1}{2}$ 处连续, 故 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$, 选 (B).

例 3 (99 3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$

$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, -\infty < x < +\infty, a_n = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于 (C).

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{3}{4}$

解 应选 (C). $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的分段连续函数, $S(x)$ 是 $f(x)$ 作偶延拓后得到的傅里叶余弦级数, 且 $S(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期, 由傅里叶级数的收敛定理知

$$S\left(-\frac{5}{2}\right) = S\left(-\frac{1}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{2} + 0\right) + f\left(\frac{1}{2} - 0\right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{4}.$$

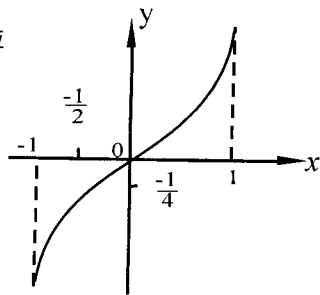


图 7-2

评述 本题主要是考查傅里叶级数的收敛定理.

典型题型 3. 利用函数展开为傅里叶级数求数值级数的收敛和

例 4 将函数 $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$) 展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

分析 本题需要将 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上展开为傅里叶级数, 再计算出 $x = 0$ 处傅里叶级数的收敛和即可求得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 之和.

解 $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$) 是偶函数, 所以 $a_0 = 2 \int_0^1 (2 + x) dx = 5$,

$$a_n = 2 \int_0^1 (2 + x) \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2}, n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

因为所给函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上满足收敛性定理条件, 故

$$2 + |x| = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$$

当 $x = 0$ 时 $2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, 从而 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, 又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{故} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

评述 本题是典型性有代表性的题型方法.

例5* 将函数 $f(x) = x^2$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成傅里叶级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

$$\text{解} \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4(-1)^n}{n^2} (n=1, 2, \dots), \quad b_n = 0 (n=1, 2, \dots).$$

$$\text{所以} \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

令 $x=0$ 得 $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. 令 $x=\pi$ 得 $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. 由此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right] = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

例6 将函数 $f(x) = x^2$ (1) 在区间 $[0, \pi]$ 上展开成正弦级数; (2) 在区间 $[0, \pi]$ 上展开成余弦级数; (3) 在区间 $[0, 2\pi]$ 上展开为傅里叶级数. 并利用这些展开式, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

解 (1) 因为要求把函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ ($l=\pi$) 上展开成正弦级数, 故将 $f(x)$ 作奇式延拓, 即是

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \pi \\ -x^2, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

于是可得

$$a_n = 0 (n=1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x \sin nx}{n^2} + \frac{2 \cos nx}{n^3} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi^2 (-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\} \\ &= 2\pi \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^3} \end{aligned}$$

所给函数满足傅里叶级数收敛定理的条件, 且 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上连续, $f(0)=0$, $f(\pi)=\pi^2 \neq 0$, 于是得到

$$f(x) = x^2 = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} \quad 0 \leq x < \pi$$

当 $x=\pi$ 时, 级数收敛于零.

(2) 按题意, 将 $f(x)$ 作偶式延拓, 即是 $f(x) = x^2 \quad -\pi \leq x \leq \pi$

于是可得

$$b_n = 0 (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \sin nx}{n^3} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2} (-1)^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上连续, 由傅里叶级数收敛定理, 得

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad 0 \leq x < \pi$$

在端点 $x=\pi$ 时, 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)] = \pi^2 = f(\pi)$, 故得

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

(3) 按题意将 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上展开, 于是

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \sin nx}{n^3} \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2x \sin nx}{n^2} + \frac{2 \sin nx}{n^3} \right] \Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上连续, 由傅里叶级数收敛定理得

$$f(x) = x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi$$

在端点 $x = 0$ 和 $x = 2\pi$ 时, 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(0+0) + f(2\pi-0)] = 2\pi^2$, 它不等于 $f(0) = 0$, 也不等于 $f(2\pi) = 4\pi^2$.

由(2), 当 $x = \pi$ 时, 得

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

故得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

由(2), 当 $x = 0$ 时, 得 $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 故得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

将 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ 相加再除以 2 即得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

典型题型 4. 函数在任意区间上展开为傅里叶级数

例 7 (95 6 分) 将 $f(x) = x - 1 (0 \leq x \leq 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

解 $a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) dx = 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{-8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

故 $f(x) = \frac{-8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}, \quad x \in [0, 2]$.

例 8* 设 $f(x) = x, 1 \leq x \leq 2$, 试将 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内展成周期为 2 的傅里叶级数.

分析 本题要求将 $f(x)$ 展为周期为 2 的傅里叶级数, 但 $f(x)$ 的定义区间仅是 $1 \leq x \leq 2$, 因而需要对 $f(x)$ 进行延拓, 而题中没有对如何延拓提出要求, 故可用如下最简单的延拓方法.

解 令 $g(x) = \begin{cases} f(x), & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

现将 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内展成周期为 2 的傅里叶级数, 区间 $[0, 2]$ 可视作区间 $[0, 2l]$, 则 $2l = 2, l = 1$. 便有

$$a_0 = \int_0^2 g(x) dx = \int_1^2 x dx = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 g(x) \cos n\pi x dx = \int_1^2 x \cos n\pi x dx \\ &= \left[\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{(n\pi)^2} \cos n\pi x \right] \Big|_1^2 = \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 g(x) \sin n\pi x dx = \int_1^2 x \sin n\pi x dx \\ &= \left[-\frac{x}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{1}{(n\pi)^2} \sin n\pi x \right] \Big|_1^2 = \frac{(-1)^n - 2}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上满足狄立克莱条件, 故对区间 $(0, 2)$ 内的连续点, 即区间 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 内的点 x 有

$$g(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2} \cos n\pi x + \frac{(-1)^n - 2}{n\pi} \sin n\pi x \right]$$

又在区间 $[1, 2]$ 上 $g(x) \equiv f(x)$, 所以在区间 $(1, 2)$ 内有

$$x = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2} \cos n\pi x + \frac{(-1)^n - 2}{n\pi} \sin n\pi x \right].$$

评述 本题使用有新颖性和代表性, 周期是 2, $f(x)$ 零延拓.

例 9 设 $f(x) = 10 - x (5 \leq x \leq 15)$, 试将 $f(x)$ 展开为以 10 为周期的傅里叶级数.

解 本题要求将 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2l]$ 上展为傅里叶级数, 因 $a = 5, a+2l = 15$, 故 $l = 5$. 所给函数 $f(x)$ 在区间 $(5, 15)$ 上满足傅里叶级数收敛定理的条件, 容易算得其傅里叶系数

$$a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{10}{n\pi} (-1)^n (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由于 $f(x)$ 在 $(5, 15)$ 连续, 故有

$$10 - x = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{5} x, \quad 5 < x < 15$$

在端点 $x = 5$ 和 $x = 15$ 处, $f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(5+0) + f(15-0)] = \frac{1}{2}[5 + (-5)] = 0$.

预测 · 强化训练七

1. 填空题

(1) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1, 1]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = 1$ 处收敛于_____.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1 + x^2, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ 则以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x = \pi$ 处收敛于_____.

(3) 设函数 $f(x) = \pi x + x^2 (-\pi < x < \pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则其中系数 b_3 的值为_____.

(4) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是_____.

(5) 已知 $a_n = \int_0^1 x^2 (1-x)^n dx$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于和_____.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} =$ _____.

2. 选择题

(1) 设 $0 \leq a_n < \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则下列级数中肯定收敛的是:

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $[-1, 1]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = 1$ 处收敛于:

(A) $\frac{3}{2}$ (B) -1 (C) 2 (D) 1

(3) 设 $a > 0$ 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - a^{\frac{1}{n}})$ 是:

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 收敛性与 a 有关

(4) 设 $a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是:

(A) 因为 $1 + \frac{1}{n} > 1$, 所以级数收敛; (B) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = 0$, 所以级数收敛;

(C) 因为 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n}$, 所以级数收敛; (D) 以上都不对.

3. 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (2 - \sqrt[3]{2})(2 - \sqrt[5]{2}) \cdots (2 - \sqrt[2n+1]{2})$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln a}} (a > 0 \text{ 的实数})$;

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}!}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}) \cdots (2+\sqrt{n})}$.

4. 设 $a_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a (a \neq 0)$, 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right|$ 同时收敛或同时发散.

5. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

6*. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是收敛的正项级数, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

7. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛; 反之, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛, 问 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛? 又若

$\{a_n\}$ 是单调的, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

8. 确定下列级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \times 3^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{2n} x^n (1-x)^n$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \times 3^n (x-5)^{2n-1}}$; (5) $1 + \frac{2x}{\sqrt{5} \times 5} + \frac{4x^2}{\sqrt{9} \times 5^2} + \frac{8x^3}{\sqrt{13} \times 5^3} + \frac{16x^4}{\sqrt{17} \times 5^4} + \dots$

9. 就 p 值讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ 的收敛域.

10*. 求下列幂级数在其收敛域中的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n$; (3) $3x^2 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{7}{3}x^6 - \frac{9}{4}x^8 + \dots$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{\frac{n}{2}} x^{3n-1}$; (5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n+1}$;

(6) $(2-x^2) + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{8}x^3 + \frac{9}{16}x^4 - \frac{9\sqrt{3}}{32}x^5 + \dots$

11*. 利用函数的幂级数展开式求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{n!}$; (2) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3^2} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{4 \times 3^4} + \dots$

12. 将下列函数按指定要求展为幂级数, 并确定收敛区间.

(1) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ 展为 x 的幂级数; (2) $\ln \frac{1}{(1+3x+2x^2)}$ 展开为 x 的幂级数;

(3) $\arctg \frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数; (4) $\frac{1}{5-x}$ 展为 $\frac{1}{x-3}$ 的幂级数;

(5) $\int_0^x \sqrt{x} e^x dx$ 展开为 x 的幂级数.

13. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}$ 的收敛区间及和函数 $S(x)$, 再将 $S(x)$ 展为 $(x-2)$ 的幂级数, 并求展开后的幂级数的收敛区间.

14. 利用函数的幂级数展开式求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

15. 展开 $f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$ ($f(x+2\pi) = f(x)$) 为傅里叶级数.

16. 展开函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3}{2}\pi \\ \cos x, & \frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

为傅里叶级数, 并证明 $\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} - \frac{1}{7 \times 9} + \dots$

17. 设 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数, 它在一个周期内的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x \leq 4 \\ x-6, & 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

试将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数.

18. 将函数 $f(x) = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ 在区间 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 上展开为傅里叶级数.

19. (03 4 分) 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 则 $a_2 =$ _____.

简明解答

1. (1) $\frac{3}{2}$. 由狄利克雷定理, 傅里叶级数在端点 $x=1$ 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(-1+0) + f(1-0)] = \frac{1}{2}[2+1] = \frac{3}{2}$.

(2) $\frac{\pi^2}{2}$. 由狄利克雷定理, 傅里叶级数在端点 $x=\pi$ 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)] = \frac{1}{2}[-1+1+\pi^2] = \frac{\pi^2}{2}$.

(3) $\frac{2\pi}{3}$. $b_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi x + x^2) \sin 3x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi x \cdot \sin 3x dx = -\frac{2}{3} \left[x \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi$.

(4) $[-1, 1)$. 收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} = 1$, 收敛区间 $(-1, 1)$. 端点 $x=1$ 处级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散, $x=-1$ 处级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 收敛. 收敛域 $[-1, 1)$.

(5) $\frac{1}{6}$. $a_n = \int_0^1 x^2 (1-x)^n dx \stackrel{1-x=u}{=} \int_0^1 u^2 (1-u)^n du = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

$$(6) 4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) \bigg|_{x=\frac{1}{2}} \stackrel{\text{令}}{=} S(x) \bigg|_{x=\frac{1}{2}} \quad \int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{x}{1-x} \quad (|x| < 1) \quad S(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) \bigg|_{x=\frac{1}{2}} = 4.$$

2. (1) 收敛的是(D). 因为绝对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n^2| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 后者是收敛的, 故前者绝对值级数也收敛, 从而原级数收敛.

(2) (A). 由狄利克雷定理, 傅里叶级数在端点 $x=1$ 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(1-0) + f(1+0)] = \frac{1}{2}[2+1] = \frac{3}{2}$.

(3) (D). 当 $0 < a < 1$ 时 $a^{\frac{1}{n}} \searrow$ 且 $a^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, 故 $(1 - a^{\frac{1}{n}}) \searrow$ 且 $(1 - a^{\frac{1}{n}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, 由莱布尼茨判定法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - a^{\frac{1}{n}})$ 收敛. 应选(D).

(4) (D). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1$, 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

3. (1) $a_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{1}{n}} \right)^n = \left(\frac{1 + \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^2 \neq 0$ 级数发散.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} - \sqrt[n+1]{2}) = \sqrt{2} - 1 < 1$ 级数收敛.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{1}{e} < 1$ 级数收敛.

(4) $a > e$, $\ln a > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln a}}$ 收敛; $0 < a \leq e$, $\ln a \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln a}}$ 发散.

(5) $\ln(n!) = \ln n + \ln(n-1) + \dots + \ln 2 < n \ln n$, $\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n \ln n}$, 因 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 故 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 也发散.

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1 \right) = \dots$ 由拉阿伯判定法知原级数收敛.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} - a_n} \right| \cdot |a_{n+1}| \cdot |a_n| = a^2$ 有限, 故两级数敛散性相同.

5. 部分和 $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = - \left\{ \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k-1}) \right\} = -S_n + na_n$, 题设 $S_n \rightarrow S$, $na_n \rightarrow 0$, 故 $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \rightarrow -S$, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

6. $S_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ 是收敛的, 从而 $\{a_n\}$ 收敛数列, $|a_n| \leq M$, $|a_n b_n| \leq M |b_n|$, $M \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 推出 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

7. $\sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$, 因 $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛. 反之, 不一定收敛. 当 $a_n \nearrow$ 时, 因 $a_n = \sqrt{a_n \cdot a_n} \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; 当 $a_n \searrow$ 时, 因 $a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n+1}} \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 也收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

8. (1) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{n \cdot 3^n} = 3$. 收敛区间 $(0, 3)$. $x=0$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, $x=6$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故收敛域 $[0, 3)$.

6).

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 2^{2(n+1)} \cdot x^{n+1} (1-x)^{n+1}}{n \cdot 2^{2n} \cdot x^n (1-x)^n} \right| = 4 |x(1-x)| < 1, \text{ 即 } -1 < 4x(1-x) < 1 \text{ 左}$$

端不等式 $-1 < 4x(1-x)$, $4x^2 - 4x - 1 < 0$, 右端不等式 $4x(1-x) < 1$, 联合求解知 $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 与

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1} \cdot (\sin x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n \cdot (\sin x)^n}{n}} \right| = 2 \cdot |\sin x| < 1, \frac{-1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}, \text{ 检验端点后知: 收敛区域:}$$

$$\left[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right] \text{ 和 } \left[(2k-1)\pi - \frac{\pi}{6}, (2k-1)\pi + \frac{\pi}{6}\right].$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \cdot 3^n (x-5)^{2n-1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1} (x-5)^{2n+1}} \right| = \frac{1}{3} \frac{1}{|x-5|^2} < 1, |x-5|^2 > \frac{1}{3}, \text{ 即 } x > 5 + \frac{1}{\sqrt{3}}, x < 5 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 时原级}$$

数收敛. 故检验端点后知: 收敛域 $x \geq 5 + \frac{1}{\sqrt{3}}, x \leq 5 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$(5) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{\sqrt{(4n+1)5^n}} \cdot \frac{\sqrt{(4n+5)5^{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 收敛区间 } \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{(4n+1)5^n}} \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}} \text{ 收敛, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{(4n+1)5^n}} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}} \text{ 发散, 收敛域 } \left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$9. R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = 1, \text{ 收敛区间 } (-1, 1).$$

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ $p > 1$ 时绝对收敛 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛 $p \leq 0$ 时发散.

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 1$ 时收敛 $p \leq 1$ 时发散.

$$10. (1) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \text{ 收敛区间 } (0, 2), x = 0, 2 \text{ 时原级数皆发散, 收敛域 } (0, 2). \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$$

$$= (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1} = (x-1) \cdot \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{x-1}{(2-x)^2}, 0 < x < 2.$$

$$(2) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n^2} = 1, \text{ 收敛区间 } (-1, 1), x = -1, 1 \text{ 时原级数发散, 收敛域 } (-1, 1).$$

1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n - 4 \sum_{n=1}^{\infty} x^n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} - \frac{4x}{(1-x)} - \frac{4(x+\ln(1-x))}{x} = \frac{x(3x-2)}{(1-x)^2} - \frac{4(x+\ln(1-x))}{x}, (x \neq 0, |x| < 1).$$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x(3x-2)}{(1-x)^2} - \frac{4(x+\ln(1-x))}{x}, & x \neq 0, |x| < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(3) \text{ 级数写成 } 3x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n} x^{2n} = 3x^2 + S(x), \int_0^x S(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n+1} = x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^2)^n}{n} = x \cdot S_1(x), S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^2)^n}{n}, S_1'(u) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} u^{n-1} = \frac{1}{1+u} - 1, S_1(u)$$

$$= \ln(1+u) - u, S_1(x) = \ln(1+x^2) - x^2, \int_0^x S(x) dx = x[\ln(1+x^2) - x^2], S(x) = \ln(1+x^2) + 2 - \frac{2}{1+x^2} - 3x^2, \text{ 原式 } = \ln(1+x^2) + 2 - \frac{2}{1+x^2}.$$

$$(4) \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{2}x^3)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{2}x^3)^{n-1} \cdot 3\sqrt{2}x^2 = S(x),$$

$$\int_0^x S(x)dx = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n(\sqrt{2}x^3)^{n-1} d(\sqrt{2}x^3) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}x^3)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \sqrt{2}x^3} - 1 \right) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2} \cdot x^3}{1 - \sqrt{2}x^3} \quad \text{求}$$

$$\text{导数 } S(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3x^2(1 - \sqrt{2}x^3) + 3\sqrt{2}x^2 \cdot x^3}{(1 - \sqrt{2}x^3)^2} = \frac{\sqrt{2}x^2}{(1 - \sqrt{2}x^3)^2} \quad \text{即 } \sum_{n=1}^{\infty} n2^{\frac{n}{2}} x^{3n-1} = \frac{\sqrt{2} \cdot x^2}{(1 - \sqrt{2}x^3)^2}.$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n+1} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \right) = x \cdot \left(2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{2n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \right) =$$

$$x \cdot \left(2x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n \right) = x \cdot (2x^2 \cdot e^{x^2} + e^{x^2}) = xe^{x^2} \cdot (2x^2 + 1) \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$(6) \text{级数 } (2 - x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right)^n = (2 - x^2) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right)^n - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) = (2 - x^2) + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x}$$

$$- \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) = (2 - x^2) + \frac{3x^2}{4 + 2\sqrt{3}x}, |x| < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$11. (1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n!} x^n = x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x \cdot S_1(x) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{其中 } S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1},$$

$$\int_0^x S_1(x)dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n = x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = x(e^x - 1), \text{从而 } S_1(x) = e^x - 1 + xe^x. \text{则 } \sum_{n=2}^{\infty}$$

$$\frac{n^2 - 1}{n!} x^n = x(x + xe^x - 1) - (e^x - (1+x)). \text{所以级数的和为 } [x(e^x - 1 + xe^x) - (e^x - (1+x))] \cdot \sum_{n=2}^{\infty}$$

$$\frac{n^2 - 1}{n!} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n!} x^n \right) \Big|_{x=1} = [x(e^x - 1 + xe^x) - (e^x - (1+x))]_{x=1} = e + 1.$$

$$(2) \frac{1}{1} \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \dots = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \right) \Big|_{\frac{1}{3}}. \text{令 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, S'(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \quad S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x), |x| < 1. \text{所以原式} = S\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \ln(1-x) \Big|_{x=\frac{1}{3}} = -\ln \frac{2}{3} = \ln \frac{3}{2}.$$

$$12. (1) \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+x^2)} + x \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n +$$

$$x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2nx^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)x^{2n}, |x| < 1.$$

$$(2) \ln \frac{1}{1+3x+2x^2} = -[\ln(1+2x) + \ln(1+x)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot$$

$$(2^n + 1) \frac{x^n}{n}, \frac{-1}{2} < x \leq \frac{1}{2}.$$

$$(3) \text{令 } f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}, f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \text{积分 } f(x) - f(0) =$$

$$\int_0^x f'(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \text{即 } f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, -1 \leq x < 1.$$

$$(4) \frac{1}{5-x} = \frac{-1}{(x-3)} \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{x-3} \right)} = \frac{-1}{x-3} \left(1 + \frac{2}{x-3} + \left(\frac{2}{x-3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{x-3} \right)^{n-1} + \dots \right)$$

$$= - \left(\frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{2^2}{(x-3)^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{(x-3)^n} + \dots \right). |x-3| > 2 \text{ 或 } x > 5, x < 1.$$

$$\begin{aligned}
 (5) \int_0^x x^{\frac{1}{2}} e^x dx &= \int_0^x x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots \right) dx \\
 &= \int_0^x \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{7}{2}} + \dots + \frac{1}{n}x^{\frac{2n+1}{2}} + \dots \right) dx \\
 &= \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2 \cdot \frac{7}{2}}x^{\frac{7}{2}} + \dots + \frac{1}{n \cdot \frac{2n+3}{2}}x^{\frac{2n+3}{2}} + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!(2n+3)} x^{\frac{2n+3}{2}} \quad x \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^{n-1}} \cdot \frac{3^n}{n+1} = 3. \text{ 收敛区间 } |x| < 3. \text{ 令 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{3} \right)^{n-1}, \int_0^x S(x) dx = 3 \cdot \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n \left(\frac{x}{3} \right)^{n-1} d \left(\frac{x}{3} \right) &= 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n = 3 \left[\frac{1}{1 - \frac{x}{3}} - 1 \right] = \frac{9}{3-x} - 3 \quad S(x) = \frac{9}{(3-x)^2}, |x| < 3, \\
 \frac{9}{[1 - (x-2)]^2} &= 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - (x-2)} \right)' = 9 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \right]' = 9 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^{n-1} = 9 \cdot [1 + 2(x-2) + 3(x-2)^2 + \dots + (n+1)(x-2)^n + \dots] \text{ 收敛区间 } (1, 3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} \right)^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x} \right)^n + \dots \right) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x^3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n} \frac{1}{x^{n-1}} + \dots \right) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$15. f(x) \text{ 在 } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \text{ 上 } \text{周期 } 2\pi, \text{ 计算傅里叶系数.}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - x) \cos nx dx = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - x) \sin nx dx \\
 &= \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

利用狄利克雷定理知

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{4}{\pi} \left\{ \sin x - \frac{1}{3^2} \sin 3x + \frac{1}{5^2} \sin 5x - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)x + \dots \right\}, \\
 -\frac{\pi}{2} &\leq x \leq \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. f(x) \text{ 在 } [0, 2\pi] \text{ 上 } \text{计算傅里叶系数 } a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx \right] = \frac{4}{\pi} \cdot a_n \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) \cos nx dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \cos nx dx \right] \\
 &= \frac{4}{\pi} \begin{cases} 0, & \text{其它} \\ \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2 - 1}, & n = 2k, k = 1, 2, \dots \end{cases} \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) \sin nx dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \cdot \sin nx dx \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

利用狄利克雷定理知

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

$$\text{在展开式中取 } x = 0 \text{ 或 } \pi \text{ 得 } \frac{f(0+0) + f(2\pi-0)}{2} = 1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} \text{ 即 } \frac{\pi-2}{4} =$$

$$\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} - \frac{1}{7 \times 9} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

17. $f(x)$ 在 $[0, \beta]$ 上, 计算傅里叶系数 $a_0 = \frac{1}{4} \int_0^\beta f(x) dx \stackrel{u=x-4}{=} \frac{1}{4} \int_{-4}^4 f(u+4) du = \frac{1}{2} \int_0^4 (u-2) du = 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4} \int_0^\beta f(x) \cos \frac{n\pi x}{4} dx \stackrel{\text{令 } u=x-4}{=} \frac{1}{4} \int_{-4}^{+4} f(u+4) \cos \frac{n\pi(u+4)}{4} du \\ &= \frac{(-1)^n}{2} \cdot \left[\int_0^4 u \cos \frac{n\pi u}{4} du - 2 \int_0^4 \cos \frac{n\pi u}{4} du \right] = \frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{4^2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) \\ &= \begin{cases} \frac{16}{(2k+1)^2 \pi^2}, & n = 2k+1, k=0, 1, 2, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{4} \int_0^\beta f(x) \sin \frac{n\pi x}{4} dx = 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

利用狄利克雷定理知

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{(2n+1)^2 \cdot \pi^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{4}, 0 \leq x \leq 8.$$

18. $f(x)$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上, 计算傅里叶系数:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} dx = \frac{4}{\pi}, a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \frac{nx}{2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{(n+1)x}{2} + \sin \frac{(1-n)x}{2} \right) dx \\ &= \begin{cases} 0, & n = 1, 3, 5, \dots \\ -\frac{4}{\pi \cdot (4k^2 - 1)}, & n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} b_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

利用狄利克雷定理知

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx, -2\pi \leq x \leq 2\pi.$$

19. $a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \cos nx dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx dx = 1.$

第八章 常微分方程*

考试要求

1. 了解微分方程及其解、阶、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法.
3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程, 会用简单的变量代换解某些微分方程.
4. 会用降阶法解下列微分方程 $y^{(n)} = f(x)$, $y'' = f(x, y')$ 和 $y'' = f(y, y')$.
5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构定理.
6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法, 并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.
7. 会求自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数, 以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
8. 会解欧拉方程.
9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

考试要点分析与题型预测

1. 可分离变量的一阶微分方程的解法, 含(1)分离变量方程, (2)齐次方程, (3)一阶线性方程, (4)伯努利方程, (5)全微分方程, 共五种方程的解法, 是微分方程中最基本的方法, 其中可分离变量的解法, 一阶线性方程的解法是最核心的方法, 其它的微分方程都可经过变量转换后变成这两种微分方程求解. 这部分内容几乎年年都会单独考一小题, 有时也会放在应用题中考.

2. 可降阶的高阶微分方程的解法, 含(1) $y' = f(x)$, (2) $y'' = f(x, y')$, (3) $y'' = f(y, y')$, 共三种方程的解法, 最常碰到的是(2)、(3)两种方程解法, 其中最关键步骤是通过变量转换, 将二阶微分方程降低阶数, 变成一阶微分方程, 再用1.中方法求解. 这部分内容也会单独考一小题, 有时会放在应用题中考.

3. 二阶常系数齐次、非齐次线性微分方程(含欧拉方程)的解法, 首先要牢牢掌握齐次方程的特征根法求通解的方法, 再通过线性方程解的结构定理, 把非齐次方程的通解转化成只要求出非齐次方程的特解就行了. 这时, 非齐次方程的待定系数法就能求出这个特解. 这部分内容常常会单独考一小题.

4. 结合实际的应用问题, 通常是引用物理的、力学的定律、几何的知识等, 运用数学的工具建立微分方程与相应的定解条件——数学模型, 再用1、2、3中的方法求解此数学模型, 使应用问题得到解答. 这是把数学知识与物理、力学规律相结合的综合性的训练, 非常重要, 年年都会考一道题, 约占6~7分.

§8-1 一阶微分方程 典型例题分析与最新考试题型预测

一阶微分方程中最基本、最常见的有三种类型, 即可分离变量方程、线性方程与全微分方程. 其它某些方程往往可以通过变量置换, 转变为上述基本类型的方程.

一、可分离变量及可化为分离变量的方程

1. 可分离变量的方程

形如 $y' = f(x)g(y)$ 或 $N_1(x)M_1(y)dx + N_2(x)M_2(y)dy = 0$ 的方程称为可分离变量的方程. 两边同除以 $g(y)$ 或 $M_1(y)N_2(x)$ 以达到分离变量的目的.

通解为 $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$ 或 $\int \frac{N_1(x)}{N_2(x)}dx + \int \frac{M_2(y)}{M_1(y)}dy = c$ (其中 c 是任意常数).

注意 当除以 $g(y)$ 或 $M_1(y)N_2(x)$ 时, 要求 $g(y) \neq 0$ 或 $M_1(y)N_2(x) \neq 0$, 因而可能遗漏使 $g(y) = 0$,

* 数学二不考伯努利方程, 全微分方程, 欧拉方程.

或 $M_1(y)N_2(x) = 0$ 且又适合原方程的解, 作为求解(或解)微分方程也应把这种解求出. 关于这点下面不再重复提出, 解题时应予考虑. 如果是只求通解, 则可不考虑这些不属于通解的解.

2. 齐次方程

形如 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程称为齐次方程.

令代换 $\frac{y}{x} = u$, 引进新的未知数 u , $y' = u + xu'$, 于是原方程化为 $xu' = f(u) - u$

通解为 $\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$

注意 还有不少一阶微分方程, 需经过变量置换, 可以化为分离变量的方程, 这将在下面的例题中看到.

二、线性方程及可化为线性方程的方程

1. 线性方程

对于未知函数及未知函数的一阶导数为线性的(即一次的)一阶方程称为一阶线性微分方程. 其形式为

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (8.1)$$

$$\text{而方程} \quad y' + P(x)y = 0 \quad (8.2)$$

称为对应于方程(8.1)的线性齐次方程. 方程(8.1)则称为线性非齐次方程.

方程(8.2)是可分离变量的方程, 先求出其通解 $y = ce^{-\int p(x)dx}$, 再利用常数变易法, 令

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}$$

是方程(8.1)的解, 代入方程(8.1)后, 求得 $c(x)$.

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c \right]$$

2. 可化为线性方程的方程 —— $f'(y) \frac{dy}{dx} + P(x)f(y) = Q(x)$

令 $f(y) = u$, $f'(y)y' = u'$ 从而方程化为

$$u' + P(x)u = Q(x)$$

通解为 $f(y) = u = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c \right]$

3. 伯努利方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$ (α 实数, $\alpha \neq 0, 1$)

将伯努利方程改写为

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x)$$

这方程正是 2. 的特殊情况. 这里 $f(y) = y^{1-\alpha}$, 因而令 $y^{1-\alpha} = u$,

$$\text{通解为} \quad y^{1-\alpha} = e^{-\int (1-\alpha)p(x)dx} \left[\int (1-\alpha)Q(x)e^{\int (1-\alpha)p(x)dx} dx + c \right]$$

三、全微分方程

全微分方程 如果方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 中的 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 及 $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在单连通区域 D 中连续,

且 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 D 中满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 则此方程称为全微分方程.

由 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 可知方程左端是某一个二元函数 $F(x, y)$ 的全微分, 即 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) = 0$,

称 $F(x, y)$ 为 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 的原函数. 然后用视察(或拼凑)法或偏积分法或线积分法求出 $F(x, y)$. 如用线积分法可求得

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx \quad (x_0, y_0) \in D$$

通解为 $F(x, y) = c$

注意 有不少一阶微分方程,同时属于几种类型,则可选择一种较好的方法求解.

四、典型例题分析与考试题型预测

本段中部分例题属于可分离变量型五类基本方程求解,其余部分例题需要通过变量置换法,转变为上述五类基本方程后再求解.做每道题前请先分清该题属于哪种类型后,再有针对性地选择解法求解.

典型题型1. 五类基本微分方程求解

例1 填空题

(1) 微分方程 $y' + y \cos x = \sin x \cos x$ 的通解为 $y =$ _____.

解 此为一阶线性微分方程,通解为 $y = e^{-\int \cos x dx} \left(\int \sin x \cos x e^{\int \cos x dx} dx + c \right) = ce^{-\sin x} + (\sin x - 1)$

(2) 已知曲线过点 $(0, \rho)$,且其上任一点 (x, y) 处的切线斜率为 $x \ln(1 + x^2)$,则 $f(x) =$ _____.

解 求解 $\frac{dy}{dx} = x \ln(1 + x^2)$, $y|_{x=0} = 0$,得 $y = \int x \ln(1 + x^2) dx + c = \frac{1}{2} [(1 + x^2) \ln(1 + x^2) - x^2] + c$,

定得常数 $c = 0$,故 $y = f(x) = \frac{1}{2} (1 + x^2) [\ln(1 + x^2)]$.

(3) 微分方程 $xy dx + (x^2 - 4x) dy = 0$ 的通解为 _____.

解 原方程化为 $\frac{1}{y} dy = \frac{1}{4 - x} dx$,两边积分得 $\ln y = \ln \left(\frac{c}{4 - x} \right)$, $(x - 4)y = c$.

(4) 求 $x^2 y' + xy = x^4 y^6$ 在 $y(1) = 1$ 的特解为 _____.

解 原方程改写为伯努利方程 $y' + \frac{1}{x} y = x^2 y^6$,按伯努利求解公式 $x^3 y^5 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} x^2 \right)$.

(5) 求微分方程 $(x^2 - 1) dy + (2xy - \cos x) dx = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 0$ 的特解 _____.

解 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$,所以原方程为全微分方程,并求得特解 $y = \frac{\sin x}{x^2 - 1}$.

例2 选择题

(1) 若连续函数满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$,则 $f(x)$ 等于(B).

(A) $e^x \ln 2$ (B) $e^{2x} \ln 2$ (C) $e^x + \ln 2$ (D) $e^{2x} + \ln 2$.

解 由已知关系式两边求导,得 $f'(x) = 2f(x)$,并注意 $f(0) = \ln 2$,求解一阶微分方程及初始条件得 $f(x) = e^{2x} \ln 2$.

(2) 设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关,其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0) = 0$. 则 $f(x)$ 等于(B).

(A) $\frac{e^{-x} - e^x}{2}$ (B) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (C) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$ (D) $1 - \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

解 由曲线积分与路径无关条件可得 $f'(x) + f(x) = e^x$,又 $f(0) = 0$. 共同求出 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(3) 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y \Delta x}{1 + x^2} + \alpha$,且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$,则 $y(1)$ 等于(D).

(A) 2π (B) π (C) $e^{\frac{\pi}{4}}$ (D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

解 由 $\Delta y = \frac{y \Delta x}{1 + x^2} + \alpha$,令 $\Delta x \rightarrow 0$,得 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 + x^2}$,又由 $y(0) = \pi$,共同求出 $\ln y = \arctan x + \ln \pi$,从而得出 $y(1) = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

(4) 已知 $y_1 = x$ 为 $y'' + y = x$ 的解, $y_2 = \frac{1}{2} e^x$ 为 $y'' + y = e^x$ 的解,则微分方程 $y'' + y = x + e^x$ 的通解为(B).

(A) $x + \frac{1}{2} e^x$ (B) $c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x + x$

(C) $c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$

(D) $c_1 \cos x + c_2 \sin x$

例 3(95 Ⅲ 分) 设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + P(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

解 以 $y = e^x$ 代入原方程, 得 $xe^x + P(x)e^x = x$, 解出 $P(x) = xe^{-x} - x$, 代入原方程得 $xy' + (xe^{-x} - x)y = x$.

求出齐次方程 $y' + (e^{-x} - 1)y = 0$ 的通解 $y = ce^{x+e^{-x}}$, 非齐次方程 $y' + (e^{-x} - 1)y = 1$ 的特解 $y^* = e^x$, 所以原方程的通解为 $y = e^x + ce^{x+e^{-x}}$. 由 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 求出 $c = -e^{\frac{1}{2}}$, 故所求特解为 $y = e^x - e^{x-\frac{1}{2}+e^{-x}}$.

例 4 设 $f(x)$ 为连续函数.

(1) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x) \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$ 的解, 其中 a 为正常数;

(2) 若 $|f(x)| \leq k$ (k 为常数), 证明当 $x \geq 0$ 时, 有 $|y(x)| \leq \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$.

解 (1) 原方程的通解

$$y(x) = e^{-\int a dx} [\int f(x)e^{ax} dx + c] = e^{-ax} [F(x) + c]$$

由 $y(0) = 0$, 得 $c = -F(0)$, 故

$$y(x) = e^{-ax} [F(x) - F(0)] = e^{-ax} \int_0^x f(t)e^{at} dt.$$

(2) $|y(x)| \leq e^{-ax} \int_0^x |f(t)| e^{at} dt \leq ke^{-ax} \int_0^x e^{at} dt \leq \frac{k}{a} e^{-ax} [e^{ax} - 1] \quad (x \geq 0).$

例 5 求微分方程 $\cos y dx + (\sin y - e^x \sin 2y) dy = 0$ 的通解.

分析 本题需视 y 为自变量, x 是 y 的函数.

解 原方程改写为

$$-e^{-x} \frac{dx}{dy} - \operatorname{tgy} e^{-x} = -2 \sin y$$

这式可化为线性方程的方程, 令 $e^{-x} = u$, $-e^{-x} \frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}$, 代入上方程得

$$\frac{du}{dy} - \operatorname{tgy} \cdot u = -2 \sin y$$

通解 $u = \frac{1}{\cos y} \left(\frac{1}{2} \cos 2y + c \right)$

故原方程的通解为

$$2e^{-x} \cos y - \cos 2y = c$$

评述 这是微分方程的隐函数形式的解.

例 6 求解 $\left(\sqrt{t^2 + s^2} + \frac{t}{\sqrt{t^2 + s^2}} \right) dt + \frac{s}{\sqrt{t^2 + s^2}} ds = 0$.

解(1) 先将方程化简, 两端同乘以 $\sqrt{t^2 + s^2}$, 得

$$(t^2 + s^2 + t) dt + s ds = 0 \quad \text{即} \quad \frac{ds}{dt} + s = (-t^2 - t)s^{-1}$$

这是伯努利方程 $\alpha = -1$.

令 $s^2 = z$, 得

$$\frac{dz}{dt} + 2z = (-2t^2 - 2t)$$

解得 $z = s^2 = -t^2 + ce^{-2t}$ 为所求通解.

解(2) 以 $\frac{1}{\sqrt{t^2 + s^2}}$ 乘原方程两端消去根号, 得

$$\left(1 + \frac{t}{t^2 + s^2} \right) dt + \frac{s}{t^2 + s^2} ds = 0.$$

用分项组合的方法,上方程写为

$$dt + \left(\frac{t}{t^2 + s^2} dt + \frac{s}{t^2 + s^2} ds \right) = 0$$

方程左端正是二元函数 $F(s, t) = t + \frac{1}{2} \ln(t^2 + s^2)$ 的全微分,通解为 $t + \frac{1}{2} \ln(t^2 + s^2) = c$

典型题型 2. 变量置换法转化为五类基本微分方程

例 7 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y^2 - 6x + 3}{2xy - 2y}$ 的通解.

解 将原方程写为 $\frac{dy}{dx} = \frac{3(x-1)^2 + y^2}{2(x-1)y}$

令 $x-1 = t$, 则 $\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 + y^2}{2ty}$

于是就将原方程化为齐次方程了. 再令 $y = ut$, 则得

$$t \frac{du}{dt} + u = \frac{3 + u^2}{2u}$$

即 $\frac{dt}{t} = \frac{2u}{3 - u^2} du$

积分得 $\ln t = -\ln(3 - u^2) + \ln c$

即 $t(3 - u^2) = c$ 或 $3t^2 - y^2 = ct$

故原方程的通解为 $3(x-1)^2 - y^2 = c(x-1)$

例 8 求微分方程 $(x \ln x) \cos y \cdot y' + x \sin^2 y - \sin y = 0$ 的通解.

解 初看, 这方程似乎不是属于直接可化为线性方程的方程. 但若将方程两端同乘以 $\frac{1}{\sin^2 y}$, 变形为

$$(x \ln x) \left(\frac{\cos y}{\sin^2 y} y' \right) + x - \frac{1}{\sin y} = 0$$

显然可知, 令 $u = \frac{1}{\sin y}$, $\frac{du}{dx} = \frac{-\cos y}{\sin^2 y} y'$

则方程化为 $(x \ln x) u' + u = x$

这就是线性方程了. 解得 $u = \frac{1}{\ln x} (x + c)$

于是, 原方程的通解为 $\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\ln x} (x + c)$

对于此题, 若看不出变换 $u = \frac{1}{\sin y}$, 但由于 $(\sin y)' = \cos y \cdot y'$, 因此也可先令代换 $\sin y = z$, 化为伯努利方程

$$z' - \frac{1}{x \ln x} z = -\frac{1}{\ln x} z^2 \quad (a = 2)$$

然后再令 $z^{-1} = t$, 化为线性方程, 同样可求得如上的通解.

例 9 求解方程 $(xy' - y)^2 = (x^2 - y^2) \left(\arctg \frac{y}{x} \right)^2$.

解 此题不是直接可分离变量的, 也不是线性的, 且不是全微分方程. 考虑到求解微分方程需要积分, 而被积函数若含有 $\left(\arctg \frac{y}{x} \right)^2$ 则积分较繁, 因此引入变量代换

令 $\arcsin \frac{y}{x} = u$, 则 $y = x \sin u$, $y' = \sin u + x \cos u \cdot u'$

代入原方程并整理得 $x^4 \cos^2 u \cdot u'^2 = x^2 \cos^2 u \cdot u^2$

于是得到 $x^2 u'^2 = u^2$ 或 $u' = \pm \frac{u}{x}$

分离变量求得通解为 $y = x \sin c_1$, $y = x \sin \frac{c_1}{x}$

又 $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u = 1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2} = 0$ 时, 得 $y = \pm x$ 与 $y = 0$ 也是方程的解.

评述 经替换后转化为可分离变量方程是关键.

例 10 求解方程 $(x^3 - y^2)dx + (x^2y + xy)dy = 0$.

分析 将方程先分解后经坐标变换换成可分离变量方程

解 将方程改写为 $(xdx + ydy) + y \frac{(xdy - ydx)}{x^2} = 0$ (*)

因为 $xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2)$, $\frac{(xdy - ydx)}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$

故可令 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, 于是

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \frac{y}{x} = \tan \theta$$

代入方程(*)得 $\frac{1}{2}d\rho^2 + \rho \sin \theta d(\tan \theta) = 0$

即 $d\rho + \sec \theta \tan \theta d\theta = 0$

积分得 $\rho + \sec \theta = c_1$

即 $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = c_1$ 或 $(x^2 + y^2)(x + 1)^2 = cx^2$

除此外 $x = 0$ 也是方程的解.

例 11 求解下列微分方程:

$$(1) y' = \frac{y - x + 1}{y + x + 5} \quad (2) y' = \frac{2x^3 + 3xy^2 - 7x}{3x^2y + 2y^3 - 8y}$$

$$(3) (x - 2\sin y + 3)dx + (2x - 4\sin y - 3)\cos y dy = 0$$

分析 本题为 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ 型, 通过变量置换法可转化为齐次方程或一阶线性方程.

解 (1) 解方程组 $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ y + x + 5 = 0 \end{cases}$ 得出 $(x, y) = (-2, -3)$.

令 $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y + 3 \end{cases}$ 代入原方程得 $\frac{dY}{dX} = \frac{Y - X}{Y + X} = \frac{Y/X - 1}{Y/X + 1}$ (齐次方程).

令 $Y = uX$, $\frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dx}$, 代入齐次方程, 得 $u + X \frac{du}{dx} = \frac{u - 1}{u + 1}$, $\frac{u + 1}{u^2 + 1} du = -\frac{dX}{X} \arctan u + \frac{1}{2} \ln(1 + u^2)$
 $= -\ln X + c$, 返回原变量, 得

$$\arctan\left(\frac{y+3}{x+2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y+3}{x+2}\right)^2\right) = -\ln(x+2) + c.$$

$$(2) \text{ 首先将原方程化为 } \frac{ydy}{xdx} = \frac{2x^2 + 3y^2 - 7}{3x^2 + 2y^2 - 8} \frac{d(y^2)}{d(x^2)} = \frac{2x^2 + 3y^2 - 7}{3x^2 + 2y^2 - 8}.$$

$$\text{令 } y^2 = \eta, x^2 = \zeta, \text{ 则原方程变为 } \frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{2\zeta + 3\eta - 7}{3\zeta + 2\eta - 8}, \quad (*)$$

解方程组 $\begin{cases} 2\zeta + 3\eta - 7 = 0 \\ 3\zeta + 2\eta - 8 = 0 \end{cases}$, 得出 $(\zeta, \eta) = (2, 1)$.

令 $X = \zeta - 2$, $Y = \eta - 1$, 代入(*)式, 得

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X + 3Y}{3X + 2Y} = \frac{2 + 3Y/X}{3 + 2Y/X}, \quad (**)$$

再令 $u = \frac{Y}{X}$, 代入(**)式, 得 $\frac{3 + 2u}{2(1 - u^2)} du = \frac{dX}{X}$,

解得 $\frac{1 + u}{(1 - u)^5} = cX$, 返回原变量 $x^2 + y^2 - 3 = c(x^2 - y^2 - 1)^5$.

$$(3) \text{ 原方程变为 } (x - 2\sin y + 3)dx - (2x - 4\sin y - 3)d(\sin y) = 0,$$

$$\text{令 } \sin y = z, \text{ 则方程变为 } \frac{dz}{dx} = \frac{x - 2z + 3}{2x - 4z - 3}. \quad (*)$$

再令 $x - 2z = u$, $1 - 2 \frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx}$, 代入 (*) 式, 则变为 $\frac{du}{dx} = \frac{9}{3 - 2u}$, 解得 $3u - u^2 = 9x + c$, 返回原变量 $3(x - 2\sin y) - (x - 2\sin y)^2 = 9x + c$.

例 12* (1)(99 7 分) 求初值问题 $\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$ 的解.

解 原方程化为齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}$

令 $y = ux$, 原方程化为 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$,

解得 $\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln cx (c > 0)$, 从而 $u + \sqrt{1+u^2} = cx$,

而 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$. 条件 $y|_{x=1} = 0$ 定得 $c = 1$, 最后解为 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2$, 即 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

(2)(01 3 分) 过点 $(\frac{1}{2}, \rho)$ 且满足关系式 $y' \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 1$ 的曲线方程为 $y \arcsin x = x - \frac{1}{2}$.

解 原微分方程可化为 $(y \cdot \arcsin x)' = 1$, 解得 $y \arcsin x = x + c$, 条件 $(\frac{1}{2}, \rho)$ 定得 $c = -\frac{1}{2}$, 最后解为 $y \cdot \arcsin x = x - \frac{1}{2}$.

典型题型 3. 综合性杂题

例 13 求解微分方程 $y' + xy'(-x) = x$.

解 为了求得 $y(x)$, 首先消去 $y'(-x)$, 在方程中以 $-x$ 代 x 得到

$$y'(-x) - xy'(x) = -x$$

和原方程联立, 即得 $\begin{cases} y'(x) + xy'(-x) = x \\ y'(-x) - xy'(x) = -x \end{cases}$

前式减后式乘以 x , 从而消去 $y'(-x)$, 得 $y' + x^2 y' = x + x^2$

这是可分离变量的方程, 分离变量得

$$dy = \frac{x + x^2}{1 + x^2} dx = \frac{x^2 - 1 + 1 + x}{1 + x^2} dx = \left(1 - \frac{1}{1 + x^2} + \frac{x}{1 + x^2}\right) dx$$

两边积分, 求得方程的通解为

$$y = x - \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

例 14* 求满足方程 $\int_0^x f(t)dt = x + \int_0^x tf(x-t)dt$ 的可微函数 $f(x)$.

分析 此题所求的未知函数出现在积分号内, 这样的方程称为积分方程.

解 首先对含参变量的积分 $\int_0^x tf(x-t)dt$ 使用换元法, 使被积函数不出现 $f(x-t)$, 而出现一个变量的函数 $f(u)$, 这将有利于化简和求解积分方程.

令 $x - t = u$, $-dt = du$ 得

$$\begin{aligned} \int_0^x tf(x-t)dt &= - \int_x^0 (x-u)f(u)du \\ &= x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du \end{aligned}$$

代入原积分方程, 得

$$\int_0^x f(t)dt = x + x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

对于这样的积分方程, 求解的一般方法是通过求导消去积分符号, 然后求解微分方程. 为此将上式两端对 x 求导并整理得

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(u) du$$

两端再对 x 求导, 得 $f'(x) = f(x)$

分离变量, 解得 $f(x) = ce^x$

由 $f(x) = 1 + \int_0^x f(u) du$, 可知 $f(0) = 1$, 得 $c = 1$

故所求的 $f(x) = e^x$.

评述 这里求解积分方程都是先将积分方程两端对 x 求导数, 转化为微分方程后, 再求解.

例 15 * 设 $f'(\cos x + 2) = \sin^2 x + \tan^2 x$, 试求 $f(x)$.

解 令 $\cos x + 2 = u$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (u - 2)^2$

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1}{(u - 2)^2} - 1$$

代入方程, 得 $f'(u) = \frac{1}{(u - 2)^2} - (u - 2)^2$

这是可分离变量的方程. 分离变量, 积分得

$$f(u) = -\frac{1}{u - 2} - \frac{1}{3}(u - 2)^3 + c$$

故 $f(x) = \frac{1}{2 - x} - \frac{1}{3}(x - 2)^3 + c$

例 16 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x > 1, \end{cases}$ 且 $f(0) = 0$, 试求函数 $f(x)$.

解 令 $\ln x = t$, 则 $x = e^t$, 代入方程得

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & 0 < e^t \leq 1, \\ e^t, & e^t > 1, \end{cases} \quad \text{或} \quad f'(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ e^t, & t > 0. \end{cases}$$

分别求积分得到通解为 $f(t) = \begin{cases} t + c_1, & t \leq 0, \\ e^t + c_2, & e^t > 0. \end{cases}$

由 $f(t)$ 在 $t = 0$ 的连续性, $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = 0$, 定出 $c_1 = 0$, $c_2 = -1$, 因而求得

$$f(t) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ e^x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

例 17 (04 8 分) 设 $f(u, v)$ 具有连续偏导数, 且满足

$$f_u(u, v) + f_v(u, v) = uv.$$

求 $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$ 所满足的一阶微分方程, 并求其通解.

解 $y' = -2e^{-2x} f(x, x) + e^{-2x} f'_u(x, x) + e^{-2x} f'_v(x, x) = -2y + x^2 e^{-2x}$, 因此, 所求的一阶线性微分方程为

$y' + 2y = x^2 e^{-2x}$. 解得 $y = e^{-\int 2dx} \left(\int x^2 e^{-2x} e^{\int 2dx} dx + C \right) = \left(\frac{x^3}{3} + C \right) e^{-2x}$ (C 为任意常数).

§ 8 - 2 可降阶的高阶微分方程

典型例题分析与最新考试题型预测

1. $y'' = f(x)$ 型.

解 通解为 $y = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + c_1 x + c_2$. 可推广到 $y^{(n)} = f(x)$.

2. $y'' = f(x, y')$ 型.

解 令 $y' = p$, 有 $y'' = p'$, 于是原方程化为 $p' = f(x, p)$, 此为 p 关于 x 的一阶方程. 若可求得此微分方程

的通解 $p = \varphi(x, c_1)$, 于是 $y = \int \varphi(x, c_1) dx + c_2$, 为原方程的通解.

3. $y'' = f(y, y')$ 型.

解 令 $y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 于是原方程化为 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$. 此为 p 关于 y 的一阶方程. 若

可求得此微分方程的通解 $p = \psi(y, c_1)$, 于是 $\int \frac{dy}{\psi(y, c_1)} = \int dx + c_2 = x + c_2$ 就是原方程的隐式通解.

注意 对于 2, 3 两类可降阶的二阶微分方程, 其降阶法可类似地用于高阶的情况.

4. 典型例题分析与考试题型预测

例 1 求微分方程 $yy'' = 2(y'^2 - y')$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的特解.

解 此方程是不显含 x 的. 令 $y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程并化简得

$$y \frac{dp}{dy} = 2(p - 1)$$

上式为可分离变量的一阶微分方程, 解得 $p = y' = cy^2 + 1$

这又是可分离变量的一阶微分方程, 再分离变量得 $\frac{dy}{cy^2 + 1} = dx$

由初条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 定出 $c = 1$, 从而得 $\frac{dy}{1 + y^2} = dx$

两边积分, 得 $\arctg y = x + c_1$ 或 $y = \operatorname{tg}(x + c_1)$.

由 $y(0) = 1$ 定出 $c_1 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. 故所求的特解为 $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

评述 由此例可见, 不是先求出微分方程的通解后再定任意常数, 从而求得所需要的特解, 而是采取边解边定任意常数的做法, 这样就可简单得多. 一般在求解高阶可降阶微分方程的特解时, 常常采用此法.

例 2 求微分方程 $(x + 2)y'' + xy'^2 = y'$ 的通解.

解 这方程是不显含 y 的. 令 $y' = p, y'' = p'$, 代入方程并整理得

$$p' - \frac{1}{x+2}p = \frac{-x}{x+2}p^2.$$

这是伯努利方程 $a = 2$. 解得

$$p = y' = \frac{2x+4}{x^2+c_1}$$

两边积分, 得 $p = \int \frac{2x+4}{x^2+c_1} dx$

右端的积分要涉及 c_1 为正、为负或等于零的各种情况, 因此分别对 $c_1 > 0, c_1 < 0, c_1 = 0$ 求得通解为

$$y = \begin{cases} \ln(x^2 + c_1) + \frac{4}{\sqrt{c_1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{c_1}} + c_2, & c_1 > 0 \\ \ln x^2 - \frac{4}{x} + c_2, & c_1 = 0 \\ \ln |x^2 + c_1| + \frac{2}{\sqrt{-c_1}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{-c_1}}{x + \sqrt{-c_1}} \right| + c_2, & c_1 < 0 \end{cases}$$

例 3 求方程 $xy'' + 2y' = 1$ 满足 $y(1) = 2, y'(1) = 1$ 且当 $x \rightarrow 0$ 时 y 有界的特解.

解法一 此方程是不显含 y 的. 因此令 $y' = p, y'' = p'$ 代入方程降阶后再求解, 读者可作为练习.

解法二 因为 $xy'' + 2y' = (xy')' + y' = (xy' + y)'$, 于是原方程可写为 $(xy' + y)' = 1$

两边积分, 得 $xy' + y = x + c_1$

即 $y' + \frac{1}{x}y = 1 + \frac{c_1}{x}$

这是一阶线性方程,解得 $y = \frac{x}{2} + c_1 + \frac{c_2}{x}$

因为 $x \rightarrow 0$ 时 y 有界,得 $c_2 = 0$. 又 $y'(1) = \frac{1}{2}$, $y(1) = \frac{1}{2} + c_1$, 由已知条件 $y(1) = 2y'(1)$, 得 $c_1 = \frac{1}{2}$. 故方程所求的特解为

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

例 4 求解方程 $y''' + y'' = 1$.

解 此方程是不显含 x , 不显含 y , 不显含 y' 的. 对于不显含 x 又不显含 y 的高阶微分方程, 一般作为不显含 y 处理比较简单. 但本题又不显含 y' , 于是令 $y'' = p$, $y''' = p'$ 代入方程, 得

$$p'^2 + p^2 = 1 \quad \text{或} \quad p' = \pm \sqrt{1 - p^2}$$

显然 $p^2 = 1$ 或 $p = \pm 1$ 是方程的解. 由 $y'' = \pm 1$ 求得

$$y = \pm \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

现考虑 $p \neq \pm 1$, 上述方程是可分离变量的方程, 解得

$$\arcsin p = \pm x + d_1$$

即 $y'' = p = \sin(x + d_1)$ 和 $y'' = p = \sin(d_1 - x)$

分别连续积分两次得

$$y = -\sin(x + d_1) + d_2 x + d_3 \quad \text{和} \quad y = -\sin(d_1 - x) + d_2 x + d_3$$

方程的全部解则还应将 $y = \pm \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$ 包含在其中.

例 5* (00 3 分) 求微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解.

解 本题为可降阶方程第二类型. 令 $p = y'$, $p' = y''$, 原方程变为 $xp' + 3p = 0$, 标准形式为 $p' + \frac{3}{x}p = 0$.

两边同乘 x^3 , 得 $(px^3)' = 0$. 通解为 $y' = p = \frac{c_0}{x^3}$, 积分得 $y = c_1 \frac{1}{x^2} + c_2$.

例 6* (02 3 分) 求微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的解.

解 本题为可降阶方程第三类型. 令 $p = y'$, $p' = p \frac{dp}{dy}$, 代入原方程中得 $yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$.

当 $p = 0$ 应去掉(因不适合初始条件), 剩下为 $y \frac{dp}{dy} = -p$, 分离变量法求得解 $p = \frac{c}{y}$, 代入初始条件定出 $c = \frac{1}{2}$, 故 $p = \frac{1}{2y}$.

返回原变量 $y' = \frac{1}{2y}$, 分离变量法求得解 $y^2 = x + c$, 代入初始条件定出 $c = 1$, 故最后解为 $y^2 = x + 1$, 或 $y = \sqrt{x + 1}$.

§ 8 - 3 高阶线性微分方程 典型例题分析与最新考试题型预测

高阶线性微分方程主要包括一般理论和常系数线性微分方程的求解, 其中解法是重点, 而且以二阶常系数线性方程的解法为最重要.

一、基本概念

1. n 阶线性微分方程 对于未知函数及未知函数的各阶导数是线性的(即一次的)微分方程称为线性微分方程. n 阶线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = Q(x) \quad (8.3)$$

称 $Q(x)$ 为自由项. 而方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (8.4)$$

称为对应于方程(8.3)的 n 阶线性齐次微分方程. 方程(8.3)则称为 n 阶线性非齐次微分方程. 若 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ 都是常数, 则称方程(8.3)(或(8.4))为 n 阶常系数线性非齐次(或齐次)微分方程.

2. 函数的线性相关性 对于一组函数 $y_1(x), \dots, y_n(x)$, 若存在不全为零的 n 个常数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使等式 $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) \equiv 0$

在区间 I 上的一切 x 恒成立, 则称这组函数在区间 I 上线性相关; 否则, 当且仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 时, 上等式才成立, 则称这组函数在区间 I 上线性无关(或线性独立).

3. 函数线性相关、线性无关的判定 若不恒为零的函数 $y_1(x), y_2(x)$ 在区间 I 上满足 $\frac{y_1}{y_2} = \text{常数}$, 则 y_1, y_2

在区间 I 上线性相关; 若 $\frac{y_1}{y_2}$ 在区间 I 上为 x 的函数, 则 y_1, y_2 线性无关.

二、线性微分方程解的结构

1. 线性齐次和非齐次微分方程的解的性质

线性齐次方程的解的叠加性

若 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是方程(8.4)的解, 则 $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ 也是方程(8.4)的解($c_1, c_2, \dots, c_n$ 为任意常数).

线性非齐次方程解的性质:

若 y_i^* 分别是

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + y_n(x)y = Q_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

的解, 则 $y_1^* + y_2^* + \dots + y_k^*$ 是方程

$$y^n + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = Q_1(x) + \dots + Q_k(x)$$

的解. 特别, 对于二阶线性非齐次微分方程

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = Q_1(x) \pm iQ_2(x)$$

若 $y = y_1(x) \pm iy_2(x)$ 是解, 则 y_1 与 y_2 分别是方程

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = Q_1(x) \text{ 与 } y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = Q_2(x) \text{ 的解.}$$

2. 线性齐次和非齐次微分方程的解的关系

若 $y_1(x), y_2(x)$ 是线性非齐次方程(8.3)的解, 则 $y_1 - y_2$ 或 $y_2 - y_1$ 是对应线性齐次方程(8.4)的解.

3. 线性齐次和非齐次微分方程的解的结构

若 $y_1(x), \dots, y_n(x)$ 是 n 阶线性齐次方程(8.4)的解, 且线性无关, 则

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

为其通解(其中 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 为任意常数). 称 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 为方程(8.2)的一组基解组.

线性非齐次方程(8.3)的通解结构

其通解是它的一个特解 y^* 与对应齐次方程(8.4)的通解 Y 之和, 即

$$y(x) = y^* + Y = y^* + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

式中 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 为任意常数.

注意 以上结论, 对于非线性方程一般是不成立的.

三、二阶常系数线性微分方程

1. 二阶常系数线性微分方程

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, 其中 a_1, a_2 为常数.

特征根法 方程 $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ 称为微分方程 $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ 的特征方程.

特征方程	特征方程的根	通解形式
$r^2 + a_1r + a_2 = 0$	两个不相等的实根 r_1, r_2	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
	两个相等的实根 r	$y = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$
	一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

由特征根法知 求二阶常系数线性齐次方程的通解不需要积分 , 只要求出一元二次代数方程的根即可 .
注意 (1) 若求特解 应在求出通解后进行 .
(2) 特征根法可推广至 n 阶常系数线性齐次方程 .
 $y^n + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$
其中而 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是常数 . 这时特征方程是一元 n 次代数方程
 $r^n + a_1 r^{(n-1)} + \dots + a_n = 0$
求出特征根 然后求出 n 个线性无关的解作为基解组 , 而由基解组就立即可以写出通解 .

特征方程	特征根	通解中的对应项
$r^n + a_1 r^{(n-1)} + \dots + a_n = 0$	n 个不相等的实根 $r_1, r_2, \dots, r_n$	$c_i e^{r_i x} (i = 1, 2, \dots, n)$
	r 是 k 重实根	$e^{rx} (c_0 + c_1 x + \dots + c_{k-1} x^{(k-1)})$
	$\alpha \pm i\beta$ 是单根	$e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$
	$\alpha \pm i\beta$ 是 k 重共轭复根	$e^{\alpha x} \{ (c_0 + c_1 x + \dots + c_{k-1} x^{(k-1)}) \cos \beta x + (d_0 + d_1 x + \dots + d_{k-1} x^{(k-1)}) \sin \beta x \}$

2. 二阶常系数线性非齐次微分方程 $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$
根据线性非齐次方程通解的结构可知其通解为 线性非齐次方程的一个特解 y^* 加上对应齐次微分方程的通解 Y 即
 $y = y^* + Y$
因此关键是求 y^* , 我们通常用待定系数法求 y^* .

$f(x)$ 的形式	关 系	y^* 的形式
$P_m(x) e^{\alpha x} \left[\begin{array}{l} a \text{ 实数,} \\ \text{可以为 } 0, \\ P_m(x) \text{ 是} \\ m \text{ 多项式, } m \text{ 可} \\ \text{以为 } 0. \end{array} \right]$	α 不是特征方程根	$e^{\alpha x} Q_m(x)$
	α 是特征方程的单根	$x e^{\alpha x} Q_m(x)$
	α 是特征方程的二重根	$x^2 e^{\alpha x} Q_m(x)$
$P_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$ 或 $P_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$	$\alpha + i\beta$ 不是特征方程的根	$e^{\alpha x} [R_m(x) \cos \beta x + S_m(x) \sin \beta x]$
	$\alpha + i\beta$ 是特征方程的根	$x e^{\alpha x} [R_m(x) \cos \beta x + S_m(x) \sin \beta x]$
$Q_m(x), R_m(x), S_m(x)$ 是 $P_m(x)$ 的同次 (m 次) 多项式 .		

注意 (1) 从通解 $y = y^* + Y$ 的求法可知 求二阶常系数线性非齐次方程的通解不需要积分 .
(2) 若 $f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$
 $= e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x + e^{\alpha x} Q_m(x) \sin \beta x$
则特解 $y^* = y_1^* + y_2^*$, 其中 y_1^*, y_2^* 分别是方程 $y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x$ 和方程 $y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{\alpha x} Q_m(x) \sin \beta x$ 的特解 .
(3) 用常数变易法也可解常系数线性非齐次方程 , 但不如待定系数法方便 , 前者要积分 , 后者只需求导 .

四、欧拉方程

方程 $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} xy' + a_n y = f(x)$ 其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为常数, 称为欧拉方程. 这是特殊的 n 阶变系数线性微分方程. 但在应用上常见, 因而是很重要的一种线性微分方程.

作变量代换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 即可化为常系数线性微分方程来求解. 具体步骤:

$$y' = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \quad y''' = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right), \dots, \quad xy' = \frac{dy}{dt} = Dy, \quad x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = D(D-1)y, \quad x^3 y''' = \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = D(D-1)(D-2)y, \dots, \quad x^k y^{(k)} = D(D-1)(D-2)\dots(D-k+1)y, \dots, D \dots D$$

微分算子. 代入欧拉方程, 得以 t 为自变量的常系数线性微分方程:

$$D(D-1)(D-2)\dots(D-n+1)y + a_1 D(D-1)(D-2)\dots(D-n+2)y + \dots + a_{n-2} D(D-1)y + a_{n-1} Dy + a_n y = f(e^t),$$

其特征方程为 $r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1) + a_1 r(r-1)(r-2)\dots(r-n+2) + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$. 求得特征根 $r_1, r_2, \dots, r_n$, 即可写出与欧拉方程相应的齐次方程的通解 $Y(x)$.

按 $f(x)$ 的不同的形式, 用待定系数法可求得欧拉方程的特解 y^* , 最后 $y = Y + y^*$ 就是欧拉方程的通解.

五、典型例题分析与考试题型预测

典型题型 1. 基本型微分方程解法

例 1 填空题

(1) 微分方程 $y'' + y = ax$ 的通解 $y = ax + c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

(2) 微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的通解 $y = e^x \cdot (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ (因为 $r_{1,2} = 1 \pm i$).

(3) 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x$ 的通解 $y = e^x \cdot (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{4} e^x$ (因为 $r_{1,2} = 1 \pm 2i$, 为一对共轭复根).

(4) $y'' - 4y = \cos x$ 的通解为 $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} \cos x$.

例 2 选择题

(1) 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的解, c_1, c_2 是任意常数, 则该非齐次方程的通解是:

(A) $c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_3$,

(B) $c_1 y_1 + c_2 y_2 + (c_1 + c_2) y_3$

(C) $c_1 y_1 + c_2 y_2 - (1 - c_1 - c_2) y_3$,

(D) $c_1 y_1 + c_2 y_2 + (1 - c_1 - c_2) y_3$

解 (D). $c_1(y_1 - y_3) + c_2(y_2 - y_3) + y_3$ 其中 $(y_1 - y_3)$ 与 $(y_2 - y_3)$ 线性无关, 是齐次方程的解, 又 y_3 是非齐次方程的特解.

(2) (04 4 分) 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的一个特解应具有形式 (式中 a, b, A, B 为常数)

(A) $ax^2 + bx + c + x(A \cos x + B \sin x)$

(B) $x(ax^2 + bx + c + A \cos x + B \sin x)$

(C) $ax^2 + bx + c + A \sin x$

(D) $ax^2 + bx + c + A \cos x$

解 特征方程的特征根 $r_{1,2} = \pm i$, 故特解形式 y^* 选 (A).

(3) 设 $y = f(x)$ 是微分方程 $y'' - y' - e^{\sin x} = 0$ 的解, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在

(A) x_0 的某个邻域内单调增加

(B) x_0 的某个邻域内单调减少

(C) x_0 处取得极小值

(D) x_0 处取得极大值

解 (C). 因为 x_0 是 $f(x)$ 的驻点. 又 $f''(x_0) = f'(x_0) + e^{\sin x_0} = e^{\sin x_0} > 0$, 故 $f(x)$ 在 x_0 处取最小值.

(4) (06 4 分) 函数 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + xe^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3xe^x$.

(B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

(D) $y'' + y' - 2y = 2e^x$.

解 从给出的函数 y 分析 $x = 1, x = -2$ 是齐次方程的特征根, 只能选 (C)、(D). 将函数 $y(x)$ 代入 (C) 不满足, 故只能选 (D).

例 3 求下列微分方程的解

(1) 求微分方程 $y''' + 6y'' + (9 + a^2)y' = 1$ 的通解, 其中常数 $a > 0$.

解 方程的特征根 $r_1 = 0$, $r_{2,3} = -3 \pm ai$, 对应齐次方程的通解为

$$Y = c_1 + e^{-3x}(c_2 \cos ax + c_3 \sin ax).$$

另求得原方程的特解 $y^* = \frac{x}{9 + a^2}$. 因此原方程的通解为:

$$y = Y + y^* = c_1 + e^{-3x}(c_2 \cos ax + c_3 \sin ax) + \frac{x}{9 + a^2}.$$

(2) 求微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解.

解 原方程所对应的齐次方程的通解 $Y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. 而非齐次方程 $y'' + y = x$ 及 $y'' + y = \cos x$ 的特解分别为 $y_1 = x$ 及 $y_2 = \frac{1}{2}x \sin x$. 所求原方程的通解为

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x + \frac{x \sin x}{2}.$$

评述 这里求原方程的特解时, 是分别求出两个方程 $y'' + y = x$, $y'' + y = \cos x$ 的特解 y_1, y_2 后, 再相加 $y_1 + y_2$. 此种方法有普通意义.

(3) 设二阶常系数线性微分方程 $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$ 的一个特解为 $y = e^{2x} + (1 + x)e^x$. 试确定常数 α, β, γ , 并求该方程的通解.

解 将 $y = e^{2x} + (1 + x)e^x$ 代入原方程, 得

$$(4 + 2\alpha + \beta)e^{2x} + (3 + 2\alpha + \beta)e^x + (1 + \alpha + \beta)xe^x = \gamma e^x$$

比较同类项的系数, 有 $\begin{cases} 4 + 2\alpha + \beta = 0, \\ 3 + 2\alpha + \beta = \gamma \\ 1 + \alpha + \beta = 0. \end{cases}$ 解方程组, 得 $\alpha = -3, \beta = 2, \gamma = -1$, 即原方程为 $y'' - 3y' + 2y = -e^x$.

故齐次方程的通解 $Y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$, 应用题设的特解, 原方程的通解为:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + [e^{2x} + (1 + x)e^x] = c_3 e^x + c_4 e^{2x} + xe^x.$$

(4) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 且 $[xy(x + y) - f(x)y]dx + [f'(x) + x^2y]dy = 0$ 为一全微分方程, 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

解 由全微分方程的充要条件 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 知 $f''(x) + 2xy = x^2 + 2xy - f(x)$, 即 $f''(x) + f(x) = x^2$.

求解 $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (x^2 - 2)$. 则 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 定出 $c_1 = 2, c_2 = 1$, 从而得 $f(x) = 2 \cos x + \sin x + (x^2 - 1)$.

这样, 原方程为

$$[xy^2 - (2 \cos x + \sin x)y + 2y]dx + (-2 \sin x + \cos x + 2x + x^2y)dy = 0$$

用凑微分法:

$$(xy^2 dx + x^2 y dy) - (2 \cos x + \sin x)y dx - (2 \sin x - \cos x)dy + 2(y dx + x dy) = 0$$

从而得原函数为:

$$\frac{1}{2}x^2 y^2 - 2y \sin x + y \cos x + 2xy = c.$$

评述 亦可用线积分法求出全微分方程的解仍为上式.

(5) (96, 7分) 设对任意 $x > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, 求 $f(x)$ 的一般表达式.

解 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线方程为 $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$. 令 $X = 0$, 得截距 $Y = f(x) - xf'(x)$. 由题意, 知 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(x) - xf'(x)$, 即 $\int_0^x f(t) dt = x[f(x) - xf'(x)]$. 此式对 x 求导, 化简得 $xf''(x) + f'(x) = 0$, 即 $\frac{d}{dx}(xf'(x)) = 0$. 积分得 $xf'(x) = c_1$, 因此 $f(x) = c_1 \ln x + c_2$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

(6)(97 6分) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 而 $z = f(e^x \sin y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} \cdot z$, 求 $f(u)$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^x \sin y + f'(u)e^{2x} \sin^2 y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \cos^2 y.$$

代入原方程, 得 $f''(u) - f(u) = 0$. 解此方程, 便得 $f(u) = c_1 e^u + c_2 e^{-u}$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

(7)(98 5分) 利用代换 $y = \frac{u}{\cos x}$ 将方程 $y'' \cos x - 2y' \sin x + 3y \cos x = e^x$ 化简, 并求出原方程的通解.

$$\text{解} \quad y = u \sec x, \quad y' = u' \sec x + u \sec x \cdot \tan x,$$

$$y'' = u'' \sec x + 2u' \sec x \tan x + u \sec x \tan^2 x + u \sec^3 x.$$

代入原方程后化简得 $u'' + 4u = e^x$. 其通解

$$u = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{e^x}{5} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数})$$

从而原方程的通解为

$$y = c_1 \frac{\cos 2x}{\cos x} + c_2 \sin x + \frac{e^x}{5 \cos x}.$$

(8) 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt + e^{2x}$, 求 $f(x)$.

解 两端同时对 x 求导, 得一阶线性微分方程 $f'(x) - 3f(x) = 2e^{2x}$. 解此方程, 有 $f(x) = e^{3x} \left[\int 2e^{2x} e^{-3x} dx + c \right] = e^{3x} (c - 2e^{-x}) = ce^{3x} - 2e^{2x}$.

例4(97 6分) 设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足 $f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy$, 求 $f(t)$.

$$\text{解} \quad \text{由于} \quad \iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}r\right) r dr = 2\pi \int_0^{2t} rf\left(\frac{r}{2}\right) dr$$

$$\text{所以} \quad f(t) = e^{4\pi t^2} + 2\pi \int_0^{2t} rf\left(\frac{r}{2}\right) dr.$$

求导后, 得 $f'(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2} + 8\pi t f(t)$. 这是关于 $f(t)$ 的一阶线性非齐次微分方程, 其通解为

$$f(t) = e^{\int 8\pi t dt} \left(\int 8\pi t e^{4\pi t^2} e^{-\int 8\pi t dt} dt + c \right) = (4\pi t^2 + c) e^{4\pi t^2}.$$

由 $f(0) = 1$ 推出 $c = 1$. 因此 $f(t) = (4\pi t^2 + 1) e^{4\pi t^2}$.

例5(00 6分) 求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的解.

解 改写微分方程为 $y'' - 2y' = e^{2x}$, 齐次方程 $y'' - 2y' = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, 其特征根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$, 齐次方程通解为 $Y(x) = c_1 + c_2 e^{2x}$. 设非齐次方程的特解为 $y^* = A x e^{2x}$, 代入原微分方程求得 $A = \frac{1}{2}$,

故 $y^* = \frac{1}{2} x e^{2x}$. 原微分方程通解 $y = c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x}$. 将条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 代入通解中定得 $c_1 = \frac{3}{4}$,

$$c_2 = \frac{1}{4}, \text{ 最后得特解为 } y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(1 + 2x)e^{2x}.$$

例6*(01 3分) 设 $y = e^x(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$ (c_1, c_2 为任意常数) 为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解, 则该方程为 $y'' - 2y' + 2y = 0$.

解 分析通解的形式知 $r_{1,2} = 1 \pm i$. 据此 $(r - r_1)(r - r_2) = (r - 1 - i)(r - 1 + i) = r^2 - 2r + 2 = 0$. 故所求的二阶常系数线性齐次微分方程是 $y'' - 2y' + 2y = 0$.

例7*(02 3分) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A) 不存在 (B) 等于1 (C) 等于2 (D) 等于3.

$$\text{解 计算极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} \xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{y'(x)} \xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^2}}{y''(x)}$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} (y'' + py + qy) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{3x} = 1$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} y'' = 2, \text{ 从而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = 2 \quad \text{即 C 是正确答案}$$

例 8 求下列四个函数 $y_1 = e^x$ $y_2 = 2xe^x$ $y_3 = \cos 2x$ $y_4 = 3\sin 2x$ 为解的常系数线性齐次微分方程, 并求出它的通解.

解 首先易知所给四个函数 y_1 y_2 y_3 y_4 的朗斯基行列式不恒等于零, 故它们线性无关, 因此它们组成一四阶常系数线性齐次方程的基解组, 其通解为

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + c_4 y_4(x) = e^x(c_1 + 2c_2 x) + c_3 \cos 2x + 3c_4 \sin 2x \\ &= e^x(c_1 + c'_2 x) + c_3 \cos 2x + c'_4 \sin 2x (c'_2 = 2c_2, c'_4 = 3c_4) \end{aligned}$$

这样形式的通解其对应的特征方程为

$$(r-1)^2(r^2+4)=0$$

$$\text{即 } r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = 0$$

故所求的常系数线性齐次微分方程为

$$y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$$

例 9 设 $y'' + k^2 y = 0$ ($k > 0$ 为常数). 1) 确定常数 k , 使微分方程有满足 $y(0) = 0$ $y(1) = 0$ 的非零解; 2) 对于微分方程的任意一个解 y , 证明 $y'^2 + k^2 y^2$ 为常数.

解 (1) 这是一个微分方程的边值问题. 其特征方程为

$$r^2 + k^2 = 0, r = \pm ki$$

故所给微分方程的通解为

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

当 $x = 0$ $y(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$, 于是 $y = c_2 \sin kx$;

当 $x = 1$ $y(1) = 0$ 得 $c_2 \sin k = 0$, 要使有非零解, 则 $c_2 \neq 0$, 从而有 $\sin k = 0$, 故

$$k = n\pi (n = 1, 2, \dots)$$

(2) 因为此微分方程的任一个解为 $y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ 其中 c_1, c_2 为常数.

$$y' = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$$

$$y'^2 = (-c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx)^2$$

$$k^2 y^2 = k^2 (c_1 \cos kx + c_2 \sin kx)^2$$

故 $y'^2 + k^2 y^2 = k^2 (c_1^2 + c_2^2) = c$ (c 为常数)

例 10 写出微分方程 $y'' - 2y' + \lambda y = xe^{\alpha x} + \sin 2x$ 的通解形式, 其中 λ, α 为任意实数.

解 所给方程对应齐次方程的特征方程为

$$r^2 - 2r + \lambda = 0$$

特征根为 $r_1 = 1 + \sqrt{1-\lambda}$ $r_2 = 1 - \sqrt{1-\lambda}$

(1) 若 $\lambda = 1$ $\alpha = 1$ 则特征根为二重根 $r_1 = r_2 = 1$ 故通解形式为

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x + x^2 e^x (A_1 x + A_0) + B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x$$

(2) 若 $\lambda = 1$ $\alpha \neq 1$ 则通解形式为

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x + (A_1 x + A_0)e^{\alpha x} + B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x$$

(3) 若 $\lambda < 1$ $\alpha = 1 + \sqrt{1-\lambda}$ 或 $\alpha = 1 - \sqrt{1-\lambda}$ 则通解形式为

$$y = c_1 e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x} + xe^{\alpha x} (A_1 x + A_0) + B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x$$

(4) 若 $\lambda < 1$ $\alpha \neq 1 + \sqrt{1-\lambda}$ $\alpha \neq 1 - \sqrt{1-\lambda}$ 则通解形式为

$$y = c_1 e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x} + e^{\alpha x} (A_1 x + A_0) + B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x$$

(5) 若 $\lambda > 1$ $r_1 = 1 + \sqrt{\lambda-1}$ $r_2 = 1 - \sqrt{\lambda-1}$ 于是通解形式为

$$y = e^x (c_1 \cos \sqrt{\lambda-1}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda-1}x) + e^{\alpha x} (A_1 x + A_0) + B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x.$$

典型题型2. 通过变量置换化为基本型微分方程

例11 求解微分方程 $\frac{d^4 x}{dt^4} + 12 \frac{d^2 x}{dt^2} = 4\cos t \cos 3t + 6\sin^2 t$.

解 考虑到方程左边正好只有 x 对 t 的二阶导数和四阶导数, 因此

令 $\frac{d^2 x}{dt^2} = y$, 则 $\frac{d^4 x}{dt^4} = \frac{d^2 y}{dt^2}$, 这样将微分方程降为 y 对 t 的二阶微分方程. 又方程右端自由项 $4\cos t \cos 3t + 6\sin^2 t$

用三角公式化为 $2\cos 4t - \cos 2t + 3$, 因而原方程化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 12y = 2\cos 4t - \cos 2t + 3 \quad (1)$$

设特解 $y^* = y_1^* + y_2^* + y_3^*$, 其中 y_1^*, y_2^*, y_3^* 分别是方程(1)的右端的自由项为 $2\cos 4t, -\cos 2t, 3$ 的特解. 下面分别求 y_1^*, y_2^*, y_3^* . 考虑方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 12y = 2\cos 4t \quad (2)$$

其对应齐次方程的特征方程为

$$r^2 + 12 = 0$$

特征根为 $r = \pm 2\sqrt{3}i$

故方程(2)的对应齐次方程的通解为

$$y = c_1 \cos 2\sqrt{3}t + c_2 \sin 2\sqrt{3}t$$

注意 方程(2)的左边为 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 12y$ 而无 $\frac{dy}{dt}$ 项, 而右边为 $2\cos 4t$, 故可设特解

$$y_1^* = A \cos 4t$$

则 $y_1^{*'} = -4A \sin 4t, y_1^{*''} = -16A \cos 4t$

用待定系数法可求得 $A = -\frac{1}{2}$

故 $y_1^* = -\frac{1}{2} \cos 4t$. 同理可求得 $y_2^* = -\frac{1}{8} \cos 2t$

用视察法可求得 $y_3^* = \frac{1}{4}$

于是得到方程(1)的通解为

$$y = c_1 \cos 2\sqrt{3}t + c_2 \sin 2\sqrt{3}t - \frac{1}{2} \cos 4t - \frac{1}{8} \cos 2t + \frac{1}{4}$$

因为 $y = \frac{d^2 x}{dt^2}$, 将上式连续积分两次, 求得原方程的通解

$$x = -\frac{c_1}{12} \cos 2\sqrt{3}t - \frac{c_2}{12} \sin 2\sqrt{3}t + \frac{1}{32} \cos 4t + \frac{1}{32} \cos 2t + \frac{1}{8} t^2 + d_1 t + d_2.$$

例12 求方程 $y'' + 4y = 3|\sin x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 的特解.

解 特征方程为 $r^2 + 4 = 0$, 特征根是 $r = \pm 2i$, 原方程对应齐次方程的通解为

$$Y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

为了求原方程的特解, 将原方程改写为

$$y'' + 4y = \begin{cases} 3\sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ -3\sin x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

在 $[0, \pi]$ 上, 设特解 $y_1^* = A \sin x + B \cos x$ 代入方程, 定出

$$A = 1, B = 0$$

故 $y_1^* = \sin x$

同理, 在 $[-\pi, 0]$ 上, 求得方程特解 $y_2^* = -\sin x$. 于是得原方程通解为

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \sin x \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$y = c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x - \sin x \quad -\pi < x < 0$$

由条件 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 定出 $c_1 = 1$ $c_2 = -\frac{1}{2}$. 再由所求的解在 $x = 0$ 的连续性和可导性, 定出 $c_3 = 1$, $c_4 = \frac{1}{2}$. 故所求的特解为

$$y = \begin{cases} \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - \sin x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

例 13 (1) 设 $y(x)$ 的二阶导数函数连续, 且 $y'(0) = 0$, 试由方程

$$y(x) = 1 + \frac{1}{3} \int_0^x [6te^{-t} - 2y(t) - y''(t)] dt$$

确定函数 $y(x)$.

解 这个方程的特点是所求的未知函数与它的导数出现在方程中的积分号内, 这样的方程称为微分积分方程. 由于具有积分方程的特点, 一般先将方程两端对 x 求导, 得

$$y'(x) = \frac{1}{3} [6xe^{-x} - 2y(x) - y''(x)]$$

即 $y'' + 3y' + 2y = 6xe^{-x}$

这是二阶常系数线性非齐次方程. 解之, 得通解为

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + x(Ax + B)e^{-x} \quad \text{可求得 } A = 3 \quad B = -6 \text{ 所以有}$$

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + (3x^2 - 6x)e^{-x}$$

由假设 $y'(0) = 0$ 且由所给微分积分方程可知 $y(0) = 1$ 定出 $c_1 = -7$ $c_2 = 8$. 故所求的函数为

$$y(x) = -7e^{-2x} + 8e^{-x} + (3x^2 - 6x)e^{-x}$$

(2) 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$. 其中 f 为连续函数, 求 $f(x)$.

解 积分号里提出 x $f(x) = \sin x - x \cdot \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$, 两端对 x 求导, 得

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt - f(x) \quad \text{即 } f''(x) + f(x) = \sin x.$$

通解 $f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{x}{2} \cos x$.

由 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 的表达式有

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad \text{求得 } c_1 = \frac{1}{2} \quad c_2 = 0 \quad \text{得出}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x.$$

评述 本题微分积分方程求解方法具有普遍意义. 第(2)小题的初始条件蕴含于方程之中.

例 14 已知 $y'' + (x + e^{2y})y' = 0$, 若把 x 看成因变量 y 看成自变量, 则方程化为什么形式?

$$\text{解 因为 } y' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad y'' = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \right] \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = - \frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

代入方程并化简得到二阶常系数线性非齐次方程

$$\frac{d^2x}{dy^2} - x = e^{2y}$$

解之, 求得通解为

$$x = c_1 e^y + c_2 e^{-y} + \frac{1}{3} e^{2y} \quad (\text{求解过程读者自己完成.})$$

例 15 求微分方程 $(x+1)y'' + y' = \ln(x+1)$ 的通解.

解 因为方程两端都含有 $(x+1)$, 故可先作变量代换化简方程.

$$\text{令 } x+1=t, \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

原方程化为

$$t \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \ln t \quad (1)$$

方程(1) 是不显含 y 的可降阶的微分方程.

$$\text{令 } \frac{dy}{dt} = p, \text{ 则 } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dp}{dt}, \text{ 代入方程(1) 得}$$

$$\frac{dp}{dt} + \frac{1}{t}p = \frac{1}{t} \ln t$$

求解此一阶线性微分方程, 得

$$p = \frac{1}{t}(\ln t - t + c_1)$$

$$\text{即 } \frac{dy}{dt} = \ln t - 1 + \frac{c_1}{t}$$

再两边对 t 积分, 得

$$y = t \ln t - 2t + c_1 \ln t + c_2 = (x+1) \ln(x+1) - 2(x+1) + c_1 \ln(x+1) + c_2$$

如果将方程(1) 的两端同乘 t , 则得到欧拉方程. 因此方程(1) 也可作为欧拉方程来求解.

方程左端正好是 $(x+1)y'$ 对 x 的导数, 即

$$[(x+1)y']' = \ln(x+1)$$

两边对 x 积分, 得

$$(x+1)y' = x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + c_1$$

$$\text{即 } y' = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} + \frac{c_1}{x+1}$$

两边再对 x 积分, 得

$$y = x \ln(x+1) - 2x + c_1' \ln(x+1) + c_2 \quad (c_1' = c_1 + 2)$$

例 16* 已知 $\varphi(1) = 0, \varphi'(1) = 0$, 确定 $\varphi(x)$, 使方程

$$[3x^3 - 2\varphi(x)]ydx - [x^2\varphi'(x) + \sin y]dy = 0$$

为全微分方程, 并求上述方程满足 $y(1) = \frac{\pi}{2}$ 的特解.

解 要使该方程为全微分方程, 则必须满足

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

$$\text{现 } P(x, y) = [3x^3 - 2\varphi(x)]y, Q(x, y) = -[x^2\varphi'(x) + \sin y]$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^3 - 2\varphi(x), \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x\varphi'(x) - x^2\varphi''(x)$$

$$\text{故得 } x^2\varphi''(x) + 2x\varphi'(x) - 2\varphi(x) = -3x^3$$

这是欧拉方程. 令 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 得到

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} - 2\varphi = -3e^{3t}$$

求解此二阶常系数线性非齐次方程, 得

$$\varphi = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \frac{3}{10} e^{3t} \quad \text{即} \quad \varphi(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10} x^3$$

$$\varphi'(x) = c_1 - \frac{2c_2}{x^3} - \frac{9}{10} x^2$$

$$\text{由条件 } \varphi(1) = 0, \varphi'(1) = 0 \text{ 定出 } c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{5} \text{ 故 } \varphi(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{5x^2} - \frac{3}{10} x^3$$

此时原微分方程为全微分方程

$$\left(\frac{18}{5}x^3 - x + \frac{2}{5x^2}\right)ydx - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{5x} - \frac{9}{10}x^4 + \sin y\right)dy = 0$$

由图 8-1 其原函数

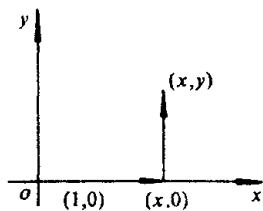


图 8-1

$$F(x, y) = - \int_0^y \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{5x} - \frac{9}{10}x^4 + \sin y \right) dy = \left(\frac{9}{10}x^4 - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{5x} \right)y + \cos y - 1$$

于是上述全微分方程的通解为 $\left(\frac{9}{10}x^4 - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{5x} \right)y + \cos y = c$ 由初始条件: $y(1) = \frac{\pi}{2}$ 得到 $c = 0$

故所求的特解为

$$\left(\frac{9}{10}x^4 - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{5x} \right)y + \cos y = 0$$

评述 本题从全微分方程条件出发, 推出 $\varphi(x)$ 应满足的条件, 求解出 $\varphi(x)$ 之后, 再回过头来用线积分求解全微分方程, 思想方法精练, 是一种有代表性的方法.

例 17 (03, 12 分) 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y'(x) \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数. (1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

分析 利用求导公式变换微分方程后, 求解 $y(x)$ 的微分方程.

解(1) 由 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, $y' \cdot \frac{dx}{dy} = 1$. 两端对 x 求导 $y'' \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{d^2x}{dy^2}(y')^2 = 0$, 即 $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{dx}{dy} \cdot y''}{(y')^2}$. 代入原方程整理后得 $y'' - y = \sin x$.

(2) 齐次方程 $y'' - y = 0$ 的通解 $Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. 设非齐次方程 $y'' - y = \sin x$ 的特解 $y^* = A \cos x + B \sin x$, 将此 y^* 代入非齐次方程中可得 $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$, 故 $y^* = -\frac{1}{2} \sin x$. 从而非齐次方程的通解 $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$. 由初始条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{2}$ 可得 $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. 最后, 解为 $y(x) = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$.

例 18 (05, 12 分) 用变量代换 $x = \cos t$ ($0 < t < \pi$) 化简微分方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ 的特解.

分析 用复合函数求导法算出 y' 、 y'' 后, 代入微分方程中, 化简得出二阶常系数线性微分方程, 再求解.

解 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{\sin t} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t} \cdot \frac{dy}{dt}$. 代入整理得出常系数二阶线性微分方程 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$, 其通解 $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. 换回变量 x 得出 $y = C_1 x + C_2 \sqrt{1 - x^2}$,

由 $y \Big|_{x=0} = 1$, $y' \Big|_{x=0} = 2$ 得 $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, 原微分方程的特解 $y = 2x + \sqrt{1 - x^2}$.

典型题型 3. 欧拉(型)方程解法

例 19 求 $x^2 y'' - xy' = 4x - 3x^2$ 的通解.

解 这是欧拉型方程. 令 $x = e^t$, $y' = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$, 代入原方程后得 $\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} = 4e^t - 3e^{2t}$, 此为二阶线性常系数非齐次方程, 首先容易求得齐次方程 $\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} = 0$ 的通解为 $Y = c_1 + c_2 e^{2t}$. 然后分别求得 $\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} = 4e^t$, $\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} = -3e^{2t}$ 的特解为 $y_1^* = -4e^t$, $y_2^* = -\frac{3}{2}te^{2t}$. 所以原方程的通解为 $y = c_1 + c_2 e^{2t} - 4e^t - \frac{3}{2}te^{2t}$. 返回原变量, 得原方程的通解 $y = c_1 + c_2 x^2 - 4x - \frac{3}{2}x^2 \ln x$.

例 20 设函数 $f(x)$ 满足方程 $x^4 f''(x^2) + 3x^2 f'(x^2) + f(x^2) = 0$, 求 $f(x)$.

解 这是欧拉型方程. 令 $x^2 = e^t$, 令 $f(x^2) = f(e^t) = \varphi(t)$, 则原方程变为 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = 0$, 此为二阶线性常系数齐次方程. 求得此方程的通解为 $\varphi = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$. 返回原变量 $f(x^2) = (c_1 + c_2 \ln x^2) \cdot \frac{1}{x^2}$, 故

原方程的通解 $f(x) = \frac{c_1 + c_2 \ln x}{x}$.

例 21 (04 4 分) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为 $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$

解 作变量代换 $x = e^t, t = \ln x$, 原方程变成 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$, 其解为 $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$, 返回到原变量

后, 得出通解为 $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

§ 8 - 4 微分方程的应用 典型例题分析与最新考试题型预测

用微分方程解决实际问题, 包括建立微分方程、确定初始条件和求解方程这几个主要步骤. 由于问题的广泛性, 在建立微分方程时要涉及到多方面学科的知识. 一般来讲, 这一步骤较为困难. 在建立方程时, 首先要从问题中分析出哪些是已知量, 哪些是未知量, 然后可用以下两种方法建立方程.

方法一 从任一瞬时状态寻求未知量的变化率与各个变量和已知量的关系, 把变量间应该服从的规律用数学式子表示出来, 即表为未知函数的微分方程.

方法二 从局部的微小的改变中寻求微分与各个变量和已知量的关系, 利用微分概念并依据变量间应服从的规律列出方程, 这种方法又称为微元法.

下面通过一些典型应用性例题分析说明微分方程解决应用问题的方法及其主要步骤.

例 1* 在上半平面求一条向上凹的曲线, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数 (Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴平行.

分析 做应用题时分二步进行: 第一步, 分析题意建立微分方程及初始条件; 第二步求解微分方程.

解 第一步 建立微分方程. 曲线 $y = y(x)$ 在 (x, y) 处的法线方程 $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) (y' \neq 0)$. 它与 x 轴交点是 $(x + yy', 0)$, 从而该点到 x 轴的法线段 PQ 的长度是 $\sqrt{(yy')^2 + y^2} = y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$, ($y' = 0$ 也满足此式).

根据题意得微分方程

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{y(1 + y'^2)^{1/2}}, \text{ 即 } yy'' = 1 + y'^2, \text{ 且 } x = 1, y = 1, y' = 0.$$

第二步 求解微分方程.

上述属可降阶的二阶方程. 故令 $y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程, 得 $yp \frac{dp}{dy} = 1 + p^2$, 或 $\frac{p}{1 + p^2} dp = \frac{dy}{y}$. 积分并注意到 $y = 1$ 时 $p = 0$, 使得 $y = \sqrt{1 + p^2}$. 代入 $\frac{dy}{dx} = p$, 得 $y' = \pm \sqrt{y^2 - 1}$, $\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx$. 积分此式, 并注意到 $x = 1$ 时 $y = 1$, 得 $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \pm (x - 1)$. 因此, 所求曲线方程为 $y + \sqrt{y^2 - 1} = e^{\pm(x-1)}$. 将 y 移项到右端平方, 化简得

$$y = \frac{1}{2}(e^{(x-1)} + e^{-(x-1)}) = \cosh(x - 1).$$

评述 求解微分方程应用题用二步法具有普遍性. 应用型题目是考研中热点之一, 本节中举例值得借鉴.

例 2 设物体 A 从点 $(0, 1)$ 出发, 以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动. 物体 B 从点 $(-1, 0)$ 与 A 同时出发, 其速度大小为 $2v$, 方向始终指向 A. 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程, 并写出初始条件.

解 建立微分方程. 轨迹如图 8 - 2 所示. 设在时刻 t , B 点位置 (x, y) 处, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + vt) - y}{-x} \quad (*)$$

两边对 x 求导, 得

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = -v \frac{dt}{dx}$$

$$\text{由于} \quad 2v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\text{从而} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2v} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

代入(*)式得到所求微分方程为

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$$

其初始条件为 $y(-1) = 0, y'(-1) = 1$.

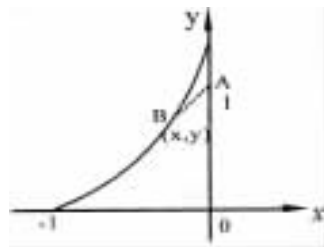


图 8-2

评述 本题所造微分方程是非线性微分方程, 求解它已超出本书范围.

例 3* (97.5 分) 在某一个人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为 N , 在 $t = 0$ 的时刻已掌握新技术的人数为 x_0 , 在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$ (将 $x(t)$ 视为连续可微变量), 其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比, 比例常数为 $k > 0$. 求 $x(t)$.

解 建立微分方程及求解. 由题意, 有 $\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$, $x(0) = x_0$. 分离变量并积分 $\int \frac{dx}{x(N-x)} = \int k dt$, 代入

初始条件, 得 $c = \frac{x_0}{N - x_0}$, 故 $x(t) = \frac{Nx_0 e^{kNt}}{N - x_0 + x_0 e^{kNt}}$. 伯努利方程法. 改写微分方程为 $\frac{dx}{dt} - kNx = -kx^2$. 令 Z

$= \frac{1}{x}$, 得出线性方程 $\frac{dz}{dt} + kNz = k$. 解得 $\frac{1}{x} = z = e^{-\int kN dt} \left[\int k e^{\int kN dt} dt + c \right] = \frac{1}{N} + c e^{-kNt}$, 由 $x(0) = x_0$ 定出 $c =$

$\frac{N - x_0}{Nx_0}$, 代回解的表达式后得 $x(t) = \frac{Nx_0 e^{kNt}}{(N - x_0) + x_0 e^{kNt}}$.

评述 本题目用初等物理知识建立微分方程, 今后还会碰到类似性质的考研题.

例 4 (97.8 分) 设曲线 L 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, $M(r, \theta)$ 为 L 上一点, $M_0(2, 0)$ 为 L 上一定点, 若极径 OM_0 , OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0, M 两点弧长值的一半, 求曲线 L 的方程.

解 建立微分方程及求解. 由题设得 $\frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$

两边对 θ 求导, 得 $r^2 = \sqrt{r^2 + r'^2}$, 即 $r' = \pm \sqrt{r^2 - 1}$ (可分离变量方程)

从而有 $\frac{dr}{r \sqrt{r^2 - 1}} = \pm d\theta$, 对两边积分得 $-\arcsin \frac{1}{r} + c = \pm \theta$

将条件 $r(0) = 2$ 代入上式, 得 $c = \frac{\pi}{6}$, 故所求曲线 L 的方程为

$$r \sin\left(\frac{\pi}{6} \mp \theta\right) = 1, \text{ 而 } r = \csc\left(\frac{\pi}{6} \mp \theta\right)$$

直角坐标方程 $x \mp \sqrt{3}y = 2$.

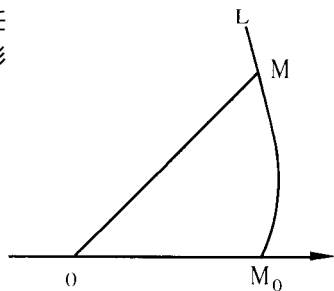


图 8-3

评述 本题目是几何知识应用题, 今后类似性质考题还会碰到.

例 5 (98.6 分) 从船上向海上沉放某种探测仪器. 按探测要求, 需确定仪器下沉深度 y (从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 在下沉过程中还受阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m , 体积为 B , 海水比重为 ρ , 仪器所受阻力与下沉速度成正比, 比例系数为 k ($k > 0$). 试建立 y 与 v 所满足的微分方程, 并求出函数关系式.

解 建立微分方程及求解. 取沉放点为原点 O , Oy 轴正向铅直向下. 则由牛顿第二定律得 $m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - B\rho -$

kv . 将 $\frac{d^2 y}{dt^2} = v \frac{dv}{dy}$ 代入以消去 t , 得 v 与 y 之间的微分方程 $mv \frac{dv}{dy} = mg - B\rho - kv$.

分离变量得 $dy = \frac{mv}{mg - B\rho - kv} dv$, 积分后

$$y = -\frac{m}{k}v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln(mg - B\rho - kv) + c$$

由初始条件 $v(y=0) = 0$ 求出 $c = \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln(mg - B\rho)$.

故所求的函数关系式为

$$y = -\frac{m}{k}v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln \frac{mg - B\rho - kv}{mg - B\rho}$$

评述 本题是牛顿第二定律应用, 中学的阿基米德原理也用到.

例6(98 B分) 设 y 是一向上凸的连续曲线, 其上任意一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 由此曲线上点

$(0, 1)$ 处切线方程为 $y = x + 1$, 求该曲线的方程, 并求函数的极值.

解 建立微分方程及求解. 因为曲线向上凸, 故 $y'' < 0$, 由题设有

$$\frac{-y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \text{ 即 } \frac{y''}{1+y'^2} = -1$$

令 $p = y'$, 则 $p' = y''$, 从而上述方程化为 $\frac{p'}{1+p^2} = -1$, 分离变量得 $\frac{dp}{1+p^2} = -dx$, 解之 $\arctg p = c_1 - x$.

因为 $y = y(x)$ 在 $(0, 1)$ 处切线方程为 $y = x + 1$, 所以 $p|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$. 代入上式得 $c_1 = \frac{\pi}{4}$, 故 $y' = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$. 积分后得 $y = \ln \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right| + c_2$. 因为曲线过点 $(0, 1)$, 所以 $y(0) = 1$, 代入上式得 $c_2 = 1 + \frac{1}{2}\ln 2$, 故所求曲线的方程为

$$y = \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1 + \frac{1}{2}\ln 2, \quad x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq 1$, 且当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$, 所以当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时函数取得极大值 $y = 1 + \frac{1}{2}\ln 2$.

评述 本题是考研中冷门题, 每隔3~5年考一次.

例7*(98 7分) 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续. 若由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1$, $x = t (t > 1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所围成的旋转体体积为 $V(t) = \frac{\pi}{3} [t^2 f(t) - f(1)]$. 试求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$ 的解.

评述 本题目多为经济类考研题之一.

解 建立微分方程及求解. 依题意得 $V(t) = \pi \int_1^t f^2(x) dx = \frac{\pi}{3} [t^2 f(t) - f(1)]$, 即 $3 \int_1^t f^2(x) dx = t^2 f(t) - f(1)$. 两边对 t 求导, 得 $3f^2(t) = 2tf(t) + t^2 f'(t)$. 此式改写成 $x^2 y' = 3y^2 - 2xy$, 即 $\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}$. 令 $\frac{y}{x} = u$, 则有 $x \frac{du}{dx} = 3u(u-1)$. 当 $u \neq 0, u \neq 1$ 时, 由 $\frac{du}{u(u-1)} = \frac{3dx}{x}$ 两边积分, 得 $\frac{u-1}{u} = cx^3$. 从而通解为 $y - x = cx^3 y$ (c 为任意常数). 由已知条件, 定得 $c = -1$, 从而所求解为

$$y - x = -x^3 y \quad \left(\text{或 } y = \frac{x}{1+x^3} \right).$$

例8(99 6分) 设函数 $y(x) (x \geq 0)$ 二阶可导且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$. 过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积为 S_1 . 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 . 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为1, 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程.

解 建立微分方程及求解. 曲线 $y = y(x)$ 上点 $P(x, y)$ 处的切线方程 $Y - y = y'(x)(X - x)$. 它与 x 轴

的交点为 $(x - \frac{y}{y'}, \rho)$. 由于 $y'(x) > 0$, $y(0) = 1$, 从而 $y(x) > 0$, 于是 $S_1 = \frac{1}{2}y \left| x - \left(x - \frac{y}{y'}\right) \right| = \frac{y^2}{2y'}$. 又 $S_2 = \int_0^x y(t)dt$, 由条件 $2S_1 - S_2 = 1$ 知 $\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)dt = 1$. 该式两边对 x 求导并化简得 $yy'' = (y')^2$. 解此可降阶的微分方程, 令 $p = y'$, 则上述方程可化为 $yp \frac{dp}{dy} = p^2$, 从而 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$. 解得 $p = c_1 y$, 即 $\frac{dy}{dx} = c_1 y$, 于是 $y(x) = c_2 e^{c_1 x}$. 注意到 $y(0) = 1$ 和 $y'(0) = 1$ 可定出 $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, 故所求曲线的方程是 $y = e^x$.

评述 本题是综合性几何应用题型, 所建立的是微分积分方程. 求解时先化为微分方程, 后再求解.

例 9(00 7 分) 某湖泊的水量为 V , 每年排入湖泊内含污染物 A 的水量为 $\frac{V}{6}$, 流入湖泊的不含污染物 A 的水量为 $\frac{V}{6}$, 流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$, 超过国家规定指标, 为了治理污染, 从 2000 年起, 限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 问至少需要经过多少年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内 (注: 设湖水中 A 的浓度是均匀的.)

解 建立微分方程及求解. 设从 2000 年初 ($t = 0$) 开始, 第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m , 浓度为 $\frac{m}{V}$, 则在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内排入湖泊中 A 的量为 $\frac{m_0}{V} \cdot \frac{V}{6} dt = \frac{m_0}{6} dt$, 流出湖泊的水中 A 的量为 $\frac{m}{V} \cdot \frac{V}{3} dt = \frac{m}{3} dt$. 因而在时间间隔 dt 湖泊中污染物 A 的改变量 $dm = \left(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3}\right)dt$, 它是一阶可分离变量的微分方程. 求得 $m = \frac{m_0}{2} - ce^{-\frac{t}{3}}$, 代入初始条件 $m|_{t=0} = 5m_0$, 定得 $c = -\frac{9}{2}m_0$, 于是 $m = \frac{m_0}{2}(1 + 9e^{\frac{t}{3}})$, 令 $m = m_0$, 得 $t = 6\ln 3$, 即至多需经过 $6\ln 3$ 年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内.

评述 做较复杂的微分方程应用题时, 一定要仔细分析题意, 才能建立微分方程及其初始条件, 这是关键的一步.

例 10*(01 9 分) 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y)$ ($x > 0$) 到坐标原点的距离, 恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $(\frac{1}{2}, \rho)$.

(1) 试求曲线 L 的方程; (2) 求 L 位于第一象限部分的一条切线, 使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

分析 本题目解题思路是: (1) 根据题意建立微分方程, 求解该微分方程, 得出曲线 L ; (2) 求切线 L ($x > 0$) 与 X, Y 轴所围图形的面积最小的那条曲线.

解 (1) 建立微分方程并求解该方程. 设 L 的方程为 $y = y(x)$. 设过 $P(x, y)$ 点的切线方程 $Y - y = y'(X - x)$. L 与 y 轴交点 $B(0, y - xy')$, y 轴截距为 $y - xy'$. 因此有 $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$, 即 $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ (一阶齐次方程). 令 $u = \frac{y}{x}$, 微分方程化为 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}$, 解得 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = c$. 由

已知条件 $(\frac{1}{2}, \rho)$ 推出 $c = \frac{1}{2}$, L 的方程为 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$. 整理化简后 L 的

标准形式 $y = \frac{1}{4} - x^2$ (抛物线).

(2) 设第一象限内曲线 $L: y = \frac{1}{4} - x^2$ 在 $P(x, y)$ 处的切线方程为

$$Y - \left(\frac{1}{4} - x^2\right) = -2x(X - x), \text{ 即 } Y = -2x \cdot X + x^2 + \frac{1}{4} \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$$

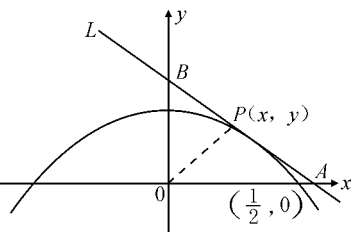


图 8-4

它与 x, y 轴交点为 $A\left(\frac{x^2 + \frac{1}{4}}{2x}, 0\right), B\left(0, x^2 + \frac{1}{4}\right)$. 于是, 切线 L 与 y 轴所围成图形的面积

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + \frac{1}{4})^2}{2x} - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right) dx.$$

对 x 求导数得 $S'(x) = \frac{1}{4} \frac{4x^2(x^2 + \frac{1}{4}) - (x^2 + \frac{1}{4})^2}{x^2} = \frac{1}{4x^2} \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \left(3x^2 - \frac{1}{4}\right)$, 令 $S'(x) = 0$, 解得 $x =$

$\frac{\sqrt{3}}{6}$. 当 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x) < 0$; $x > \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x) > 0$. 所以 $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 是 $S(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内唯一极小值点, 也是

最小值点. 于是所求切线为 $Y = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}X + \frac{3}{36} + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}X + \frac{1}{3}$.

例 11 (01 7 分) 一个半球体状的雪堆, 其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比, 比例常数 $k > 0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球状态, 已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内, 融化了其体积的 $\frac{7}{8}$, 问雪堆全部融化需要多少小时?

解 建立微分方程并求该方程的解. 设雪堆在时刻 t 的体积 $V = \frac{2}{3}\pi r^2$, 侧面积 $S = 2\pi r^2$, 由题设 $\frac{dV}{dt} = 2\pi r^2 \frac{dr}{dt} = -kS = -2\pi r^2 k$, 于是 $\frac{dr}{dt} = -k$ (一

阶可分离变量方程), 解得 $r = -kt + c$, 由 $r|_{t=0} = r_0$, 有 $r = r_0 - kt$. 又 $V|_{t=3} = \frac{1}{8}V|_{t=0}$, 即 $\frac{2}{3}\pi(r_0 - 3k)^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}\pi r_0^3$, 这样 $k = \frac{1}{6}r_0$, 从而 $r = r_0 - \frac{1}{6}r_0 t$. 因雪球

全部融化时 $r = 0$, 故得 $t = 6$, 即雪球全部融化时需 6 小时.

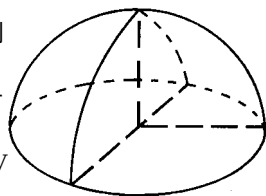


图 8-5

评述 等式 $V|_{t=3} = \frac{1}{8}V|_{t=0}$ 表示雪堆在 $t = 3$ 时的体积只有 $t = 0$ 时体积的 $\frac{1}{8}$ 倍.

例 12* (02 7 分) 求微分方程 $xdy + (x - 2y)dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 以及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

分析 本题目解题思路是:

- (1) 根据题意建立微分方程, 并求解该微分方程, 得出曲线 $y = y(x, c)$;
- (2) 再由 $y = y(x, c), x = 1, x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小确定常数 c .

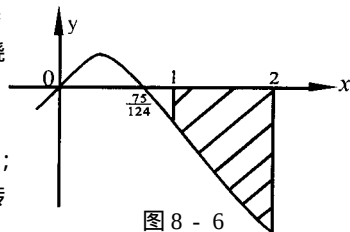


图 8-6

解 (1) 建立微分方程并求解该方程. 原微分方程可化为 $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -1$ (一阶线性微分方程), 解为 $y =$

$$e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(- \int e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + c \right) = x^2 \left(\frac{1}{x} + c \right) = x + cx^2.$$

(2) 由曲线 $y = x + cx^2$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积为

$$V(c) = \pi \int_1^2 (x + cx^2)^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 + 2cx^3 + c^2 x^4) dx = \pi \left(\frac{31}{5} c^2 + \frac{15}{2} c + \frac{7}{3} \right).$$

令 $V'(c) = \pi \cdot \left(\frac{62}{5} c + \frac{15}{2} \right) = 0$, 得驻点 $c = -\frac{75}{124}$. 又 $V''(c) = \frac{62}{5} \pi > 0$, 故 $c = -\frac{75}{124}$ 为唯一极小值点, 也是

最小值点, 于是得 $y = y(x) = x - \frac{75}{124} x^2$.

评述 本题目系综合性几何应用题, 今后, 大多数都是几何应用性题型, 例 14、例 15 除外.

例 13 假设 (1) 函数 $y = f(x) (0 \leq x < +\infty)$ 满足条件 $f(0) = 0$ 和 $0 \leq f(x) \leq e^x - 1$; (2) 平行 y 轴的

动直线 MN 与曲线 $y = f(x)$ 和 $y = e^x - 1$ 分别相交于 p_1 和 p_2 (3) 曲线 $y = f(x)$ 、直线 MN 与 x 轴所围成封闭图形的面积 S 恒等于线段 $p_1 p_2$ 的长度. 求函数 $y = f(x)$ 的表达式.

解 建立微分方程及求解. 由假设可得示意图 8-7, 由图可知 $\int_0^x f(x) dx = e^x - 1 - f(x)$, 两端求导, 得 $f(x) = e^x - f'(x)$. 由一阶线性方程求解公式, 得

$$f(x) = e^{-x} \left[\int e^x \cdot e^x dx + c \right] = ce^{-x} + \frac{1}{2} e^x$$

由 $f(0) = 0$ 定得 $c = -\frac{1}{2}$. 因此, 所求函数

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

例 14* 已知某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性 $\eta = -3p^3$, 而市场对该商品的最高需求量为 1 (万件). 求需要函数.

解 建立微分方程及求解. 根据弹性定义, 有 $\eta = \frac{x}{\frac{dx}{dp}} = -3p^3$, $\frac{dx}{x} = -3p^2 dp$. 由此得 $x = ce^{-p^3}$, c 为待定

常数.

由题设知 $p = 0$ 时 $x = 1$, 从而定出 $c = 1$. 于是, 所求的需求函数为 $x = e^{-p^3}$.

评述 本题目多为经济数学考研题之一.

例 15 已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数 $D = D(p) = \frac{a}{p^2}$, $S = S(p) = bp$, 其中 $a > 0$, $b > 0$ 为常数, 价格 p 是时间 t 的函数且满足方程 $\frac{dp}{dt} = k[D(p) - S(p)]$ (k 为正常数). 假设当 $t = 0$ 时价格为 1. 试求

(1) 需求量等于供应量时均衡价格 p_0 ; (2) 价格函数 $p(t)$; (3) 极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$.

解 建立微分方程及求解. (1) 当需求等于供应量时, 有 $\frac{a}{p^2} = bp$, $p^3 = \frac{a}{b}$, 因此均衡价格为 $p_e = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$.

(2) 由条件知 $\frac{dp}{dt} = k[D(p) - S(p)] = k\left[\frac{a}{p^2} - bp\right] = \frac{kb}{p^2}\left(\frac{a}{b} - p^3\right)$. 因此, 有 $\frac{dp}{dt} = \frac{kb}{p^2}(p_e^3 - p^3)$, 而 $\frac{p^2 dp}{p^3 - p_e^3} = -k b dt$. 在该式两边同时积分, 得 $p^3 = p_e^3 + ce^{-3kbt}$, 由条件 $p(0) = 1$, 可定出 $c = 1 - p_e^3$. 于是价格函数为 $p(t) = [p_e^3 + (1 - p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}}$.

(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [p_e^3 + (1 - p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}} = p_e$.

评述 本题目多为经济数学应用考研题之一.

例 16 在第一象限有曲线过 $(4, 1)$ 点, 从曲线上任意一点 $P(x, y)$ 向 x 轴和 y 轴作垂线, 垂足分别为 Q 及 R , 又在 P 点处, 曲线的切线交 x 轴于 T 点. 若使长方形 $OQPR$ (O 为坐标原点) 和三角形 PQT 有相同的面积, 求曲线的方程.

解 建立微分方程及求解. 设所求的曲线方程为 $y = f(x)$, 依题意, 设

$\overline{PQ} = y$, $\overline{OQ} = x$ ($x > 0, y > 0$)

当 $y' < 0$, 即 $\alpha > \frac{\pi}{2}$ 时, 如图 8-8 所示, $\overline{QT} = \frac{\overline{PQ}}{\tan \alpha'} = \frac{y}{\tan(\pi - \alpha)} = \frac{-y}{y'}$

当 $y' > 0$, 即 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, 如图 8-9 所示, $\overline{QT} = \frac{\overline{PQ}}{\tan \alpha} = \frac{y}{y'}$

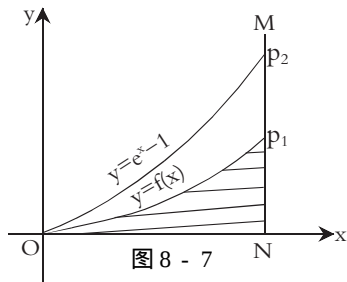


图 8-7

$$\text{故有} \quad \overline{QT} = \frac{y}{|y'|}$$

于是, 长方形 OQPR 的面积为 xy , $\triangle PQT$ 的面积为

$$\frac{1}{2} \overline{PQ} \cdot \overline{QT} = \frac{y^2}{2|y'|}$$

$$\text{故得到微分方程} \quad xy = \frac{1}{2} \frac{y^2}{|y'|}$$

$$\text{即} \quad |y'| = \frac{y}{2x}, \text{初始条件 } y|_{x=4} = 1$$

分离变量并求解上述微分方程, 得

$$\text{当 } y' > 0 \text{ 时 } y = \frac{1}{2} \sqrt{x},$$

$$\text{当 } y' < 0 \text{ 时 } y = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

例 17 求一条曲线, 使其上任一点到原点的距离等于该点之切线在 x 的截距, 且曲线在点 $(0, 1)$ 处的法线与直线 $y = x$ 平行.

解 建立微分方程及求解. 设 $P(x, y)$ 为曲线上任一点, 切线的动点坐标为 (X, Y) , 则过点 P 的切线方程为

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

令 $Y = 0$, 得切线在 x 轴上的截距为

$$X = x - y \frac{dx}{dy}$$

$$\text{依题意得} \quad \left| x - y \frac{dx}{dy} \right| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 或 } x - y \frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{即} \quad \frac{x}{y} - \frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}, \text{由题设可知初始条件为 } x|_{y=1} = 0, \frac{dx}{dy}|_{y=1} = -1$$

$$\text{故} \quad \frac{x}{y} - \frac{dx}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

这是一阶齐次方程. 解之得

$$\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{c}{y}$$

由初始条件 $y = 1, x = 0$, 得 $c = 1$, 故所求的曲线方程为

$$\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{y}.$$

例 18 要在舞台上用绳索悬吊一幕布, 问幕布的上沿应剪成怎样的曲线才能使它底边上的各点正好都接触地平面?

解 建立微分方程及求解. 建立坐标系如图 8-10.

设所求曲线方程为 $y = f(x)$, 曲线上任一点 $M(x, y)$ 与点 $A(0, b)$ 之间的弧段受三个力:

1) A 点的水平张力 H 2) M 点的张力 T 3) 幕布重量 $\omega = \rho \int_0^x y dx$ (其中 ρ 为幕布的面密度). 在这三力的作用下保持平衡. 由平衡条件, 得

$$\begin{cases} T \cos \theta = H \\ T \sin \theta = \rho \int_0^x y dx \end{cases}$$

$$\text{两式相除, 得} \quad \tan \theta = \frac{\rho}{H} \int_0^x y dx$$

$$\text{由 } y' = \tan \theta, \text{ 得} \quad y' = \frac{\rho}{H} \int_0^x y dx$$

$$\text{两端对 } x \text{ 求导, 得} \quad y'' - \frac{\rho}{H} y = 0$$

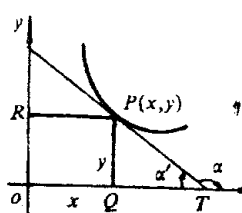


图 8-8

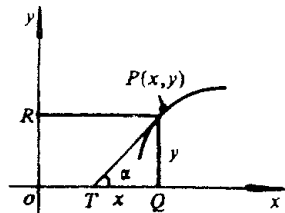


图 8-9

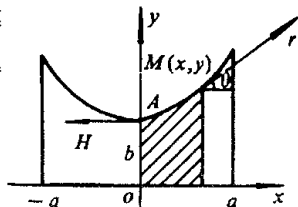


图 8-10

这是二阶常系数线性齐次微分方程, 初始条件是 $y|_{x=0} = b, y'|_{x=0} = 0$

解此微分方程, 得通解 $y = c_1 e^{\sqrt{\frac{\rho}{H}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\rho}{H}}x}$

由初始条件, 定出 $c_1 = c_2 = \frac{b}{2}$. 故所求曲线方程为

$$y = \frac{b}{2} (e^{\sqrt{\frac{\rho}{H}}x} + e^{-\sqrt{\frac{\rho}{H}}x}) \text{ 或 } y = bch \sqrt{\frac{\rho}{H}}x$$

例 19 如图 8-11, 位于坐标原点的我舰向位于 ox 轴上 A 点处的敌舰发射制导鱼雷, 使鱼雷永远对准敌舰. 设敌舰以最大速度 v_0 沿平行于 oy 轴的直线行驶, 又设鱼雷的速率大小是 $5v_0$, 求鱼雷的舰迹曲线的方程. 又敌舰行驶多远被鱼雷击中?

(为计算便利起见, 设 oA 的距离为 1 个单位.)

解 建立微分方程及求解. 设经过时间 t , 在鱼雷的舰迹曲线上其坐标为 $P(x, y)$, 而敌舰坐标为 $Q(1, v_0 t)$, 依题意有

$$y' = \frac{v_0 t - y}{1 - x}$$

又鱼雷速率为 $5v_0$, 故有

$$\widehat{OP} = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = 5v_0 t$$

$$\text{或 } v_0 t = \frac{1}{5} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\text{代入上式, 得 } (1 - x)y' = \frac{1}{5} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx - y$$

$$\text{对 } x \text{ 求导, 得 } (1 - x)y'' = \frac{1}{5} \sqrt{1 + y'^2}$$

这是不显含 y 的可降阶的二阶方程. 其初始条件是 $t = 0$ 时 $x = 0, y = 0, y' = 0$.

$$\text{令 } y' = p, y'' = p' \text{ 代入上方程, 得 } (1 - x)p' = \frac{1}{5} \sqrt{1 + p^2}$$

$$\text{分离变量, 并积分, 得 } \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = -\frac{1}{5} \ln(1 - x) + \ln c$$

$$\text{即 } y' + \sqrt{1 + y'^2} = \frac{c}{\sqrt[5]{1 - x}} \quad (1)$$

则初始条件 $y'(0) = 0$, 得 $c = 1$, 又 $(y' + \sqrt{1 + y'^2})(\sqrt{1 + y'^2} - y') = 1$, 从而有

$$\sqrt{1 + y'^2} - y' = \sqrt[5]{1 - x} \quad (2)$$

(1) 式减 (2) 式, 得

$$y' = \frac{1}{2\sqrt[5]{1 - x}} - \frac{1}{2}\sqrt[5]{1 - x}$$

$$\text{两边再积分, 得 } y = -\frac{5}{8}(1 - x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{12}(1 - x)^{\frac{6}{5}} + c_1$$

$$\text{由 } y(0) = 0 \text{, 求得 } c_1 = \frac{5}{24}, \text{ 故}$$

$$y = -\frac{5}{8}(1 - x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{24}(1 - x)^{\frac{6}{5}} + \frac{5}{24}$$

当 $x = 1$ 得 $y = \frac{5}{24}$. 故敌舰航行 $\frac{5}{24}$ 个单位距离将被鱼雷击中.

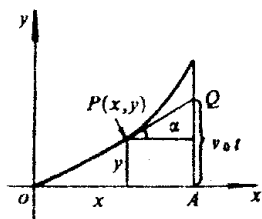


图 8-11

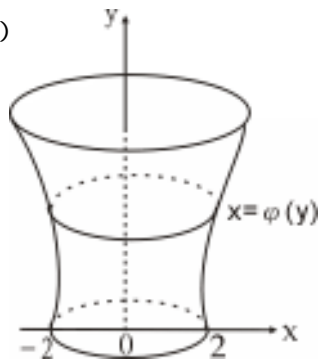


图 8-12

例 20 (03, 10 分) 有一平底容器, 其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y) (y \geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面 (如图 8-12). 容器的底面圆的半径为 2m. 根据设计要求, 当以 $3\text{m}^3/\text{min}$ 的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 $\pi\text{m}^2/\text{min}$ 的速率均匀扩大 (假设注入液体前, 容器无液体)

(1) 根据 t 时刻液面的面积写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式.

(2) 求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程.

分析 首先建立不断扩大的液面面积与时间的关系, 然后再求出 $x = \varphi(y)$.

解 (1) 设 t 时刻液面面积 S 与时间 t 的关系为 $S(t)$, 高度为 y , 则 $\frac{dS}{dt} = \pi S(0) = 4\pi$, 由此解出 $S(t) = 4\pi + \pi t$. 另外 $S = \pi x^2 = \pi \varphi^2(y)$, 故 $\pi \varphi^2(y) = 4\pi + \pi t$, 从而 $t = \varphi^2(y) - 4$.

(2) 设 t 时刻液面高度为 y 时, 则液体体积 $\int_0^y \pi \varphi^2(u) du = 3\varphi^2(y) - 12$, 且 $\varphi(0) = 2$. 对 y 求导, $\pi \varphi^2(y) = 6\varphi(y)\varphi'(y)$, 即得一阶可分离变量的微分方程. 求解此微分方程, 得解 $\varphi(y) = ce^{\frac{\pi}{6}y}$, 由条件 $\varphi(0) = 2$ 推出 $c = 2$, 故曲线方程 $x = \varphi(y) = 2e^{\frac{\pi}{6}y}$.

评述 本题是导数、定积分、微分方程三种知识类相结合的综合性考研题目, 具有典型性、代表性、值得引起重视.

例 21 (04, 11 分) 某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下. 设有一质量为 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少? (x 表示千克, km/h 表示千米/小时).

解 由题设, 飞机的质量 $m = 9000\text{kg}$, 着陆的水平速度 $v_0 = 700\text{km/h}$. 从飞机接触跑道开始计时, 设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$, 速度为 $v(t)$. 根据牛顿第二定律, 得 $m \frac{dv}{dt} = -kv$. 又 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$, 由此二式得出 $dx = -\frac{m}{k} dv$, 积分得 $x(t) = -\frac{m}{k} v + C$. 由于 $v(0) = v_0$, $x(0) = 0$, 故得 $C = \frac{m}{k} v_0$, 从而 $x(t) = \frac{m}{k} (v_0 - v(t))$. 又当 $v(t) \rightarrow 0$ 时, $x(t) \rightarrow \frac{mv_0}{k} = \frac{9000 \times 700}{6.0 \times 10^6} = 1.05(\text{km})$. 所以, 飞机滑行的最长距离为 1.05km.

预测·强化训练八

1. 求解下列微分方程的解:

- (1) $xy' = x - y$, $y(\sqrt{2}) = 0$; (2) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$;
- (3) $\begin{cases} xy' + (1-x)y = e^{2x} (0 < x < \infty) \\ y(1) = 0 \end{cases}$; (4) $\begin{cases} x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0 \\ y(e) = 1 \end{cases}$;
- (5) $\begin{cases} xy' + y = xe^x \\ y(1) = 1 \end{cases}$; (6) $(y - x^3)dx - 2xdy = 0$;
- (7) $\begin{cases} x^2 y' + xy = y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$; (8) $\begin{cases} xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ y(e) = 2e \end{cases}$;
- (9) $y' + y \cos x = (\ln x)e^{-\sin x}$;
- (10) 求连续函数 $f(x)$, 使它满足 $f(x) + 2 \int_0^x f(t)dt = x^2$;

(11) 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ 的通解.

2. 求解下列微分方程的解

- (1) $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解; (2) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ 的通解;
- (3) $y'' + 4y' + 4y = xe^{\alpha x}$ 的通解, α 为实数;
- (4) $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = -1$ 的通解;
- (5) $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$ 的通解; (6) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解;
- (7) $y'' + a^2y = \sin x$ 的通解, 常数 $a > 0$; (8) $y'' + y' = x^2$ 的通解;
- (9) $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$ 的通解;
- (10) $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ 的通解;

(11) 设有微分方程 $y' - 2y = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 2, & \text{若 } x < 1 \\ 0, & \text{若 } x > 1. \end{cases}$ 试求在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数 $y = y(x)$, 使之在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内都满足所给方程, 且满足条件 $y(0) = 0$.

3. 求下列微分方程的通解:

$$(1) y' + x \sin 2y = 2x e^{-x^2} \cos^2 y;$$

$$(2) (xy + y^3) y' = 1;$$

$$(3) (r \sqrt{r^2 + \theta^2} + \theta^2) dr - r \theta d\theta = 1;$$

$$(4) y' + \sin y + x \cos y + x = 0;$$

$$(5) 2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{1 + y^2}) dy = 0;$$

$$(6) \frac{dx}{\sqrt{xy}} + \left[\frac{2}{y} - \sqrt{\frac{x}{y^3}} \right] dy = 0.$$

4. 已知 $\int_0^x (2y(t) + \sqrt{t^2 + y^2(t)}) dt = xy(x)$, 且 $y(1) = 0$, 求 $y(x)$.

5. 求满足 $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 2x + 1, & x > 0, \end{cases} \int_{-1}^1 f(x) dx = 1 - \frac{1}{e}$ 的连续函数 $f(x)$.

6. 求 $x + yy' = f(x) \cdot g(\sqrt{x^2 + y^2})$ 的通解, 并利用此结果求 $x + yy' = (\operatorname{tg} x)(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)$ 的通解.

7. 求 $xy' + \alpha y = 1 + x^2$ 满足 $y(1) = 1$ 的解 $y(x, \alpha)$, 其中 α 为参数.

8. 求方程 $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$ 当 $y(0) = y'(0) = 1$ 的特解.

9. 求方程 $y^3 y'' + 1 = 0$ 满足 $y(1) = 1, y'(1) = 0$ 的特解.

10. 求下列微分方程的通解:

$$(1) y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(4x + 5) + 2e^{-x} \cos x; \quad (2) y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$$

11*. 求下列微分方程:

$$(1) y'' + 4y' + 5y = 8 \cos x \quad \text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时 } y \text{ 有界};$$

$$(2) \frac{d^2 s}{dt^2} + 4s = \sin t \cos t, \quad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0.$$

12. 设 $\varphi(x) = e^x - \int_0^x (x - \mu) \varphi(u) du$, 其中 $\varphi(x)$ 为连续函数, 求 $\varphi(x)$.

13. 设函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是线性非齐次方程 $\frac{d^2 y}{dt^2} + a(t) \frac{dy}{dt} + b(t)y = f(t)$

的特解 (其中 $a(t), b(t), f(t)$ 为已知函数), 而且 $\frac{y_2(t) - y_1(t)}{y_3(t) - y_1(t)} \neq \text{常数}$, 求证

$$y(t) = (1 - c_1 - c_2)y_1(t) + c_1 y_2(t) + c_2 y_3(t)$$

(其中 c_1, c_2 为任意常数) 是该方程的通解.

14. 求下列微分方程的通解

$$(1) (1 - x)y'' + xy' - y = (1 - x)^2; \quad (2) y''' + \frac{3}{x}y'' - \frac{3}{x^2}y' = \frac{1}{x^3}(2 - \ln x) + \frac{1}{x}.$$

15. 求解下列微分方程

$$(1) (x^2 + 4)y'' - 2xy' + 2y = 0, \text{ 满足 } y(2) = 0, y'(2) = 4;$$

$$(2) x^3 y'' - x^2 y' + xy = x^2 + 1, \text{ 满足 } y(1) = \frac{1}{4}, y'(1) = 0.$$

16. 问满足方程 $y''' + y'' - 2y' = 0$ 的哪一条积分曲线过 $(0, -5)$, 在这点处有倾角为 $\arctg 3$ 的切线且曲率为零.

简明解答

1. (1) 化成一阶线性微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$, $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int 1 \cdot e^{\frac{1}{x} dx} dx + c \right) = \frac{x}{2} + c \frac{1}{x}$, 定得 $c = -1$, 故 $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$.

(2) 按照一阶线性微分方程求解公式 $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{1}{x(x^2 + 1)} e^{\frac{1}{x} dx} dx + c \right) = \frac{1}{x} \left(\int \frac{1}{1 + x^2} dx + c \right) =$

$$\frac{1}{x}(\arctan x + c).$$

(3) 化成一阶线性微分方程 $y' - \left(1 - \frac{1}{x}\right)y = \frac{1}{x}e^{2x}$. $y = e^{\int(1-\frac{1}{x})dx} \left(\int \frac{1}{x}e^{2x} \cdot e^{-\int(1-\frac{1}{x})dx} dx + c \right) = \frac{1}{x}e^x(e^x + c)$ 定得 $c = -e$ 故 $y = \frac{e^x}{x}(e^x - e)$.

(4) 化成一阶线性微分方程 $y' + \frac{1}{x \ln x}y = \frac{1}{x}$. $y = e^{-\int \frac{1}{x \ln x} dx} \left(\int \frac{1}{x} e^{\int \frac{1}{x \ln x} dx} dx + c \right) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{1}{2} \ln^2 x + c \right)$ 定得 $c = \frac{1}{2}$ 故 $y = \frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{\ln x} \right)$.

(5) 化成一阶线性微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = e^x$. $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int e^x \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right) = \frac{1}{x}(e^x(x-1) + c)$ 定得 $c = 1$ 故 $y = \frac{x-1}{x}e^x + \frac{1}{x}$.

(6) 化成一阶线性微分方程 $y' - \frac{1}{2x}y = -\frac{1}{2}x^3$. $y = e^{\int \frac{1}{2x} dx} \cdot \left(-\frac{1}{2} \int x^2 e^{-\int \frac{1}{2x} dx} dx + c \right) = x^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + c \right)$.

(7) 变成伯努力利方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2$. 令 $u = \frac{1}{y}$, 得 $u' - \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y} = u = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(-\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right) = x \cdot \left(\frac{1}{2x^2} + c \right)$ 定得 $c = \frac{1}{2}$ 故 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

(8) 变成齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$. 令 $u = \frac{y}{x}$, 得 $udu = \frac{dx}{x}$, $\frac{1}{2}u^2 = \ln x + c$ 定得 $c = 1$, $\frac{1}{2}u^2 = \ln x + 1$.

1. 返回原变量 $y^2 = 2x^2 \cdot (\ln |x| + 1)$.

(9) 原式为一阶线性微分方程 $y' = e^{-\int \cos x dx} \left(\int \ln x \cdot e^{-\sin x} e^{\int \cos x dx} dx + c \right) = e^{-\sin x}(x \cdot \ln x - x + c)$.

(10) 等式两端求导, 得一阶线性方程 $f'(x) + 2f(x) = 2x$, 又 $f(0) = 0$ 求得解 $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$.

(11) 原式为齐次方程: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$. 令 $u = \frac{y}{x}$, 该方程化为 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}$, 其解 $\ln(u + \sqrt{u^2+1}) + \ln x = \ln c$, $\ln x(u + \sqrt{u^2+1}) = \ln c$, $\ln(y + \sqrt{x^2+y^2}) = \ln c$, $y + \sqrt{x^2+y^2} = c$ ($x > 0$ 或 $x < 0$).

2. (1) 特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$ 特征根 $r_{1,2} = -1$, 齐次方程的通解 $Y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$. 非齐次方程特解可设为 $y^* = (Ax + B)e^x$, 代入非齐次方程中, 定得 $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, 特解 $y^* = \frac{1}{4}(x-1)e^x$. 最后, 非齐次方程的通解 $y = (c_1 x + c_2)e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x$.

(2) 特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0$ 特征根 $r_{1,2} = -2$, 齐次方程的通解 $r = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$. 非齐次方程的特解 $y^* = Ax^2 e^{-2x}$, 代入非齐次方程中, 定得 $A = \frac{1}{2}$, 特解 $y^* = \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$. 最后, 非齐次方程的通解 $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$.

(3) 特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0$ 特征根 $r_{1,2} = -2$, 齐次方程的通解 $Y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$. 非齐次方程的特解可分为: $\alpha \neq -2$ 时 $y^* = (Ax + B)e^{\alpha x}$, $\alpha = -2$ 时 $y^* = (Ax + B)x^2 e^{-2x}$. 代入法, 当 $\alpha \neq -2$ 时, 求得 $y^* = \frac{1}{(\alpha+2)^2} \left(x - \frac{2}{\alpha+2} \right) e^{\alpha x}$, 当 $\alpha = -2$ 时, 求得 $y^* = \frac{1}{6}x^3 e^{-2x}$. 综合起来, 通解 $y = \begin{cases} (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{(\alpha+2)^2} \left(x - \frac{2}{\alpha+2} \right) e^{\alpha x}, & \alpha \neq -2, \\ (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{-2x}, & \alpha = -2. \end{cases}$

(4) 特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 特征根 $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, 齐次方程的通解 $Y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. 非齐次方程的特解 $y^* = -2xe^x$, 故非齐次方程的通解 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 2xe^x$. 定得 $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, 最后, 满足条件的特解 $y = (1 - 2x)e^x$.

(5) 特征方程 $r^2 + 2r - 3 = 0$, 特征根 $r_1 = 1$, $r_2 = -3$, 齐次方程的通解 $Y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$. 非齐次方程的特解 $y^* = Axe^{-3x}$, 代入非齐次方程中, 定得 $A = -\frac{1}{4}$, $y^* = -\frac{1}{4}xe^{-3x}$. 最后, 非齐次方程的通解 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{4}xe^{-3x}$.

(6) 特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 特征根 $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, 齐次方程的通解 $Y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. 非齐次方程的特解 $y^* = (Ax + B)xe^x$, 代入非齐次方程中, 定得 $A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$, $y^* = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^x$. 最后, 非齐次方程的通解 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^x$.

(7) 特征方程 $r^2 + a^2 = 0$, 特征根 $r_{1,2} = \pm ai$, 齐次方程的通解 $Y = \begin{cases} c_1 \cos ax + c_2 \sin ax, & a \neq 1 \\ c_1 \cos x + c_2 \sin x, & a = 1. \end{cases}$ 当 $a \neq 1$ 时,

特解 $y^* = \frac{1}{a^2 - 1} \sin x$, 当 $a = 1$ 时, 特解 $y^* = -\frac{1}{2}x \cos x$. 最后, 非齐次方程的通解 $y =$

$$\begin{cases} c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{1}{a^2 - 1} \sin x, & a \neq 1, \\ c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x, & a = 1. \end{cases}$$

(8) 特征方程 $r^2 + r = 0$, 特征根 $r_1 = 0$, $r_2 = -1$, 齐次方程的通解 $Y = c_1 + c_2 e^{-x}$. 非齐次方程的特解 $y^* = x \cdot (Ax^2 + Bx + C)$, 代入原方程中, 定得 $A = \frac{1}{3}$, $B = -1$, $C = 2$, 特解 $y^* = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$. 最后, 非齐次方程的通解 $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)$.

(9) 特征方程 $r^2 + 5r + 6 = 0$, 特征根 $r_1 = -2$, $r_2 = -3$, 齐次方程的通解 $Y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$. 非齐次方程的特解 $y^* = Ae^{-x}$, 代入原方程中, 定得 $A = 1$, 特解 $y^* = e^{-x}$. 最后, 非齐次方程的通解 $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + e^{-x}$.

(10) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y$, 全微分方程. 凑微分法, $\frac{1}{3}dx^3 + d(x^2y) - d(xy^2) = d\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2\right) = 0$, 故 $\frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 = C$.

(11) $x < 1$ 时 $y' - 2y = 2$, 其通解 $y = e^{\int 2dx} \left(\int 2e^{-\int 2dx} dx + c_1 \right) = ce^{2x} - 1$, $y(0) = 0$ 定得 $c_1 = 1$, 故 $y = e^{2x} - 1$.

1. $x > 1$ 时 $y' - 2y = 0$, 其通解 $y = c_2 e^{\int 2dx} = c_2 e^{2x}$, 由 $\lim_{x \rightarrow 1^+} c_2 e^{2x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{2x} - 1)$, 即 $c_2 e^2 = e^2 - 1$, $c_2 = 1 - e^{-2}$, 故 $y = (1 - e^{-2})e^{2x}$, 补充定义函数值 $y|_{x=1} = e^2 - 1$, 则得出 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数 $y(x)$

$$= \begin{cases} e^{2x} - 1, & x \leq 1, \\ (1 - e^{-2})e^{2x}, & x > 1. \end{cases} \quad \text{显然 } y(x) \text{ 满足全部条件.}$$

3. (1) 原方程左右同除 $\cos^2 y$, 得 $\sec^2 y \cdot y' + 2x(\tan y) = 2xe^{-x^2}$. 令 $\tan y = u$, 得出 $\frac{du}{dx} + 2x \cdot u = 2xe^{-x^2}$, 其解 $u = \tan y = e^{-\int 2xdx} \left(\int 2xe^{-x^2} e^{\int 2xdx} dx + c \right) = e^{-x^2} (x^2 + c)$, 即 $\tan y = (x^2 + c)e^{-x^2}$.

评述 本题目的关键点: 首先是改变微分方程的形式, 其次令代换 $\tan y = u$.

(2) 分析 本题目需要选 y 为自变量, x 为因变量. 原方程化为 $\frac{dx}{dy} - y \cdot x = y^3$ (一阶线性微分方程), 其解 $x = e^{\int y dy} \left(\int y^3 e^{-\int y dy} dy + c \right) = e^{\frac{1}{2}y^2} \cdot \left(\int y^3 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + c \right) = ce^{\frac{y^2}{2}} - (2 + y^2)$.

(3) 同除 $r\theta$, $\frac{d\theta}{dr} = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\theta}\right)^2} + \frac{\theta}{r}$. 令 $\frac{\theta}{r} = u$, $\frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dr}{r}$ 其解 $(1+u^2)^{\frac{1}{2}} = (\ln r + c)$, $1+u^2 = (\ln r + c)^2$, $r^2 + \theta^2 = r^2(\ln r + c)^2$. 又 $r = 0$ 也是方程的解.

(4) $y' + 2\sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} + x(\cos y + 1) = y' + 2\sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} + 2x\cos^2 \frac{y}{2} = 0$ 同除 $\cos^2 \frac{y}{2}$, $\sec^2 \frac{y}{2} \cdot y' + 2\tan \frac{y}{2} + 2x = 0$. 令 $\tan \frac{y}{2} = u$, 该式化为 $\frac{du}{dx} + u = -x$ (一阶线性微分方程), 其解 $u = \tan \frac{y}{2} = e^{-\int dx} \left(\int (-x)e^{\int dx} dx + c \right) = ce^{-x} + (1-x)$, 即 $\tan \frac{y}{2} = ce^{-x} + (1-x)$.

评述 本题目的关键点: 首先是改变微分方程的形式, 其次是令代替 $\tan \frac{y}{2} = u$.

(5) 分析 本题目需要选 y 为自变量, x 为因变量. $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{2y \cdot \ln y} x = \frac{-y \sqrt{1+y^2}}{\ln y} x^{-1}$ (伯努利方程), 其解 $x^2 = e^{-\int \frac{1}{y \cdot \ln y} dy} \cdot \left(-\int \frac{y \sqrt{1+y^2}}{\ln y} e^{\int \frac{1}{y \cdot \ln y} dy} dy + c_1 \right) = \frac{1}{2\ln y} \left[c_1 - \frac{2}{3} (1+y^2)^{\frac{3}{2}} \right]$, 即 $x^2 \cdot \ln y + \frac{1}{3} (1+y^2)^{\frac{2}{3}} = c$.

(6) 分析 本题目, 首先同乘 $\sqrt{xy}$, 其次需要选 y 为自变量, x 为因变量. 原方程化为 $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = -\frac{2}{\sqrt{y}} x^{\frac{1}{2}}$ (伯努利方程), 其解 $x^{\frac{1}{2}} = e^{\int \frac{1}{2y} dy} \left(-\int \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\int \frac{1}{2y} dy} dy + c \right) = y^{\frac{1}{2}} \left[-\int \frac{1}{\sqrt{y}} e^{\ln(y^{\frac{1}{2}})} dy + c \right] = y^{\frac{1}{2}} \left(-\int \frac{1}{y} dy + c \right) = y^{\frac{1}{2}} \cdot (-\ln y + c)$ 即 $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = c$.

4. 方程左右两端同时对 x 求导, 得出 $2y(x) + \sqrt{x^2 + y^2(x)} = y + xy'$, $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ (齐次方程). 令 $\frac{y}{x} = u$, 原方程化为 $\frac{du}{dx} = \frac{dx}{x}$ 积分 $\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln cx$, $u + \sqrt{1+u^2} = cx$, $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$. 条件 $y(1) = 0$ 定出 $c = 1$, $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2$, 化简 $y = \frac{x^2 - 1}{2}$.

评述 本题目是积分方程性质的, 需先求导转化为微分方程, 后解微分方程.

5. 当 $x \leq 0$ 时 $f(x) = e^x + c_1$, 当 $x > 0$ 时 $f(x) = x^2 + x + c_2$. 由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 得 $1 + c_1 = c_2$. 又 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (e^x + c_1) dx + \int_0^1 (x^2 + x + c_2) dx = 1 - \frac{1}{e} + \frac{5}{6} + c_1 + c_2 = 0$. 求解 c_1, c_2 的方程组 $c_1 = -\frac{11}{12}$, $c_2 = \frac{1}{12}$.

故
$$f(x) = \begin{cases} e^x - \frac{11}{12}, & x \leq 0, \\ x^2 + x + \frac{1}{12}, & x > 0. \end{cases}$$

6. 通解 $\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + y^2)}{g(\sqrt{x^2 + y^2})} = \int f(x) dx + c$. 另外, $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2} - 1} = \tan x \cdot dx$, 即 $\frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - 1 + 1) \cdot (xdx + ydy)}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)} = \tan x \cdot dx$, $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - 1} = \tan x \cdot dx$, 积分: $\sqrt{x^2 + y^2} + \ln(\sqrt{x^2 + y^2} - 1) + \ln \cos x = c$.

7. 原方程化简为 $y' + \frac{\alpha}{x} y = \frac{1}{x} (1 + x^2)$ (一阶线性微分方程). 其解 $y = e^{-\alpha \int \frac{1}{x} dx} \left(\int \left(\frac{1}{x} + x \right) e^{\alpha \int \frac{1}{x} dx} dx + c \right) = x^{-\alpha} \left(\int \left(\frac{1}{x} + x \right) x^{\alpha} dx + c \right) = x^{-\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} x^{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 2} x^{\alpha+2} + c \right)$ 条件定得 $c = 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha + 2}$. 最后解 $y(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 2} x^2 + \frac{\alpha^2 - 2}{\alpha(\alpha + 2)} x^{-\alpha}$.

8. 原方程为可降阶方程 $y'' = \frac{2yy' \ln y + y'^2}{y}$. 令 $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入后得 $\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y} p = 2 \ln y$, 其解 $p = e^{\int \frac{1}{y} dy} \cdot$

$\left(\int 2\ln y e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy + c\right) = y(\ln^2 y + c)$, 条件定得 $c = 1$, 所以 $p = y(\ln^2 y + 1)$. 返回 $\frac{dy}{dx} = y \cdot (\ln^2 y + 1)$,

$\frac{dy}{y \cdot (1 + \ln^2 y)} = dx$ 积分 $\arctan(\ln y) = x + c$ 条件定得 $c = 0$, 得 $\arctan(\ln y) = x$. 故 $\ln y = \tan x$ 或 $y = e^{\tan x}$.

9. 原方程为可降阶方程 $y'' = \frac{-1}{y^3}$. 令 $p = y'$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入后得 $p \frac{dp}{dy} = \frac{-1}{y^3}$ 其解 $p^2 = \frac{1}{y^2} + c$ 条件定得 $c = -$

1, 所以 $p^2 = \frac{1}{y^2} - 1$. 返回 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$, $\frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$ 积分后得 $-\sqrt{1-y^2} = x + c$ 条件定得 $c = 0$, 得 $-\sqrt{1-y^2} = x$, 平方化简得 $y = \sqrt{1-x^2}$.

10. (1) 特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$ 特征根 $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, 齐次方程的通解 $Y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. 非齐次方程的特解

应分别求 $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \cdot (4x + 5)$, $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-x} \cos x$ 的特解 y_1^* , y_2^* . 设 $y_1^* = e^{2x}(Ax + B)$,

代入第一个方程, 定得 $A = 2$, $B = 1$, 故 $y_1^* = xe^{2x}(2x + 1)$. 设 $y_2^* = e^{-x}(d_1 \cos x + d_2 \sin x)$. 代入第二个

方程, 定得 $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = \frac{-1}{2}$, 故 $y_2^* = \frac{e^{-x}}{2}(\cos x - \sin x)$. 最后, 原方程的通解 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + xe^{2x} \cdot$

$(2x + 1) + \frac{e^{-x}}{2}(\cos x - \sin x)$.

(2) 特征方程 $r^3 - 4r = 0$ 特征根 $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, $r_3 = -2$, 齐次方程的通解 $Y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$. 非齐次

方程的特解应分别求 $y''' - 4y' = xe^{2x}$, $y''' - 4y' = \sin x$, $y''' - 4y' = x^2$ 的特解 y_1^* , y_2^* , y_3^* . 设 $y_1^* = e^{2x} \cdot$

$x \cdot (Ax + B)$, 代入第一个方程, 定得 $A = \frac{2}{32}$, $B = \frac{-3}{32}$, 故 $y_1^* = \frac{e^{2x}}{32}(2x^2 - 3x)$. 设 $y_2^* = (c_1^0 \cos x +$

$c_2^0 \sin x)$, 代入第二个方程, 定得 $c_1^0 = \frac{1}{5}$, $c_2^0 = 0$, 故 $y_2^* = \frac{1}{5} \cos x$. 设 $y_3^* = x \cdot (d_1 x^2 + d_2 x + d_3)$, 代入

第三个方程, 定得 $d_1 = \frac{-1}{12}$, $d_2 = 0$, $d_3 = \frac{-1}{8}$, 故 $y_3^* = \frac{-x^3}{12} - \frac{x}{8}$. 最后, 原方程的通解 $y = c_1 + c_2 e^{2x} +$

$c_3 e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{32}(2x^2 - 3x) + \frac{1}{5} \cos x - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8}$.

11. (1) 特征方程 $r^2 + 4r + 5 = 0$ 特征根 $r_{1,2} = -2 \pm i$, 齐次方程的通解 $Y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$. 非齐次方程

的特解可设为 $y^* = A \cos x + B \sin x$, 代入原方程, 定得 $A = 1$, $B = 1$, 特解 $y^* = \cos x + \sin x$. 原方程的通

解 $y = e^{-2x} \cdot (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + (\cos x + \sin x)$. 又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 解 $y(x)$ 有界, 就必须 $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, 最

后得有界解 $y = \cos x + \sin x$.

(2) 特征方程 $r^2 + 4 = 0$ 特征根 $r_{1,2} = \pm 2i$, 齐次方程的通解 $S = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$. 另外, 非齐次方程的特解 S^*

$= t \cdot (d_1 \cos 2t + d_2 \sin 2t)$, 代入原方程中定出 $d_1 = \frac{-1}{8}$, $d_2 = 0$, 故 $S^* = \frac{-1}{8} t \cos 2t$. 所以, 原方程的通解 S

$= (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) - \frac{1}{8} t \cos 2t$. 又初始条件定出 $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{16}$, 最后得特解 $S = \frac{1}{16} \sin 2t - \frac{1}{8} t \cos 2t$.

12. 原方程连续对 x 求导两次, 则原方程简化为 $\varphi''(x) + \varphi(x) = e^x$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$. 求得非齐次方程的

通解 $\varphi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$. 条件定得 $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, 最后得原积分方程的解 $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x$

$+ \sin x + e^x)$.

13. 由题设知 $(y_2 - y_1)$, $(y_3 - y_1)$ 是齐次方程 $\frac{d^2 y}{dt^2} + a(t) \frac{dy}{dt} + b(t)y = 0$ 的两个线性无关解, 从而 $Y = c_1(y_2 -$

$y_1) + c_2(y_3 - y_1)$ 是该齐次方程的通解, 故 $y = c_1(y_2 - y_1) + c_2(y_3 - y_1) + y_1 = (1 - c_1 - c_2)y_1 + c_1 y_2 +$

$c_2 y_3$ 是原方程的通解.

14. (1) 齐次方程 $(1-x)y'' + xy' - y = 0$ (变系数二阶微分方程), 即 $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$. 容易观察到 y_1

$= x$ 是解,由刘维尔公式计算 $y_2 = e^x$,故齐次方程的通解 $Y = c_1 x + c_2 e^x$. 用常数变易法可计算得特解 $y^* = (1 - x)^2$. 最后,原方程的通解 $y = c_1 x + c_2 e^x + (1 - x)^2$.

(2) 用 x^3 遍乘原方程,得 $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 3xy' = (2 - \ln x) + x^2$,是欧拉(型)方程. 令 $x = e^t$, $t = \ln x$,计算出 $y' = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$, $y'' = \left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \frac{1}{e^{2t}}$, $y''' = \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \frac{1}{e^{3t}}$,代入上述微分方程,得 $\frac{d^3 y}{dt^3} - 4\frac{dy}{dt} = (2 - t) + e^{2t}$ (三阶线性微分方程). 该方程的齐次方程的通解 $Y = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$. 又非齐次方程 $\frac{d^3 y}{dt^3} - 4\frac{dy}{dt} = (2 - t)$, $\frac{d^3 y}{dt^3} - 4\frac{dy}{dt} = e^{2t}$ 的特解分别为 $y_1^* = \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{2}t$, $y_2^* = \frac{1}{8}te^{2t}$. 所以,非齐次方程(*)的通解 $y = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t} + \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}te^{2t}$. 返回到原变量,原微分方程的通解 $y = c_1 + c_2 x^2 + c_3 x^{-2} + \frac{1}{8}\ln^2 x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}x^2 \ln x$.

15. (1) 二阶变系数线性微分方程,容易观察到 $y_1 = x$ 是一个特解. 另一与它线性无关特解用刘维尔公式 $y_2 = x \cdot \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{-2x}{x^2+4} dx} \cdot dx = x^2 - 4$. 微分方程的通解为 $y = c_1 x + c_2 (x^2 - 4)$,条件定出 $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. 最后 $y(x) = x^2 - 4$.

(2) 原方程变为欧拉方程 $x^2 y'' - xy' + y = x + \frac{1}{x}$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$. 令 $x = e^t$, $t = \ln x$,欧拉方程改变为二阶常系数线性微分方程 $\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = e^t + e^{-t}$,其解 $y = (c_1 + c_2 t)e^t + \frac{1}{2}t^2 e^t + \frac{1}{4}\frac{1}{x}$. 换回 x 得出 $y(x) = (c_1 + c_2 \ln x)x + \frac{1}{2}x \cdot \ln x + \frac{1}{4x}$,由条件定出 $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{4}$,解 $y(x) = \frac{1}{4}x \cdot \ln x + \frac{1}{2}x \cdot \ln^2 x + \frac{1}{4x}$.

16. 特征方程 $r^3 + r^2 - 2r = 0$,特征根 $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = -2$,通解 $Y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-2x}$. 由定解条件 $y(0) = -5$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 0$ 定出 $c_1 = \frac{13}{2}$, $c_2 = 2$, $c_3 = -\frac{1}{2}$. 所以,曲线的方程 $y = \frac{13}{2} + 2e^x - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

第六部分 线性代数

第九章 行列式*

考试要求

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

考试要点分析与题型预测

行列式内容,一是行列式的性质,二是行列式的计算是按行(列)展开定理算法,考研中要求熟练地应用行列式性质计算行列式的值,这部分内容单独出考题的机会很少,往往与线性代数其它知识点结合在一起出题考.

行列式的计算:低阶(三阶以下,含三阶)行列式用对角线法计算很方便.高阶(三阶以上)原则上可用按行(列)展开计算(简称直接展开法),但,首先必须利用行列式的性质把行列式某行(列)除个别元素外,其余全变成零,然后按某行(列)展开后降低行列式的阶数,直至最后计算出来.如 §9-4 中,例 1,例 2. 某些特殊的 n 阶行列式计算,共有:上(下)三角行列式法,数学归纳法,递推法,范德蒙行列式法,折项法,加边法,等.

§9-1 n 阶行列式的概念

定义 设 n^2 个数排列成 n 行 n 列的数表

a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$		$\dots$
a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{nn}

$$\text{则 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式,其中 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 是自然数 $1, 2, \dots, n$ 的某一排列, τ 是此排列的逆序数,“ $\sum$ ”是对所有 n 阶排列求和.

注意 (i) 按定义 n 阶行列式是 n 项的代数和,其中每一项是位于不同行不同列的 n 个数相乘. n 项中, $\frac{n!}{2}$ 项前面带“+”号, $\frac{n!}{2}$ 项前面带“-”号.

(ii) 除特殊情况(如上、下三角形行列式)可用定义直接计算外,定义较难直接用来计算.

(iii) 由定义看出,二、三阶行列式的“对角线”计算法则对 $n(n \geq 4)$ 阶行列式已不成立.

§9-2 行列式的性质

1. 行列式转置以后(即行与列按顺序交换),其值不变;
2. 关于行列式的行成立的定理和结论,对行列式的列也一定成立,反之亦然;
3. 行列式按某一行(或列)展开的性质(设 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式):

* 行列式数学一、数学二完全相同.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} D & \text{当 } i=j \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时.} \end{cases} \\ \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} D & \text{当 } i=j \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时.} \end{cases} \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$4. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{第 } i \text{ 行 } k \text{ 提出});$$

注意: $|kA| = k^n |A|$ 其中 A 为 n 阶方阵.

6. 行列式某行(或列)的元素乘以数 k 加到另外一行(或列)的相应元素上,其值不变.此性质是计算行列式最常用的方法;

7. 行列式两行(或两列)互换后,则此行列式值反号;

8. 行列式两行(或两列)对应元素相等,则此行列式值为零;

9. 拉普拉斯(Laplace)展开定理:

定理1 在 n 阶行列式 D 中任取 k ($1 \leq k \leq n-1$) 行(列),则这 k 行(列)元素所组成的一切 k 阶子式与它对应的代数余子式乘积之和等于行列式 D .

由定理1看出, $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = D$ 及 $\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{ki} = D$ 均是定理1的特例.对一般行列式,用 Laplace 定理来展开是不方便的,这个定理的主要作用是理论方面的应用.此外,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

定理1应用举例 行列式计算

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{展开}]{\text{按前两列}} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1235.$$

§9 - 3 行列式的计算方法

1. 降阶法 利用性质,将行列式化为某行(或某列)只有一个非零元素,然后按此行(或列)展开,得到一个低阶行列式,此所谓降阶法;

2. 三角行列式法 利用性质,将行列式化成上(或下)三角形行列式.(对角行列式及上(下)三角形行列式均等于主对角线上元素的乘积);

3. 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j) \\
 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdot (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdots (a_n - a_2) \cdot (a_4 - a_3) \cdots \\
 \cdots (a_n - a_3) \cdots \cdots (a_n - a_{n-1})$$

在某些情况下,可用性质将行列式化为范德蒙行列式来计算.

4. 如 A^* 为 A 的伴随阵, 则 $|A^*| = |A|^{n-1} (n \geqslant 2)$;

5. 如 A, B 为 n 阶方阵, 则 $|AB| = |A||B|$;

6. 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 则 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$.

实际考试中,行列式的阶数一般 $n = 3$,偶尔也有 $n = 4$,其计算主要出现在线性方程组求解及矩阵的特征值求解中. n 阶行列式的计算出现的机会较少,但是,如果出现,一定要先观察 n 阶行列式的特点,然后再选择适当的方法处理.

§ 9 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测

行列式计算 单独出考试题的极少,多数情况是与线性代数其它知识混合在一起出考题.

例 1 (直接展开法) 计算 $2n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & & & & b \\ & a & & & b \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & a & b \\ & & 0 & & 0 \\ & & & c & d \\ & & \ddots & 0 & \ddots \\ c & & & & d \end{vmatrix}$$

解 $D_{2n} \xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第一行}} a \cdot \begin{vmatrix} \cdots & \ddots & & 0 & \ddots & \cdots \\ \cdots & & a & b & \cdots \\ \cdots & 0 & & 0 & \cdots \\ \cdots & & c & d & \cdots \\ \cdots & \ddots & & 0 & \ddots & \cdots \\ c & & & & d & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a & & & b \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & 0 & & 0 \\ & & c & d & \\ & \ddots & & 0 & \ddots \\ 0 & c & & & d \\ c & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$= adD_{2(n-1)} - bcD_{2(n-1)} = (ad - bc)D_{2(n-1)} \xrightarrow{\text{递推公式}} (ad - bc)^2 D_{2(n-2)}$$

$$\xrightarrow{\text{递推公式}} (ad - bc)^3 D_{2(n-3)} = \dots = (ad - bc)^{n-1} D_2 = (ad - bc)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^n.$$

例 2* (消零化上(下)三角行列式法) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$

解 原式 $\xrightarrow{\text{将 } 2, 3, \dots, n \text{ 列加到第一列}} [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ 1 & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$

$$= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 3 (消零化上(下)三角行列式法) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ c & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (ca_1a_2\dots a_n \neq 0)$$

解 原式 $\xrightarrow{\text{将 } 2, 3, \dots, n \text{ 列分别提取 } c, a_2, \dots, a_n} ca_2a_3\dots a_n \begin{vmatrix} \frac{a_1}{c} & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_3}{a_3} & \dots & \frac{b_n}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = ca_2a_3\dots a_n$

$$\cdot \begin{vmatrix} \left(\frac{a_1}{c} - \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_3} \dots - \frac{b_n}{a_n}\right) & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_3}{a_3} & \dots & \frac{b_n}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = ca_2a_3\dots a_n \left(\frac{a_1}{c} - \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_3} \dots - \frac{b_n}{a_n}\right)$$

例 4 (消零化上(下)三角行列式法) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}.$$

解 原式 $\xrightarrow{\text{第一行的 } (-1) \text{ 倍分别加到第 } 2, 3, \dots, n \text{ 行}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (x-(n-1)) \end{vmatrix}$

$$= (x-1)(x-2)\dots(x-n+1).$$

例 5 (97 3 分)(消零化上(下)三角行列式法) 设有 n 阶矩阵

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}, \text{计算 } |A|.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n-1) & (n-1) & \dots & \dots & \dots & (n-1) \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1} \end{aligned}$$

例 6 (数学归纳法) 证明恒等式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

证明 当 $n=1$ 时 $D_1 = 2\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ 结论成立.

假设 $n=k \leq n-1$ 成立, 即

$$D_k = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} \text{ 成立.}$$

那么 D_n 按第一行展开, 即

$$D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2} = 2\cos\theta \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

结论对 n 成立.

评述 本例题是数学归纳法.

例 7 (递推法) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & x & a \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}$$

$$\text{解 原式} = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ -a & x & a & \dots & a \\ -a & -a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ -a & x & a & \dots & a \\ -a & -a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} x+a & 2a & 2a & \dots & 2a & a \\ 0 & x+a & 2a & \dots & 2a & a \\ 0 & 0 & x+a & \dots & 2a & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} + (x-a) \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ -a & x & a & \dots & a \\ -a & -a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & a \end{vmatrix} \quad ((n-1)\text{阶}) \\
 &= a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{另外, 原式} &= \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & x & a \\ -a & -a & -a & \dots & -a & -a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ -a & x & a & \dots & a \\ -a & -a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2a & x-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2a & -2a & x-a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -2a & -2a & -2a & \dots & x-a & 0 \\ -a & -a & -a & \dots & -a & -a \end{vmatrix} + (x+a)D_{n-1} = (-a)(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}.
 \end{aligned}$$

$$\text{综合} \begin{cases} D_n = a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1}, \\ D_n = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}, \end{cases} \text{消去 } D_{n-1} \text{ 得 } 2aD_n = a(x+a)^n + a(x-a)^n$$

$$\text{如 } a \neq 0 \text{ 则 } D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n]$$

$$\text{如 } a = 0 \text{ 则 } D_n = x^n \xrightarrow[\text{成}]{\text{仍可写}} \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n]. \text{ 故原式} = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n].$$

评述 本例题的解题方法称为递推方法.

例 8 (范德蒙行列式法) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & & \dots \\ n & n^2 & \dots & n^n \end{vmatrix}$$

解 每行提出公因子, 得范德蒙行列式

$$\begin{aligned}
 D_n &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & \dots & 3^{n-1} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 1 & n & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= n! \prod_{1 \leq j < i \leq n} (i-j) = n! \prod_{i=1}^{n-1} i! = \prod_{i=1}^n i!
 \end{aligned}$$

例 9 (拆项法) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

解 D_n 中第一列元素均是两个元素的和, 分解 D_n 成两个行列式的和计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_n & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{因两列元素相同}]{\text{继续分解}}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_2 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_n & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_1 & a_n & \dots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{成比例}]{\text{因有两列}} O(n \geq 3).$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = -(a_1 - a_2)(b_1 - b_2), D_1 = a_1 + b_1.$$

例 10 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a & a & \dots & a & a \\ b & 0 & a & \dots & a & a \\ b & b & 0 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & 0 & a \\ b & b & b & \dots & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{解 (1)} D_n = \begin{vmatrix} 0 & a & a & \dots & a & a+0 \\ b & 0 & a & \dots & a & a+0 \\ b & b & 0 & \dots & a & a+0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & 0 & a+0 \\ b & b & b & \dots & b & a-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & a & \dots & a & a \\ b & 0 & a & \dots & a & a \\ b & b & 0 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & 0 & a \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & a & \dots & a & 0 \\ b & 0 & a & \dots & a & 0 \\ b & b & 0 & \dots & a & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & 0 & 0 \\ b & b & b & \dots & b & -a \end{vmatrix}$$

上式第一个行列式, 将第 i 行乘 (-1) 加到第 $i-1$ 行 $i=2, 3, \dots, n$, 再按第 n 列展开, 第二个行列式按第 n 列展开,

$$D_n = \begin{vmatrix} -b & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b & 0 \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix} - aD_{n-1} = a(-b)^{n-1} - aD_{n-1} = (-1)^{n-1}ab^{n-1} - aD_{n-1} \xrightarrow[\text{下去}]{\text{递推}}$$

$$= (-1)^{n-1}ab^{n-1} - a[(-1)^{n-2}ab^{n-2} - aD_{n-2}] = (-1)^{n-1}ab^{n-1} + (-1)^{n-1}a^2b^{n-2} + a^2D_{n-2} = \dots$$

$$= (-1)^{n-1}ab(b^{n-2} + ab^{n-3} + a^2b^{n-4} + \dots + a^{n-3}b + a^{n-2}).$$

$$(2) \text{ 因 } D_n^T = D_n, \text{ 所以当 } a \neq b \text{ 时, 仍有关系 } D_n = (-1)^{n-1}ba^{n-1} - bD_{n-1},$$

$$\text{从而, 解方程组: } \begin{cases} D_n = (-1)^{n-1}ab^{n-1} - aD_{n-1}, \\ D_n = (-1)^{n-1}ba^{n-1} - bD_{n-1}. \end{cases}$$

$$\text{后式减前式: } (b-a)D_n = (-1)^{n-1}(ab^n - ba^n),$$

$$D_n = (-1)^{n-1} \frac{(ab^n - ba^n)}{b-a} = (-1)^{n-1}ab \cdot (b^{n-2} + ab^{n-3} + a^2b^{n-4} + \dots + a^{n-3}b + a^{n-2}).$$

$$(3) a = b \text{ 时,}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a & a & \dots & a & a \\ a & 0 & a & \dots & a & a \\ a & a & 0 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 0 & a \\ a & a & a & \dots & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & a \\ a & a & a & \dots & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & a \\ (n-1)a & a & a & \cdots & a & 0 \end{vmatrix} = (n-1)a(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a & a \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n+1}(n-1)a^n.
 \end{aligned}$$

例 11 证明奇数阶反对称行列式为零, 即当 n 为奇数时

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

证明 因为 $D = D'$, 故

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D.
 \end{aligned}$$

故当 n 为奇数时 $D = -D$, 即 $2D = 0$, 故 $D = 0$.

例 12 计算偶数阶反对称行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

解 $D^2 = DD'$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & & & \\ & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & & \\ & & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & \\ & & & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{vmatrix} \\
 &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4
 \end{aligned}$$

所以 $D = \pm (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$. 但由于 D 中 a^4 的系数为 1, 所以 $D = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

例 13 (95 分) 设 A 为 n 阶方阵, $AA^T = E$, $|A| < 0$, 计算 $|A + E| = ?$

分析 本题不是具体的数值矩阵, 直接计算是不可能的. 这里只能从 $|A + E|$ 去思考, 再利用已给出的条件 $AA^T = E$ 与 $|A| < 0$ 去推测, 讨论, 得到所要的结果.

解 $|A + E| = |A + AA^T| = |A(E + A^T)| = |A| |E + A^T| = |A| |(E + A)^T| = |A| |E + A|$, 即 $|A + E| (1 - |A|) = 0$, $|A| < 0$, $(1 - |A|) > 0$, 故 $|A + E| = 0$.

评述 本题是通过演绎推理方法得到 $|A + E| = 0$, 如果读者一味地想去计算 $|A + E| = ?$, 正好上了出题人的当, 误入了歧途. 当然, 如此出考题的方法, 越来越少见了.

例 14 (加边法) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}$$

分析 本题除对角有 1 外, 其余 i 行元素均是 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的 x_i 倍, 故可用加边法做此题.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } D_n &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ 0 & x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第一行的}(-x_i)\text{倍加到} \\ \text{第}(i+1)\text{行}(i=1, 2, \dots, n) \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{再把第 } j(j=2, 3, \dots, n+1) \text{ 列的} \\ x_{j-1}(j=2, 3, \dots, n+1) \text{ 倍加到第一列} \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n x_i y_i & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n x_i y_i.
 \end{aligned}$$

例 15 (00 3 分) 设 $\alpha = (1, \rho, -1)^T$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T$, n 为正整数, 则 $|\alpha E - A^n| =$ _____.

$$\text{解 } A = \alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, A^n = 2^{n-1} A, \alpha E - A^n = \alpha E - 2^{n-1} A =$$

$$\begin{pmatrix} a - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & a - 2^{n-1} \end{pmatrix} \text{ 故 } |\alpha E - A^n| = a(a - 2^{n-1})^2 - a \cdot 2^{2(n-1)} = a^2(a - 2^n).$$

例 16* (02 8 分) 设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵, 并计算

行列式 $|A - E|$ 的值.

分析 本题目系综合性的, 必须用多个知识点: 矩阵、特征值问题、相似矩阵、行列式等, 才能得到解决, 有一定难度, 并且要从相互联系方面去思考.

$$\text{解 (1) 矩阵 } A \text{ 的特征多项式 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1)^2(\lambda - a + 2). \text{ 由此, 矩}$$

$$\text{阵 } A \text{ 的特征值 } \lambda_1 = \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2. \text{ 对角矩阵 } \Lambda = \begin{pmatrix} a + 1 & & \\ & a + 1 & \\ & & a - 2 \end{pmatrix}$$

对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = a + 1$, 从特征矩阵方程 $(A - \lambda_1 E)X = 0$ 可求得对应的两个线性无关的特征向量: $\alpha_1 = (1, 1, \rho)^T, \alpha_2 = (1, \rho, 1)^T$. 对应于 $\lambda_3 = a - 2$, 同样从特征矩阵方程 $(A - \lambda_3 E)X = 0$ 可求得对应的特征向量 $\alpha_3 = (-1, 1, 1)^T$. 令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 则 } P^{-1}AP = \Lambda.$$

$$(2) |A - E| = |P\Lambda P^{-1} - PP^{-1}| = |P(\Lambda - E)P^{-1}| = |P| |\Lambda - E| |P^{-1}|$$

$$= |\Lambda - E| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a - 3 \end{vmatrix} = a^2(a - 3).$$

评述 本题目系近年来考研热点之一,值得考生重视.

例 17 (03 4 分) 设三阶矩阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $|B| =$ _____.

分析 本题系用矩阵运算及求逆法, 解出 B , 再代入 A 计算出 B , 即可求出 $|B|$.

解 从矩阵方程得出 $(A^2 - E)B = (A + E)(A - E)B = (A + E)$, 用 $(A + E)^{-1}$ 左乘等式, 得 $(A - E)B =$

$$E, |A - E| |B| = 1, |B| = \frac{1}{|A - E|}. A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } |A - E| = 2, \text{ 所以 } |B| = \frac{1}{2}.$$

例 18 (05 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为列向量, 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$. 如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| =$ _____.

$$\text{解: } B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } |B| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 |A| = 2 \cdot 1 = 2.$$

预测·强化训练九

$$1. \text{ 证明(1) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \\ = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)(a + b + c + d),$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

2. 计算下列各阶行列式

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a & & & & 1 \\ & a & & 0 & \\ & & \ddots & & \ddots \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & & 0 & a \end{vmatrix}, (2) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix},$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 + a_n \end{vmatrix}. (\text{其中 } a_1 a_2 \dots a_n \neq 0).$$

3. 计算下列各阶行列式

$$(1) \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & a \end{vmatrix}, (2) \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}.$$

4. 证明下列各恒等式

$$(1) \begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \dots & a & a \\ a & a+x_2 & a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a+x_n & a \\ a & a & a & \dots & a & a \end{vmatrix} = ax_1x_2\dots x_n,$$

$$(2) \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

5. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-a \end{vmatrix}.$$

简明解答

$$\begin{aligned} 1. (1) & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) & (d+a)(d^2+a^2) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(d-a) \\ &\quad \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-c \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) - (b+a)(b^2+a^2) & (d+a)(d^2+a^2) - (c+a)(c^2+a^2) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & d-c \\ (c-b)(c^2+bc+b^2+ac+ab+a^2) & (d-c)(d^2+dc+c^2+ad+ac+a^2) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c^2+bc+b^2+ac+ab+a^2 & d^2+dc+c^2+ad+ac+a^2 \end{vmatrix} \\ &= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d). \end{aligned}$$

(2) 数学归纳法 本题对 $n \geq 3$ 时才有意义 $n=3$ 时,

$$D_3 = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ a_3 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

令 $n-1$ 时,

$$D_{n-1} = x^{n-1} + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-3} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1} \text{ 成立,}$$

今证 n 时结论也成立 将 D_n 按第一列展开,

$$D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1} = x(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-3} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1}) + a_n = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \text{ 由此取 } n \text{ 也成立.}$$

$$\begin{aligned}
 2. (1) D_n & \xrightarrow{\text{按第一列展开}} a \begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 1 \\ a & 0 & & \dots \\ & \ddots & \ddots & \dots \\ & & \ddots & a & 0 \end{vmatrix} \\
 & = a^n + (-1)^{n+1} \cdot a^{n-2} \cdot (-1)^{n-1+1} = a^n - a^{n-2} = a^{n-2}(a^2 - 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) D_n & \xrightarrow{\text{每行加到第一行}} [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{第一行乘}(-a) \text{ 依次加到二、三、} \dots \dots n \text{ 行}} [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} \\
 & = [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

$$(3) D_n \xrightarrow{\text{每行乘}(-1) \text{ 加到上一行}} \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一列展开}}$$

$$\begin{aligned}
 & a_1 a_3 a_4 \dots a_n + a_2 a_3 \dots a_n = \dots = a_1 a_2 \dots a_{n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1+a_n \end{vmatrix} + \dots + a_1 a_3 a_4 \dots a_n + a_2 a_3 \dots a_n \\
 & = a_1 a_2 \dots a_{n-2} [a_{n-1}(1+a_n) + a_n] + \dots + a_1 a_3 a_4 \dots a_n + a_2 a_3 \dots a_n \\
 & = a_2 a_3 \dots a_n + a_1 a_3 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_{n-1} + a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n + a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \\
 & = a_1 a_2 \dots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)
 \end{aligned}$$

$$3. (1) \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a-b)^3$$

$$\begin{aligned}
 (2) \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} & = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & 0 & a-b & a-b \\ 0 & a-b & 0 & a-b \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \\
 & = a \cdot \begin{vmatrix} 0 & a-b & a-b \\ a-b & 0 & a-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} - (b-a) \begin{vmatrix} b & b & b \\ 0 & a-b & a-b \\ a-b & 0 & a-b \end{vmatrix} \\
 & = -a(a-b)^3 + b(a-b)^3 = -(a-b)^4
 \end{aligned}$$

$$4. (1) D_{n+1} = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \dots & a & a \\ a & a+x_2 & a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a+x_n & a \\ a & a & a & \dots & a & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{分成两个行列式}]{\text{按第一列}}$$

$$\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & a \\ a & a+x_2 & a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a+x_n & a \\ a & a & a & \dots & a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \dots & a & a \\ 0 & a+x_2 & a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & a & a & \dots & a+x_n & a \\ 0 & a & a & \dots & a & a \end{vmatrix}$$

$$= x_1 D_n = x_1 \cdot x_2 \cdot D_{n-1} = \dots = x_1 x_2 \dots x_{n-1} \begin{vmatrix} a+x_n & a \\ a & a \end{vmatrix}$$

$$= a x_1 x_2 \dots x_n$$

$$(2) \text{ 令 } D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{列展开}]{\text{按第一列}} (\alpha + \beta) D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} \text{ 即 } D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$- \alpha D_{n-2})$$

$$\xrightarrow{\text{递推}} \beta^2 (D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) \xrightarrow{\text{递推}} \beta^3 (D_{n-3} - \alpha D_{n-4}) \xrightarrow{\text{递推}} \dots \xrightarrow{\text{递推}} \beta^{n-2} [(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - \alpha(\alpha + \beta)] = \beta^n, \\ \text{ , } D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n \quad (1^\circ)$$

$$(1^\circ) \text{ 中 } \alpha, \beta \text{ 位置对调 } D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^n \quad (2^\circ)$$

由 $(\alpha \times (2^\circ) \text{ 式}) - (\beta \times (1^\circ) \text{ 式})$:

$$(\alpha - \beta) D_n = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}, D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

5. 用递推关系.

$$D_n \xrightarrow[\text{列加到第一列}]{\text{第 2 3 } \dots n} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第一列}} D_{n-1} + (-1)^{n+1} (-a) a^{n-1}$$

$$= D_{n-1} + (-a)^n \xrightarrow[\text{关系}]{\text{递推}} D_{n-2} + (-a)^{n-1} + (-a)^n = \dots = D_1 + (-a)^2 + (-a)^3 + \dots + (-a)^n \\ = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (-a)^n.$$

第十章 矩 阵^{*}

考试要求

1. 理解矩阵的概念,了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、对称矩阵、三角矩阵、反对称矩阵及正交矩阵等的定义和性质.
2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置,以及它们的运算规律,了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.
3. 理解逆矩阵的概念,掌握逆矩阵的性质,以及矩阵可逆的充分必要条件.理解伴随矩阵的概念,会用伴随矩阵求逆矩阵.
4. 理解矩阵初等变换的概念,了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念.理解矩阵的秩的概念,掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.
5. 了解分块矩阵及其运算(数学二不要求).

考试要点分析与题型预测

矩阵章讲的是矩阵代数,即矩阵的运算规律.学习一开始,我们必须理解矩阵与行列式是两个不同的概念:

矩阵 A 是数排列成的表格,记成 $A = (a_{ij})_{m \times n}$,而行列式 D 是一个数值,记成 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

矩阵运算中特别值得注意的有二点:(1)数 λ 乘矩阵 A ,记 λA 必须用 λ 乘 A 的每个元素;(2)乘积 AB 不能交换,即 $AB \neq BA$.特殊矩阵的运算规则、性质都需熟记.逆矩阵及其求法、性质常用作解矩阵方程.矩阵的秩与初等变换,在求解线性方程组 $Ax = B$ 中起着最关键性的作用.

矩阵章的考研题常常集中在二个方面:(1)计算矩阵的逆 A^{-1} 秩 $r(A)$,如 §10-5 中 5、6、10;(2)求解矩阵方程组,如 §10-5 中 8,在解矩阵方程时,既先要做矩阵运算,然后才是做计算,(1)、(2)这两方内容几乎年年都会出考题.

初等变换更多是用于求解线性方程组 $Ax = B$,我们把它放在第十二章中讨论.

§10-1 矩阵的运算

矩阵是线性代数中极其重要的部分,是线性代数研讨问题的有力工具.

定义 $m \times n$ 个数排成 m 行 n 列的数表(左右加上()或[])

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

称为一个 m 行 n 列矩阵或 $m \times n$ 矩阵,记为 $A = (a_{ij})_{mn}$ 或 A_{mn} .

当 $m = n$ 时 A_{nn} 称为 n 阶方阵.

矩阵的运算

1. 矩阵相加

$$(a_{ij})_{mn} + (b_{ij})_{mn} = (a_{ij} + b_{ij})_{mn}.$$

2. 数乘矩阵

$$k(a_{ij})_{mn} = (ka_{ij})_{mn}. \text{ 特别 } (-1)(a_{ij})_{mn} = (-a_{ij})_{mn} \text{ 称为 } (a_{ij})_{mn} \text{ 的负矩阵. } A \text{ 的负矩阵记为 } -A.$$

3. 矩阵相乘

* 矩阵数学一、数学二相同

如果 $A = (a_{ij})_{mn}$ 的列数与 $B = (b_{ij})_{ns}$ 的行数相等, 则可定义矩阵 A 和矩阵 B 的乘积.

$$A \cdot B = (a_{ij})_{mn} \cdot (b_{ij})_{ns} = c_{ms} = (c_{ij})_{ms} \text{ 其中 } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, s).$$

注意 矩阵相乘不适合交换律.

4. 矩阵的转置

$(a_{ij})'_{mn} = (a_{ji})_{nm}$. 矩阵 A 的转置也可以记为 A^T .

5. 常用的运算规则

用 A, B, C 表示矩阵, k, l 表示数, 则有下列结果:

$$A + B = B + A; \quad A + (B + C) = (A + B) + C; \quad (AB)C = A(BC);$$

$$A(B + C) = AB + AC; \quad (B + C)A = BA + CA; \quad (k + l)A = kA + lA;$$

$$k(A + B) = kA + kB; \quad (kl)A = k(lA); \quad k(AB) = (kA)B = A(kB);$$

$$(A')' = A; \quad (A + B)' = A' + B'; \quad (kA)' = kA'; \quad (AB)' = B'A'.$$

6. 矩阵的分块运算

分块矩阵的加法、数乘和乘法运算的要求及运算规则与矩阵的相应运算类似, 只着重指出两点:

$$(1) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{ts} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{t1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{t2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A'_{1s} & A'_{2s} & \cdots & A'_{ts} \end{bmatrix}$$

(2) 准对角形矩阵的性质

$$\text{若 } A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m \end{bmatrix}$$

$$\text{其中子块 } A_i \text{ 与 } B_i (i = 1, 2, \dots, m) \text{ 为同阶方阵, 则 } AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & & & \\ & A_2 B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m B_m \end{bmatrix}$$

§ 10 - 2 特殊矩阵

一些重要的特殊矩阵在矩阵运算中占十分重要的地位. 现列举如下:

1. 零矩阵 所有元素全为零的 $m \times n$ 矩阵, 称为零矩阵, 记为 O 或 O_{mn} .

$$2. \text{单位矩阵 } E = E_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \text{对角形矩阵} \quad \text{主对角线以外的元素全为零的方阵, 称为对角形矩阵, 即 } A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

4. 对称矩阵 若 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A' = A$, 即 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 A 为对称矩阵.

(1) 对称矩阵与常数之积仍为对称矩阵;

(2) 两对称矩阵之和、差仍为对称矩阵.

5. 反对称矩阵 满足 $A' = -A$, 即 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 的 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 称为反对称矩阵.

(1) 两个反对称矩阵的和、差以及数乘仍是反对称矩阵;

(2) 任一 n 阶矩阵都可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

6. 正交矩阵

定义 若实 n 阶方阵 A 满足 $AA' = A'A = E$ (即 $A' = A^{-1}$) , 则称 A 为正交矩阵.

(1) $A = (a_{ij})_{nn}$ 为正交矩阵的充要条件是 :

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时.} \end{cases} \quad (10.2)$$

或
$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \quad (10.3)$$

(2) $A = (a_{ij})_{nn}$ 为正交矩阵的充要条件是 : A 的 n 个行(列) 向量组构成标准正交向量组 ;

(3) 正交矩阵的乘积也是正交矩阵.

7. 上(下) 三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ (上三角矩阵) }, A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \\ \cdots & \cdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ (下三角矩阵).}$$

8. 相似矩阵

定义 设 A, B 都是 n 阶矩阵 , 若存在可逆方阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$, 则称 B 是 A 的相似矩阵 , 或说矩阵 A 与 B 相似 , 记为 $A \sim B$.

若 A 与 B 相似 , 那么 B 也与 A 相似 (相似矩阵的对称性).

相似矩阵有相同的行列式. 若 A 与 B 相似 , 那么 A^{-1} 与 B^{-1} 也相似.

9. 合同矩阵

定义 设 A, B 都是 n 阶矩阵 , 若存在可逆矩阵 C , 使 $C'AC = B$, 则称 A 与 B 是合同的 , 记为 $A \simeq B$.

显然 , 仅 $C^{-1} = C'$ (即 C 为正交矩阵) 时 , 合同矩阵与相似矩阵才一致.

10. 伴随矩阵 矩阵 A 的伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad A_{ij} \text{ 为 } |A| \text{ 的元素 } a_{ij} \text{ 的代数余子式.}$$

伴随矩阵下列运算法则成立 :

$$\begin{aligned} (1) AA^* &= A^*A = |A| E & (2) (kA)^* &= k^{n-1} A^* \\ (3) (A^*)^{-1} &= (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|} A & (4) (A^*)^T &= (A^T)^* \\ (5) |A^*| &= |A|^{n-1} & (6) (A^*)^* &= |A|^{n-2} A (n \geq 2) \end{aligned}$$

§ 10 - 3 逆矩阵

1. 逆矩阵

定义 设 A 为 n 阶方阵 , 如果存在 n 阶方阵 B , 使 $AB = BA = E_n$, 其中 E_n 是 n 阶单位矩阵 , 则称 A 为可逆矩阵 , B 称为 A 的逆矩阵 , 记为 A^{-1} .

若方阵 A 可逆 , 则 A 的逆矩阵是唯一的.

可逆条件 n 阶方阵 A 可逆的充要条件是下列三条之一 :

- (1) A 非奇异 , 即 $|A| \neq 0$;
- (2) A 的 n 个行(列) 向量线性无关 ;
- (3) A 经初等行(列) 变换可化为单位矩阵.

2. 逆矩阵性质

$$\begin{aligned} (1) (A^{-1})^{-1} &= A, & (2) (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}, & (3) (A')^{-1} &= (A^{-1})', \\ (4) (\lambda A)^{-1} &= \frac{1}{\lambda} A^{-1} (\lambda \neq 0), & (5) |A^{-1}| &= \frac{1}{|A|} = |A|^{-1} (|A| \neq 0). \end{aligned}$$

3. 求逆阵

(1) 伴随矩阵法 设 A 为可逆的 n 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad A_{ij} \text{ 为 } |A| \text{ 的 } i \text{ 行 } j \text{ 列元素 } a_{ij} \text{ 的代数余子式.}$$

特殊, 设 A 为二阶矩阵: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 那么, 逆矩阵 A^{-1} : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

A 为对角矩阵: $A = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{bmatrix}$, 那么, 当 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, 逆矩阵 A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

(2) 分块矩阵法 设 A 为分块对角阵: $A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_n \end{bmatrix}$, 那么, A 的逆矩阵为:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_n^{-1} \end{bmatrix}. \text{ 又当 } A = \begin{bmatrix} & & A_1 \\ & & A_2 \\ & \ddots & \\ A_n & & \end{bmatrix} \text{ 时, } A \text{ 的逆矩阵为 } A^{-1} = \begin{bmatrix} & & A_n^{-1} \\ & & A_2^{-1} \\ & \ddots & \\ A_1^{-1} & & \end{bmatrix}.$$

(3) 初等行(列)变换法

$$(A \dots E) \xrightarrow{\text{初等行交换}} (E \dots A^{-1}), \quad \begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列交换}} \begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$$

(4) 定义法 $AB = BA = E, B = A^{-1}$.

§ 10 - 4 矩阵的秩与初等变换

1. 矩阵的秩

定义 矩阵 A 中不为零的子式的最高阶数称为 A 的秩, 记为 $r(A)$.定义 设 A 为 n 阶方阵, 若 $r(A) = n$, 则称 A 为满秩(或非奇异)方阵; 若 $r(A) < n$, 则称 A 为降秩(或奇异)方阵.

关于秩的结论, 这里列出四条:

- (1) 设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$;
- (2) 设 $A_{m \times n}, B_{n \times s}$, 则 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$;
- (3) $r(A') = r(A)$;
- (4) $r(A) + r(B) \leq n$ (A, B 均为 n 阶方阵, 且 $AB = 0$).

另外, 矩阵的秩与对应的齐次线性方程组的基础解系的个数相联系.

定理 $r(A)$ 等于 A 的行(列)向量组的最大线性无关组所含向量的个数(称为 A 的行(列)向量组的秩).

2. 矩阵的初等变换

矩阵的初等行(列)变换是指下列三种变换:

- (1) 以数 $k(k \neq 0)$ 乘矩阵的一行(列); (2) 互换矩阵的某两行(列);
 (3) 以数 $k(k \neq 0)$ 乘矩阵的某一行(列)后加到另一行(列)上去.
 初等行、列变换统称为初等变换. 矩阵 A 经初等变换为 B , 记为 $A \rightarrow B$.

3. 几个重要的定理

定理 若 $A \rightarrow B$ 则 $r(A) = r(B)$.

定理 若 $A_{m \times n}$ 的秩 $r(A) = r$ 则 A 经有限次初等变换后可化为标准形

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0_{m-r} \end{pmatrix}$$

其中 E_r 为 r 阶单位矩阵.

推论 满秩方阵经有限次初等变换后可化为单位矩阵.

定理 若 $A_{m \times n}$ 的秩 $r(A) = r$ 则 A 经有限次初等变换后及适当交换列的次序可化为阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} \underline{b_{11}} & b_{12} \cdots & b_{1r} \cdots & b_{1n} \\ 0 & \underline{b_{22}} \cdots & b_{2r} \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots & \underline{b_{rr}} \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

4. 矩阵的秩的求法

- (1) 求出最高阶非零子式的阶数;
 (2) 用一系列初等变换将矩阵化为标准形, 则 $r(A) = r$;
 (3) 用一系列初等变换将矩阵化为阶梯形, 则 $r(A) = r$;
 (4) 计算矩阵的行秩或列秩.

5. 初等矩阵

定义 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵. 三种初等变换对应着三种初等矩阵:

1. 对调两行或对调两列 i 行和 j 行(i 列和 j 列) 对调 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$)

$$E(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \text{ 行} \\ j \text{ 行} \end{matrix}$$

2. 以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列 $k \neq 0$ 乘单位矩阵的 i 行(或 i 列) $r_i \times k$ ($c_i \times k$)

$$E(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \text{ 行}(k \neq 0) \end{matrix}$$

3. 数 k 乘某行(列)加到另一行(列)上去 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$

$$E(i, j(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \text{ 行} \\ j \text{ 行} \end{matrix}$$

初等矩阵的性质

(1) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵.

(2) 初等矩阵均是可逆矩阵, 且其逆矩阵仍是初等矩阵 $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$, $E(i(k))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$,

$E(i, j(k))^{-1} = E(i, j(-k))$.

(3) n 阶矩阵 A 作初等行(列)变换, 相当于 A 左乘(右乘)相应的初等矩阵.

(4) A 是可逆矩阵, 则存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_l$ 使 $A = P_1 P_2 \dots P_l$.

定义 矩阵 $A_{m \times n}, B_{m \times n}$, 若存在可逆矩阵 $P_{m \times m}, Q_{n \times n}$, 使得 $PAQ = B$, 则称 A, B 是等价矩阵, 记 $A \cong B$.

矩阵 $A_{m \times n}$ $r(A) = r$ 的充要条件是 $A \cong \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 即存在可逆矩阵 $P_{m \times m}, Q_{n \times n}$, 使得 $PAQ \cong \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

§ 10 - 5 典型例题分析与最新考试题型预测

典型题型 1. 矩阵运算

例 1 求与 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵.

分析 设所求的矩阵为 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 根据题意 $XA = AX$, 由此等式, 探讨矩阵 X 的具体形式.

解 由 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 2x_1 - x_2 \\ x_3 + x_4 & 2x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_4 \end{pmatrix} \text{ 即 } \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \text{ 高斯消元法, 解出 } x_1 = 2t + u, x_2 = 2t,$$

$x_3 = t, x_4 = u$. 矩阵 X 如下: $X = \begin{pmatrix} 2t+u & 2t \\ t & u \end{pmatrix}$, t, u 为参数.

例 2 已知 $A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}, a_i \neq a_j (i \neq j)$. 证明与 A 可交换的矩阵 B 只能是对角矩阵.

证明 设 B 与 A 可交换, 并对 B 按列(行)分块

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

则

$$AB = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} = (a_1 \alpha_1 \ a_2 \alpha_2 \ \cdots \ a_n \alpha_n),$$

$$\Lambda A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \beta_1 \\ a_2 \beta_2 \\ \vdots \\ a_n \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } A\Lambda = \Lambda A, \text{ 即 } \begin{bmatrix} a_1 a_{11} & a_2 a_{12} & \cdots & a_n a_{1n} \\ a_1 a_{21} & a_2 a_{22} & \cdots & a_n a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 a_{n1} & a_2 a_{n2} & \cdots & a_n a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_{11} & a_1 a_{12} & \cdots & a_1 a_{1n} \\ a_2 a_{21} & a_2 a_{22} & \cdots & a_2 a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n a_{n1} & a_n a_{n2} & \cdots & a_n a_{nn} \end{bmatrix},$$

$a_j a_{ij} = a_i a_{ij}$, 因 $a_i \neq a_j$, 故 $a_{ij} = 0 (i \neq j)$, $a_i = a_j$, $a_{ij} = a_{ij} (i = j)$. A 是对角矩阵.

评述 对角矩阵乘积可以交换.

$$\text{例 3 设 } A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}, B = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] \text{ 则 } AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

$$BA = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n.$$

显然 $BA \neq AB$.

评述 例 3 说明矩阵乘法一般情况下是不能交换的, 应引起注意, 否则容易出错.

典型题型 2. 求矩阵方幂 A^n 的常用方法

例 4 设 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, 计算 A^n .

解 当 $n = 2$ 时

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

用归纳法, 设

$$A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta & -\cos k\theta \sin \theta - \sin k\theta \cos \theta \\ \sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta & -\sin k\theta \sin \theta + \cos k\theta \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}.$$

故

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

例 5 若实对称矩阵 A 满足条件 $A^2 = 0$, 试证明 $A = 0$.

证明 设 $(a_{ij})_{n \times n}$, 则题设 $A = A'$ 及 $A^2 = 0$, 有 $A^2 = AA' = 0$, 即有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

从而左端第 i 行 i 列元素为

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

因为 a_{ij} 均为实数, 故有 $a_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 从而 $A = 0$.

例 6 已知 $\alpha = [1 \ 2 \ 3] \beta = \left[1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{3}\right]$, 设 $A = \alpha'\beta$, 其中 α' 是 α 的转置, 则 $A^n =$ _____.

解 由于 $\beta\alpha' = \left[1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{3}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3$, 故

$$A^n = (\alpha'\beta)(\alpha'\beta)\dots(\alpha'\beta) = \alpha'(\beta\alpha')(\beta\alpha')\dots(\beta\alpha')\beta = 3^{n-1}\alpha'\beta = 3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

典型题型 3. 关于正交矩阵

例 7 已知 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ 是正交矩阵, 证明 A 是对角矩阵且 $a_{ii} = 1$ 或 -1 .

证明 因为 A 是正交矩阵, $A^{-1} = A'$. 由于上三角矩阵的逆矩阵仍是上三角矩阵, 设 $A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$.

而 A' 是下三角矩阵, 从 $A' = A^{-1}$ 知 $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, 即 A 是对角矩阵. 又

$$AA' = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & & \\ & a_{22}^2 & \\ & & a_{33}^2 \end{bmatrix} = E, \text{ 所以 } a_{ii} = 1 \text{ 或 } -1.$$

评述 正交矩阵在二次型化标准型中起着关键性作用.

例 8 设 A, B 均是 n 阶正交矩阵, 且 $|A| \neq |B|$. 试求 $|A+B|$.

解 A, B 是正交矩阵, 故 $A'A = E, B'B = E$, 且 $|A| = \pm 1, |B| = \pm 1$, 因 $|A| \neq |B|$, 故 $|A| = -|B|$.

又

$$|A+B| = |A(E+A'B)| = |A(B'+A')B| = |A| \cdot |(A+B)^T| \cdot |B| = -|A+B|$$

故 $|A+B| = 0$.

评述 此类题是通过演绎推理方法得到 $|A+B| = 0$, 回忆一下(第九章 §3 例 14, 正是这种类型的例题, 应引起注意.)

典型题型 4. 关于上(下)三角矩阵

例 9 设 A, B 均为 n 阶上三角矩阵, 则乘积 AB 仍是上三角矩阵.

证明 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 均为上三角矩阵, 对于乘积 $AB = C, C = (C_{ij})$,

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{i,i-1}b_{i-1,j} + a_{ii}b_{ij} + a_{i,i+1}b_{i+1,j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

由于 A 是上三角矩阵, 有 $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{i,i-1} = 0$. 同样 B 是上三角矩阵, 当 $i > j$ 时, 有 $b_{ij} = b_{i+1,j} = \dots = b_{nj} = 0$. 因此, 当 $i > j$ 时, C_{ij} 中每项都为 0, 从而 $C_{ij} = 0$, 总之 AB 是上三角矩阵.

评述 与例 10 相似的方法可证明下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵.

典型题型 5. 求 A 的逆矩阵

例 10 求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解法一 伴随矩阵法.

$$A^* = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

解法二 初等行变换法.

$$(A \dots E) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & -2 & & 1 & \\ 2 & -2 & 1 & & & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = (E \dots A^{-1})$$

$$\text{故 } A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{类似地, 初等列变换法, } \begin{pmatrix} A \\ \dots \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{pmatrix} E \\ \dots \\ A^{-1} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 11 求四阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

解 因为 $|D| = |A| |B| \neq 0$, 所以 D 可逆

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$\text{例 12}^* \quad \text{求矩阵 } D = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & \dots & c_{1k} & b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ c_{r1} & \dots & c_{rk} & b_{r1} & \dots & b_{rr} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \text{ 的逆矩阵, 其中 } A, B \text{ 分别是 } k \text{ 阶和 } r \text{ 阶的可}$$

逆矩阵, $C_{r \times k}$ 是 $r \times k$ 阶矩阵, $O_{k \times r}$ 是 $k \times r$ 阶矩阵.

解 因为 $|D| = |A| |B| \neq 0$, 所以 D 可逆. 设 $D^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ 那么,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_r \end{pmatrix}, \text{ 从而 } \begin{cases} AX_{11} = E_k, AX_{12} = 0, \\ CX_{11} + BX_{21} = 0, CX_{12} + BX_{22} = E_r. \end{cases}$$

故 $X_{11} = A^{-1}, X_{12} = 0, X_{22} = B^{-1}, X_{21} = -B^{-1}CA^{-1}$.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

评述 与例 12 类似, $D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 时 $D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$.

例 13 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 $a_i \neq 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$.

解 求将 A 进行分块, 则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B_{n-1}^{-1} \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

例 14* 设四阶矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 且矩阵 A 满足关系式 $A(E - C^{-1}B)'C$

$= E$, 其中 E 为四阶单位矩阵, C^{-1} 表示 C 的逆矩阵, C' 表示 C 的转置矩阵, 将上述关系式化简并求 A.

解 因 $A(E - C^{-1}B)'C = A[C(E - C^{-1}B)]' = A(C - B)' = E$, 于是

$$A = [(C - B)']^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \xrightarrow{\text{例 13}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

例 15 (00 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, E 为四阶单位, 且 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 则 $(E + B)^{-1}$

$=$ _____.

分析 从本题要作的事 $(E + B)^{-1}$ 出发, 通过矩阵运算先考虑 $E + B = (E + A)^{-1}((E + A) + (E - A)) = 2(E + A)^{-1}$, 进一步 $(E + B)^{-1} = \frac{1}{2}(E + A)$, 只要计算 $(E + A)$.

解 从刚才的分析, 得出 $(E + B)^{-1} = \frac{1}{2}(E + A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

评述 解决本题的关键步骤是 $(E + B)^{-1} = \frac{1}{2}(E + A)$. 这种方法比用其它任何方法都简单, 本题目的是考查知识点的灵活性, 分析判断能力.

例 16 (02 3 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = A^2 - 3A + 2E$, 则 $B^{-1} =$ _____.

解 计算出 $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 故

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{|B|=2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

典型题型 6. 与可逆相关命题

例 17 设 A, B, C 均为 n 阶方阵, 且 $AB = BC = CA = E$, 求 $A^2 + B^2 + C^2 =$ _____.

解 由已知条件, A, B, C 三者互为逆矩阵, 由逆矩阵的唯一性得 $A = B = C$, 从而 $A^2 = B^2 = C^2$, 故 $A^2 + B^2 + C^2 = 3E$.

例 18 (96 6 分) 设 $A = E - \zeta\zeta'$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, ζ 是 n 维非零列向量, ζ' 是 ζ 的转置. 证明

(1) $A^2 = A$ 的充要条件是 $\zeta'\zeta = 1$;

(2) 当 $\zeta'\zeta = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

证明 (1) $A^2 = (E - \zeta\zeta')(E - \zeta\zeta') = E - 2\zeta\zeta' + \zeta\zeta'\zeta\zeta' = E - \zeta(2 - \zeta'\zeta)\zeta' = E - (2 - \zeta'\zeta)\zeta\zeta'$, $A^2 = A$ 即 $E - (2 - \zeta'\zeta)\zeta\zeta' = E - \zeta\zeta'$, 亦即 $(\zeta'\zeta - 1)\zeta\zeta' = 0$, 因为 ζ 是非零向量, $\zeta\zeta' \neq 0$, 故 $A^2 = A$ 的充要条件是 $\zeta'\zeta - 1 = 0$, 即 $\zeta'\zeta = 1$.

(2) 因为 $A = E - \zeta\zeta'$, 当 $\zeta'\zeta = 1$ 时, 有 $A\zeta = \zeta - \zeta\zeta'\zeta = \zeta - \zeta = 0$, 所以 ζ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的非零解, 从而 $|A| = 0$, 故 A 不可逆.

用反证法 当 $\zeta'\zeta = 1$ 时, $A^2 = A$. 若 A 可逆, 则有 $A^{-1}A^2 = A^{-1}A$, 从而 $A = E$, 这与已知条件 $A = E - \zeta\zeta' \neq E$ 矛盾, 故 A 是不可逆矩阵.

例 19 设 A, B 和 $A+B$ 都是可逆矩阵, 求证 $A^{-1} + B^{-1}$ 也是可逆矩阵, 并求其逆阵, 进而证明 $(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}$.

证明 由已知条件 $A, B, (A+B)$ 都是可逆矩阵, 而 $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(B+A)B^{-1}$, 故 $A^{-1} + B^{-1}$ 为可逆矩阵, 且

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = [A^{-1}(B+A)B^{-1}]^{-1} = B(A+B)^{-1}A$$

同理, 由于 $A^{-1} + B^{-1} = B^{-1}(A+B)A^{-1}$, 故

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = [B^{-1}(A+B)A^{-1}]^{-1} = A(A+B)^{-1}B$$

从而 $A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}A(A+B)^{-1}BA^{-1}$

$$= A^{-1} - (A+B)^{-1}BA^{-1} = (A+B)^{-1}(B+A)A^{-1} - (A+B)^{-1}BA^{-1}$$

$$= (A+B)^{-1}[(A+B)A^{-1} - BA^{-1}] = (A+B)^{-1}.$$

例 20 设 A 是 n 阶矩阵, $A^2 = 0$, 证明 $E + A$ 可逆.

证明 由 $A^2 = 0$, $-A^2 = 0$, 从而 $E - A^2 = (E + A)(E - A) = E$, 故 $(E + A)$ 可逆, 且 $(E + A)^{-1} = E - A$.

例 21* (02, 6 分) 已知 A, B 为三阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是三阶单位矩阵. (1) 证明:

矩阵 $(A - 2E)$ 可逆; (2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .

分析 做本题的思路, 应该是从条件 $2A^{-1}B = B - 4E$ 入手, 经过矩阵运算, 会立刻找出办法.

解 (1) 由 $2A^{-1}B = B - 4E$, 即 $AB - 2B - 4A = (A - 2E)(B - 4E) = 8E$, 或 $(A - 2E) \frac{1}{8}(B - 4E) = E$,

故 $(A - 2E)$ 可逆, 且 $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

$$(2) \text{ 由 (1) } (A - 2E) = 8(B - 4E)^{-1}, A = 2E + 8(B - 4E)^{-1} = 2E + 8 \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 2E + 8 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

评述 本题第一部分是矩阵运算, 第二部分是矩阵计算, 二者结合是近年来考研热点题之一.

典型题型 7. 关于伴随矩阵

例 22 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 求 A^* .

解 由代数余子式为 $A_{11} = d, A_{12} = -c, A_{21} = -b, A_{22} = a$, 按伴随矩阵定义, 有 $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

评述 二阶矩阵的伴随矩阵, 规律是, 主对角线元素互换, 副对角线元素变号. 由此, 二阶矩阵的逆矩阵 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

例 23 若 A 可逆, 证明 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

证明 由于 $(A^{-1})(A^{-1})^* = |A^{-1}| E$, 等式两端左乘 A , 有 $(A^{-1})^* = \frac{1}{|A|} A$, 又因 $\frac{A}{|A|} A^* = E$, 根据可逆定义, 有 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$. 综合 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

例 24 A 是 n 阶矩阵, 证明 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$

证明 由 $AA^* = |A| E$, 如 $r(A) = n$, 则行列式 $|A| \neq 0$, 于是 A 可逆, $A^* = |A| A^{-1}$, 故 $r(A^*) = n$. 如 $r(A) = n-1$, 则 $|A| = 0$, 但存在 $(n-1)$ 阶子式不为 0, 因此 $A^* \neq 0$, 又 $AA^* = |A| E = 0$ 表明 $AX = 0$ 有非零解, 此时 A^* 的每一列都是解, 那末 $0 < r(A^*) \leq n - r(A) = n - (n-1) = 1$, 从而 $r(A^*) = 1$. 如 $r(A^*) < n-1$, 则 A 的 $n-1$ 阶子式全为 0, 从而 $A^* = 0$, 即 $r(A^*) = 0$.

例 25 (02, 3 分) 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 则 C 的伴随矩阵 $C^* =$ _____.

$$(A) \begin{pmatrix} |A| A^* & 0 \\ 0 & |B| B^* \end{pmatrix}$$

$$(B) \begin{pmatrix} |B| B^* & 0 \\ 0 & |A| A^* \end{pmatrix}$$

$$(C) \begin{pmatrix} |A| B^* & 0 \\ 0 & |B| A^* \end{pmatrix}$$

$$(D) \begin{pmatrix} |B| A^* & 0 \\ 0 & |A| B^* \end{pmatrix}$$

解 $C^* C = |C| E$, 故

$$C^* = |C| C^{-1} = |A| |B| \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = |A| |B| \begin{pmatrix} \frac{A^*}{|A|} & 0 \\ 0 & \frac{B^*}{|B|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B| A^* & 0 \\ 0 & |A| B^* \end{pmatrix}, \text{选 (D)}.$$

典型题型 8. 矩阵方程

例 26* 设三阶方阵 A, B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 且 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$, 则 $B =$ _____.

分析 本题目属于矩阵运算计算性类型, 解决这种类型的问题, 共同的方法, 视 B 为未知的矩阵, 用矩阵运算分离出矩阵 B , 这一步是关键, 下一步把 A 代入计算 B .

解 由已知关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 得 $(A^{-1} - I)BA = 6A$, 即 $(A^{-1} - I)B = 6E$, $B = 6(A^{-1} - I)^{-1} A$ 为对角阵, I 为三阶单位矩阵, 故

$$B = 6 \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{bmatrix}^{-1} = 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

例 27 设 A, B 为三阶矩阵, I 为三阶单位矩阵, 满足 $AB + I = A^2 + B$, 又知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 B .

解 $(A - I)B = A^2 - I = (A - I)(A + I)$. 又由于 $A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可逆, 因此

$$B = (A - I)^{-1}(A - I)(A + I) = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

例 28 求解矩阵方程 $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

解 利用逆矩阵. 因为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 6 \neq 0$, 故 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ 存在, 于是

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

例 29 (98, 5 分) 设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 其中 E 为四阶单位矩阵, A^T 是四阶矩阵 A 的转置矩阵,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ 求 } A$$

解 由题设得 $C(2E - C^{-1}B)A^T = E$, 即 $(2C - B)A^T = E$. 于是 $|2C - B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$,

故 $(2C - B)$ 可逆, 于是 $A = [(2C - B)^{-1}]^T = [(2C - B)^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

例 12 分块法

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 30 (00, 6 分) 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 其中 E 为四阶

矩阵, 求矩阵 B .

分析 本题目解法需要从已知矩阵方程 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ 中解出 B 来, 同时还要引用 $|A^*| = |A|^{n-1}$ ($n = 4$) 算出行列式 $|A|$.

解 首先,由 $|A^*| = |A|^3 = 8$,得 $|A| = 2$,再从原矩阵方程得 $(A - E)BA^{-1} = 3E$,等式右乘 A 后再左乘 A^{-1} ,有 $A^{-1}(A - E)B = 3E$,即 $(E - A^{-1})B = 3E$, $\left(E - \frac{A^*}{|A|}\right)B = 3E$, $(2E - A^*)B = 6E$,又 $(2E - A^*) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{可逆,且} (2E - A^*)^{-1} \xrightarrow{\text{例 12}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \text{故 } B = 6 \cdot (2E - A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

评述 出现在例26、例27、例29、例30中的题型是近年考研热点之一,解题的规律是:先通过矩阵运算解出所要求的矩阵 B 或 A ,再通过计算(求逆、求和等)求得所要的矩阵。

例31* (01, 8分) 已知三阶矩阵 A 和三维向量 X ,使得向量组 X, AX, A^2X 线性无关,且满足 $A^3X = 3AX - 2A^2X$.

(1) 记 $P = (X, AX, A^2X)$,求三阶矩阵 B ,使 $A = PBP^{-1}$;

(2) 计算行列式 $|A + E|$.

分析 本题(1)要求的 B 使 $AP = PB$, $P^{-1}AP = B$,利用已知条件及前一等式,使我们能求出 B ,后一等式表明 $A \sim B$,从而 $A + E \sim B + E$,就有 $|A + E| = |B + E|$,通过 $|B + E|$ 的值得到行列式 $|A + E|$,使(2)得到解答.

解 (1) 设 $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$,则由 $AP = PB$ 得

$$(AX, A^2X, A^3X) = (X, AX, A^2X) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \text{可改写成} \begin{cases} AX = a_1X + b_1AX + c_1A^2X & (1) \\ A^2X = a_2X + b_2AX + c_2A^2X & (2) \\ A^3X = a_3X + b_3AX + c_3A^2X & (3) \end{cases}$$

将已知条件 $A^3X = 3AX - 2A^2X$ 代入第三式得 $3AX - 2A^2X = a_3X + b_3AX + c_3A^2X$ (4)

由于 X, AX, A^2X 线性无关,故(1)式可得 $a_1 = c_1 = 0, b_1 = 1$;

(2)式可得 $a_2 = b_2 = 0, c_2 = 1$;

(4)式可得 $a_3 = 0, b_3 = 3, c_3 = -2$.

$$\text{故 } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ 由于 } A \sim B, \text{ 从而 } A + E \sim B + E, \text{ 就有 } |A + E| = |B + E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

评述 本题属有一定难度的综合性考研题目,涉及多个知识点综合应用,考生需要较强的分析、判断及综合应用能力,才能完成这一考题.

典型题型9. 初等矩阵

例32 (95, 3分) 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

那么,下列四种哪一个是正确的?

- (A) $AP_1P_2 = B$ (B) $AP_2P_1 = B$ (C) $P_1P_2A = B$ (D) $P_2P_1A = B$

解 (C) 正确. 因为用初等矩阵 P_2 左乘 A 时, 相当于把 A 的第一行加到第三行, 得 P_2A , 再把初等矩阵 P_1 左乘 (P_2A) , 则相当于把 (P_2A) 的第一、二行对调, 故有 $P_1P_2A = B$ 成立.

评述 初等矩阵的应用型考题系冷门性的, 不多见.

例 33 (01, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$,

$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 其中 A 可逆, 则 B^{-1} 等于:

- (A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$

分析 P_1, P_2 均是初等矩阵, 且有 $P_1 = P_1^{-1}$, $P_2 = P_2^{-1}$, A 可逆时 B 也可逆, 故只验证 B^{-1} 等于何种情况.

证明 从 $AP_2P_1 = B$ 则 $B^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1} = P_1P_2A^{-1}$, 故应选(C).

典型题型 10. 矩阵的秩

与矩阵的秩有关的考试是考研中的热门性考题, 应引起考生重视.

例 34 设 $A = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}$ 其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 则矩阵 A 的秩 $r(A) = 1$.

解 因为 A 的一阶子式 $a_ib_i \neq 0$, 而所有二、三、...、 n 阶子式全为零, 故 $r(A) = 1$.

例 35 设 A 为 n 阶非零方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A' 是 A 的转置矩阵, 当 $A^* = A'$ 时, 证明 $|A| \neq 0$.

证明 因为 $AA^* = |A|I$, 故 $AA' = |A|I$. 反证法, 若 $|A| = 0$, 则 $AA' = 0$. 设 A 的行向量为 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) (i = 1, 2, \dots, n)$, 则有 $\alpha_i \alpha_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 即 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 故 $A = 0$. 这与 A 为非零矩阵矛盾, 从而 $|A| \neq 0$.

例 36 (96, 3 分) 设 A 是 4×3 矩阵, 且 $r(A) = 2$, 而 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 则 $r(AB) = \underline{2}$.

解 因为 $r(A) = 2$, 经计算 $r(B) = 3$. 由于 $r(A) + r(B) - 3 \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$, 而 $2 \leq r(AB) \leq 2$, 故 $r(AB) = 2$.

例 37 (97, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 $t = \underline{-3}$.

解 因为 $AB = 0$, 所以 $r(A) + r(B) \leq 3$, 且 $r(B) \geq 1$, $r(A) \leq 2$, 故 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7t + 21 = 0$, 所以 $t = -3$.

例 38 (98, 3 分) 设阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{bmatrix}$ 求 $r(A)$.

解 用行列式和初等变换, 经计算得 $|A| = (a-1)^{n-1}(a+n-1)$, 所以

(1) 当 $a \neq 1$ 且 $a \neq 1-n$ 时, $|A| \neq 0$, 从而 $r(A) = n$.

(2) 当 $a = 1$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, r(A) = 1.$$

(3) 当 $a = 1-n$ 时, $|A| = 0$,

$$A = \begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{bmatrix} \quad \text{此时 } A \text{ 的第 } n-1 \text{ 阶顺序主子式}$$

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^{n-2}(a+n-2) \neq 0, \text{ 所以 } r(A) = n-1.$$

例 39* (01, 3 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ 且秩 $r(A) = 3$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{解 } A \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k+3 & k+3 & k+3 & k+3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} k-1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k+3 & k+3 & k+3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 \end{bmatrix}$$

因此, 当 $k = -3$ 时 $r(A) = 3$.

评述 例 37、例 38、例 39 均系带参数的确定矩阵秩的方法, 考研热门题型之一.

例 40 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, P 为三阶非零矩阵, 且 $PQ = 0$, 则下列四种哪一个成立?

(A) $t = 6$ 时 P 的秩必为 1 (B) $t = 6$ 时 P 的秩必为 2

(C) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 1 (D) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 2.

解 把 Q 的列向量视为方程组 $PX = 0$ 的解 ($X = (x_1, x_2, x_3)$). 所以当 $t \neq 6$ 时, 可知 $PX = 0$ 有两个线性无关解, 由此 $r(P) \leq 1$. 又因为 P 是三阶非零矩阵, 所以 $r(P) \geq 1$. 总之 $r(P) = 1$, 所以 (C) 正确.

例 41 实数矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$, $B = A'A$, 求 $r(B)$.

$$\text{解 } B = A'A = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}$$

因为 $A \neq 0$, 即 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 不全为零, 所以 $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$ 中至少有一个不为零, 因此 $r(A) \geq 1$, 而 B 的任何两行都成比例, 所以 $r(B) \leq 1$, 从而 $r(B) = 1$.

典型题型 11. 矩阵应用

例 42 (98, 3 分) 设矩阵 A 是满秩的: $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 则直线 $l_1: \frac{x - a_3}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_3}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_3}{c_1 - c_2}$ 与直线

$l_2: \frac{x - a_1}{a_2 - a_3} = \frac{y - b_1}{b_2 - b_3} = \frac{z - c_1}{c_2 - c_3}$ 关系为 (A).

(A) 相交于一点 (B) 重合 (C) 平行但不重合 (D) 异面

解 令 $p_1 = (a_3, b_3, c_3), p_2 = (a_1, b_1, c_1), \vec{s}_1 = \{a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2\}, \vec{s}_2 = \{a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3\}$.

联接向量 $\overrightarrow{p_1 p_2} = \{a_1 - a_3, b_1 - b_3, c_1 - c_3\}$, 因为 $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{p_1 p_2}$ 坐标行列式

$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{后, 第一、三行相同}]{\text{第二行加到第一行}} 0$, 所以 $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{p_1 p_2}$ 共面. 又因为矩阵 A 是满秩的, 所以

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以 $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ 不平行, 从而可知两直线 l_1, l_2 相交于一点, 故 (A)

正确.

例 43* (00, 8 分) 某试验性生产线每年一月份进行熟练工、非熟练工人数的统计, 然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其它生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工, 设第 n 年一月份统计的熟练和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n , 记成向量 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$.

工, 设第 n 年一月份统计的熟练和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n , 记成向量 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$.

(1) 求 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ 的关系式, 并写成矩阵形式: $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$.

(2) 验证 $\eta_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量, 并求出相应的特征值.

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时, 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

分析 求解应用性题关键的步骤是反复认真地理解题意, 通过仔细分析建立起变量之间的联系, 即数学方程式.

解 (1) 依题意, 第 $(n+1)$ 年与第 n 年之间: x_{n+1}, y_{n+1} 与 x_n, y_n 有关系式

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right), \\ y_{n+1} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) \end{cases},$$

写成矩阵形式 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix},$

求得矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

(2) 令 $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $|P| = 5 \neq 0$ 知 η_1, η_2 线性无关. 直接验证: $A\eta_1 = \lambda_1\eta_1, A\eta_2 = \lambda_2\eta_2$ 成立, 故 η_1, η_2 是 A 的相应于 λ_1, λ_2 的特征值.

$$(3) \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{由 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ 有 } A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}, A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{又 } P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ 故}$$

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^n & 4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$\text{因此 } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

预测·强化训练十

1. 如果 $A = \frac{1}{2}(B + E)$, 证明 $A^2 = A$ 的充要条件为 $B^2 = E$.
2. 设方阵 A 适合 $A^k = 0 (k \geq 2)$, 证明 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$.
3. 设方阵 A 可逆, 求证 A^* 也可逆, 并求 $(A^*)^{-1}$.
4. 设 A, B 是 n 阶对称矩阵, 证明: AB 是对称矩阵的充要条件是 $AB = BA$.
5. 填空题

$$(1) \text{ 设矩阵 } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则逆矩阵 } (A - 2I)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \text{ 设 } A \text{ 和 } B \text{ 均为可逆矩阵, } X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \text{ 为分块矩阵, 则 } X^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3)^* \text{ 设矩阵 } A, B \text{ 满足 } A^*BA = 2BA - 8E, \text{ 其中 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E \text{ 为单位矩阵, } A^* \text{ 为 } A \text{ 的伴随矩阵, 则}$$

$$B = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) \text{ 设 } A, B \text{ 均为 } n \text{ 阶矩阵, } |A| = 2, |B| = -3, \text{ 则 } |2A^*B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 选择题

(1) 设 A 为 n 阶方阵, 且 A 的行列式 $|A| = a \neq 0$, 而 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|A^*|$ 等于

- (A) a (B) $\frac{1}{a}$ (C) a^{n-1} (D) a^n .

(2) 设 A, B 都是 n 阶方阵, 满足等式 $AB = 0$, 则必有

- (A) $A = 0$ 或 $B = 0$ (B) $A + B = 0$
(C) $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$ (D) $|A| + |B| = 0$

(3) 设 $A, B, A+B, A^{-1} + B^{-1}$ 均为 n 阶非零矩阵, 则 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ 等于

- (A) $A^{-1} + B^{-1}$ (B) $A + B$
(C) $A(A+B)^{-1}B$ (D) $(A+B)^{-1}$

(4) 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 A 和 B 的秩

- (A) 必有一个等于零 (B) 都小于 n
(C) 一个小于 n , 一个等于 n (D) 都等于 n

(5) 设 n 阶矩阵 A 非奇异 ($n \geq 2$), A^* 是 A 的伴随矩阵, 则

$$(A) (A^*)^* = |A|^{n-1} A$$

$$(C) (A^*)^* = |A|^{n-2} A$$

$$(B) (A^*)^* = |A|^{n+1} A$$

$$(D) (A^*)^* = |A|^{n+2} A$$

(6) 设 A, B 为同阶可逆矩阵, 则

$$(A) AB = BA$$

$$(C) \text{ 存在可逆矩阵 } C, \text{ 使 } C^{-1}AC = B$$

$$(B) \text{ 存在可逆矩阵 } P, \text{ 使 } P^{-1}AP = B$$

$$(D) \text{ 存在可逆矩阵 } P, Q, \text{ 使 } PAQ = B.$$

$$(7) \text{ 设 } n(n \geq 3) \text{ 阶矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \text{ 若矩阵 } A \text{ 的秩为 } n-1, \text{ 则 } a \text{ 必为}$$

$$(A) 1$$

$$(B) \frac{1}{1-n}$$

$$(C) -1$$

$$(D) \frac{1}{n-1}.$$

7. 设 A 是 n 阶可逆矩阵, 将 A 的第 i 行和第 j 行对调后得到的矩阵记为 B . (1) 证明 B 可逆, (2) 求 AB^{-1} .

$$8. \text{ 已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 且 } A^2 - AB = I, \text{ 其中 } I \text{ 为三阶单位矩阵, 求矩阵 } B.$$

9. 设 A 是三阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A 的行列式 $|A| = \frac{1}{2}$, 求行列式 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 的值.

10. 求解下列各题

$$(1) \text{ 设矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 矩阵 } X \text{ 满足 } A^*X = A^{-1} + 2X, \text{ 其中 } A^* \text{ 是 } A \text{ 的伴随矩阵, 求矩阵 } X.$$

$$(2) \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 而 } n \geq 2 \text{ 为正整数, 则 } A^n - 2A^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) \text{ 已知 } AB - B = A, \text{ 其中 } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A = \underline{\hspace{2cm}}.$$

用矩阵分块方法, 求下列(4)~(6) 矩阵的逆矩阵.

(4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(5)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(6)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(7) \text{ 设矩阵 } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, E \text{ 为二阶单位矩阵, 矩阵 } B \text{ 满足 } BA = B + 2E, \text{ 则 } |B| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

11. (2006) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第二行加到第一行得 B , 再将 B 的第一列的 -1 倍加到第二列得 C , 记

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } (\quad)$$

$$(A) C = P^{-1}AP.$$

$$(B) C = PAP^{-1}$$

$$(C) C = P^TAP.$$

$$(D) C = PAP^T.$$

简明解答

1. 必要性 $A^2 = A$, 即 $\frac{1}{4}(B+E)(B+E) = \frac{1}{2}(B+E)$, 经矩阵运算 $B^2 = E$. 充分性 $B^2 = E$, 经上面矩

阵运算的反运算 $\frac{1}{4}(B+E)(B+E) = \frac{1}{2}(B+E)$, 即 $A^2 = A$.

2. 根据运算规则 $(E + A + A^2 + \dots + A^{k-1})(E - A) = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1} - A - A^2 - A^3 - \dots - A^{k-1} - A^k = E$, 由逆矩阵定义知 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$.
3. 因 A 可逆, 故 $A^* = |A| A^{-1}$, $A^* A = |A| E$, $A^* \cdot \frac{A}{|A|} = E$. 根据逆矩阵定义知 A^* 可逆, 且 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$.
4. 必要性 设 $(AB)^T = AB$ (对称), 经运算 $(AB)^T = B^T A^T = BA$, 由此 $AB = BA$. 充分性 设 $AB = BA$, 经运算 $(BA)^T = A^T B^T = AB$, 由此 $(AB)^T = (AB)$ (对称).

5. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (4) $\frac{-2^{2n-1}}{3}$

6. (1) (C). (2) (C). (3) (C). (4) (B).
(5) (C) (提示 $A^*(A^*)^* = |A^*| E$). (6) (D). (7) (B).

7. (1) 因 $E(i, j)A = B$, 而 $E(i, j)$ 、 A 均为可逆矩阵, 故 $B = E(i, j)A$ 为可逆矩阵, 且 $B^{-1} = A^{-1}E(i, j)$.
(2) $AB^{-1} = AA^{-1}E(i, j) = E(i, j)$.

8. 原矩阵方程改写成:

$$\begin{aligned} (A + E)(A - E) &= AB, B = A^{-1}(A + E)(A - E) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

9. $(3A)^{-1} - 2A^* = (3A)^{-1} - 2|A| A^{-1} = \left(\frac{1}{3} - 1\right)A^{-1} = -\frac{2}{3}A^{-1}$, $[(3A)^{-1} - 2A^*]A = -\frac{2}{3}E$,

$$|(3A)^{-1} - 2A^*| |A| = -\frac{8}{27}, \xrightarrow{|A| = \frac{1}{2}} |(3A)^{-1} - 2A^*| = -\frac{16}{27}.$$

10. (1) 解: 由原式得 $(A^* - 2E)X = A^{-1}$, $(|A| E - 2A)X = E$, $X = (|A| E - 2A)^{-1}$,

$$|A| = 4, |A| E - 2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{故 } X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (2) 因 $A^2 = 2A$, $A^3 = 2^2A$, $\dots$, $A^n = 2^{n-1}A$, 从而 $A^n - 2A^{n-1} = 2^{n-1}A - 2 \cdot 2^{n-2}A = (2^{n-1} - 2^{n-1})A = 0$.

- (3) 由原式得 $A(B - E) = B$,

$$A = B(B - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{4} & 0 \\ -\frac{2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(4) A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -3 \end{bmatrix}.$$

$$(5) B^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ \hdashline & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} & B_1 \\ B_2 & \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} & B_2^{-1} \\ B_1^{-1} & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

$$(6) C^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ \hdashline & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} c_1 & c_3 \\ & c_2 \end{array} \right]^{-1} \stackrel{\text{例 12}}{\text{评述}} \left[\begin{array}{cc} c_1^{-1} & -c_1^{-1}c_3c_2^{-1} \\ & c_2^{-1} \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

$$(7) |B| = 2.$$

$$11. \text{ 计算出 } P^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] A \rightarrow B = PA \rightarrow C = PAP^{-1}. (\underline{B}).$$

第十一章 向 量 *

考试要求

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合和线性表示的概念.
 2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念,掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
 3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念,会求向量组的极大线性无关组及秩.
 4. 理解向量组等价的定义,理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.
- (以下 5、6、8 数学二不要求)
5. 了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.
 6. 了解基变换及坐标变换公式,会求过渡矩阵.
 7. 了解内积的概念,掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.
 8. 了解规范正交基、正交矩阵的概念、以及它们的性质.

考试要点分析与题型预测

本章讨论向量组的线性相(无)关性、极大线性无关组,由此建立起向量组的秩与矩阵的秩、 n 维向量空间的基与坐标、内积、标准正交基.

本章考研题重点是向量组线性相(无)关判定论证题目多,并相应地求极大线性无关组,其次,矩阵秩的计算题占第二位,求向量的坐标、过渡矩阵、Schmidt 标准正交化,也是出考研题的知识点.

§ 11 - 1 向量组的线性相(无)关

1. 主要概念

定义 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 m 个 n 维向量,若有 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0,$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关. 否则称此向量组线性无关.

定义 向量组 T (包含有限或无限多个向量) 中一个部分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 若满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) 向量组 T 中任一向量都可用 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出. 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 T 的一个最大线性无关组. 简称最大无关组(或极大无关组).

向量组 T 的最大无关组所含向量的个数,称为该向量组 T 的秩.

注意 向量组的最大无关组不是唯一的,但最大无关组所包含的向量个数都是一样的,即为该向量组的秩. 两组不同的最大无关组是等价的. 即它们能互相线性表出.

2. 线性相(无)关的判定

(1) 直接用定义

(2) 方程组判 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (其中 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 均为 n 维向量) 线性相(无)关的充要条件是方程组

$$\sum_{i=1}^m x_i \alpha_i = 0 \text{ 有(无)非零解.}$$

(3) 线性组合判 向量组线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

(4) 矩阵判定法:

定理 1 设 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad i = 1, 2, \dots, m$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关的充要条件是 $r(A) = m$.

推论1 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < m$.

推论2 若 $m > n$ 则 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 必线性相关.

推论3 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无(相)关的充要条件是方阵 A 是满(降)秩的.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性表出, 且表示法唯一.

向量组 $\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ 线性无关, 称为 n 维单位坐标向量组.

定理2 设有向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$; (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 若

(1) $\beta_i, i = 1, 2, \dots, t$ 均可由向量组 (I) 线性表示,

(2) $t > s$, 则

向量组 (II) 必线性相关.

反之, 若 $\beta_i, i = 1, 2, \dots, t$ 均可由向量组 (I) 线性表示, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关, 则必有 $t \leq s$.

§ 11 - 2 向量组的秩与矩阵的秩

定义 设有向量组 T , 如果 (1) 在 T 中 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关; (2) T 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关, 那么称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 T 的最大线性无关向量组, 简称最大无关组. 数 r 称为向量组的秩.

矩阵的最高阶非零子式可能不止一个, 向量组的最大无关组也可能不止一个.

定义 (向量组等价) 设有两个 n 维向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$

$B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$

如果向量组 A 中的每个向量都由向量组 B 中的向量线性表示, 则称向量组 A 能由向量组 B 线性表示. 如果向量组 A 能由向量组 B 线性表示, 且向量组 B 也能由向量组 A 线性表示, 则称向量组 A 与 B 等价, 记 $A \sim B$.

定理1 r 维向量组的每个向量添上 $n-r$ 个分量, 构成 n 维向量组. 若 r 维向量组线性无关, 则 n 维向量组亦线性无关. 反之, 若 n 维向量组线性相关, 则 r 维向量组亦线性相关.

定理2 设 n 维行向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 构成矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix}$$

当 $r \leq n$ 时, 向量组 A 线性无关的充要条件是: 在矩阵 A 中存在一个不等于零的 r 阶子式.

性质1 向量组线性无关的充要条件是它含向量个数等于它的秩.

性质2 矩阵 A 的秩等于 A 的列向量组的秩, 也等于 A 的行向量组的秩.

性质3 设矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D \neq 0$, 而所有包含 D 的 $r+1$ 阶子式全为 0, 则 A 中所有 $r+1$ 阶子式全为 0, 从而 $r(A) = r$.

性质4 若 $A \sim B$, 则 $r(A) = r(B)$.

推论1 矩阵经初等变换后其秩保持不变.

性质5 设向量组 B 能由向量组 A 线性表示, 则向量组 B 的秩不大于向量组 A 的秩, 即 $r(B) \leq r(A)$.

推论2 $m \times n$ 阶矩阵 A 都可经过初等行、列变换化为阶梯形及标准形

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

主对角线上

元素 1 的个数等于 A 的秩数.

定理 3 设 A 为可逆矩阵, 则存在有限个初等方阵 $P_1, P_2, \dots, P_k$, 使 $A = P_1 P_2 \dots P_k$.

推论 $m \times n$ 阶矩阵 $A \cong B$ 的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q, 使 $PAQ = B$.

§ 11 - 3 n 维向量空间 R^n 的基和坐标

n 维向量空间 R^n 若 R^n 中有 n 个向量线性无关, 而 R^n 中任一向量都可由这 n 个向量线性表示, 则称 R^n 为 n 维向量空间, 称这 n 个向量为 R^n 的一组基.

R^n 中的 n 个线性无关的向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 其中 R^n 中任一向量 α 均可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表出, 则 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 称为 R^n 的一组基. 若 R^n 中任一向量 α 可由 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 线性表出, 且表示法唯一, 即存在数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使

$$\alpha = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_n \varepsilon_n$$

则 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 称为向量 α 在基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标. 记作 $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$.

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为 R^n 的基, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是一组向量, 由于 R^n 中任何一个向量均可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表出, 故存在一系列数 a_{ij} , 其中 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, 使

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j \quad \text{即} \quad (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) A,$$

其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

如果 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性无关, 即为 R^n 的另外一组基, 这时称矩阵 A 为从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵.

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是 R^n 的两组不同的基, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的一个过渡矩阵. 再设 α 为 R^n 中任何一个向量, 它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 和基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下的坐标分别为 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ 和 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$, 则依

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) A,$$

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) X \text{ 及 } \alpha = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) Y,$$

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) Y = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) AY = \alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) X$$

得到 $AY = X$.

所以同一个向量在不同基下的坐标可以通过过渡矩阵来求得, 称 $X = AY$ 为坐标变换公式.

§ 11 - 4 内积、标准正交基和 Schimidt 正交化

向量 α, β 的内积定义为 $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta$.

向量 α 的长度为 $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$, 且 $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

非零向量 α, β 之间的夹角 θ , 定义 $\cos \theta = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha| \cdot |\beta|}$.

如果 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 与 β 正交.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是两两正交的非零向量组, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 反之不成立.

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是一组基, 如果

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$$

则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 称为正交基. 如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是正交基, 且每个向量 $\varepsilon_i (i = 1, \dots, n)$ 都是单位向量, 即 $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 1 (i = 1, \dots, n)$, 则称 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为标准正交基.

任何线性无关的向量组均可通过 Schimidt 正交化方法化成两两正交长度为 1 的向量组

Schimidt 正交化方法:

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为 m 个线性无关的维向量, 构造

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

.....

$$\beta_{k+1} = \alpha_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(\alpha_{k+1}, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i, k = 2, 3, \dots, m-1.$$

再令 $\eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}, \dots, \eta_m = \frac{\beta_m}{|\beta_m|}$. 这样 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 为两两正交的向量组, 而 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 为长度为 1 的正交向量组, 称为标准正交向量组.

设 n 阶矩阵 A 以列(行)分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ 则称 A 为正交矩阵(由标准正交向量组组成的矩阵).

定理 A 是正交矩阵充要条件是 A 的列(行)向量组是标准正交向量组.

A 是正交矩阵, 则 $|A| = \pm 1$, A, B 是正交矩阵, 则乘积 AB 仍是正交矩阵.

§ 11 - 5 典型例题分析与最新考试题型预测

典型题型 1. 线性相(无)关判定

例 1* 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 又 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$. 证明 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 也线性无关.

证明 设有实数 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 使

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_r\beta_r = 0 \quad (*)$$

成立, 从而

$$\begin{aligned} & k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots + k_r(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r) \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_r)\alpha_1 + (k_2 + k_3 + \dots + k_r)\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0 \end{aligned}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 所以得出 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 的齐次方程组

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_r = 0, k_2 + k_3 + \dots + k_r = 0, \dots, k_r = 0$$

从而得解 $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$, 即仅有恒为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 使 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_r\beta_r = 0$ 成立, 故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关.

例 2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 又 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + \alpha_1$. 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关.

证明 设有实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 使

$$\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3 + \lambda_4\beta_4 = 0 \quad (*)$$

成立, 从而

$$\begin{aligned} & \lambda_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_2(\alpha_2 + \alpha_3) + \lambda_3(\alpha_3 + \alpha_4) + \lambda_4(\alpha_4 + \alpha_1) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_4)\alpha_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)\alpha_3 + (\lambda_3 + \lambda_4)\alpha_4 = 0. \end{aligned}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 所以得出 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 的齐次方程组: $\lambda_1 + \lambda_4 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$

$0, \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ 成立. 由于系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 所以齐次方程组有非零解 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 即有不全为

的数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 使 $\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3 + \lambda_4\beta_4 = 0$ 成立, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关.

评述 例 1*、例 2 均系判定向量组线性相关、无关的, 都用定义式 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ 去讨论, 例 2 判定出 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 不全为 0, 故线性相关, 例 1* 判定出 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 全为 0, 故线性无关, 这样的讨论法是有代表性的、典型的方法, 例 1*、例 2 类型的例子一直是考研中的热门考研题目之一, 几乎年年都会考这样的题目.

例 3 由已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 判断下列各向量组的线性相关性.

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$

(C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$

例6 (02, 3分) 设向量组 $\alpha_1 = (a, 0, c)^T$, $\alpha_2 = (b, c, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, a, b)^T$ 线性无关, 则 a, b, c 必满足关系_____.

分析 本题目适用方程组: $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = 0$ 判定.

解 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故方程组: $x_1 \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 仅有零解, 从而方程组行列式

$$|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3| = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = 2abc \neq 0,$$

即 $abc \neq 0$, 即为所求关系式.

典型题型2. 最大线性无关组

例7 设有向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)$, $\alpha_5 = (2, 1, 5, 10)$, 则该向量组的最大线性无关组是

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$.

解 用所给向量为列向量, 作矩阵 A , 并对其仅作行初等变换, 将其化为阶梯矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

上式仅在第1, 2, 4三列上有一个三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为原向量组的一个最(极)大

线性无关组, 即(B)正确.

$$r(A) = 3.$$

典型题型3. 线性表示

例8 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 问

(1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表示? 证明您的结论;

(2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 证明您的结论.

证明 (1) α_1 能由 α_2, α_3 线性表示. 理由是: 因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 存在不全为零的 k_1, k_2, k_3 使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$, 其中 $k_1 \neq 0$. 否则 $k_1 = 0$, 那么 k_2, k_3 不全为零, 使 $k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$, 即 α_2, α_3 线性相关, 从而 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 也线性相关, 这与假设矛盾. 故 $k_1 \neq 0$, 从而 $\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1} \alpha_2 - \frac{k_3}{k_1} \alpha_3 = l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3$.

(2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 反证法. 设 $\alpha_4 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3$. 由 $\alpha_1 = l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3$, 所以 $\alpha_4 = (\lambda_2 + \lambda_1 l_2) \alpha_2 + (\lambda_3 + \lambda_1 l_3) \alpha_3$, 即 α_4 可由 α_2, α_3 线性表示, 即 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 与题设矛盾, 因此 α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

例9 (98, 8分) 已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T$, $\beta = (3, 10, b, 4)^T$, 问

(1) a, b 取何值时 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? (2) a, b 取何值时 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 并写出此表达式.

分析 本题目讨论 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 是否有解. 因此, 初等变换法讨论此题就是即将要用的方法.

$$\text{解 因为 } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}$$

所以 (1) 当 $b \neq 2$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 无解, 此时 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(2) 当 $b = 2, a \neq 1$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 有唯一解

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (-1, 2, 0)^T.$$

于是 β 可唯一表示为 $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

(3) 当 $b = 2, a = 1$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 有无穷多解:

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = k(-2, 1, 1)^T + (-1, 2, 0)^T,$$

其中 k 为任意常数, 这时 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示为

$$\beta = -(2k+1)\alpha_1 + (k+2)\alpha_2 + k\alpha_3.$$

评述 带参数的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$, 其中某个向量可否用其余向量来线性表示, 是考研中的热门题之一, 解题方法很有普遍意义.

例 10* (06, 13 分) 设 4 维向量 $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$, 问 a 为何值时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

分析 设有数组 c_1, c_2, c_3, c_4 , 使 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = 0$. 将 $\alpha_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的分量代入, 变成齐次方程组. 由题设 $\alpha_i (i=1, 2, 3, 4)$ 线性相关性表明, 齐次方程组有非零解 $c_i (i=1, 2, 3, 4)$, 从而行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = 0$, 定出 a 后, 再确定极大无关组, 写出线性表示式.

解 (1) 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} = (a+10)a^3.$$

故当 $a = 0$ 时, 或 $a = -10$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

(2) 当 $a = 0$ 时, $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组, 且 $\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1$.

当 $a = -10$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & -10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4).$$

显然 $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ 为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的一个极大线性无关组, 且 $\beta_1 = -\beta_2 - \beta_3 - \beta_4$, 故

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组, 且 $\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$.

评述 本题是综合性考题, 具有典型性, 含参数 a 的向量组线性相(无)关性与参数紧密相关, 例 9, 例 11 也是如此, 解题方法很有普遍意义, 是考研中的热门题之一, 很值得引起读者重视.

例 11* (99, 8 分) 设向量组 $\alpha_1 = [1, 1, 1, 3]^T, \alpha_2 = [-1, -3, 5, 1]^T, \alpha_3 = [3, 2, -1, p+2]^T, \alpha_4 = [-2, -6, 10, p]^T$.

(1) p 为何值时, 该向量组线性无关? 并在此时将向量 $\alpha = [4, 1, 6, 10]^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示;

(2) p 为何值时, 该向量组线性相关? 并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

分析 本题目系含参数 p 的向量组, 向量组线性相(无)关完全取决于 p , 讨论方法完全类似于例题 10——初等变换法.

解 对矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \dots \alpha]$ 作初等变换

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & p+2 & p & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -4 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & p-7 & p+6 & -2 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(1) 当 $p \neq 2$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 此时设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = \frac{3p-4}{p-2}, x_3 = 1, x_4 = \frac{1-p}{p-2}$.

(2) 当 $p = 2$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. 此时, 向量组的秩等于 3. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$) 为其一个极大线性无关组.

例 12 (00, 8分) 设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T, \alpha_2 = (-2, 1, 5)^T, \alpha_3 = (-1, 1, 4)^T, \beta = (1, b, c)^T$. 试问 a, b, c 满足什么条件时,

(1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示唯一?

(2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示不唯一, 并求出一般表达式?

分析 该题目的做法类似于例 10, 即讨论方程组 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \beta$ 在何种情况下 (即 a, b, c 满足什么条件) 有唯一解, 无解, 有无穷多组解?

解 由方程组 $k_1 \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 的系数行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$

$-a-4$.

(1) 当 $a \neq -4$ 时, 即 $|A| \neq 0$, 方程组有唯一解 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式唯一.

(2) 当 $a = -4$ 时, 即 $|A| = 0$, 对 A 的增广矩阵作初等变换, 有

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-c-1 \end{array} \right]$$

如 $3b-c \neq 1$ 时, 则 $2 = r(A) \neq r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(3) 当 $a = -4$ 时, 且 $3b-c = 1$ 时 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 方程组有无穷多组解 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示不唯一, 解得 $k_1 = t, k_3 = 2b+1, k_2 = -2t-b-1$ (t ——任意常数), 故有一般表示式:

$$\beta = t\alpha_1 - (2t+b+1)\alpha_2 + (2b+1)\alpha_3.$$

评述 这样的考研题是有代表性的样题, 解题方法同样也是典型性的、常用的作法, 也是近年来的热门考题之一, 读者应很好地学会这种做法.

例 13 (05, 9分) 确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, a)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

分析 从 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是否可用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示入手, 并应用初等变换及线性方程组的可解性.

解 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即方程组 $k_{11}\alpha_1 + k_{12}\alpha_2 + k_{13}\alpha_3 = \beta_1$ ($i = 1, 2, 3$) 总存在某个 i , 使该方程组无解, 此时 $\gamma(A) \neq \gamma(A_i)$, 从而 $\gamma(A) < 3$, 行列式 $|A| =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+2) = 0, \quad \text{故 } a = 1 \text{ 或 } a = -2.$$

当 $a = 1$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 但 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 (即方程组 $\beta_2 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ 无解), 由此可知 $a = 1$ 符合题意.

当 $a = -2$ 时, 由于

$$(B \dots A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right),$$

考虑线性方程组 $BX = A$, 因为秩 $r(B) = 2$, $r(B \dots \alpha_2) = 3$, 故 $BX = \alpha_2$ 无解, 即 α_2 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 与题设矛盾, 即 a 取 2 不合题意, 应去掉.

综合 $a = 1$.

评述 本题具有典型性, 代表性, 解题方法有相当大的难度, 很值得认真思考.

典型题型 4. 证明线性相(无)关

例 14 (98, 4 分) 设 A 为 n 阶矩阵, 若存在整数 K , 使线性方程组 $A^K x = 0$ 有解向量 α , 且 $A^{K-1}\alpha \neq 0$, 证明向量组 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{K-1}\alpha$ 是线性无关的.

分析 设有常数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 使得 $\lambda_1\alpha + \lambda_2A\alpha + \lambda_3(A^2\alpha) + \dots + \lambda_k(A^{k-1}\alpha) = 0$ 恒成立, 只需证明 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ 即可.

证明 由 $\lambda_1\alpha + \lambda_2(A\alpha) + \lambda_3(A^2\alpha) + \dots + \lambda_k(A^{k-1}\alpha) = 0$ (*)

用 A^{k-1} 乘 (*) 式左、右两端, 知

$$\begin{aligned} A^{k-1}(\lambda_1\alpha + \lambda_2A\alpha + \dots + \lambda_k(A^{k-1}\alpha)) &= \lambda_1A^{k-1}\alpha + \lambda_2A^k\alpha + \dots + \lambda_k(A^{2k-2}\alpha) \\ &= \lambda_1(A^{k-1}\alpha) + 0 + \dots + 0 = \lambda_1(A^{k-1}\alpha) = 0 \end{aligned}$$

因为 $A^{k-1}\alpha \neq 0$, 所以 $\lambda_1 = 0$.

同理, 用 A^{k-2} 乘 (*) 式左右两端, 推出 $\lambda_2 = 0$. 再类似, 即可推出 $\lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_n = 0$. 因此, 向量组: $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

例 15* (02, 3 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对任意常数 k 必有

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关

分析 用排谬法证明 (A) 成立.

证明 (C) 不能成立. 如 (C) 成立, 例如取 $k = 0$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性无关, 与题设矛盾. (B)、(D) 均不可能成立. 如 (B) 成立, 设有一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 使

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \lambda_4(k\beta_1 + \beta_2) = 0 \quad (*)$$

成立, 此时 $\lambda_4 \neq 0$ (否则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 与题设矛盾). 由条件 $\beta_1 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$, 代入 (*) 式, 得

$$(\lambda_1 + \lambda_4kk_1)\alpha_1 + (\lambda_2 + \lambda_4kk_2)\alpha_2 + (\lambda_3 + \lambda_4kk_3)\alpha_3 + \lambda_4\beta_2 = 0.$$

因 $\lambda_4 \neq 0$, 故 $\beta_2 = \frac{-1}{\lambda_4}[(\lambda_1 + \lambda_4kk_1)\alpha_1 + (\lambda_2 + \lambda_4kk_2)\alpha_2 + (\lambda_3 + \lambda_4kk_3)\alpha_3]$ 与题设矛盾, 同理可证 (D) 也不成立.

最后, 因 (B)、(C)、(D) 均不能成立, 故 (A) 成立.

评述 排谬法是做选择题的一种常用方法.

例 16 (05, 4 分) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别是 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是:

- (A) $\lambda_1 \neq 0$ (B) $\lambda_2 \neq 0$ (C) $\lambda_1 = 0$ (D) $\lambda_2 = 0$

分析 利用特征值特征向量概念和线性相(无)关概念, 即可得出 (B) 成立.

解 设 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

另外, 设有数组 k_1, k_2 使 $k_1\alpha_1 + k_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即 $(k_1 + \lambda_1k_2)\alpha_1 + \lambda_2k_2\alpha_2 = 0$.

α_1, α_2 是线性无关的, 故得出 k_1, k_2 满足线性方程组 $k_1 + \lambda_1k_2 = 0, \lambda_2k_2 = 0$, 该方程组仅有零解 $k_1 =$

$k_2 = 0$, 其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$, 即 (B) 成立. 反之, 若 (B) 成立, 逆推回去, 仅有 k_1, k_2 恒为零时, 有 $k_1\alpha_1 + k_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$ 成立, 即 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关.

综合 (B) 成立.

典型题型 5. 坐标、过渡矩阵

例 17 R^3 空间中, 求 $\alpha = (3, 7, 1)$ 在基 $\alpha_1 = (1, 3, 5), \alpha_2 = (6, 3, 2), \alpha_3 = (3, 1, 0)$ 下的坐标.

解 令 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ 即 $(3, 7, 1) = k_1(1, 3, 5) + k_2(6, 3, 2) + k_3(3, 1, 0)$,

$$\text{即} \quad \begin{cases} k_1 + 6k_2 + 3k_3 = 3, \\ 3k_1 + 3k_2 + k_3 = 7, \\ 5k_1 + 2k_2 = 1. \end{cases}$$

解之, 得 $k_1 = 33, k_2 = -82, k_3 = 154$. 所以 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(33, -82, 154)$.

例 18 已知 R^3 中的两个基为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

解 由 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 其中

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{于是} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

评述 本题是计算过渡矩阵 A 的方法, 值得重视.

例 19* 设 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, -1)^T, \alpha_3 = (1, -1, 1)^T, \beta_1 = (3, 0, 1)^T, \beta_2 = (2, 0, 0)^T, \beta_3 = (0, 2, -2)^T$ 是 R^3 的两组基.

(1) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 A ;

(2) 求向量 $\eta = (1, 0, -1)^T$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标;

(3) 已知向量 ζ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $(1, 2, 0)^T$, 求 ζ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标;

(4) 求在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下有相同坐标的非零向量.

分析 (3) 从 $[\beta_1, \beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 中求解 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. (4) 从求解齐次方程 $[(\alpha_1,$

$\alpha_2, \alpha_3) - (\beta_1, \beta_2, \beta_3)](x_1, x_2, x_3)^T = 0$ 得出非零向量 x .

解 (1) 由 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$ 得

$$\begin{aligned} A &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \eta$ 即 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 解得 $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$.

(3) 设 ζ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3)^T$, 由题设知

$$\zeta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{由此} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

即 ζ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(1, 3, 3)^T$.

(4) 设向量 ζ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下有相同的坐标 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 则有

$$\zeta = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{即} [(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - (\beta_1, \beta_2, \beta_3)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

解得 $x_1 = -k, x_2 = 3k, x_3 = k$, k 是非零任意常数. 由此, 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下有相同坐标的非零向量为

$$\zeta = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, k \text{ 为任意非零常数}$$

例 20 (03, 4 分) 从 $\mathbb{R}^2$ 的基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵_____.

分析 从 $(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2)A, A = (\alpha_1, \alpha_2)^{-1}(\beta_1, \beta_2)$

$$\text{解} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

典型题型 6. 关于矩阵的秩 $r(A)$

例 21* (97, 3 分) 设 $\alpha_1 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \alpha_2 = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}, \alpha_3 = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$, 则三条直线

$$(*) \dots \dots \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0. \end{cases} \text{ (其中 } a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3) \text{ 交于一点的充要条件是}$$

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

(C) 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \text{秩 } r(\alpha_1, \alpha_2)$

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, α_1, α_2 线性无关

分析 几何法与代数法相结合.

解 三直线相交于一点 $(x, y, 1)$, 即方程组 $(*)$ 有非零解 $(x, y, 1) \iff$ 系数行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, 从
条件

而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

而只有一个交点的条件是 α_1, α_2 线性无关, 即 $r(\alpha_1, \alpha_2) = 2$ (否则 $r(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, 三条直线平行, 或重合). 所以, 充要条件应选 (D).

评述 本题目系几何与代数相结合的应用性考题, 与第十章、§10-5、例 43 类似, 都表明了近年来考研题目的新趋向——将线性代数知识与几何的或各种实践知识结合, 应引起读者的重视.

例 22 求 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \text{ 的秩 } r(A).$$

解 因为初等变换不改变矩阵的秩, 故对 A 作初等变换

$$A = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b-a & 0 & \cdots & a-b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{bmatrix}$$

后者是阶梯形矩阵, 可知

若 $a \neq b$ 且 $a \neq -(n-1)b$ 时 $r(A) = n$; 若 $a = b \neq 0$ 时 $r(A) = 1$;

若 $a = -(n-1)b \neq 0$ 时 $r(A) = n-1$; 若 $a = b = 0$ 时 $r(A) = 0$.

典型题型 7. 标准正交基

例 23 求一个单位向量 α , 它与 $\xi_1 = (1, 1, -1, 1)^T$, $\xi_2 = (1, -1, -1, 1)^T$, $\xi_3 = (2, 1, 1, 3)^T$ 均正交.

解 设所求的单位向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, 则由 α 与 ξ_1, ξ_2, ξ_3 均正交及 α 是单位向量, 可知

$$\begin{cases} (\alpha, \xi_1) = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ (\alpha, \xi_2) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ (\alpha, \xi_3) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ (\alpha, \alpha) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1. \end{cases}$$

求解前三个方程组成的齐次方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

得到通解 $k(-4, 0, -1, 3)^T$, 代入第四个方程得出

$$16k^2 + k^2 + 9k^2 = 26k^2 = 1, k = \pm \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

故与 ξ_1, ξ_2, ξ_3 均正交的单位向量为 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}(-4, 0, -1, 3)^T$, $\alpha_2 = \frac{-1}{\sqrt{26}}(-4, 0, -1, 3)^T$.

例 24 (97, 5 分) 设 A 是秩等于 2 的 5×4 矩阵, 又

$$\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T, \alpha_3 = (5, -1, -8, 9)^T$$

是线性齐次方程组 $AX = 0$ 的解向量, 求 $AX = 0$ 的解空间的一组标准正交基.

分析 $r(A) = 2$, 未知量个数为 4, 故知方程组解空间的维数为 2, 即基础解系由二个线性无关解向量组成, 因为 α_1, α_2 是线性无关的, 即为基础解系, 就是解空间的基, 将 α_1, α_2 标准正交化即可.

解 正交化, 取 $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = (-1, 1, 4, -1)^T - \frac{5}{15}(1, 1, 2, 3)^T = \frac{1}{3}(-4, 2, 10, -6)^T.$$

单位化:

$$\varepsilon_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, 2, 3)^T, \varepsilon_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{1}{\sqrt{39}}(-2, 1, 5, -3)^T.$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 即为所求的解空间的标准正交基.

评述 取 α_1, α_3 或取 α_2, α_3 同样也可产生解空间的基. 由此, 说明解空间的基可以有多组.

预测·强化训练十一

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 而且 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \beta_2 = -\alpha_1 + \alpha_3, \beta_3 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3$, 讨论 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性相关性.

2. 求下列向量组的秩, 并求出最大线性无关组:

$$(1) \alpha_1 = (1, 2, -1, 4), \alpha_2 = (9, 100, 10, 4), \alpha_3 = (-2, -4, 2, -8);$$

$$(2) \alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (0, 2, 0), \alpha_3 = (0, 0, 3).$$

3. 设向量组 B $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 能由向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示:
$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$$

其中 K 为 $r \times s$ 矩阵, 且 A 组线性无关. 证明 B 组线性无关的充要条件是矩阵 K 的秩 $r(K) = r$.

4. 已知向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$. 如果各向量组的秩分别为 $r(I) = r(II) = 3, r(III) = 4$. 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4.

5. * 设 $A_{n \times m}, B_{m \times n}$, 其中 $n < m$ I 是单位向量. 若 $AB = I$, 证明 B 的列向量线性无关.

6. 已知 R^3 的两个基为 $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 0, -1), \alpha_3 = (1, 0, 1)$ 和 $\beta_1 = (1, 2, 1), \beta_2 = (2, 3, 4), \beta_3 = (3, 4, 3)$.

(1) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;

(2) 写出坐标变换公式;

(3) 写出向量 $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标.

7. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$

(C) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$

(D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$

8. (03 4 分) 设 α 为 3 维向量 α^T 是 α 的转置, 若 $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha =$ _____.

简明解答

1. 设有参数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ 成立, 即 $k_1(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) + k_2(-\alpha_1 + \alpha_3) + k_3(3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3) = (k_1 - k_2 + 3k_3)\alpha_1 + (2k_1 + 0k_2 + 3k_3)\alpha_2 + (3k_1 + k_2 + 4k_3)\alpha_3 = 0$,

$$\text{由于 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关, 故 } \begin{cases} k_1 - k_2 + 3k_3 = 0, \\ 2k_1 + 0k_2 + 3k_3 = 0, \\ 3k_1 + k_2 + 4k_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{该式的系数行列式 } D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ 所以, 方程组仅有零解, 即 } k_1 = k_2 = k_3 = 0 \text{ 只有零解, 从}$$

而 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

2. (1) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 100 & 10 & 4 \\ -2 & -4 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ 的一、三行的元素成比例, 故 A 的所有三阶子式均为零, 同时 A 右角有

$$A \text{ 二阶子式 } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 100 \end{bmatrix} \neq 0, \therefore r(A) = 2, \text{ 从而向量组 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 的秩为 2. } \alpha_1, \alpha_2; \alpha_2, \alpha_3 \text{ 均可作为最}$$

大线性无关组, 而 α_1, α_3 不可作为最大线性无关组.

将 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 的线性表示代入后, 得出

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 所以, 下列方程组

恒成立.

充分性 设 $r(K) = r$, 那么方程组(**)式只有零解 $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$ 将刚才前面的推理返回

去, 只有 $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$ 才能 (*) 式成立, 故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关.

5. 证 设 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中至少有一个非零向量. 设有数组 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 使 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n = 0$, 即 $BX = 0$, 从而 $ABX = IX = X = 0$; 即 $X = 0$, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. B 的列向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关.

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 坐标变换公式 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

7. (C) 线性无关. 设有数组 k_1, k_2, k_3 使:

$$k_1 + 3k_3 = 0, 2k_1 + 2k_2 = 0, 3k_2 + 3k_3 = 0.$$

• 376 •

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$$

齐次线性方程组只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 故向量组(C) 线性无关.

8. 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \alpha^T = (a_1 \ a_2 \ a_3)$. 则

$$\alpha \alpha^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ a_3) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$, \quad a_1^2 = 1 \quad a_2^2 = 1 \quad a_3^2 = 1. \text{ 从而 } \alpha^T \alpha = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 3.$$

第十二章 线性方程组*

考试要求

1. 会用克莱姆法则.
2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.
3. 理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念,掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.
4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.
5. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

考试要点分析与题型预测

线性方程组的理论及其解法是线性代数的重要内容之一,前一章中,讨论向量组的线性相(无)关性和向量的线性表示,其实就是线性方程组解的存在性和唯一性问题.另外,自然科学和工程技术中的许多计算问题,最后都可归结为线性方程组的求解问题.

线性方程组的基本理论:非齐次线性方程组有解(相容)的充要条件是 $r(A) = r(\bar{A})$;齐次线性方程组有非零解的充要条件是 $r(A) = r < n$. 齐次线性方程组的线性无关解构成基础解系,非齐次线性方程组解的结构是

$$x = \sum_{i=1}^{n-r} k_i x_i + \bar{x}.$$

求解线性方程组的基本方法:是通过增广矩阵(或系数矩阵)施行初等行变换,进行消元,得出阶梯形矩阵,解同解方程,得出解答 x .

线性方程组中,最常碰到的考研题:是讨论含参数的齐次方程组(§12-4.1.)非齐次方程组(§12-4.5, 6.)有(无)解,在有解的条件,确定好参数,求出解,即便是无解,也要确定相应的参数,这时就无需求解了.

§12-1 n 个 n 元线性方程组与克莱姆(Cramer)法则

$$\text{线性方程组} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12.1)$$

$$\text{可以表示为矩阵形式} \quad AX = B \quad (12.2)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{称为(12.1)的系数矩阵,}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

若 A 满秩,即 $D = |A| \neq 0$, 则(12.1)(或12.2)有唯一解,可表示为 $X = A^{-1}B$ 或 $x_j = \frac{D_j}{D}$ (克莱姆法则),其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

* 线性方程组数学一、数学二相同.

§ 12 - 2 齐次线性方程组

$$\text{称 } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \text{或 } AX = 0 \quad (12.3)$$

为齐次线性方程组, 系数矩阵为 $A_{m \times n}$.

显然(12.3)总有解. 因 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 必是它的解, 称为零解.

1. 求解方法 —— 高斯消元法

初等行变换将齐次线性方程组 $AX = 0$ 变成同解方程组.

$$A_{m \times n} \xrightarrow{\text{初等行变换}} B_{m \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.4)$$

$$A_{m \times n}X = 0 \longleftrightarrow B_{m \times n}X = 0.$$

其中 $r(A) = r$ 是非零行个数, 称独立方程个数, 也是独立未知量 $x_1, x_2, \dots, x_r$ 的个数, 全部为0的行数共 $(m - r)$ 行. 令自由未知量为任意常数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$, 回代求得独立未知量, 即可求得 $AX = 0$ 的解.

2. 解的个数

定理 设(12.3)的系数矩阵 A 的秩 $r(A) = r$, 若 $r = n$, 则(12.3)只有零解; 若 $r < n$, 则(12.3)有无穷多个非零解, 它含 $n - r$ 个独立参数, 称为(12.3)的通解:

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} \quad (12.5)$$

3. 基础解系和通解

(1) 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 是(12.3)的 r 个解向量, 若 $\xi_1, \dots, \xi_r$ 线性无关, 且(12.3)的任意解向量均可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 线性表示, 则称 $\xi_1, \dots, \xi_r$ 为(12.3)的一个基础解系.

(2) 若 $r(A) = r < n$, 则(12.3)的基础解系存在且含有 $n - r$ 个解向量, 直接由(12.4)写出

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -d_{1r+1} \\ -d_{2r+1} \\ \cdots \\ -d_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -d_{1r+2} \\ -d_{2r+2} \\ \cdots \\ -d_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \xi_{n-r} = \begin{bmatrix} -d_{1n} \\ -d_{2n} \\ \cdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12.6)$$

就是(12.3)的一个基础解系.

(3) 若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是(12.3)的一个基础解系, 则(12.3)的全部解(通解)就是 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$, 其中 $k_i (i = 1, \dots, n - r)$ 为任意常数.

§ 12 - 3 非齐次线性方程组

m 个 n 元 ($m \geq 1, n \geq 1$) 线性方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \text{或} \quad AX = B \quad (12.7)$$

其中 A 为 (12.7) 的系数矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{记 } \bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \text{ 称 } \bar{A} \text{ 为 (12.7) 的增广矩阵.}$$

1. 相容性与解的个数

定理 非齐次线性方程组 (12.7) 有解 (称此方程组相容) 的充要条件是其系数矩阵与增广矩阵的秩相等, 即 $r(A) = r(\bar{A})$.

由此定理, 方程组 (12.7) 的解的情况讨论如下:

若 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 则 (12.7) 无解 (不相容).

若 $r(A) = r(\bar{A}) = r$ 则 (12.7) 有解.

(1) 当 $r = n$ 时, (12.7) 有唯一解; (2) 当 $r < n$ 时, 则 (12.7) 有无穷多个解. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, $\tilde{X}$ 是 $AX = B$ 的一个特解, 则方程组 (12.7) (即 $AX = B$) 的通解为 $x = \sum_{i=1}^{n-r} k_i X_i + \tilde{X}$ 其中 X_i 是 $AX = 0$ 的基础解系, $\tilde{X}$ 是 (12.7) 的特解, $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 为任意常数.

2. 解法 设 $r(A) = r(\bar{A}) = r \leq n$

(1) 用克莱姆法则

(2) 消元法

设位于 A 的左上角的 r 阶子式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$ 则可通过初等行变换将 $\bar{A}$ 化为标准形 (或阶梯形):

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_{1, r+1} & \cdots & d_{1, n} & l_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_{2, r+1} & \cdots & d_{2, n} & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{r, r+1} & \cdots & d_{r, n} & l_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12.8)$$

于是得到 (12.7) 的通解为

$$X = x_{r+1}\xi_1 + x_{r+2}\xi_2 + \cdots + x_n\xi_{n-r} + \tilde{X}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_{r+1} \begin{bmatrix} -d_{1r+1} \\ -d_{2r+1} \\ \vdots \\ -d_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_{r+2} \begin{bmatrix} -d_{1r+2} \\ -d_{2r+2} \\ \vdots \\ -d_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} -d_{1n} \\ -d_{2n} \\ \vdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

其中 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ 为 $n-r$ 个自由未知量.

§ 12 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测

线性方程组可解性的讨论与求解,在考研中每年都会出考题,约占 6~8 分,应引起读者重视.本节选择的例题,既是十分典型的例题,又是考研中的真实考题,同时还是未来的考试题型,学员要熟练地掌握它.

典型题型 1. 齐次线性方程组的通解

例 1 (99 9 分) 已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0. \end{cases}$$

(1) a, b, c 满足何种关系时,方程组仅有零解?

(2) a, b, c 满足何种关系时,方程组有无穷多组解?并用基础解系表示全部解.

解 系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$

(1) 当 $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ 时, $D \neq 0$, 方程组仅有零解 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

(2) 下面分四种情况

1° 当 $a = b \neq c$ 时,同解方程组为
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$
 方程组有无穷多组解,全部解为 $k_1(1, -1, 0)^T$ (k_1

为任意常数). 基础解系 $\xi = (1, -1, 0)^T$.

2° 当 $a = c \neq b$ 时,同解方程组为
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$
 方程组有无穷多组解,全部解为 $k_2(1, 0, -1)^T$ (k_2

为任意常数). 基础解系 $\xi = (1, 0, -1)^T$.

3° 当 $b = c \neq a$ 时,同解方程组为
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0. \end{cases}$$
 方程组有无穷多组解,全部解为 $k_3(0, 1, -1)^T$ (k_3

为任意常数). 基础解系 $\xi = (0, 1, -1)^T$.

4° 当 $a = b = c$ 时,同解方程组为 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 方程组有无穷多组解,全部解为 $k_4(-1, 1, 0)^T + k_5(-1, 0, 1)^T$ (k_4, k_5 为任意常数). 基础解系 $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T, \xi_2 = (-1, 0, 1)^T$

评述 本题求解时所用的讨论法,是含参数的线性方程组常用的方法.

例 2 (02 3 分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(AB)x = 0$

(A) 当 $n > m$ 时仅有零解

(B) 当 $n > m$ 时必有非零解

(C) 当 $m > n$ 时仅有零解

(D) 当 $m > n$ 时必有非零解

解 当 $m > n$ 时,秩 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \leq n < m$, 此处 m 是齐次方程组未知量 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的个数 m . 根据齐次方程组解的讨论, 此时 $(AB)x = 0$ 有无穷多个非零解, 即必有非零解存在. 故选(D).

例 3 (04 9 分) 设有齐次线性方程组

当 $r(A) = 1$ 则 $AX = 0$ 的基础解系由两个向量构成. 又因为 A 的第一行元素 a, b, c 不全为零, 所以 $AX = 0$ 等价于 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. 不妨设 $a \neq 0$, 于是 $\eta_1 = (-b/a, 1, 0)^T, \eta_2 = (-c/a, 0, 1)^T$ 是 $AX = 0$ 的两个线性无关解, 故 $AX = 0$ 的通解为 $X = C_1\eta_1 + C_2\eta_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

评述 本题求解是涉及多个知识点, 如矩阵的秩的概念及性质, 齐次方程组解法, 基础解系. 是一道综合性典型性考题, 很值得读者重视.

典型题型 2. 基础解系

例 5 (96 3 分) 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是齐次方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, 向量 β 不是方程组 $AX = 0$ 的解, 即 $A\beta \neq 0$. 试证明: 向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_s$ 线性无关.

解 设有一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得 $k\beta + \sum_{i=1}^s k_i(\beta + \alpha_i) = 0$, 即

$$(k + \sum_{i=1}^s k_i)\beta = \sum_{i=1}^s (-k_i)\alpha_i.$$

该式两边同时左乘矩阵 A , 有

$$(k + \sum_{i=1}^s k_i)A\beta = A \sum_{i=1}^s (-k_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^s (-k_i)A\alpha_i = 0$$

因为 $A\beta \neq 0$, 故 $k + \sum_{i=1}^s k_i = 0, \sum_{i=1}^s (-k_i)\alpha_i = 0$. 由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是基础解系, 所以 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$, 代入前面式得 $k = 0$. 所以向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_s$ 线性无关.

评述 本题是将齐次方程组的基础解系与向量组线性无关性相结合的综合性题目.

例 6 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系. 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

分析 按基础解系定义, 要证明向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 是 $AX = 0$ 的解, 且向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

证明 由 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + 0 = 0$, 知 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 $AX = 0$ 的解. 同理, 可证 $\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也是 $AX = 0$ 的解. 又设有数 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$, 则有 $(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故 $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$ 其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 可

见 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 从而 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

另外, 根据题意, $AX = 0$ 的基础解系含有 3 个线性无关的向量, 所以 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 就是 $AX = 0$ 的基础解系.

例 7 已知矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的行向量都是齐次线性组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

的解向量. 问 B 的四个行向量能否构成方程组的基础解系? 若不能, 不用解方程组的方法, 试求方程组的一个基础解系.

解 首先要判定方程组的基础解系是由多少个线性无关的解向量构成. 为此, 对方程组系数矩阵 A 作初等变换:

$$A = \begin{bmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = n-1$ 基础解系向量只有一个 原方程组的同解方程组为 $x_1 = x_n, x_2 = x_n, \dots, x_{n-1} = x_n$, 基础解系为 $\beta(1, 1, \dots, 1)^T$, 原方程组的全部解 $x = c\beta$ (c 为任意常数).

评述 本题目类型是近年来考研中的热点考题之一.

典型题型 3. 两方程组有公共解

例 10 设四元线性齐次方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$, 又已知某线性齐次方程组 (II) 的通解为 $k_1(0, 1, 1, \rho) + k_2(-1, 2, 2, 1)$.

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系; (2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有非零公共解. 若没有, 则说明理由.

解 (1) 已知 (I) 的系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $r(A) = 2$, 故 (I) 的基础解系有两个解向量, 可取为 $(0, 0, 1, \rho)$ 和 $(-1, 1, 0, 1)$.

(2) 有非零公共解. 将 (II) 的通解代入 (I) 则有 $\begin{cases} -k_2 + k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_2 = 0 \end{cases}$, 解得 $k_1 = -k_2$. 当 $k_1 = -k_2 \neq 0$ 时, 方程组 (I)、(II) 有非零公共解, 所有非零公共解是 $k(-1, 1, 1, 1)$ (k 是不为零的常数).

评述 (2) 求非零公共解的方法是有一定的技巧性, 这样做, 方法简便, 公共解也求得了.

例 11* (02 8 分) 设四元齐次线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

且已知另一四元齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为 $\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T$, $\alpha_2 = (-1, 2, a, a+8)^T$.

(1) 求方程组 (I) 的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解?

分析 例 10、例 11* 是同类型的题目, 例 10 是 1994 年数学考研题, 而例 11* 是 2002 年的考研题, 相隔 8 年之后又重复出现. 由此可见, 数学考研题每经过若干年后会重复出现, 这是一条规律, 很值得读者重视. 本题目解法类似于例 10.

解 (1) 对方程组 (I) 的系数矩阵作初等变换:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$, 原方程组的同解方程组 $\begin{cases} x_1 = 5x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \end{cases}$.

由此可得 (I) 的一个基础解系是:

$$\beta_1 = (5, -3, 1, 0)^T, \beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^T.$$

(2) 由题设条件, 方程组 (II) 的全部解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2k_1 - k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \\ (a+2)k_1 + 4k_2 \\ k_1 + (a+8)k_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

将(*)式代入(I), 得出 $\begin{cases} (a+1)k_1 = 0, \\ (a+1)k_1 - (a+1)k_2 = 0 \end{cases}$ (**)

要使(I)、(II)有非零公共解, 只需 k_1, k_2 的方程组(**)有非零解 k_1, k_2 , 这只需其系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ a+1 & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a+1)^2 = 0$ 即可. 由此, 当 $a \neq -1$ 时, $D \neq 0$, 方程组(**)只有零解, 此时(I)、(II)无非零公共解. 当 $a = -1$ 时, $D = 0$, 方程组(**)有非零解 k_1, k_2 , 此时(I)(II)的全部非零公共解:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{——任意常数})$$

评述 本题是近年来考研中的热点考题之一.

典型题型 4. 同解方程组

例 12 设有矩阵 $A_{m \times s}, B_{s \times r}$, 证明方程组 $ABX = O$ 和 $BX = O$ 是同解方程组的充要条件是 $r(AB) = r(B)$.

证明 必要性 $ABX = O$ 和 $BX = O$ 是同解方程, 则它们有相同的基础解系, 且基础解系向量的个数相同, 从而 $r - r(AB) = r - r(B)$, 即有 $r(AB) = r(B)$.

充分性 $r(AB) = r(B)$, $ABX = O$ 和 $BX = O$ 的基础解系的向量个数相同. 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是 $BX = O$ 的基础解系, 由于 $BX = O$ 的解必是 $ABX = O$ 的解, 所以 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 也是 $ABX = O$ 的线性无关的解. 又因为 $ABX = O$ 的基础解系含有 $n - r(AB) = n - r(B) = n - r$, 从而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 也是 $ABX = O$ 的基础解系, 即 $ABX = O$ 与 $BX = O$ 同解.

典型题型 5. 非齐次线性方程组通解及结构

例 13 讨论下列方程组的解:
$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

分析 含参数的非齐次方程组求解讨论完全类似于本节的例1、例9, 用高斯消元法, 即初等行变换法求解.

$$\begin{aligned} \text{解 } \bar{A} &= \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & b(a-1) & 1-4b+2ab \end{array} \right] \end{aligned}$$

(1) $b = 0$ 时 $\bar{A} \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ $r(A) \neq r(\bar{A})$ 原方程组无解.

(2) $a = 1$ 时 $\bar{A} \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{array} \right]$, 可见 $b \neq \frac{1}{2}$ 时 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 原方程组也无解. 当 $b = \frac{1}{2}$ 时,

有无穷多解 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, C 为任意常数.

(3) $(a-1)b \neq 0$ 时 $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 方程组有唯一解.

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2b-1}{b(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-4b+2ab}{b(a-1)} \end{array} \right]$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{2b-1}{b(a-1)}, x_2 = \frac{1}{b}, x_3 = \frac{1-4b+2ab}{b(a-1)}.$$

评述 本题目的题型及所用的解法, 考研中几乎年年会出现, 是热点考题之一, 读者应重视.

例 14 已知 4 个未知量的非齐次线性方程组系数矩阵 A 的秩为 3, 三个解 η_1, η_2, η_3 之间有关系 $\eta_1 = (1, 1, 1, 1)'$, $\eta_2 + 2\eta_3 = (1, 2, 3, 4)'$. 求该方程组的通解.

分析 本题目按照非齐次线性方程组解的结构 $X = \sum_{i=1}^n k_i X_i + \hat{X}$ 解决的, 其中 X_i 是齐次线性方程组的解,

$\hat{X}$ 是非齐次线性方程组的特解, k_i 是任意常数.

解 由非齐次方程组解的性质知 $\eta_2 - \eta_1$ 和 $\eta_3 - \eta_1$ 都是对应齐次方程组的解. 另外, 齐次方程组的解具有线性性, 从而有解 $\xi = (\eta_2 - \eta_1) + 2(\eta_3 - \eta_1) = (\eta_2 + 2\eta_3) - 3\eta_1 = (-2, -1, 0, 1)'$. 因为 $r(A) = 3$, 基础解系中只含一个解向量, 故通解为

$$X = k\xi + \eta_1 = k(-2, -1, 0, 1)' + (1, 1, 1, 1)'.$$

例 15 (00 3 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $AX = b$ 的三个解向量, 且 $r(A) = 3$, $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)'$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)'$, C 表示任意常数, 则线性方程组 $AX = b$ 的通解 $X =$ _____.

$$(A) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

分析 本题目仍然按照非齐次线性方程组解的结构 $X = \sum_{i=1}^n k_i X_i + \hat{X}$ 解决的, 其中 X_i 是齐次线性方程组

的解, $\hat{X}$ 是非齐次线性方程组的特解, k_i 是任意常数.

解 基础解系中解向量个数 $4 - 3 = 1$. 又 $2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3) = (2, 3, 4, 5)'$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解向量, 即基础解系向量. 而 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)'$ 是 $AX = b$ 的特解, 故通解 $X = (1, 2, 3, 4)'+ C(2, 3, 4, 5)'$, 其中 C 是任意常数. 应选 (C).

评述 例 14、例 15 同属于解的结构性质的应用.

例 16 (01 3 分) 设方程组 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多个解, 则 $a =$ _____.

分析 本题目应从方程组 $AX = B$ 有解充要条件 $r(A) = r(\bar{A})$, 有无穷多个解时需有条件 $r(A) = r(\bar{A}) = r < 3$ 定出 a .

$$\text{解 从 } \bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a+2 & a+2 & a+2 & 0 \end{array} \right]$$

因此, 当 $a = -2$ 时 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 原方程组有解, 但不唯一, 即有无穷多个解. 故 $a = -2$.

评述 本题目给读者的启示, 读者要牢记并会应用充要条件 $r(A) = r(\bar{A})$.

例 17* (02 6 分) 已知四阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为四维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $AX = \beta$ 的通解.

分析 本题目仅需将 $AX = B$ 中的 A, β 代入后,再求解线性方程组.

$$\text{解 令 } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ 则 } AX = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \beta,$$

得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

将 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 代入,整理得

$$(2x_1 + x_2 - 3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 + (x_4 - 1)\alpha_4 = 0$$

由于 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关,知 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases}$ 解此方程组得 $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (k 为任意常数).

评述 本题目仍然属于非齐次线性方程组解的结构性质的应用.

典型题型 6. 非齐次线性方程组有解的条件

例 18* (96 分) 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t. \end{cases}$

讨论参数 p, t 取何值时,方程组有解、无解;当有解时,试用导出组的基础解系表示通解.

解 方程组的系数矩阵 A 的增广矩阵为

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array} \right]$$

(1) 当 $t \neq -2$ 时, $\text{秩}(A) \neq \text{秩}(\bar{A})$, 方程组无解.

(2) 当 $t = -2$ 时, $\text{秩}(A) = \text{秩}(\bar{A})$, 方程组有解.

(i) 若 $p = -8$ 时, $\text{秩}(A) = \text{秩}(\bar{A}) = 2$, 导出组的基础解系含 2 个解向量, 通解

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{其中 } C_1, C_2 \text{ 是任意常数}).$$

(ii) 若 $p \neq -8$ 时, $\text{秩}(A) = \text{秩}(\bar{A}) = 3$, 导出组的基础解系含 1 个解向量, 通解

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{其中 } C \text{ 为任意常数}).$$

评述 本题从 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 去确定 $AX = B$ 的不可解性, $r(A) = r(\bar{A})$ 去确定 $AX = B$ 的可解性.

例 19 已知 $a_1 = (1 \ 0 \ 2 \ 3)$, $a_2 = (1 \ 1 \ 3 \ 5)$, $a_3 = (1 \ -1 \ a+2 \ 1)$, $a_4 = (1 \ 2 \ a \ a+8)$, 及 $\beta = (1 \ 1 \ b+3 \ 5)$.

(1) a, b 为何值时, β 不能表示成 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合?

(2) a, b 为何值时, β 有 a_1, a_2, a_3, a_4 的唯一的线性表示式, 并写出该表示式.

分析 本题目系线性方程组可解性理论去解决向量的线性表示问题.

解 设 $\beta = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5. \end{cases}$$

因为

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & (a+2) & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array} \right]$$

所以, 当 $a = -1, b \neq 0$ 时 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 两秩不等, 方程组无解, 从而 β 不能表示成 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合.

当 $a \neq -1$ 时 $r(A) = r(\bar{A}) = 4$, 方程组有唯一解, 所以 β 有 a_1, a_2, a_3, a_4 的唯一线性表示式, 且

$$\beta = \frac{2b}{a+1}a_1 + \frac{a+b+1}{a+1}a_2 + \frac{b}{a+1}a_3 + 0a_4.$$

评述 本题目系线性表示与线性方程组相结合的综合性考题.

例 20* 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3 \end{cases} \quad (*)$$

(1) 证明, 若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等, 则此线性方程组无解;

(2) 设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$, 且已知 β_1, β_2 是该方程组的两个解, 其中 $\beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 =$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 写出此方程的通解.

分析 本题目从 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 去确定 $AX = B$ 不可解性, $r(A) = r(\bar{A})$ 去确定 $AX = B$ 的可解性.

解 (1) 方程组 (*) 的增广矩阵的行列式为

$$|\bar{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = (a_4 - a_3)(a_4 - a_2)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)$$

由题设 $|\bar{A}| \neq 0$, 即 $r(\bar{A}) = 4$. 而系数矩阵 A 秩 $r(A) \leq 3$, 故 $r(\bar{A}) \neq r(A)$, 即方程组 (*) 无解.

(2) 当 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$ 时, 方程组 (*) 为

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2x_3 = k^3, \\ x_1 - kx_2 + k^2x_3 = -k^3. \end{cases}$$

因为 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & -k \end{bmatrix} = -2k \neq 0$, 故 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$. 方程组 (*) 有解, 且其对应的导出方程组(齐次方程组)

的基础解系应含有 $3 - 2 = 1$ 个解向量, 且可如下求得

$$\xi = \beta_2 - \beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

于是方程组 (*) 的通解为

$$X = \beta_1 + k\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

评述 本类型题目一直是考研中的热点之一.

例 21(97 3 分) λ 为何值时, 方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1, \end{cases}$$
 无解, 有唯一解或有无穷多解. 并在有无穷多

解时, 写出方程组的通解.

分析 本题是含参数 λ 的非齐次线性方程组, 仍然用 $r(A) = r(\bar{A})$ 去确定方程组的可解性, $r(A) \neq r(\bar{A})$ 去确定方程组的不可解性.

解 原方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(5\lambda + 4).$

故当 $\lambda \neq 1, \lambda \neq -\frac{4}{5}$ 时, $D \neq 0$, 方程组有唯一解.

当 $\lambda = 1$ 时, 原方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1, \end{cases}$$
 对其增广矩阵施以初等变换, 得

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

可见 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$ (未知量的个数), 故原方程组有无穷多解, 通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数.})$$

当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, 原方程组成为
$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -10, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1, \end{cases}$$
 对其增广矩阵 $\bar{A}$ 施以初等变换, 得

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right]$$

可见 $r(A) \neq r(\bar{A})$ ($r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$), 故原方程组无解.

评述 本题还可对原方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 直接用初等变换法讨论.

例 22* (00 3 分) 已知方程组
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 无解, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 本题从 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 去确定方程组的不可解性, 原方程组是含单参数 a 的非齐次线性方程组.

解 方程组无解的充分必要条件是 $r(A) \neq r(\bar{A})$. 故应对增广矩阵作初等行变换, 由于

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 2a - 3 & a - 3 \end{array} \right],$$

若 $a = -1$, 则 $\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & -1 & -1 & 1 \\ & & & -4 \end{array} \right].$

于是有 $r(A) = 2$, $r(\bar{A}) = 3$, 从而方程组无解, 故应填 $a = -1$.

评述 考研题中仅仅只用 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 去确定 $AX = B$ 的不可解性, 是近年来的新特点, 直得引起重视.

例 23* (2006 9 分) 已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1, \end{cases}$$
 有三个线性无关解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$.

(II) 求 a, b 值及方程组的通解.

分析 (I) 从齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的线性无关解出发, 并利用 $4 - r(A) =$ 基础解系向量个数, 求出 $r(A)$; (II) 利用初等变换求出 a, b , 并求解非齐次线性方程组.

解 (I) 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是该线性方程组的 3 个线性无关解, 则 $\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3$ 是对应的齐次方程组 $Ax = 0$ 的两个线性无关解, 故 $4 - r(A) \geq 2$, 即 $r(A) \leq 2$, 又有一个二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以 $r(A) \geq 2$. 综合得出 $r(A) = 2$.

(II) 对 A 的增广矩阵 $\bar{A}$ 做初等变换:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & 1+a \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a \end{array} \right] = B.$$

因 $r(A) = 2$, 所以 $4 - 2a = 0$, $4a + b - 5 = 0$, 即 $a = 2$, $b = -3$. 此时,

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \text{用消元法求得非齐次方程组的通解 } X = k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

典型题型 7. 非齐次线性方程组的公共解.

例 24* (98 7 分) 已知下列非齐次方程组 (I)、(II):

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1. \end{cases}$$

(1) 求解方程组 (I), 用其导出组的基础解系表示通解;

(2) 当方程组 (II) 中的参数 m, n, t 为何值时, 方程组 (I)、(II) 同解.

分析 本题目中 (1) 用高斯消元法, 即初等变换法就能求出通解. 本题中 (2) 表明, 方程组 (I)、(II) 同解, 即有公共解, 那么参数 m, n, t 应取何值? 具体方法完全类似于本节例 11 中 (2), 即用方程组 (I) 中求得的解代入方程组 (II) 中, 定得 m, n, t 的值, 方程组 (II) 就具体化了. 这样, 刚才方程组 (I) 的解就是方程组 (I)、(II) 的公共解.

解 设方程组 (I) 的系数矩阵为 A , 增广矩阵为 $\bar{A}_1$, 对 $\bar{A}_1$ 作初等行变换, 得

$$\bar{A}_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

由于 (I) 的秩 $r(A_1) = \text{秩 } r(\bar{A}_1) = 3 < 4$, 所以方程组有无穷多组解, 且通解为

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

(2) 当 (I)、(II) 同解时, 令 (1) 中求出的 X 是 (II) 的解, 依次定出 m, n, t 如下: 将通解 X 代入 (II) 的第一个方程中, 得出

$$(-2+k) + m(-4+k) - (-5+2k) - k = -5, \quad (m-2)k - 4m = -8. \text{ 取 } m = 2 \text{ 时, 上式成立.}$$

将通解 X 代入 (II) 的第二个方程中, 得出

$$n(-4+k) - (-5+2k) - 2k = -11, (n-4)k - 4n = -16. \text{ 取 } n=4 \text{ 时, 上式成立.}$$

将通解 X 代入 (II) 的第三个方程中, 得出 $(-5+2k) - 2k = -t+1$, 取 $t=6$ 时该式成立.

因此, 当方程组 (II) 中参数 $m=2, n=4, t=6$ 时, (I) 的全部解都是 (II) 的解, 这时 (II) 化为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$

设 (II) 的系数矩阵为 A_2 , 增广矩阵为 $\bar{A}_2$, 对 $\bar{A}_2$ 施行初等变换, 得出

$$\bar{A}_2 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

于是 (II) 的通解为

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

总之, (I)、(II) 的解完全相同. 所以 (I)、(II) 同解.

评述 本题目在求解 (I)、(II) 的公共解时, 方法巧妙且简单, 有代表性, 所以 2002 年又出现类似的考题, 即本节的例 12.

典型题型 8. 综合性杂题

例 25 (01 9 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 已知线性方程组 $AX = B$ 有解但不唯一, 试求:

(1) a 的值, (2) 正交矩阵 Q , 使 $Q^T A Q$ 为对角阵 Λ .

分析 本题目中 (1) 根据题意由 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ 确定出 a 值. 当 (1) 中定出了 $a = -2$ 代入 $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (2) \text{ 中的 } \Lambda \text{ 的元素就是 } A \text{ 的特征值, 其相应的标准正交化特征向量就是 } Q = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3).$$

$$\text{解 (1)} \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & a+2 \end{array} \right]$$

因为方程组有解但不唯一, 故 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 所以 $a = -2$.

$$(2) \text{ 矩阵: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的特征方程:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda + 2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 3) = 0, \text{ 得其特征值 } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 0.$$

对角阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

求解相应的特征矩阵方程组:

$$(3E - A)X = 0, \quad (-3E - A)X = 0, \quad (0 \cdot E - A)X = 0$$

得出相应的特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$. 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 彼此正交. 再将它们单位化:

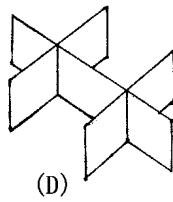
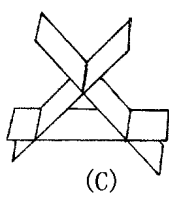
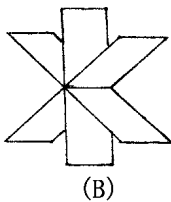
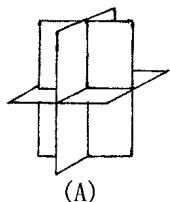
$$\beta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \beta_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \beta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,$$

令

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \text{则 } Q^T A Q = \Lambda.$$

评述 解决本题目已用到: 线性方程解法, 特征值特征向量求法, 矩阵经过正交变换化为对角阵及 Schimidt 正交化法, 是考核读者综合分析应用能力, 有相当的难度.

例 26* (02 3 分) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i (i = 1, 2, 3)$ 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2, 则这三张平面可能的位置关系为



分析 本题目是几何与线性代数知识相结合的考题, 应用线性方程组中秩的理论解决三平面相交的问题.

解 平面方程组

$$(*) \dots \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$ (未知量 x, y, z 的个数), 所以方程组 (*) 有无穷多个公共解, 即这三个平面有无穷多个公共交点, 这样的公共交点几何上形成一条空间直线, 即三个平面交于一条公共直线. 应选(B).

例 27* (03 4 分) 设有齐次方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$, 其中 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有四个命题:

- ① 若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解, 则秩 $r(A) \geq r(B)$;
- ② 若秩 $r(A) \geq r(B)$, 则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解;
- ③ 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则秩 $r(A) = r(B)$;
- ④ 若秩 $r(A) = r(B)$, 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

以上命题中正确的是:

- (A) ①②. (B) ①③ (C) ②④ (D) ③④.

分析 本题判定的标准是: 比较 $n - r(A)$ = 基础解系中解的个数, $n - r(B)$ = 基础解系中解的个数.

解 ① 正确, 因为当 $Ax = 0$ 的均是 $Bx = 0$ 的解时, $Ax = 0$ 的基础解系包含在 $Bx = 0$ 的基础解系中, 故 $n - r(A) \leq n - r(B)$, 从 $r(A) \geq r(B)$. ③ 正确. 因为当 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解时, 两者基础解系中解的个数相同, 从而 $r(A) = r(B)$. 总之, 应选(B).

例 28* (03 8 分) 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0,$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0,$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0.$$

(*)

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

分析 将方程组(*)改写成

$$\begin{cases} ax + 2by = -3c, \\ bx + 2cy = -3a, \\ cx + 2ay = -3b. \end{cases} \quad (*)$$

将 l_1, l_2, l_3 交于一点等价于方程组(*)有唯一解, 从而只要证方程组(*)有唯一解的充要条件为 $a + b + c = 0$.

证明 必要性 设 l_1, l_2, l_3 交于一点 (x_0, y_0) , 则 $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 $Ax = 0$ 的非零解, 其中 $A = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{pmatrix}$ 于

是行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix} = -b(a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$$= -3(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) = 0 \text{ 故 } a+b+c=0.$$

充分性 将方程组(*)的三个方程相加, 并由 $a+b+c=0$ 可知, 方程组(*)等价于方程组

$$\begin{cases} ax + 2by = -3c, \\ bx + 2cy = -3a. \end{cases} \quad (**)$$

因为 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac - b^2) = -2[a(a+b) + b^2] = -[a^2 + b^2 + (a+b)^2] \neq 0$, 故方程组(**)有唯一解, 所以方程组(*)有唯一解, 即三条直线 l_1, l_2, l_3 交于一点.

评述 本题目与例题28*同属于几何与线性代数知识相结合的考题, 已连续考了两年, 是考研题新动向, 值得重视.

例29 (04, 13分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 + (4 + \mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

已知 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解. 试求

(1) 方程组的全部解, 并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

(2) 该线性方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

分析 本题目首先利用已知解 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入方程组可得 $\lambda = \mu$, 使方程组变为含单参数的 λ 方程组, 然后求解该单参数 λ 的方程组. 至于(2)的解可直接从(1)的解中得出.

解 将解 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入线性方程组, 得 $\lambda = \mu$, 使线性方程组变为含单参数 λ 的方程组. 对含单参数 λ 的线性方程组的增广矩阵施以行初等变换, 得

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array} \right)$$

(1) 当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时, 有 $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$ 因为 $r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 4$, 故方程组有无穷多个解, 全

部解为 $x = (0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T + k(-2, 1, -1, 2)^T$, 其中 k 为任意常数.

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 有 $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ 因为 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$, 故方程组有无穷多解, 全部解

为 $x = (\frac{-1}{2}, 1, 0, 0)^T + k_1(1, -3, 1, 0)^T + k_2(-1, -2, 0, 2)^T$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

(2) 方程组满足条件 $x_2 = x_3$ 的解可直接从(1)的全部解中得出. 当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时, 由于 $x_2 = x_3$, 即从全部解的表达式中令 $x_2 = x_3: \frac{-1}{2} + k = \frac{1}{2} - k$, 解得 $k = \frac{1}{2}$, 方程组的解为 $x = (0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \rho)^T + \frac{1}{2}(-2, 1, -1, 2)^T = (-1, \rho, \rho, 1)^T$.

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 同理, 由 $x_2 = x_3$, 即从全部解的表达式中令 $x_2 = x_3: 1 - 3k_1 - 2k_2 = k_1$, 解得 $k_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k_2$, 方程组的全部解为 $x = (\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \rho)^T + k_2(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 2)^T$, 其中 k_2 为任意常数.

评述 这类考研题系综合性很强, 计算能力要熟练, 仔细, 才能得出准确的结果. 考生遇见这类考研题, 普遍都认为不难, 可是真做起来也不那么容易, 非常需要考生边做边动脑筋思考. 故本考研题是近年来新热点, 值得引起重视.

预测·强化训练十二

1. 已知方程组 $\begin{cases} ay + bx = c, \\ cx + az = b, \\ bz + cy = a, \end{cases}$ 有唯一解, 证明 $abc \neq 0$, 并求解.

2. 四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 a_1, a_2, a_3 是它的 3 个解向量, 其中 $a_1 = (2, \rho, 5, -1)^T$, $a_2 + a_3 = (1, \rho, \rho, \rho)^T$.

试求非齐次线性方程组的通解.

3. 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则方程组 $Ax = b$ 的通解(一般解)必是

$$(A) k_1 a_1 + k_2 (a_1 + a_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}, \quad (B) k_1 a_1 + k_2 (a_1 - a_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2},$$

$$(C) k_1 a_1 + k_2 (\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}, \quad (D) k_1 a_1 + k_2 (\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}.$$

4. 问 a, b 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1. \end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多组解, 并求出有无穷多组解时的通解.

5. 向 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$ 有解, 并求出通解.

6. 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ 只有零解, 则 λ 应满足的条件是什么.

7. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1, \\ x_2 + x_3 = a_2, \\ x_3 + x_4 = -a_3, \\ x_4 + x_1 = a_4. \end{cases}$ 有解, 则常数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足什么条件.

8. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_3 + 6x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - k_1 x_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = k_2. \end{cases}$

问 k_1 和 k_2 各取何值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多组解? 在方程组有无穷多组解的情形下, 试求出通解.

$$9. \text{ 已线性方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

(1) a, b 为何值时, 方程组有解?

(2) 方程组有解时, 求出方程组的导出组的一个基础解系;

(3) 方程组有解时, 求出方程组的全部解.

简明解答

$$1. \text{ 系数行列式 } D = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc, \text{ 有唯一解 } D \neq 0, \text{ 即 } abc \neq 0, \text{ 克莱姆法则计算出:}$$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad z = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

2. 设方程组为 $AX = b$, $r(A) = 3$, 基础解系向量个数为 $4 - 3 = 1$, 基础解系向量 $\alpha = 2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3) = (3, -9, 1, -8)^T$ (因 $A\alpha = 0$), 所以, 通解 $X = (2, 0, 5, -1)^T + k(3, -9, 1, -8)^T$, k 为任意常数.

3. 因 α_1, α_2 是 $AX = b$ 基础解系, 很容易说明 $\alpha_1, (\alpha_1 - \alpha_2)$ 也是 $AX = b$ 的基础解系, 另外 $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ 是 $AX = b$ 的

特解. 所以 $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ 是 $AX = b$ 的通解. 应选(B).

$$4. \text{ 增广矩阵 } \bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & -3+a & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right]$$

由此,

(1) 当 $a \neq 1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 4$, 方程组有唯一解.

(2) 当 $a = -1$ 时, (i) $b \neq -1$, $r(A) = 2$, $r(\bar{A}) = 3$, $r(A) \neq r(\bar{A})$, 方程组无解.

(ii) $b = -1$, $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$ (未知量个数), 方程组有无穷多个解, 消元法得出通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

$$5. \text{ 增广矩阵 } \bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & 2\lambda+3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 1 & -2 & -4\lambda+3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 \end{array} \right].$$

当 $\lambda = 1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$ (未知量个数), 方程组有无穷多个解, 此时通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k \text{ 为任意常数.}$$

6. 系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 则 $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$. 故当 $\lambda \neq 1$ 时 $|A| \neq 0$, 所以齐次线性方程

组只有零解.

7. 增广矩阵

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1 + a_4 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1 + a_2 + a_4 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

所以当 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ 时 $r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 4$, 原方程组无穷多个解.

8. 增广矩阵 $\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -k_1 & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & k_2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 - k_1 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & k_2 - 1 \end{array} \right]$

$$\xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 - k_1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2 + 5 \end{array} \right]$$

(1) 当 $k_1 \neq 2$ 时 $r(A) = r(\bar{A}) = 4$, 方程组有唯一解.

(2) 当 $k_1 = 2$ 时,

$$\xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2 + 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 - 1 \end{array} \right]$$

$k_2 \neq 1$ 时 $r(A) = 3 \neq r(\bar{A}) = 4$ 故原方程组无解; $k_2 = 1$ 时 $r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 4$ 故原方程组有无穷多个解.

$$\xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

通解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, k 为任意常数.

9. 增广矩阵

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -5a + 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a+2 \end{array} \right]$$

(1) $a = 1, b = 3, r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 5$, 原方程组有无穷多个解.

(2) $a = 1, b = 3$ 时, 基础解系中向量有 $5 - 2 = 3$ 个

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3) $a = 1, b = 3$ 时, 用高斯消元法求出全部解:

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数.}$$

第十三章 矩阵的特征值和特征向量^{*}

考试要求

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质,会求矩阵特征值和特征向量.
2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件,掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.
3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

考试要点分析与题型预测

矩阵 A 的特征值、特征向量是指满足 $AX = \lambda X$ 的参数 λ 和非零向量 X . 这里,特征值求法有二种:(1) A 为抽象矩阵时,求 $AX = \lambda X (X \neq 0)$ 的 λ 值;(2) A 为数值矩阵时,求特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的根. 非零特征向量 X 需要从解特征矩阵方程 $(\lambda E - A)X = 0$ 获得. 考研时,通常碰到求三、四阶矩阵的特征值、特征向量(见 §13—3.1),以及某些特殊高阶矩阵的特征值、特征向量(见 §13—3.2).

特征值、特征向量的重要性质,读者要牢记,因为它们常常用于分析与论证相关的考研题目(见 §13—3.3 与例 22).

实对称矩阵可化为相似对角阵的方法有两种:(1)通过满秩矩阵 P 法;(2)通过正交矩阵 T 法(见 §13—3.4),它们是下一章二次型化为标准形的理论基础.

本章尚有些综合性的杂题,如例 24、例 25、例 26,其解方法可拓宽读者的视野.

§13 - 1 矩阵的特征值和特征向量

一、特征值和特征向量

1. 主要概念

定义 设 A 为 n 阶矩阵, λ_0 是一个数,若存在非零向量 X ,使得 $AX = \lambda_0 X$,即 $(A - \lambda_0 E)X = 0$,则称 λ_0 是 A 的一个特征值, X 是对应于 λ_0 的一个特征向量.

设 λ 是一个未知量,称 $A - \lambda E$ 为 A 的特征矩阵, $|A - \lambda E|$ 为 A 的特征多项式, $|A - \lambda E|X = 0$ 为 A 的特征方程.

显然 A 的特征值就是 $|A - \lambda E| = 0$ 的根,故特征值也叫特征根.

2. 重要性质

(1) 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的.

(2) 对应于同一特征值的特征向量不止一个,但它们的线性组合仍是对应特征值的特征向量.

(3) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

$$(i) \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = |A|, \quad (ii) \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

(4) 相似矩阵有相同的特征多项式和相同的特征值(此结论的逆不成立),行列式也相同.

(5) 设 λ 是 $(a_{ij})_{n \times n}$ 的一个特征值, X 是对应于 λ 的特征向量,则 $k\lambda$ 是 kA 的一个特征值, λ^m 为 A^m 的特征值,它们的特征向量仍为 X ,其中 k 是一个任意数, m 是任一正整数, $A^m X = \lambda^m X$; $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值,特征向量仍为 X .

(6) 若 A 是满秩矩阵,则 $\lambda \neq 0$, λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, $|A| \lambda^{-1}$ 是 A^* 特征值,对应的特征向量是 X .

(7) A, A' 有相同的特征多项式和特征值.

(8) 上(下)三角方阵的特征值是它的主对角线上的元素.

* 矩阵的特征值和特征向量数学一、数学二相同.

(9) 若 A 是分块上(下)三角阵 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & A_{nn} \end{bmatrix}$, A_{ii} 为方阵, 那么 $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ 的特征值就是 A

的特征值.

3. 求特征值与特征向量的方法

(1) 先由特征方程 $|A - \lambda E| = 0$ 求出特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

(2) 对每个 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 则由矩阵方程(即齐次线性方程组)

$$(A - \lambda_i E)X = 0$$

求出非零解 X_i , 即是对应于 λ_i 的特征向量 X_i , 一般情况下, 是求出(它)的一个基础解系, 则此基础解系中各向量的线性组合就是对应于 λ_i 的全部特征向量.

二、特征值与特征向量的逆问题

已知矩阵 A 的特征值和特征向量(或部分特征向量)求矩阵 A 的问题称为特征值和特征向量的逆问题. 设有三阶矩阵的 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 及其相应的特征向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 即 $A\xi_i = \lambda_i \xi_i$. 由于 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 $P =$

$$(\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3), \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}, \text{ 则有 } A = P\Lambda P^{-1}.$$

§ 13 - 2 相似矩阵与对角化

一、相似矩阵

设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若有可逆方阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$, 则称 B 是 A 的相似矩阵, 或说矩阵 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$.

相似矩阵重要性质 1 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$.

2 传递性: 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

3 若 $A \sim B$, 则 $A' \sim B'$.

4 若 $A \sim B$, 且 A, B 均可逆时, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

5 若 $A \sim B$, 则 $A^k \sim B^k (k \text{ 为整数})$.

6 相似矩阵有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值. 即若 $P^{-1}AP = B$, 则 $|\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |\lambda E - A|$.

7 相似矩阵行列式相等. 即 $|B| = |P^{-1}AP| = |A|$.

8 相似矩阵的秩相等. 即当 $A \sim B$ 时, 则 $r(A) = r(B)$.

9 相似矩阵的迹相等. 即当 $A \sim B$ 时, 则 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

定义矩阵 A 的迹为 $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

由于相似矩阵的特征多项式、特征值、行列式、秩、迹相等, 这些量统称为相似矩阵的相似不变量.

二、矩阵对角化

1. 矩阵对角化概念及性质

定义 若 n 阶方阵 A 与对角形矩阵 Λ 相似, 即 $A \sim \Lambda$, 则称 A 可对角化.

定理 1 n 阶矩阵 A 与对角形矩阵 Λ 相似的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 2 如果 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值, 则 A 必与对角形矩阵 Λ 相似, 即 A 可对角化.

注意 定理 2 的逆不成立.

定理 3 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 为 A 的 m 个互异的特征值, 则 A 相似于对角线矩阵 Λ 的条件是, 对每个 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$, λ_i 的重数等于其特征子空间(即 $AX = \lambda_i X$ 的解空间)的维数.

2. 实对称矩阵对角化

(1) 实对称矩阵的性质

- (i) 实对称矩阵的特征值都是实数；
- (ii) 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的；
- (iii) 实对称矩阵必相似于一对角矩阵；
- (iv) 实对称矩阵必合同于一对角矩阵。

(2) 实对称矩阵对角化的基本原理及基本方法

定理 1 对任一实对称矩阵 A 必存在满秩方阵 C , 使得

$$C^T A C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{其中 } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ 中不为零的个数等于矩阵 } A \text{ 的秩 } r(A). \text{ 即任一实对称矩阵必}$$

合同于一个对角形矩阵。

定理 2 对任一 n 阶实对称矩阵 A , 存在 n 阶正交矩阵 T , 使得

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

即 A 相似于对角形矩阵 Λ , 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值。

基本方法 如何求出 T , 使 $T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 其步骤是:

(i) 求出 A 的全部特征值. 即 $|A - \lambda E| = 0$ 的全部根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;

(ii) 对于每个 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 求出对应的特征向量, 即求 $(A - \lambda_i E)X = 0$ 的非零解, 求出 A 的 n 个线性无关的特征向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$;

(iii) 将重根所对应的线性无关的特征向量正交化, 然后再将所有 (即 n 个) 特征向量单位化, 得到 A 的标准正交向量组记为 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$;

(iv) 以 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 为列向量的矩阵 T 就是需要的正交矩阵。

§ 13 - 3 典型例题分析与最新考试题型预测

典型题型 1. 数量矩阵的特征值、特征向量的计算

例 1 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值、特征向量。

解 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 1 & 2 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda^2 + 4) = 0.$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$ 。

对 $\lambda_1 = 4$, 解齐次方程组 $(4E - A)X = 0$, 而 $4E - A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

基础解系是 $X_1 = (-1, -1, 1)^T$ 。

$$\text{对 } \lambda_2 = 2i, \text{解齐次方程组 } (2iE - A)X = 0, \text{而 } 2iE - A = \begin{bmatrix} 2i & -3 & -2 \\ -1 & 2i-1 & 2 \\ 3 & 1 & 2i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

基础解系是 $X_2 = (-i, i, 1)^T$.

$$\text{对 } \lambda_3 = -2i, \text{解齐次方程组 } (-2iE - A)X = 0, \text{而 } (-2iE - A) = \begin{bmatrix} -2i-3 & -3 & -2 \\ -1 & -2i-1 & 2 \\ 3 & 1 & -2i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

基础解系是: $X_3 = (i, -i, 1)^T$.

综合, 与 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 相应的特征向量是 $k_1(-1, -1, 1)^T, k_2(-i, i, 1)^T, k_3(i, -i, 1)^T$

评述 求解特征向量是最常用的方法, 容易做错, 需要特别小心.

$$\text{例2 (03 4分)} \quad \text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = P^{-1}A^*P, \text{求 } B+2E \text{ 的特征值与特征向量,}$$

其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵.

分析 (1) 求出 A 的特征值, 特征向量. (2) 经过矩阵运算推出 $(B+2E)$ 的特征值, 特征向量.

$$\text{解 (1) 由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-7), \text{故 } A \text{ 的特征值 } \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7.$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 为二重特征值, 其特征矩阵方程 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 对应的线性无关特征向量可取为 $\eta_1 =$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{当 } \lambda_3 = 7, \text{其特征矩阵方程 } (\lambda_3 E - A)X = 0 \text{ 对应的特征向量可取为 } \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 由 A 的特征值, 特征向量 $A\eta = \lambda\eta, |A| = 7$, 又 $A^*A = |A|E$, 故 $A^*\eta = \frac{|A|}{\lambda}\eta$, 即 A^* 的特征值为

$\frac{|A|}{\lambda}$, 特征向量为 η , 于是 $B(P^{-1}\eta) = P^{-1}A^*(PP^{-1})\eta = \frac{|A|}{\lambda}(P^{-1}\eta)$, 从而 $(B+2E)P^{-1}\eta = (\frac{|A|}{\lambda} + 2)P^{-1}\eta$.

因此, $(\frac{|A|}{\lambda} + 2)$ 为 $(B+2E)$ 的特征值, 对应的特征向量为 $P^{-1}\eta$. 经计算 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$P^{-1}\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P^{-1}\eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (B+2E) \text{ 的三个特征值分别为 } 9, 9, 3.$$

对应于特征值 9 的全部特征向量为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2$ 不全为零的任意常数. 对应于

特征值 3 的全部特征向量为 $k_3P^{-1}\eta_3 = k_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_3$ 不全为零的任意常数.

典型题型 2. 抽象矩阵的特征值、特征向量的计算

例3 (98 9分) 设向量 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 都是非零向量, 且满足 $a^T\beta = 0$. 记 n 阶矩阵 $A = a\beta^T$. 求 (1) A^2 (2) 矩阵 A 的特征值和特征向量.

分析 本题目中 (2) 是按 $AX = \lambda X$ 定特征值的, 然后解 $(\lambda E - A)X = 0$ 定出特征向量.

解 (1) $A^2 = AA = (a\beta^T)(a\beta^T) = a(\beta^Ta)\beta^T = (a^T\beta)(a\beta^T) = 0$.

(2) 设 λ, X 为 A 的特征值、特征向量, 即 $AX = \lambda X, A^2X = \lambda(A X) = \lambda^2 X = 0$, 因为 $X \neq 0$, 所以 $\lambda^2 = 0, \lambda = 0$. 从而 A 的特征值全为零.

由题设不妨设 α, β 中的分量 $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$. 对应齐次方程组 $(0 \cdot E - A)X = 0$ 的系数矩阵施行初等变换

$$0 - A = \begin{bmatrix} -a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

由此, 得出方程组的基础解系为 $n - r(A) = n - 1$ 个:

$$\alpha_1 = \left(-\frac{b_2}{b_1}, 1, 0, \dots, 0 \right)^T, \alpha_2 = \left(-\frac{b_3}{b_1}, 0, 1, \dots, 0 \right)^T, \dots, \alpha_{n-1} = \left(-\frac{b_n}{b_1}, 0, 0, \dots, 1 \right)^T$$

于是 A 的属于特征值 $\lambda = 0$ 的全部特征向量为 $C_1\alpha_1 + \dots + C_{n-1}\alpha_{n-1}$, 其中 $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ 为任意常数.

评述 (2) 中求特征值、特征向量的方法, 值得重视, 今后还可能有用.

例 4(98 3 分) 设 A 为 n 阶矩阵, $|A| \neq 0, A^*$ 为 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 λ , 则 $(A^*)^2 + E$ 必有特征值是多少?

解 由 $Ax = \lambda x$ 知 $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$, 从而 $A^*x = \frac{|A|}{\lambda}x$, 即 A^* 具有特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$. 又 $Ex = 1 \cdot x$, 所以 $((A^*)^2 + E)x = \left(\left(\frac{|A|}{\lambda} \right)^2 + 1 \right)x$, 即 $(A^*)^2 + E$ 的特征值为 $\left(\frac{|A|}{\lambda} \right)^2 + 1$.

例 5(02 8 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, P 是 n 阶可逆矩阵, 已知 n 维列向量 α 是 A 属于特征值 λ 的特征向量, 则 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是:

(A) $P^{-1}\alpha$ (B) $P^T\alpha$ (C) $P\alpha$ (D) $(P^{-1})^T\alpha$

分析 本题目从已知 $A\alpha = \lambda\alpha$ 入手, 经过简单的矩阵运算, 立即得出 (B) 是正确的.

解 由 $A\alpha = \lambda\alpha, P^TAP\alpha = \lambda P^T\alpha, P^TAP(P^T)^{-1}P^T\alpha = \lambda P^T\alpha, P^TAP(P^{-1})^T(P^T\alpha) = (P^{-1}AP)^T(P^T\alpha) = \lambda(P^T\alpha)$. 应选 (B).

典型题型 3. 关于特征值、特征向量的性质

例 6 已知 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的 n 个特征值, 求证 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}$.

解 设 $A^2 = (b_{ij})_{n \times n}$, 因为 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 从而 A^2 的特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$. 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \text{tr}(A^2) \text{ 等于 } A^2 \text{ 的主对角线元素之和为 } \sum_{i=1}^n b_{ii}, \text{ 其中 } b_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji} (i=1, 2, \dots, n). \text{ 从而 } \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n b_{ii} \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}.$$

例 7 设方阵 A 满足 $A^T A = E$, 其中 A^T 是 A 的转置矩阵, E 为单位矩阵, 试证明 A 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

证明 设 X 是 A 的非零实特征向量, 它所对应的特征值为 λ , 故有 $AX = \lambda X$.

$$(AX)^T(AX) = X^T(A^T A)X = X^T E X = X^T X.$$

因此, 有 $X^T X = (\lambda X)^T(\lambda X) = \lambda^2 X^T X$, 即 $(1 - \lambda^2)X^T X = (1 - \lambda^2)\|X\|^2 = 0$, 由于 $\|X\|^2 > 0$, $(1 - \lambda^2) = 0$, 即 $|\lambda| = 1$.

例 8(02 8 分) 设 A, B 为同阶方阵,

- (1) 如果 A, B 相似, 试证 A, B 的特征多项式相等;
- (2) 举一个二阶方阵的例子说明 (1) 的逆命题不成立;
- (3) 当 A, B 均为实对称矩阵时, 试证明 (1) 的逆命题成立.

证 (1) 若 $A \sim B$, 那么存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$, 故 $|\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda EP - P^{-1}AP)| = |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda E - A| \cdot |P| = |\lambda E - A|$.

(2) 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 那么 $|\lambda E - A| = \lambda^2 = |\lambda E - B|$, 但 A, B 不相似. 否则, 存在可逆矩阵

P , 使 $P^{-1}AP = B = 0$, 从而 $A = POP^{-1} = 0$ 与 $A \neq 0$ 矛盾.

(3) 由 A, B 均为实对称矩阵, 知 A, B 均相似于对角阵. 若 A, B 的特征多项式相等, 记特征多项式的根为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则有

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是, 存在可逆矩阵 P, Q , 使 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1}BQ$. 于是 $(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1}) = B$, 由于

(PQ^{-1}) 为可逆矩阵, 故 $A \sim B$.

评述 本例题表明, 只有当 A, B 均为实对称矩阵时, A, B 相似才等价于 A, B 的特征多项式相等, 否则是不成立的.

典型题型 4. 求矩阵 A 的相似对角矩阵

例 9* (98 7 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 矩阵 $B = (kE + A)^2$, 其中 k 为实数, E 为单位矩阵. 求对角矩阵 Λ , 使 B 与 Λ 相似, 并求 k 为何值时, B 为正定矩阵.

分析 从 B 的形式分析, 需先将 A 转化为对角矩阵, 然后来分析 B 转化为对角矩阵的可能性.

解 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 2 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2 = 0$. 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

记对角矩阵 $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 因为 A 为实对称矩阵, 故存在正交矩阵 T , 使 $T^{-1}AT = D$,

, $A = (T^{-1})^{-1}DT^{-1} = TDT^{-1}$. 于是

$$B = (kE + A)^2 = (kTT^{-1} + TDT^{-1})^2 = [T(kE + D)T^{-1}][T(kE + D)T^{-1}]$$

$$= T(kE + D)^2T^{-1} = T \begin{bmatrix} (k+2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix} T^{-1},$$

所以, $T^{-1}BT = \Lambda = \begin{bmatrix} (k+2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}$. 由此, 当 $k \neq -2, k \neq 0$ 时, B 的全部特征值为正数, 这时,

B 为正定矩阵

评述 本题目系综合性考研题, 用到相似, 化对角阵, 正定阵诸多知识点相互掺合, 是一个较好的考试题.

例 10 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, 求一个可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵, 并求正交矩阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ$

为对角矩阵.

分析 本题目先求可逆矩阵 P , 再求正交矩阵 Q .

解 (1) $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0$, 推出 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$.

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 求解矩阵方程 $(\lambda_1 E - A)X = 0$, 得出特征向量 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

当 $\lambda_2 = 3$ 时, 求解矩阵方程 $(\lambda_2 E - A)X = 0$, 得出特征向量 $\xi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

当 $\lambda_3 = -3$ 时, 求解矩阵方程 $(\lambda_3 E - A)X = 0$, 得出特征向量 $\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

所求可逆矩阵 $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. 因为 $|P| = 27 \neq 0$, 所以 P^{-1} 存在, 故有 $P^{-1}AP = \Lambda$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

(2) 令 $\gamma_1 = \frac{\xi_1}{|\xi_1|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\gamma_2 = \frac{\xi_2}{|\xi_2|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\gamma_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

所求正交矩阵 $Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, 并使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

评述 求 P 、 Q 的方法是典型的有代表性的方法, 今后还用它, 值得重视.

例 11(99 7 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. 问当 k 为何值时, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵, 并求出 P 和相应的对角矩阵.

解 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 2 \\ k & \lambda + 1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & -k \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$. 可得 A 的特

征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$.

对于 $\lambda_1 = -1$, 有

$$(-E - A) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ k & 0 & -k \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $k = 0$ 时, 有

$$(-E - A) \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对应的特征向量为 $\alpha_1 = (-1 \ 2 \ 0)^T$, $\alpha_2 = (1 \ 0 \ 2)^T$.

对于 $\lambda_3 = 1$, 有

$$(E - A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ k & 2 & -k \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ 对应的特征向量为 } \alpha_3 = (1 \ 0 \ 1)^T.$$

因此, 当 $k = 0$ 时, 令

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

评述 定 $k=0$ 的方法有其特殊性,它由 $\lambda=-1$ 是重特征值,由此相应有两个线性无关特征向量, $(-E-A)$ 的秩必为 1, k 必取 0 才能成立.

例 12* (00, 9 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 已知 A 有三个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是 A 的二重特征值, 试求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

分析 本题目分析解决的方法与例 13 相似.

解 因为 A 有三个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是 A 的二重特征值, 所以 A 的对应于 $\lambda=2$ 的线性无关特征向量应有二个, 故秩 $r(2E-A)=1$. 从而

$$2E-A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

, $x=2, y=-2$. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, 特征多项式 $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-6)$. 特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 6$.

对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, (2E-A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 消元法:

$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$. 对应于 $\lambda_3 = 6$ 消元法

$$(6E-A) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_3 = (1, -2, 3)^T$ 令可逆矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 则 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

评述 本题目类型是考研中热点考题之一, 值得重视.

例 13* (03, 10 分) 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ , 试确定常数 a 的值; 并求可逆矩阵 P , 使

$P^{-1}AP = \Lambda$.

分析 先求矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 再求相应的特征向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 ; 令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda-2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16] = (\lambda-6)^2(\lambda+2).$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2$.

由于 A 相似于对角阵 Λ , 故对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 应有两个线性无关的特征向量, 因此 $3-r(6E-A)=2$. 所以矩阵 $(6E-A)$ 的秩应为 1. 从而由

$$6E-A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{可知 } a=0.$$

对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 的两个线性无关的特征向量可取为 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

当 $\lambda_3 = -2$ 时,

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{消元法解方程组 } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases} \text{ 得出相应的特征向}$$

$$\text{量 } \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 则 } P \text{ 可逆, 并有 } P^{-1}AP = A.$$

典型题型 5. 利用矩阵相似确定参数

例 14* 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$.

(1) 求 x 和 y 的值; (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP = B$.

解 (1) 因为 $A \sim B$, 故特征多项式相同, 即 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 即

$$(\lambda + 2)[\lambda^2 - (x+1)\lambda + (x-2)] = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - y).$$

令 $\lambda = 0$, 得 $2(x-2) = 2y$, 即 $y = x-2$. 令 $\lambda = 1$, 得 $y = -2$, 从而 $x = 0$.

(2) 由(1)知 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

由于 $A \sim B$, 从而 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. 对应于 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$ 的特征向量

分别为 $\xi_1 = (0, 2, -1)'$, $\xi_2 = (0, 1, 1)'$, $\xi_3 = (1, 0, -1)'$. 则有可逆矩阵 $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 使得 $P^{-1}AP =$

B.

例 15 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 求 x 和 y 应满足什么条件?

解 A 的特征值由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda - 1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$. 得出 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. 欲

使 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 有两个线性无关的特征向量, 矩阵 $(E - A)$ 的秩必须等于 1. 由

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & y \end{vmatrix} = 0$, 于是得出 $x + y = 0$. 总之, 矩阵 A 要有 3 个线性无关的特征向量, 必须满足条件 $x + y = 0$.

评述 例 14、例 15 中确定参数 x、y 均是从分析题目的条件(前者特征多项式相等条件, 后者矩阵的秩 $r(E - A) = 1$ 条件)得来的. 均系考查读者分析与解决问题的能力.

例 16* (99 年 8 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$, 其行列式 $|A| = -1$, 又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征

值 λ_0 , 属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha = (-1, -1, 1)'$, 求 a、b、c 及 λ_0 的值.

分析 直接从题目分析只提供给 $A^* \alpha = \lambda_0 \alpha$, 我们还回忆起伴随矩阵性质 $AA^* = |A|E = -E$ (题设 $|A|$

$|A| = -1$ 联合这两个等式及 $|A| = -1$ 即可定出 a, b, c 及 λ_0 .

解 根据题设可得 $AA^* = |A| E = -E$, $A^* \alpha = \lambda_0 \alpha$. 于是 $AA^* \alpha = A(\lambda_0 \alpha) = \lambda_0 A \alpha$. 又 $AA^* \alpha = -E \alpha = -\alpha$, 所以 $\lambda_0 A \alpha = -\alpha$. $\lambda_0 \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 故可得

$$\lambda_0(-a+1+c) = 1, \lambda_0(-5-b+3) = 1, \lambda_0(-1+c-a) = -1.$$

由第一、三式求得 $\lambda_0 = 1$. 再代入第二和第一式得 $b = -3, a = c$. 由 $|A| = -1$ 及 $a = c$, 有

$$\begin{bmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{bmatrix} = a-3 = -1, \text{ 故 } a = c = 2. \text{ 因此 } a = 2, b = -3, c = 2, \lambda_0 = 1.$$

评述 本考题系综合性的难度较大的题目.

例 17* (99 7 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. 问当 k 为何值时, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角

矩阵, 并求出 P 和相应的对角矩阵.

分析 类似例 16, 首先求出矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 然后求相应的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 与此同时就定出 k 值, 最终再写出 P .

解 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$. 可得 A 的特

征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$.

对于 $\lambda_1 = -1$, 有

$$(-E - A) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ k & 0 & -k \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $k = 0$ 时, 有

$$(-E - A) \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对应的特征向量为 $\alpha_1 = (-1, 2, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 2)^T$.

对于 $\lambda_3 = 1$, 有

$$(E - A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ k & 2 & -k \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ 对应的特征向量为 } \alpha_3 = (1, 0, 1)^T.$$

因此, 当 $k = 0$ 时, 令

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

评述 定 $k = 0$ 有一定技巧性.

例 18 (04 13 分) 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的特征值和特征向量; (2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

分析 本题分 $b \neq 0$ $b = 0$ 讨论.

解 (1) 1° 当 $b \neq 0$ 时 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -b & \cdots & -b \\ -b & \lambda - 1 & \cdots & -b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & -b & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = [\lambda - 1 - (n-1)b][\lambda - (1-b)]^{n-1}.$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1 + (n-1)b$ $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 1 - b$. 对于 $\lambda_1 = 1 + (n-1)b$, 设 A 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量为 ξ_1 , 则 $A\xi_1 = \lambda_1\xi_1$, 解得特征向量 $\xi_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$. 所以全部特征向量为 $\xi = k\xi_1 = k(1, 1, \dots, 1)^T$, k 为任意非零常数.

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 1 - b$, 解齐次线性方程组 $[(1-b)E - A]x = 0$, 由

$$(1-b)E - A = \begin{bmatrix} -b & -b & \cdots & -b \\ -b & -b & \cdots & -b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & -b & \cdots & -b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

解得基础解系 $\xi_2 = (1, -1, 0, \dots, 0)^T$ $\xi_3 = (1, 0, -1, \dots, 0)^T$, $\dots$ $\xi_n = (1, 0, 0, \dots, -1)^T$. 故全部特征向量为 $k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + \cdots + k_n\xi_n$, 其中 $k_2, k_3, \dots, k_n$ 为不全为零的常数.

2° 当 $b = 0$ 时, 特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$, 任意非零向量 ξ 均为特征向量.

(2) 1° 当 $b \neq 0$ 时, A 有 n 个线性无关的特征向量, 令 $P = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, 则 $P^{-1}AP = \text{diag}\{1 + (n-1)b, 1 - b, \dots, 1 - b\}$.

2° 当 $b = 0$ 时, $A = E$, 对任意可逆矩阵 P 均有 $P^{-1}AP = E$.

典型题型 6. 由特征值、特征向量反求矩阵

例 19 (95 7 分) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1 =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ 求 } A$$

解 对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 有两个线性无关的特征向量 ξ_2, ξ_3 , 它们与 ξ_1 正交, 故可从满足正交条件:

$$\xi_1^T \xi = (0, 1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = x_2 + x_3 = 0 \text{ 取 } \xi_1 = (1, 0, 0)^T, \xi_2 = (0, 1, -1)^T \text{ 即可.}$$

$$\text{现取正交变换矩阵 } T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } T^{-1} = T^T, A = T\Lambda T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

评述 求 A 的考题 1995 年, 1997 年都考过, 下例就是 1997 年.

例 20 (97 10 分) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 1, 2, 3, 矩阵 A 的属于特征值 1, 2 的特征向量分别是 $\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T$ $\alpha_2 = (1, -2, -1)^T$.

(1) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量; (2) 求矩阵 A .

解 (1) 设 A 的属于特征值 3 的特征向量为 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$. 因为 A 为实对称矩阵, 故属于不同特征值

的特征向量必正交,故有方程组
$$\begin{cases} a_1^T a_3 = x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ a_2^T a_3 = x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

它的基础解系为 $\varepsilon = (1 \ 0 \ 1)^T$, 故 A 的属于特征值 3 的特征向量 $\alpha_3 = k(1 \ 0 \ 1)^T (k \neq 0 \text{ 常数})$.

$$(2) \text{ 记 } P = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则有 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{故 } A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

评述 例 19、例 20 解题方法相似.

例 21 (04, 13 分) 设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2, $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值. 若 $\alpha_1 = (1 \ 1 \ 0)^T$, $\alpha_2 = (2 \ 1 \ 1)^T$, $\alpha_3 = (-1 \ 2 \ -3)^T$ 都是 A 的属于特征值 6 的特征向量. (1) 求 A 的另一特征值和对应的特征向量; (2) 求矩阵 A.

解 (1) 因为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值, 故 A 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量有 2 个. 由题设可得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组为 α_1, α_2 (因为行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$
, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性相关的, 从而极大无关组的向量只有两个, 故可取 α_1, α_2 即可). 故 α_1, α_2 为 A 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量.

由 $r(A) = 2$ 可知, $|A| = 0$, 从而根据 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A| = 0$ 得出 $\lambda_3 = 0$. 设与 $\lambda_3 = 0$ 所对应的特征向量为 $\alpha = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$, 则有 $\alpha_1^T \alpha = 0$, $\alpha_2^T \alpha = 0$, 即
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$
 解得此方程组的基础解系为 $\alpha = (-1 \ 1 \ 1)^T$, 即 A 的属于特征值 $\lambda_3 = 0$ 的特征向量为 $c\alpha = c(-1 \ 1 \ 1)^T$, 其中 c 为不为零的任意常数.

$$(2) \text{ 令 } P = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } A = P \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}. \text{ 又 } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

典型题型 7. 综合性杂题

例 22* 设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. 对应的特征向量依次为 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$, 又向量 $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(1) 将 β 用 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表示; (2) 求 $A^n \beta$ (n 为自然数).

解 (1) 设 $\beta = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3$, 需求解线性方程组 x_1, x_2, x_3 . 因为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

从而原方程组唯一解 $(2, -2, 1)$, 故 $\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$.

(2) 由于 $A\xi_i = \lambda_i\xi_i$, $A^n\xi_i = \lambda_i^n\xi_i$ ($i = 1, 2, 3$).

$$\text{所以 } A^n\beta = 2A^n\xi_1 - 2A^n\xi_2 + A^n\xi_3 = 2\lambda_1^n\xi_1 - 2\lambda_2^n\xi_2 + \lambda_3^n\xi_3 = \begin{bmatrix} 2 - 2^{n+1} + 3^n \\ 2 - 2^{n+2} + 3^{n+1} \\ 2 - 2^{n+3} + 3^{n+2} \end{bmatrix}.$$

例 23 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^n$ 的矩阵.

解 显然 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 有三个不相等的特征值 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, 故 A 与 $\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 相似, 即存

在可逆矩阵 P , 使得 $A = P\Lambda P^{-1}$. 从而有

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = P \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{bmatrix} P^{-1}. \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0.$$

例 24 (04 9 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重特征根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

解 分析 本题目从 A 有二重特征根去确定出 a 的值, 由此视其相应的线性无关的特征向量的个数, 就可得出 A 是否可相似对角化.

解 A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 3 \\ -1 & -a - 1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a). \end{aligned}$$

若 $\lambda = 2$ 是特征方程的二重特征根, 则有 $2^2 - 16 + 18 + 3a = 0$, 解得 $a = -2$. 当 $a = -2$ 时, A 的特征值为

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$. 与 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 对应的矩阵 $2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 的秩为 1, 故 $\lambda = 2$ 对应的特征向量有两个, 从而 A 可相似对角化.

若 $\lambda = 2$ 不是特征方程的二重特征根, 则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a = 0$ 有二重特征根, 从而 $64 - 4(18 + 3a) = -8 - 12a = 0$, $a = -\frac{2}{3}$. 当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 4$, 与 $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ 对应的矩阵 $4E -$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 故 $\lambda = 4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个, 从而 A 不可相似对角化.

评述 本考研题目的解题方法系分析思考判断性很强的考题之一,值得重视.

例 25* (00 3 分) 已知四阶矩阵 A 相似于 B , A 的特征值为 2、3、4、5, E 为四阶单位矩阵, 则 $|B - E| =$ _____.

分析 以 B 的特征多项式为 $|\lambda E - B|$, 那么 $|\lambda E - B|_{\lambda=1} = |E - B|$, 从而可求出 $|B - E|$.

解 $|\lambda E - B| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)$, 取 $\lambda = 1$ 则有 $|E - B| = (1 - 2) \cdot (1 - 3) \cdot (1 - 4) \cdot (1 - 5) = 24$, 故 $|B - E| = (2 - 1)(3 - 1)(4 - 1)(5 - 1) = 24$.

评述 做这类考题要多思考, 慢动笔, 想好了再做.

例 26* (06 13 分) 设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $AX = 0$ 的两个解. (I) 求 A 的特征值; (II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$. (III) 求 A 及 $(A - \frac{3}{2}E)^6$.

分析 (I) 从 A 的条件定出特征值和特征向量. (II) 将三个线性无关的特征向量 Schmidt 正交标准化,

得出 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 后 $Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, $Q^T A Q = \Lambda$. (III) $A = Q \Lambda Q^T$, $(A - \frac{3}{2}E)^6$.

解 (I) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 令 $\lambda_3 = 3$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得 $A\alpha_3 = \lambda_3\alpha_3$. 又 $A\alpha_1 = 0 \cdot \alpha_1$, $A\alpha_2 = 0 \cdot \alpha_2$, 这表示 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 是 A 的二重特征值, α_1, α_2 是相应的特征向量.

(II) Schmidt 正交标准化, 将 α_1, α_2 正交化 $\xi_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\xi_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)^T$, 而 $\xi_3 = \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 已与 ξ_1, ξ_2 正交化了. 再分别将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化 $\beta_1 = \frac{\xi_1}{|\xi_1|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)^T$,

$\beta_2 = \frac{\xi_2}{|\xi_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$, 令 $Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$, 那么 Q 为正交矩阵, 且

$Q^T A Q = \Lambda$.

(III) 因 Q 为正交矩阵, $Q^T = Q^{-1}$, 从而 $A = Q \Lambda Q^T$, 即

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

又 $A - \frac{3}{2}E = Q(\Lambda - \frac{3}{2}E)Q^T$, $(A - \frac{3}{2}E)^6 = Q(\Lambda - \frac{3}{2}E)^6 Q^T = (\frac{3}{2})^6 Q E Q^T = (\frac{3}{2})^6 E$.

预测·强化训练十三

1. 设 x 是方阵 A 的对应于特征值 λ 的特征向量, 试求 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的特征向量.
2. 设 A 为 n 阶矩阵, λ_1 和 λ_2 是 A 的两个不同的特征值, x_1 和 x_2 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 试证明 $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量.

3. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的实特征值及对应的特征向量.

4. 已知向量 $\alpha = (1 \ k \ 1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量, 试求常数 k 的值.

5. 设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i = i\alpha_i (i = 1 \ 2 \ 3)$, 其中列向量 $\alpha_1 = (1 \ 2 \ 2)^T$, $\alpha_2 = (2 \ -2 \ 1)^T$, $\alpha_3 = (-2 \ -1 \ 2)^T$. 试求矩阵 A .

6. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 设矩阵 $B = A^3 - 5A^2$. 求 (1) 矩阵 B 的特征值及其相似对角矩阵; (2) 行列式 $|B|$ 及 $|A - 5E|$ (E 为三阶单位矩阵).

7. 求矩阵

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值, 特征向量, A 是否相似于对角矩阵, 说明理由.

8. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, A 的属于特征值 $1, 2$ 的特征向量分别是 $\xi_1 = (-1, -1, 1)^T$, $\xi_2 = (1, -2, -1)^T$.

(1) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量; (2) 求矩阵 A .

9. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 且 $r(A) = r$, 证明 $A \sim \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 并求 $|A + 2E|$.

简明解答

1. 从 $AX = \lambda X (X \neq 0)$, $P^{-1}AX = \lambda P^{-1}X$, 即 $(P^{-1}AP)P^{-1}X = \lambda P^{-1}X$. 此式表明 $(P^{-1}X)$ 是矩阵 $(P^{-1}AP)$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

2. 反证法 设 $x_1 + x_2$ 是 A 的特征向量, 即存在有 λ , 使 $A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$, 即 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2$, $(\lambda_1 - \lambda)x_1 + (\lambda_2 - \lambda)x_2 = 0$. 因 x_1, x_2 线性无关, 故 $\lambda_1 - \lambda = 0$, $\lambda_2 - \lambda = 0$, 即 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. 这与题设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾. 所以 $(x_1 + x_2)$ 不是 A 的特征向量.

3. A 的特征方程

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & -4 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0.$$

特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2 + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = -2 - \sqrt{3}$.

$\lambda_1 = 1$, 特征矩阵方程 $(A - E)X = 0$, 初等行变换法: $(A - E) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$r(A - E) = 2$, 只有一个特征向量 $\xi_1 = (0 \ 2 \ 1)^T$.

λ_2, λ_3 的特征向量 ξ_2, ξ_3 的做法相同, 故从略.

4. A 的特征方程

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0,$$

特征值 $\lambda = 1$ 是二重的, $\lambda = 4$ 是一重的, 从而 A^{-1} 的特征值 $\lambda = 1$ (二重), $\lambda = \frac{1}{4}$ (一重).

另外, 从 $A^{-1}\alpha = \lambda\alpha$, 即 $\alpha = \lambda A\alpha$. 以 $\lambda = 1$ 代入得 $\alpha = A\alpha$, 即 $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+3 \\ 2k+2 \\ k+3 \end{pmatrix}$, 即

$\begin{cases} 1 = k+3, \\ k = 2k+2 \end{cases}$, 以 $\lambda = \frac{1}{4}$ 代入得

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 即 } \begin{cases} 4 = k+3, \\ 4k = 2k+2, \end{cases} k = 1.$$

综合 $k = 1$ 或 $k = -2$.

5. 从 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3)$ 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 代入得

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ 即 } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

$$\text{经计算得 } A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

6. (1) 由 $B\alpha = (A^3 - 5A^2)\alpha = A^3\alpha - 5A^2\alpha = (\lambda^3 - 5\lambda^2)\alpha$ 所以 B 的特征值为 $\lambda^3 - 5\lambda^2$. 经计算: $-4, -6, -12$. 故

$$B \sim A \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

(2) 相似矩阵的行列式相同, 所以 $|B| = |A| = -288$. 又 $|A - 5E| = |A - \lambda E|_{\lambda=5} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)|_{\lambda=5} = (1-5)(-1-5)(2-5) = (-4) \cdot (-6) \cdot (-3) = -72$.

7. $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 是二重特征值, $\lambda_3 = 2$ 是一重特征值.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $(1 \cdot E - A)X = 0$ 解得特征向量 $\xi_1 = k_1(1, 2, -1)^T (k \neq 0)$. $\lambda_3 = 2$ $(2E - A)X = 0$ 解得特征向量 $\xi_3 = k_3(0, 0, 1)^T (k_3 \neq 0)$. 三阶矩阵 A 只对应有二个线性无关的特征向量, 故 A 不能相似于对角矩阵.

8. 设 $\xi_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 则有 $\xi_1^T \xi_3 = -x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $\xi_2^T \xi_3 = x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ 解得 $\xi_3 = (1, 0, 1)^T$. 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} A = P \Lambda P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{或 } T = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ 则 } A = T \Lambda T^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix} \text{ 其中 } P \text{ 为可逆矩阵, } T \text{ 为正交矩阵.}$$

9. (1) 从 $A^2 = A$ 故 A 的特征值为 $1, 0$. 又 $(E - A)A = 0$ 故 $r(E - A) + r(A) \leq n$ 而 $r(E - A) + r(A) \geq r(E - A + A) = r(E) = n$ 从而 $r(E - A) + r(A) = n$. 已知 $r(A) = r$ 故 $r(E - A) = n - r$.

因为特征值为 1 的特征矩阵 $(1 \cdot E - A)A = 0$ 有解 $r(A) = r$, A 有 r 列线性无关向量就是 $\lambda = 1$ 所对应的特征向量. 同理, 特征值为 0 的特征矩阵方程组 $(0 \cdot E - A)(E - A) = 0$ 有解 $r(E - A) = n - r$, $(E - A)$ 有 $(n - r)$ 列线性无关向量就是 $\lambda = 0$ 所对应的特征向量. 综合 A 有 n 个线性无关特征向量, 且

$$A \sim \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) |A + 2E| = \left| P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + 2E \right| = |P| \left| \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2E \right| |P^{-1}| = 3^r \cdot 2^{n-r}.$$

第十四章 二次型

考试要求

1. 掌握二次型及其矩阵表示,了解二次型秩的概念,了解合同变换和合同矩阵的概念,了解二次型的标准形,规范形的概念以及惯性定理.
2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法,会用配方法化二次型为标准形.
3. 理解二次型和正定矩阵的概念并掌握其判别法.

考试要点分析与题型预测

二次型章里,有两大考研重点和热点内容,第一,用可逆线性变换或正交变换把二次型化为标准形,第二,二次型正(负)定的判定.用可逆线性变换化二次型为标准形时,由于所作的线性变换不唯一,因而标准形也不唯一,但正项项数和负项项数是唯一的(如 § 14—4,例 1、例 2).若用正交变换只能化二次型为标准形,不能化为规范形.若进一步化为规范形,变换将不再是正交变换.

对于数值二次型(或对称矩阵)正(负)定判定,一般采用矩阵 A 的顺序主子式恒大于零(偶数阶顺序主子式全大于零,奇数阶顺序主子式全小于零)确定,(§ 14—4,例 10 ~ 例 12),而对于抽象二次型(或实对称矩阵),则应视不同情况采用不同的充要条件确定(如例 14,标准形系数全大于零)用定义证明正(负)定性,则是在没有其它办法时才采用(例 13、例 16).

§ 14 - 1 二次型概念及其矩阵表示

定义 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的二次齐次式

$$f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad (14.1)$$

称为二次型,当 a_{ij} 为实数时, f 称为实二次型.我们仅讨论实二次型.

$$\text{当 } a_{ij} = 0 (i \neq j) \text{ 时,即 } f = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 \quad (14.2)$$

称为二次型的标准形.

当 $a_{ii} = 1, -1, 0$ 时,即 $f = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^q x_i^2$ 称为二次型的规范型.

$$\text{若记 } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ 则(14.1)可表为}$$

$$f = X'AX \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad (14.3)$$

(14.3)式就是二次型的矩阵表示法,其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 称为二次型(14.1)的矩阵. A 的秩称为二次型的秩.若 A 满秩,则称二次型 f 为满秩的.

关于二次型及其矩阵有下列重要结论:

- 1 二次型 f 的矩阵 A 是对称矩阵;
- 2 二次型 f 与它的矩阵 A 是互相唯一决定的;
- 3 二次型 $f = X'AX$ 经线性变换 $X = CY$ 后,化为变量 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的二次型 $f = Y'BY$.

其中 $B = C'AC$. 故若线性变换 $X = CY$ 是满秩(即 C 满秩)线性变换,则二次型 $f = X'AX$ 与 $f = Y'BY$ 的矩阵 A 与 B 是合同的(即 $B = C'AC$),或称 A 通过 C 的合同变换后化为 B ,相应的二次型也称为合同二次型.

§ 14 - 2 化二次型为标准形、规范型

基本原理

1 对任一二次型 $f = X'AX$,必存在满秩线性变换 $X = CY$,使

$$f = X'AX = Y'(C'AC)Y = Y \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

2 对任一二次型 $f = X'AX$,必存在正交变换 $X = TY$,使

$$f = X'AX = Y'(T'AT)Y = Y \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} Y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

具体使用的方法 ,主要有下列二种 :

1. 配方法 这是读者所熟悉的 ,在此不予详述 ;

2. 正交变换法 按 § 13—2 中矩阵对角化基本方法 ,求出正交矩阵 T ,使 f 所对应的矩阵化为对角形矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ 即得正交变换 } X = TY, \text{ 使二次型化为标准形 } f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \text{ 其中 } \lambda_i (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 是 } A \text{ 的特征值.}$$

... n) 是 A 的特征值.

惯性定理 对于一个二次型 ,不论选择何种可逆线性变换 ,化成标准形或规范形 ,则其正平方项的项数 p ,负平方项的项数 q 都是由所给的二次型唯一确定的

正平方项的项数 p 称为正惯性指数 ,负平方项的项数 q 称为负惯性指数 $p + q = r$ 是二次型或其对应矩阵的秩 $p - q$ 称为符号差.

§ 14 - 3 正定二次型与正定矩阵

1. 正(负)定二次型

给出二次型 $f(x) = X'AX$,其中 A 为实对称矩阵 ,如果对于任意非零向量 $X \neq 0$,都有 $f(x) > 0$ (或 < 0) ,则称 f 为正定(或负定)二次型 ,并称 A 为正定(或负定)矩阵 ,记作 $A > 0$ (或 $A < 0$) .

2. f 为正(负)定的条件

(1) $f(x) = X'AX$ 为正定的充要条件是矩阵 A 的特征值都大于零.

(2) f 为正定的充要条件是矩阵 A 的顺序主子式均大于零 ,即

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

(3) f 为正定的充要条件是它的标准形的 n 个系数全为正.

(4) f 为负定的充要 A 的特征值都小于零

(5) $f(x) = X'AX$ 为负定的充要条件 A 的偶数阶顺序主子式全大于零 ,而奇数阶顺序主子式全小于零 . 即

$$\Delta_1 = a_{11} < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, \Delta_n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

3. 正定矩阵的性质 当 n 阶方阵 A 为正定矩阵时, 则

- (1) $A = A'$
- (2) A 的特征值均为正数;
- (3) $|A| > 0$, 从而 A 可逆;
- (4) A 的各阶顺序主子式全大于零;
- (5) A 的主对角线元素 $a_{ii} (i = 1, 2, \dots, n)$ 全大于零;
- (6) A 正定时, A', A^{-1}, A^* 均为正定矩阵.

§ 14 - 4 典型例题分析与最新年考试题型预测

本节典型例题的选择主要是: 二次型化标准形、规范形; 二次型正(负)定判定的两方面.

典型题型 1. 用正交变换法化二次型为标准形

例 1 证明 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}$ 合同于 $B = \begin{pmatrix} a_3 & & \\ & a_1 & \\ & & a_2 \end{pmatrix}$

分析 把 A 的 1, 3 两行、两列对换, 再互换 2, 3 两行、两列即得矩阵 B , 这正是初等矩阵的性质.

解 令 $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = P_2 P_1$, 则 C 可逆, 且 $C'AC = P_2' P_1' A P_1 P_2 =$

$$P_2' \begin{pmatrix} a_3 & & \\ & a_2 & \\ & & a_1 \end{pmatrix} P_2 = B \text{ 即 } A \simeq B.$$

例 2* 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0)$ 通过正交变换化成标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

分析 本题是已知二次型、标准形, 利用二次型化标准形的基本原理, 先定出参数 a , 再求 f 的矩阵特征值、特征向量, 标准化后立刻可写出正交变换矩阵.

解 二次型 f 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix}$ 特征方程为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -a \\ 0 & -a & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - a^2) = 0$$

A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$. 因为 $A \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, 所以, 将 $\lambda_1 = 1$ (或 $\lambda_3 = 5$) 代入特征方

程, 得出 $a^2 - 4 = 0$, 即 $a = \pm 2$. 由于 $a > 0$, 故取 $a = 2$. 此时 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

当 $\lambda_1 = 1$, 由 $(1 \cdot I - A)X = 0$, 即 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$, 解得此对应的特征向量 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\text{当 } \lambda_2 = 2, \text{ 由 } (2 \cdot I - A)X = 0, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0, \text{ 解得此对应的特征向量 } \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{当 } \lambda_3 = 5, \text{ 由 } (5 \cdot I - A)X = 0, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0, \text{ 解得此对应的特征向量 } \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{将 } \xi_1, \xi_2, \xi_3 \text{ 单位化 } y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ 故所用正交变换矩阵 } T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

评述 本题型是典型的经常性的考研题,很值得读者重视.

例 3* (98 6 分) 已知二次曲面方程 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$ 可以经过正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$ 化

为椭圆柱面方程 $0\xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2 = 4$. 求 a, b 的值及正交矩阵 P .

分析 二次曲面就是二次型,即 $f(x, y, z) = x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$, 椭圆柱面方程就是标准形 $0\xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2 = 4$. 故本题是二次型化为标准形问题.

解 二次型及其标准形矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}.$$

因为 $A \sim \Lambda$, 所以 $|\lambda I - A| = |\lambda I - \Lambda|$, 解之得出 $a = 3, b = 1$. 所以 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值分别为 λ_1

$$= 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4.$$

求解下列矩阵方程:

$$(A - \lambda_1 E)X = 0$$

$$(A - \lambda_2 E)X = 0$$

$$(A - \lambda_3 E)X = 0$$

$$\text{单位特征向量 } \xi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad \text{单位特征向量 } \xi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}; \quad \text{单位特征向量 } \xi_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

因此, 正交矩阵 P :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

评述 例 2*、例 3* 同属一个类型,例 3* 叙述方式以二次曲面形式出现,读者需深入领会题目的实质,是二次型化标准形问题.

例 4 在直角坐标系 $O - xyz$ 中,下面的方程表示什么曲面?说明理由.

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - x - y - z = 0.$$

分析 仍然将下式

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

视为二次型,用二次型化成标准形的基本原理,将 $f(x, y, z)$ 化成标准形,再通过平移变换消去一次项,完全平方项为不变量,即知方程所表示的曲面的名称.

解 考虑二次型

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$$

它的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 其特征方程 $|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$, 得出 A 的全部特征值为

$2, 3, 4$, 故 f 经正交变换化为 $2x_1^2 + 3y_1^2 + 4z_1^2$. 于是曲面方程经正交变换及适当的平移变换化为

$$2x_2^2 + 3y_2^2 + 4z_2^2 = c, \quad c \text{ 为已知常数}$$

(1) 当 $c < 0$ 时, 则曲面为虚椭球面;

(2) 当 $c = 0$ 时, 则曲面为一点;

(3) 当 $c > 0$ 时, 则曲面为椭球面.

不难验证, 在直角坐标系 $O-xyz$ 中, 坐标为 $(\frac{1}{3}, \rho, \rho)$, $(0, \frac{1}{3}, \rho)$ 的点都在曲面上, 故(1), (2)不可能出现,

因此, 曲面为椭球面.

评述 本题目的解决是利用二次型化标准形的基本原理完成的.

例5 设二次型 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_2 x_3 + 2x_1 x_3$ 经正交变换 $X = PY$ 化成 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中 $X = (x_1, x_2, x_3)'$, $Y = (y_1, y_2, y_3)'$ 是三维列向量, P 是三阶正交矩阵, 试求常数 α, β .

解 变换前, 后的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

二次型可以写成 $f = X'AX$, $f = Y'BY$. 由于 $P'AP = B$, P 为正交矩阵, 故 $P^{-1}AP = B$, 由此, $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 即

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\alpha & -1 \\ -\alpha & \lambda - 1 & -\beta \\ 1 & -\beta & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - \alpha^2 - \beta^2)\lambda + (\alpha - \beta)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$$

其解 $\alpha = \beta = 0$ 为所求常数.

评述 本题目的方法较为简洁明了.

例6* (01 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $r(A) = n$, A_{ij} 是 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{|A|} x_i x_j$$

(1) 记 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, 把 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 写成矩阵形式, 并证明二次型 $f(x)$ 的矩阵为 A^{-1} .

(2) 二次型 $g(x) = X^TAX$ 与 $f(x)$ 的规范型是否相同? 说明理由?

解 (1) 二次型的矩阵形式为

$$f(x) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

因为 $r(A) = n$, 故 A 可逆, 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. 又 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$, 所以 A^{-1} 也是实对称矩阵, 因此二

次型 $f(x)$ 的矩阵为 A^{-1} .

(2) 因为 $(A^{-1})^T A (A^{-1}) = (A^T)^{-1} E = A^{-1}$, 所以 A 合同于 A^{-1} , A 与 A^{-1} 有相同的特征值, 于是 $g(x) = X^T A X$ 与 $f(x) = X^T A^{-1} X$ 有相同的规范形.

评述 本题目在解题中, 要求读者熟悉二次型的矩阵概念, 规范形概念.

例 7(02, 3 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $X = PY$ 可化为标准形 $f = 6y_1^2$, 则 $a =$ _____.

分析 本题与例 4*、例 5* 的题型完全相似, 利用二次型化标准形的基本原理, 即可定出参数 a .

解 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$, 标准形 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, 因为 $A \simeq \Lambda$,

所以 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A|_{\lambda=6} = \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix}_{\lambda=6} = (a - 2)(-a^2 + 16a - 64) = 0,$$

故 $a = 2$ 或 $a = 8$. 另外 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A|_{\lambda=0} = \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix}_{\lambda=0} = -a^3 + 12a - 16 = -(a - 2)^2(a + 4) = 0,$$

故 $a = 2$ 或 $a = -4$. 综合 $a = 2$.

例 8(03, 13 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ ($b > 0$), 其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12. (1) 求 a, b 的值. (2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形.

分析 (1) 利用特征值之和、积求出 a, b . (2) 由已定出的 a, b 具体求 A 的特征值及标准正交化的特征向量 η_1, η_2, η_3 , 令 $T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 即为所求.

解 (1) 二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 由特征值的性质, 有 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 =$

$$a + 2 + (-2) = 1, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a - 2b^2 = -12, \text{ 定出 } a = 1, b = 2.$$

(2) 矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$, 故 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 解相应的特征矩阵方程 $(2E - A)X = 0$, 得出基础解系 $\xi_1 = (2, 0, 1)^T, \xi_2 = (0, 1, 0)^T, \lambda_3 = -3$, 解相应的特征矩阵方程 $(-3E - A)X = 0$, 得出基础解系 $\xi_3 = (1, 0, -2)^T$.

注意到 ξ_1, ξ_2, ξ_3 已相互正交, 对其单位化: $\eta_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T, \eta_2 = (0, 1, 0)^T, \eta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T$. 由此, 正

交矩阵 $T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ 正交变换 $X = TY$ 标准形 $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.

评述 本类型的考题是考研中的热点考题之一, 非常有典型性、代表性.

典型题型 2. 正定性判别与证明

正定性的判别与证明是经常出考研题的知识, 读者必须非常重视.

例 9(97 3 分) 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

解 二次型的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t/2 \\ 0 & t/2 & 1 \end{bmatrix}$, f 为正定的充要条件是 A 的顺序主子式全为正, 即 $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $D_3 = |A| = 1 - \frac{t^2}{2} > 0$, 即 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

综合 t 取 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

例 10 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$ 是否正定二次型?

分析 本题用顺序主子式和特征值两种方法判别.

解 (1) 顺序主子式判别法. 二次型的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, A 的顺序主子式为 $D_1 = 2 > 0$, $D_2 =$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $D_3 = |A| = 24 > 0$, 从而 A 是正定矩阵, 二次型为正定二次型.

(2) 求 $|\lambda E - A| = 0$ 的特征值, 得 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$, 从而 A 是正定矩阵, 此二次型为正定二次型.

例 11* 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = tx_1^2 + tx_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$, 当 t 满足什么条件时二次型是正定的?

分析 本题用顺序主子式方法判别

解 二次型 f 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{bmatrix}$, A 的顺序主子式 $D_1 = t$, $D_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1$, $D_3 = |A| = (t$

$-2)(t+1)^2$. 解 $\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \\ (t-2)(t+1)^2 > 0 \end{cases}$ 得出 $t > 2$. 所以, 当 $t > 2$ 时二次型是正定的.

例 12* (00 9 分) 设有 n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1}x_n)^2 + (x_n + a_nx_1)^2$, 其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为实数. 试问: 当 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足何种条件时, 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为正定二次型?

分析 由题设条件, 对任意 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 恒有 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, 此时可分为 (1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, (2) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ 两种情况. 从 (1)、(2) 的分析讨论中即可找出条件 $a_1a_2\dots a_n \neq (-1)^n$.

解 (1) 成立, 即 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 当且仅当方程组:

$$(*)_1 \dots \dots \begin{cases} x_1 + a_1x_2 = 0 \\ x_2 + a_2x_3 = 0 \\ \dots \dots \dots \text{成立} \\ x_{n-1} + a_{n-1}x_n = 0 \\ a_nx_1 + x_n = 0 \end{cases}$$

方程组 $(*)_1$ 仅有零解 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 的充要条件是系数行列式

$$(*)_2 \dots \dots \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}a_1a_2\dots a_n \neq 0$$

即当 $a_1a_2\dots a_n \neq (-1)^n$ 时, 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为正定二次型.

例 13 设 U 为可逆矩阵, $A = U^T U$. 证明 $f = X^T A X$ 为正定二次型.

证明 从 $f = X^T A X = X^T U^T U X = (UX)^T (UX) \xrightarrow{Y = UX} Y^T Y = \sum_{i=1}^n y_i^2 > 0$. 所以 f 为正定二次型.

例 14 设对称矩阵 A 为正定矩阵, 证明存在可逆矩阵 U , 使 $A = U^T U$.

证明 由于对称矩阵 A 为正定矩阵, 则二次型 $f = X'AX$ 为正定二次型, 于是有满秩线性变换 $X = CY$, 使 $f = X'AX = Y'C'ACY = Y'EY$, 于是 $C'AC = E$.

从而 $A = (C')^{-1}EC^{-1} = (C^{-1})'C^{-1} \xrightarrow{\text{令 } U = C^{-1}} U'U$.

典型题型3. 综合性杂题

例 15* (96 3 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2. (1) 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值 (2) 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

分析 本题系多个知识点应用. 先利用二次型的秩为 2 定出参数 c , 从而即可求得二次型矩阵的特征值. 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成了标准形, 即可看出 $f(x_1, x_2, x_3)$ 所表示的二次曲面.

解 (1) 二次型对应矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{bmatrix}$. 因为 $r(A) = 2$ 故 $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{vmatrix} = 0$ 解

得 $c = 3$.

这时, $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9)$ 所以 特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$.

(2) 由上述特征值可知 $f(x_1, x_2, x_3) = 0y_1^2 + 4y_2^2 + 9y_3^2 = 1$ 表示椭圆柱面.

例 16 (01 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ 则 A 与 B

(A) 合同且相似 (B) 合同但不相似 (C) 不合同但相似 (D) 不合同且不相似

解 因 A 是实对称矩阵, 且 A 的特征值从

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)\lambda^3 = 0 \end{aligned}$$

求得 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, 它和对角矩阵 B 的对角元素一致. 故存在正交矩阵 T , 使 $T^{-1}AT = T'AT = B$, 即 $A \sim B$, 应选(A).

例 17 设有二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i x_j$, 试用可逆线性变换将它化为标准形, 并判断它的正定性.

分析 将二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 写成矩阵形式即可解决.

解

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}^2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2. \text{ 由题}$$

设 a_i 不全为 0, 不妨设 $a_k \neq 0$, 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \dots \\ y_k = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k + \dots + a_n x_n), \\ y_n = x_n, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ \dots \\ x_k = \frac{1}{a_k} (y_k - a_1 y_1 - a_2 y_2 - \dots - a_{k-1} y_{k-1} - a_{k+1} y_{k+1} - \dots - a_n y_n), \\ \dots \\ x_n = y_n, \end{cases}$$

得出 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的标准形为 $f = y_k^2$. 由此, 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 不是正定二次型.

例 18 (05 9 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2. (I) 求 a 的值. (II) 求正交变换 $X = QY$ 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形. (III) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

分析 (I) 写出二次型的矩阵 A (II) 求出 A 的特征值 λ_i 及相应的特征向量 ξ_i , 并正交单位化, 定出 Q 和标准形. (III) 从标准形 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 从而得出解 X .

解 (I) 二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩为 2,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8a = 0, a = 0.$$

当 $a = 0$ 时, 矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$. 故 $a = 0$ 此时, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$(II) \text{ 从 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$$

, 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$. 对于 $\lambda = 2$, 由 $(2E - A)X = 0$ 得特征向量 $\alpha_1 = (1 \ 1 \ 0)^T, \alpha_2 = (0 \ 0 \ 1)^T$.

对于 $\lambda = 0$, 由 $(0E - A)X = 0$ 得特征向量 $\alpha_3 = (-1 \ 1 \ 0)^T$.

显然 ξ_1, ξ_2, ξ_3 两两正交, 再将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化, 于是有

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 1 \ 0)^T, r_2 = (0 \ 0 \ 1)^T, r_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \ 1 \ 0)^T$$

取 $Q = (r_1 \ r_2 \ r_3)$, 则 Q 为正交矩阵, 且标准形 $f(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{X=QY} \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 2y_1^2 + 2y_2^2$.

(III) 由正交变换 $X = QY$ 将 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 化成 $2y_1^2 + 2y_2^2 = 0$, 解之 $y_1 = y_2 = 0, y_3$ 为任意实数, 从而

$$X = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} = (r_1 \ r_2 \ r_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_3 \cdot r_3 = k(-1 \ 1 \ 0)^T, \text{ 其中 } k \text{ 为任意实数.}$$

评述 比较例 15*, 例 18, 它们有相似之处, 求参数及特征值, 不同点是: 例 15* 需指出 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面, 例 18 需求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解. 由此说明, 例 18 是例 15* 经局部修改而成.

预测·强化训练十四

1. 求一个正交变换化二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 成标准形.
2. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$. (1) 写出二次型 f 的矩阵表达式, (2) 用正交变换把二次型 f 化成标准形, 并写出相应的正交矩阵.
3. 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$ 为标准形, 并写出所作的可逆线性变换.
4. 考虑二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, 问 λ 取何值时, f 为正定二次型.
5. 当 t 取何值时, 下列二次型是正定的?

$$(1) f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

$$(2) f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 10x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

6. 证明 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ 为正定二次型.

7. “对任意的 $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \dots, x_n \neq 0$ 均有 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ ” 是二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为正定二次型的 ().

(A) 充分必要条件 (B) 充分条件 (C) 必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为 _____ (2004 年)

简明解答

1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 矩阵 A 的特征方程 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 4 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$
 $= \lambda^2(\lambda - 9) = 0$, 所以 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 9$, 故 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形为 $f = 9y_3^2$.
 $\lambda_{1,2} = 0$ 是二重特征值, 求解特征矩阵方程 $(0 \cdot E - A)x = 0$, 得出两个线性无关的特征向量 $\xi_1 = (0, 1, 1)^T$,
 $\xi_2 = (4, 1, -1)^T$. $\lambda_3 = 9$ 是一重特征值, 求解特征矩阵方程 $(9 \cdot E - A)x = 0$, 得出特征解向量 $\xi_3 = (1, -2, 2)^T$. 显然 ξ_1, ξ_2, ξ_3 彼此正交, 再 Schmidt 规格化 $r_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, r_2 = \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}\right)^T, r_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$, 故正交变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

2. (1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

(2) A 的特征方程 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6)(\lambda + 6) = 0$ 的特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$, 故 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形为 $f = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2$.

$\lambda_1 = 1$, 求解特征矩阵方程 $(1 \cdot E - A)x = 0$, 得出特征向量 $\xi_1 = (2, 0, -1)^T$. $\lambda_2 = 6$, 求解特征矩阵方程 $(6 \cdot E - A)x = 0$, 得出特征向量 $\xi_2 = (1, 5, 2)^T$. $\lambda_3 = -6$, 求解特征矩阵方程 $(-6 \cdot E - A)x = 0$, 得出特征向量 $\xi_3 = (1, -1, 2)^T$. 显然 ξ_1, ξ_2, ξ_3 彼此正交, 再 Schmidt 标准化 $r_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^T$,

$r_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)^T, r_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$, 故正交变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

3. 配方法 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)x_3 + x_3^2 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_3^2 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$, 其中

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3, \\ x_2 = y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases} \quad \text{或 } X = CY \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

显然 C 是可逆的线性变换.

4. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ A 的顺序主子式 $D_1 = 1$ $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 > 0$, $-2 < \lambda < 2$ $D_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4\lambda - 4\lambda^2 = -4(\lambda^2 + \lambda - 2) = -4(\lambda + 2)(\lambda - 1) > 0$ 解得 $-2 < \lambda < 1$. 综合 λ 应取 $-2 < \lambda < 1$.

5. (1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ A 的顺序主子式 $D_1 = 1$ $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2 > 0$, $-1 < t < 1$ $D_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -t(4 + 5t) > 0$, $-\frac{4}{5} < t < 0$. 综合 t 应取: $-\frac{4}{5} < t < 0$.

- (2) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 5 \\ t & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ A 的顺序主子式 $D_1 = 1$ $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0$, $-2 < t < 2$ $D_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & t & 5 \\ t & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -(t^2 + 30t + 105) > 0$, $(-15 - 2\sqrt{30}) < t < (-15 + 2\sqrt{30})$.

综合, 无解. 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 不是正定二次型.

6. 提示: 记标二次型矩阵 A 顺序主子式 $D_1 = 1$ $D_2 = \frac{3}{4}$... $D_k = \left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ ($k = 3, 4, \dots, n$) 全为正.

7. 应选(C). 是 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 正定的必要条件, 但不充分. 因为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 正定的充分条件应是任给 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, 有 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$. 这里 $X \neq 0$ 与 $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \dots, x_n \neq 0$ 并不一样.

8. 2.

第七部分 概率论与数理统计^{*}

第十五章 随机事件与概率

考试要求

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.
2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式,以及贝叶斯(Bayes)公式.
3. 理解事件的独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算,理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

考试要点分析与题型预测

本章基本概念特别多且重要,尤其是事件的包含,互不相容,相互独立,完全事件组和对立事件,要考概念这个考点,经常以选择题形式出现(例如例1~例7),考计算这个考点,主要反映在后二章的计算中,正确地选用合适的概率公式、准确而迅速地解题,主要要看考生对这些概念的理解和判断的能力(例如例21等).

必须正确地区分是求(无条件)概率还是条件概率(见例14).熟练掌握事件的运算及概率基本公式这个考点,可以选择题及填空题形式出现(例9~例13),由于它们是概率统计的基础,所以在计算题及证明题中都要熟练地用到它们,可以毫不夸张地说,只要考题涉及一维和多维离散型随机变量函数的分布律和数字特征的计算,主要就是考这个考点.

全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式无论在理论上还是在应用上都很重要,出题的频率较高,必须注意应用的条件.

随机试验、随机事件、随机变量的独立性是个重点、必考的考点.本章中讨论和证明事件的独立性在考题中几乎是总有大或小题的.

§ 15 - 1 随机事件

一、随机事件和样本空间

1. 样本空间

试验E的每一个可能发生的基本结果称为一个基本事件.所有基本事件组成的集合称为试验E的样本空间,用 Ω 表示. Ω 的每一个元素称为一个样本点,用 e 表示.

2. 随机事件

样本空间 Ω 的一个子集称为随机事件,简称为事件.特别地,由 Ω 的一个样本点组成的单点集称为基本事件.样本空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 看作 Ω 的两个特殊子集,分别称 Ω 为必然事件, $\varnothing$ 为不可能事件.

二、随机事件的关系和运算

1. 事件的包含和相等

若事件A的发生必然导致事件B的发生,则称B包含A,记为 $B \supset A$.若 $B \subset A$ 且 $A \subset B$,则称A等于B,记

^{*} 概率论与数理统计数学二不考.

为 $A = B$.

事件包含的判断

- ① 在实际问题中,事件 A 发生必然导致 B 发生 $\Leftrightarrow A \subset B$
- ② 对任何事件 A 有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$.
- ③ 对任何事件 A, B 有 $AB \subset A \subset (A \cup B)$.
- ④ 下列 5 个关系等价

$$\begin{aligned} \bar{A} \supset \bar{B} \\ \Updownarrow \\ A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \\ \Updownarrow \\ A \cap \bar{B} = \emptyset \end{aligned}$$

2. 和事件

“事件 A 和事件 B 中至少有一个发生”这个事件称为 A 与 B 的和事件,记为 $A \cup B$ 或 $A + B$. 可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和事件记为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

3. 积事件

“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件称为 A 与 B 的积事件,记为 $A \cap B$ 或 AB . 可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积事件记为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

在计算古典型概率时,用公式 $A \cup B = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB$ 计算事件中所含的基本事件的个数可保证不会漏掉或重复.

4. 差事件

“事件 A 发生但事件 B 不发生”这一事件称为 A 与 B 的差事件,记为 $A - B$.

在概率统计的事件运算及概率计算中经常用公式 $A - B = AB$ 右端的表达形式.

5. 事件的互不相容(或互斥)

若事件 A 与事件 B 满足 $AB = \emptyset$, 则称 A 与 B 互不相容(或互斥). 可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 称为两两互不相容的, 如果 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n, \dots$.

事件互不相容的判断

- ① 在实际问题中,如果事件 A 和 B 不可能同时发生, 则 A 和 B 互不相容.
- ② 如果 A 和 B 互不相容, C 和 D 是任意两个事件, 则事件 AC 和 BD 一定互不相容.
- ③ 事件 A 和 $\bar{A}$ 互不相容.
- ④ 如果 X 是离散型随机变量, x_i 和 x_j 是 X 的两个不相等的可能取值, 则事件 $\{X = x_i\}$ 和 $\{X = x_j\}$ 互不相容.
- ⑤ 如果 X 是连续型随机变量, 区域 G_1 和 G_2 不交, 即 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, 则事件 $\{X \in G_1\}$ 和 $\{X \in G_2\}$ 互不相容.

6. 对立事件(或逆事件)

如果事件 A 与事件 B 满足 $AB = \emptyset$ 且 $A \cup B = \Omega$, 则称 A 与 B 互为对立事件(或互为逆事件), 记为 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$.

7. 完全事件组(或完备事件组)

如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足: 它们两两互不相容, 而且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是完全事件组(又称完备事件组).

评述 最常用的三个完全事件组：① A 和 $\bar{A}$ 构成完全事件组。② 若离散型随机变量 X 的可能取值是 n 个： $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，则 n 个事件 $\{X = x_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n$ 构成完全事件组。③ 若 Y 是连续型随机变量， $\Omega = \bigcup_{i=1}^k G_i$ ， $G_i G_j = \emptyset \quad i, j = 1, 2, \dots, k$ ，则 k 个事件 $\{Y \in G_i\} \quad i = 1, 2, \dots, k$ 构成完全事件组。

8. 事件的运算律

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

对偶原理 $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$

评述 对偶原理在概率计算中作为一种技巧经常要用其中的第一式，它把和事件运算转化为积事件运算，从而可利用事件的独立性简化概率计算。

§ 15 - 2 随机事件的概率

一、概率的概念

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，对于 E 的每一事件 A ，赋予一实数 $P(A)$ ，称为事件 A 的概率，如果对对应法则 P 满足：

1 $0 \leq P(A) \leq 1$ ；

2 $P(\Omega) = 1$ ；

3 对两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ，有 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ 。

评述 1. 公式 3 在概率计算中很重要，应用时必须能正确判断事件是否互不相容。

2. 概率论中两个很基本的概念，一定要注意：

(1) 如果 $A = \emptyset$ ，则 $P(A) = 0$ ；反之，如 $P(A) = 0$ ，不能得到结论 $A = \emptyset$ 。常用的反例：如果 X 是连续型随机变量， $P\{X = a\} = 0$ ，但 $\{X = a\} \neq \emptyset$ ， $\{X = a\}$ 是可能发生的。

(2) 如果 $A = \Omega$ ，则 $P(A) = 1$ ；反之，如 $P(A) = 1$ ，不能得到结论 $A = \Omega$ 。常用的反例：如果 X 是连续型随机变量， $P\{X = a\} = 1$ ，但 $\{X = a\} = \Omega - \{X = a\} \neq \Omega$ 。

二、古典型概率和几何型概率

1. 古典型概率

如果一个随机试验的样本空间中只有有限个基本事件，并且每个基本事件发生的可能性相同，则称这种概率模型为古典概型或等可能概型。

古典概型的概率计算公式为

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 中含的基本事件个数}}{\text{样本空间中基本事件总数}}$$

评述 古典型概率不是重点，但却是个难点（难在排列组合的计算），考试中很少出古典概率的题目。对自己要求只要基本的排列组合会算即可，古典概率的题目做几个容易的，稍难的题不会做就不做，只要超几何分布的题（见第 16 章例 11(2)）会做。

2. 几何型概率

设样本空间 Ω 中的样本点具有“均匀分布”的性质，它的大小（度量：长度、面积或体积）记为 $\mu(\Omega)$ ，事件 A

$\subset \Omega$ 的大小用 $\mu(A)$ 表示, 则

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

这样计算所得概率称为几何概率.

评述 几何型概率的解法及例题见第 17 章例 12, 13.

三、条件概率

对事件 A, B , 设 $P(A) \neq 0$, 称 $\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的条件概率, 记为 $P(B|A)$, 即

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

四、概率的基本公式

1. 技巧公式 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$;

2. 加法公式

$$(1) P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

(2) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_2 A_3) - P(A_3 A_1) + P(A_1 A_2 A_3)$. (记住: 是 7 项代数和).

(3) 如 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

(4) 如 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i).$$

3. 乘法公式

$$(1) P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}),$$

其中 $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$

(2) 如 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

4. 减法公式

$$(1) P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

(2) 如 $B \subset A$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$

(3) 如 $B \subset A$, 则 $P(B) \leq P(A)$, 此即概率的单调性.

5. 全概率公式

如果事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 构成完全事件组, 且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$P(C) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(C|B_i)$$

6. 贝叶斯公式

如果 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 构成完全事件组, $P(C) > 0, P(B_i) > 0, j = 1, 2, \dots, n$, 则

$$P(B_i | C) = \frac{P(B_i)P(C|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(C|B_j)}$$

评述 1. 在以上概率计算中,如能正确判断出有包含,互不相容,相互独立三种关系中的一种,则一般都有相应的计算比较简单的概率公式.切记在用概率公式时先应判断事件间的关系(包括,互不相容,相互独立),这样可大大提高计算速度与正确性!

2. 用全概率公式或贝叶斯公式时,必须检查 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是否构成完全事件组,即应满足 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 两两互不相容,而且 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. 如不满足这两个条件而机械地用全概率公式或贝叶斯公式,虽然看起来“漂亮”,但结果肯定是错的.

3. 凡证明概率不等式一定要用到公理 $0 \leq P(A) \leq 1$ 及概率单调性:如 $B \subset A$, 则 $P(B) \leq P(A)$.

§ 15 - 3 事件的独立性

一、事件的独立性

若 $P(AB) = P(A)P(B)$ (此时 $P(B|A) = P(B)$) 称 A, B 相互独立. 如果同时满足下列四个等式, 称三个事件 A, B, C 为相互独立的

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(CA) = P(C)P(A), \quad P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

一般地, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 称为相互独立, 须满足 $2^n - n - 1$ 类似的式子. 称事件序列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为相互独立的, 如果对任何 $n \geq 2, A_1, A_2, \dots, A_n$ 为相互独立的.

评述 事件 A, B, C 两两相互独立是指下列 3 个等式同时成立 $P(AB) = P(A)P(B), P(BC) = P(B)P(C), P(AC) = P(A)P(C)$. 所以 A, B, C 相互独立能推出 A, B, C 两两独立, 但反之不然.

二、事件独立性的判断

(1) 设 $P(B) > 0$, 则 $P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.

右边等式说明: 如果不管事件 B 发生与否, 对事件 A 发生的概率没有影响, 则 A 和 B 相互独立. 这点为在实际问题中分析、判断事件 A, B 是否独立带来极大方便.

(2) 如果随机试验 E_1, E_2 相互独立, A_1, A_2 分别是它们的一个事件, 则 A_1 和 A_2 相互独立.

(3) 如果随机变量 X, Y 相互独立, 则事件 $\{X \in G_1\}$ 和 $\{Y \in G_2\}$ 相互独立.

(4) 重要定理 如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 将它们分成没有公共事件的 k 个组, 每个组用事件运算产生一个新的事件, 则这 k 个新的事件相互独立.

三、正确使用事件的互不相容或相互独立是学好概率论的关键

事件 A, B 互不相容是指 A, B 不可能同时发生(与概率无关), 而事件 A, B 相互独立是指事件 A 发生与否对 B 发生的概率没有影响(必须 A, B 同时发生, 才能讨论它们的独立性), 为了加深对它们间关系的认识, 再证明下面的重要结论.

重要结论 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,

(1) 如果事件 A, B 相互独立, 则 A, B 不可能互不相容(或称 A, B 相容).

(2) 如果事件 A, B 互不相容, 则 A, B 不可能相互独立.

证明 (1) 设 A, B 相互独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B)$, 又已知 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 代入得 $P(AB) > 0$, 故 $AB \neq \emptyset$, 则 A, B 不可能互不相容.

(2) 留给读者自证.

评述 上例说明一个非常重要的概念: 在 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 的条件下, 事件 A, B 的互不相容和相互独立不可能同时成立! 也就是两个关系中至多只有一个成立! 为什么要加“!!”? 这是因为很多学生由于弄不清这两者间的关系, 乱用这两种关系, 其结果必然导致错误答案, 这也是一些学生学不好概率论的一个重要原因.

§ 15 - 4 独立重复试验

一、随机试验的独立性

将试验 E 重复进行 n 次,若每次试验结果出现的概率都不依赖于其它各次试验的结果,则称这 n 次试验是相互独立的.

评述 在概率、统计的计算与研究中,首先必须考虑分析的是独立性,包括随机试验相互独立,随机事件相互独立,随机变量相互独立(当然这三者的独立性是有紧密联系的).切记,拿到题目最重要的是分析有没有“独立性”,要养成一种习惯!

二、独立重复试验与二项分布

在 n 次独立重复试验中,如果每次试验结果只有两个: A 和 $\bar{A}$, 且 $P(A) = p (0 < p < 1)$, 则在 n 次独立重复试验中 A 发生 k 次的概率 $P_n(k)$ 为

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

这就是二项概率公式.

§ 15 - 5 典型例题分析与最新考试题型预测

例 1* 设事件 A, B, C 满足关系 $P(C|AB) = 1$, 则()

(A) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$

(B) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$

(C) $P(C) = P(AB)$

(D) $P(C) = P(A \cup B)$

解 由 $P(C|AB) = \frac{P(ABC)}{P(AB)} = 1$ 得

$P(C) \geq P(ABC) = P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$, 故应选(B).

例 2* 对任意两事件 A 和 B, 与 $A \cup B = B$ 不等价的是()

(A) $A \subset B$

(B) $\bar{B} \subset \bar{A}$

(C) $A\bar{B} = \emptyset$

(D) $\bar{A}\bar{B} = \emptyset$

解 由 § 15 - 1 中二、1④的 5 个等价关系知 $A \cup B = B$ 和 (A), (B), (C) 选项是等价的, 故应选(D). 或者这样想: 当 $A \subset B$ 时 $A \cup B = B$, 但由 $B - A \neq \emptyset$ 和 $B - A = \bar{A}\bar{B}$ 知此时 $\bar{A}\bar{B} \neq \emptyset$, 故应选(D).

例 3 A 表示事件“2 次射击中至多击中 1 次”, 则对应的事件 $\bar{A}$ 为()

(A) “2 次射击中至少击中 1 次”

(B) “2 次射击中至多不击中 1 次”

(C) “2 次射击都未击中”

(D) “2 次射击都击中”

分析 在讨论事件的关系或求事件的概率中引进随机变量是一种行之有效而且必须掌握的方法.

解 令 X 表示射击 2 次中击中的次数, 它的可能取值为 0, 1, 2, 所以

$$\bar{A} = \{2 \text{ 次射击中至多击中 1 次}\} = \{X \leq 1\} = \{X = 2\} = \{2 \text{ 次射击都击中}\}.$$

故应选(D).

例 4 以 A 表示事件“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 则其对应事件 $\bar{A}$ 为()

(A) “甲种产品滞销, 乙种产品畅销”

(B) “甲, 乙两种产品均畅销”

(C) “甲种产品滞销”

(D) “甲种产品滞销或乙种产品畅销”

分析 在讨论事件的关系或求事件的概率中引进一些“简单”的随机事件又是另一个必须掌握的方法.

解 令 B = “甲种产品畅销”, C = “乙种产品滞销”. 则

$$\bar{A} = \bar{BC} = \bar{B} \cup \bar{C} = \text{“甲种产品滞销或乙种产品畅销”}$$

故应选(D).

评述 在计算概率 $P(A)$ 时, 一个很大的技巧就是首先要考虑 $P(A)$ 和 $P(\bar{A})$ 哪一个容易求, 如 $P(\bar{A})$ 容易求出, 则 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ 就马上可求出. 而应用这个技巧的关键就在于要善于把用语言表达的事件的对立事件用语言表达出来. 上二个例题都是这方面的训练.

例 5* 设 A, B, C 是任意 3 个事件, 事件 D 表示“ A, B, C 中至少有 2 个事件发生”, 则下列事件中和事件 D 不相等的是()

(A) $\overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$

(B) $\Omega - (\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C})$

(C) $AB + BC + AC$

(D) $ABC + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$

解 显然 $D = AB + BC + AC$, 而 $\overline{AB + BC + AC} = (\overline{ABC} + \overline{ABC}) + (\overline{BCA} + \overline{BCA}) + (\overline{ACB} + \overline{ACB}) = \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$, 且 $\Omega - (\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}) = \overline{\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}} = (A + B) \cap (A + C) \cap (B + C) = (A + BC) \cap (B + C) = AB + BC + CA$, 故只剩下(A)中的事件和 D 不相等, 应选(A).

例 6 (1) 下列 4 个结论不正确的是()

(A) 如 A, B 互不相容, 则 $P(A + B) = P(A) + P(B)$

(B) 如 $A \supset B$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$

(C) 如 $A + B = \Omega$, 则 $P(A + B) = 1$

(D) 如 $A = \emptyset$, 则 A 和 B 不独立.

(2) 下列 4 个结论中正确的是()

(A) 如 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, 则 A, B 互不相容

(B) 如 $P(A - B) = P(A) - P(B)$, 则 $A \supset B$

(C) 如 $P(A \cup B) = 1$, 则 $A \cup B = \Omega$

(D) 如 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则 A, B 相互独立

解 (1) 因为(A), (B) 就是概率的计算公式, (C) 就是概率的第二个公理, 所以都对, 剩下只能选(D).

(2) 显然(D) 是对的, 所以选(D), 但要明确为什么(A), (B), (C) 的结论都是错的:

(A) 设 X 服从 $[0, 2]$ 上的均匀分布, 令 $A = \{0 < X \leq 0.5\}$, $B = \{0.5 \leq X \leq 1\}$, 则 $P\{A \cup B\} = P\{0 < X \leq 1\} = 0.5$, $P(A) + P(B) = P\{0 < X \leq 0.5\} + P\{0.5 \leq X \leq 1\} = 0.25 + 0.25 = 0.5$, 等式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 成立, 但 $AB = \{X = 0.5\} \neq \emptyset$, 即 A, B 不是互不相容. 细心的读者会发现, 反例的关键还是对连续型随机变量 X 有 $P\{X = a\} = 0$, 但 $\{X = a\} \neq \emptyset$.

(B) 设 X 服从 $[0, 2]$ 上的均匀分布, 取 $A = \{0 < X < 1\}$, $B = \{0.5 < X \leq 1\}$, 易证 $P(A - B) = P(A) - P(B)$, 但 A 不包含 B .

(C) 即 § 15 - 2 一中的评述中的基本概念(2) $P(A) = 1 \Rightarrow A = \Omega$.

评述 1. 由于数学的考研分数占 150 分, 其中选择题的分数由过去的 15 分增加到 24 分, 而由以往卷面分析可见选择题的得分率往往偏低, 所以现在正确理解概念, 几种概念之间的联系与区别, 掌握一批常见的反例, 争取在 24 分中多拿一些分, 对提高考试总分及过录取线都是至关重要的.

2. 比较上面两个例题选项中的(A), (B), (C) 结论与条件正好相反, 这就提醒我们: 在概率论中结论和条件反一反看来“好像”是对的, 实际上是错的. 本题说明, 由概率等式推事件关系的结论时, 特别容易犯错, 而反例经常用连续型随机变量.

3. 不可能事件 $\emptyset$ 很特殊, 它和任何事件 B 既是互不相容的, 又是相互独立的(读者自证).

例 7* 下列命题正确的是()

(A) 如 A, B 互不相容, 则 $\bar{A}, \bar{B}$ 也互不相容

(B) 如 A, B 互不相容, 则 $\bar{A}, \bar{B}$ 相互独立

(C) 如 A, B 构成完全事件组, 则 $\bar{A}, \bar{B}$ 也构成完全事件组

(D) 如 A, B, C 构成完全事件组, 则 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 也构成完全事件组

解 (A), (B) 显然错. 如 A, B 构成完全事件组, 即已如 $AB = \emptyset$, $A \cup B = \Omega$, 分别用对偶原理可得 $\overline{AB} = \overline{\emptyset}$ 和 $\overline{A \cup B} = \overline{\Omega}$, 此两式即 $\bar{A} \cup \bar{B} = \Omega$ 和 $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, 因此 $\bar{A}, \bar{B}$ 构成完全事件组, 故应选(C). 由 A, B, C 构成完全事件组推不出 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 两两互不相容, 故(D) 也是错的.

例 8 已知 A, B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$, 且 $P(A) = p$, 则 $P(B) =$ _____.

分析 由于计算 $P(AB)$ 在研究生考题的计算及证明推导中用得特别多,下面把计算 $P(AB)$ 按思路的次序再归纳一下:

第一步检查是否有包含关系:

如果 $B \subset A$, 则 $P(AB) = P(B)$.

第二步检验是否相互独立:

如果 A, B 相互独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B)$.

第三步检验是否互不相容.

如果 A, B 互不相容, 则 $P(AB) = 0$

第四步其它公式:

$$P(AB) = P(A)P(B|A), P(A) > 0$$

$$P(AB) = P(A) - P(\overline{A}B) = P(B) - P(\overline{B}A)$$

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

其中 $P(AB) = P(A) - P(\overline{A}B) = P(B) - P(\overline{B}A)$ 尤其有用, 而且要灵活应用. 为了训练应用此公式, 请填下面两个空: (1) $P(\overline{A}B) = P(\overline{B}) - P(\underline{\hspace{1cm}})$. (2) $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\underline{\hspace{1cm}})$. 答案应该是 (1) $\overline{B}A$; (2) $\overline{A}B$.

解 $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = P(\overline{A}B) + P(AB) = P(\overline{A}) = 1 - p$

例 9 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}$, 则事件 A, B, C 全不发生的概率为 .

分析 在求事件 A 的概率时, 首先要考虑的问题是它的对立事件 $\overline{A}$ 的概率是否容易求. 如 $P(\overline{A})$ 容易求, 则由 $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ 可很容易求得 $P(A)$. 这一点一定要养成习惯, 也是一种做得既快又准确的大技巧.

解 $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$$= 1 - (P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)) = \frac{3}{8}$$

其中 $P(ABC) = 0$ 是因为 $0 \leq P(ABC) \leq P(AB) = 0$.

评述 当考题的已知条件中有某事件的概率等于 0 或 1 时, 一定要把眼睛瞪大一点, 因为可以用概率的单调性 (如 $A \subset B$ 则 $P(A) \leq P(B)$) 及概率的性质 $1(0 \leq P(A) \leq 1)$ 及由 $a \leq x \leq a$ 得 $x = a$ 的方法求得另外一些事件的概率为 0 或 1.

例 10 (06 4 分) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0$, $P(A|B) = 1$, 则必有().

(A) $P(A \cup B) > P(A)$

(B) $P(A \cup B) > P(B)$

(C) $P(A \cup B) = P(A)$

(D) $P(A \cup B) = P(B)$

解 因为 $1 = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 所以 $P(AB) = P(B)$, 故 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(B) = P(A)$, 应选(C).

例 11* 已知 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.5$, $P(AB) = 0.3$, $P(BC) = 0.3$, $P(AC) = 0.2$, $P(ABC) = 0.1$, 则 $P(C|\overline{A}\overline{B}) = \underline{\hspace{1cm}}$.

分析 概率 $P(C|\overline{A}\overline{B})$ 中涉及的事件有 C , 又有对立事件生成的事件 $\overline{A}\overline{B}$. 本题的关键在于把涉及对立事件的概率计算转化为没有对立事件的概率计算. 常用的概率公式有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A), P(\overline{A}\overline{B}) = P(A) - P(AB), P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(A \cup B).$$

$$\begin{aligned} \text{解法一} \quad P(C|\overline{A}\overline{B}) &= \frac{P(\overline{A}\overline{B}C)}{P(\overline{A}\overline{B})} = \frac{P(C) - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})}{1 - P(A \cup B)} = \frac{P(C) - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})}{1 - P(A \cup B)} \\ &= \frac{P(C) - (P(CA) + P(CB) - P(ABC))}{1 - (P(A) + P(B) - P(AB))} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法二} \quad P(C|\overline{A}\overline{B}) &= 1 - P(\overline{C}|\overline{A}\overline{B}) = 1 - \frac{P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})}{P(\overline{A}\overline{B})} = 1 - \frac{1 - P(A \cup B \cup C)}{1 - P(A \cup B)} \\ &= 1 - \frac{1 - (P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC))}{1 - (P(A) + P(B) - P(AB))} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

评述 本题所用的思想方法或技巧经常用,可结合本章例12,第十八章例21再体会之.

例12* 试证等式 $P(AB + \bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}B + A\bar{B}) = [P(A) - P(\bar{A})] \cdot [P(B) - P(\bar{B})]$ 成立的充要条件是事件 A 与 B 相互独立.

分析 此等式中含有事件 $A, \bar{A}, B, \bar{B}$, 所以第一步用上题分析中所列3个公式,全化为只含有事件 A, B 的概率等式.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad & P(AB + \bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}B + A\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}B) - P(A\bar{B}) \\ & = P(AB) + (1 - P(A \cup B)) - (P(B) - P(AB)) - (P(A) - P(AB)) \\ & = 3P(AB) + (1 - P(A) - P(B) + P(AB)) - P(B) - P(A) \\ & = 4P(AB) + 1 - 2P(A) - 2P(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad & [P(A) - P(\bar{A})] \cdot [P(B) - P(\bar{B})] = (2P(A) - 1)(2P(B) - 1) \\ & = 4P(A)P(B) + 1 - 2P(A) - 2P(B) \end{aligned}$$

于是原等式化为 $P(AB) = P(A)P(B)$, 故原题等式成立的充要条件是事件 A 与 B 相互独立, 此属显然.

例13* 设甲、乙、丙3人英语四级考试合格的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$, 则事件“3人中恰好有2人合格”的概率为_____.

解 设 A, B, C 分别表示甲、乙、丙英语四级考试合格这三个事件, 显然 A, B, C 相互独立.

$$\begin{aligned} & P\{3 \text{人中恰好有} 2 \text{人合格}\} \\ & = P(ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \quad \text{三个事件两两互不相容.} \\ & = P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{B}C) \\ & = P(A)P(B)P(C) + P(\bar{A})P(B)P(C) + P(A)P(\bar{B})P(C) = 0.4 \end{aligned}$$

评述 把关心的事件分解成新引进的一些“简单事件”的和、积、对立事件, 而且马上分析引进的这些“简单事件”之间有没有包含、互不相容和相互独立这些关系, 然后用相应的概率计算公式求出所关心的事件的概率是计算概率的最基本思路, 而且是必须掌握的方法.

例14 有3个箱子, 第1个箱子中有4个黑球、1个白球, 第2个箱子中有3个黑球、3个白球, 第3个箱子中有3个黑球、5个白球. 现随机地取1个箱子, 再从这个箱子中取出1个球, 这个球为白球的概率等于_____, 已知取出的球是白球, 此球属于第2个箱子的概率为_____.

分析 首先必须弄清所求的两个概率是 $P(A)$, $P(AB)$ 还是 $P(B|A)$. 注意“随机地取1个箱子, 再从这个箱子中取出1个球”是随机试验还是随机事件, 应该是随机试验. “这个球是白球”是上述试验的一个可能结果, 是随机事件, 在解题中凡是随机事件为表达方便, 都需引进记号, 令 $A = \{\text{取出的球是白球}\}$, 所以第1个空格应为求 $P(A)$. “已知取出的球是白球”是事件, “此球属于第2个箱子”又是一个可能结果, 又需令 $B_2 = \{\text{取到第2个箱子}\}$. 有两个事件, 所求概率是 $P(AB_2)$ 还是 $P(B_2|A)$. 已知“取出的球是白球”, 此话等价于在事件“取出的球是白球”发生的条件下, 故第二空格应为条件概率 $P(B_2|A)$.

解 设 $A = \{\text{取出的球是白球}\}$, $B_i = \{\text{取到第} i \text{只箱子}\}$, $i = 1, 2, 3$, 显然 B_1, B_2, B_3 构成完全事件组, 由故全概率公式得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{53}{120} \end{aligned}$$

由贝叶斯公式

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{6}}{\frac{53}{120}} = \frac{20}{53}$$

例15* 袋中装有50枚正品硬币, 50枚次品硬币(次品硬币的两面都印成了国徽).

(1) 从袋中任取一枚硬币, 将它投掷3次, 已知每1次都出现国徽, 问这枚硬币是正品的概率为多少?

(2) 若在袋中任取1枚硬币, 将它投掷 k 次 ($k \geq 1$), 问至少出现1次国徽的概率为多少?

解 (1) 设 $A = \{\text{取到正品硬币}\}$ $B = \{\text{投掷 3 次都出现国徽}\}$ A 和 $\bar{A}$ 构成完全事件组 因此

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \times 1} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

(2) $P\{\text{至少出现一次国徽}\} = 1 - P\{\text{没出现国徽}\}$

$$= 1 - \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \times 0 \right] = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

例 16 * 若工厂的车床、钻床、磨床和刨床的台数之比为 9 : 3 : 2 : 1, 它们在一定时间内需要修理的概率之比为 1 : 2 : 3 : 1.

(1) 当有 1 台机床需要修理时, 问这台机床是车床的概率是多少?

(2) 某修理工值班, 若他能修好车床, 但不会修磨床和刨床, 而修好钻床仅有 50% 的把握. 当 1 台机床需要修理时, 问此修理工能修好的概率是多少?

分析 这是典型的应用全概率公式及贝叶斯公式的应用问题, 一定要注意检查 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是否构成完全事件组.

解 设 $B_1 = \{\text{机床是车床}\}$ $B_2 = \{\text{机床是钻床}\}$ $B_3 = \{\text{机床是磨床}\}$ $B_4 = \{\text{机床是刨床}\}$ $A = \{\text{一台机床需修理}\}$ $C = \{\text{修理工能修好}\}$ 则 B_1, B_2, B_3, B_4 两两互不相容, 且 $\bigcup_{i=1}^4 B_i = \Omega$, 即它们构成完全事件组.

$$(1) P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{\frac{9}{15} \times \frac{1}{7}}{\frac{9}{15} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{15} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{15} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{7}} = \frac{9}{22}.$$

$$\begin{aligned} (2) P(C|A) &= \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^4 P(B_i)P(C|B_i)}{\sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{\sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i)P(C|B_i)}{\sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i)} \\ &= \frac{\frac{9}{15} \times \frac{1}{7} \times 1 + \frac{3}{15} \times \frac{2}{7} \times 0.5 + \frac{2}{15} \times \frac{3}{7} \times 0 + \frac{1}{15} \times \frac{1}{7} \times 0}{\frac{9}{15} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{15} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{15} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{7}} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

评述 1. 全概率公式和贝叶斯公式由于它们在工程和理论上都有着广泛的应用, 所以这是一个重点内容, 在考研题中多次出现. 当求某事件的概率, 此事件和多个事件(原因)有关(它们构成完全事件组), 而又不能简单看成它们的和时, 则一般用全概率公式. 在试验结果已发生的条件下, 要问是由于何种可能原因(事件)引起的条件概率时, 一般都用贝叶斯公式.

2. 本题第(2)小题有点考综合能力, 只有把条件概率、乘法公式及全概率公式的推导全都搞清楚, 才能解出此题. 这个小题也可这样做

$$\begin{aligned} P(C|A) &= \sum_{i=1}^4 P(B_i C|A) = \sum_{i=1}^4 P(B_i|A)P(C|AB_i) \\ &= \frac{9}{22} \times 1 + \frac{6}{22} \times 0.5 + \frac{6}{22} \times 0 + \frac{1}{22} \times 0 = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

例 17 (98 9 分) 设有来自 3 个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表, 其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取 1 个地区的报名表, 从中先后抽出 2 份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p ;

(2) 已知后抽到的一份是男生表, 求先抽到的一份是女生表的概率 q .

解 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次抽到的报名表是男生表}\}$ $i = 1, 2$. $B_j = \{\text{抽出的是第 } j \text{ 地区的报名表}\}$ $j = 1, 2, 3$, 显然 B_1, B_2, B_3 构成完全事件组, 则

$$(1) p = P(\bar{A}_1) = \sum_{j=1}^3 P(B_j)P(\bar{A}_1 | B_j) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{25} = \frac{29}{90}$$

$$(2) q = P(\bar{A}_1 | A_2) = \frac{P(\bar{A}_1 A_2)}{P(A_2)} = \frac{\sum_{j=1}^3 P(B_j)P(\bar{A}_1 A_2 | B_j)}{\sum_{j=1}^3 P(B_j)P(\bar{A}_2 | B_j)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{15} \times \frac{8}{14} + \frac{5}{25} \times \frac{20}{24} \right)}{\frac{1}{3} \times \left(\frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{20}{25} \right)} = \frac{20}{61}$$

评述 注意上二个例中, 条件概率的求法中写法不同完全是由已知条件的书写格式所决定的. 象这类考题满分率很低, 望考生仔细体会并进行训练.

例 18 甲、乙两人独立地对同一目标射击 1 次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被击中, 则它是甲射中的概率为_____.

解 令 $A = \{\text{目标被击中}\}$, $B = \{\text{甲命中目标}\}$, $C = \{\text{乙命中目标}\}$, 则 B, C 独立, $B \subset A$, $A = B \cup C$, 故

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(B \cup C)} = \frac{P(B)}{P(B) + P(C) - P(BC)}$$

$$= \frac{P(B)}{P(B) + P(C) - P(B)P(C)} = \frac{0.6}{0.6 + 0.5 - 0.3} = 0.75$$

评述 有的同学用贝叶斯公式做: $P(B | A) = \frac{P(B)P(A | B)}{P(B)P(A | B) + P(C)P(A | C)}$ 也做出答案, 你估计答案是否也为 0.75? 为什么? 前面强调用全概率公式, 贝叶斯公式必须先检验 $B_1, \dots, B_n$ 是否构成完全事件组. 本题能否用贝叶斯公式就看事件 B, C 是否构成完全事件组, 注意题目中有“独立”(射击)两个字, 所以事件 B 和 C 相互独立, 故 B 和 C 不可能互不相容, 另一方面 $B \cup C$ 也不是必然事件 ($B \cup C \cup \bar{B}\bar{C} = \Omega$), 所以完全事件组的两个条件甚至连一个也不满足, 故形式上用“贝叶斯公式”必然导致错误.

例 19 抓阄模型: 盒子中有 $n - m$ 张空白券, m 张中奖券, 现有 n 个人依次每人去摸 1 张券, 则无论是有放回地摸, 还是无放回地摸, 任何一个人中奖的概率都是 $\frac{m}{n}$.

证明 如果是有放回地摸, 由古典概率马上可得第 i 个人中奖的概率为 $\frac{m}{n}$;

如果是无放回地摸, 用全概率公式及归纳法易证第 i 个人中奖的概率也为 $\frac{m}{n}$. (例如直接证第三个人中奖的概率为 $\frac{m}{n}$, 用全概率公式时完全事件组中有几个事件? 令 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个人中奖}\}$, 则完全事件组由 $B_1 = A_1 A_2$, $B_2 = A_1 \bar{A}_2$, $B_3 = \bar{A}_1 A_2$, $B_4 = \bar{A}_1 \bar{A}_2$ 这 4 个事件组成).

评述 抓阄模型有广泛应用.

1. 例如下列填空题 (分别为 93、97 年考研题) 用它马上可填上答案:

① 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品, 任意抽取 2 次, 每次抽 1 个, 抽出后不再放回, 则第 2 次抽出的是次品的概率为_____.

在本题中把正品比作空白券, 次品比作中奖券, 则所求概率即为第 2 个人中奖的概率, 马上得答案 $\frac{2}{12}$ $= \frac{1}{6}$. 由于是填空题, 不用写计算过程, 所以用抓阄模型马上可写出答案, 既快又正确.

② 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球, 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二个人取得黄球的概率是_____.

此题是把黄球比作中奖券, 白球比作空白券, 用抓阄模型马上可写出答案为 $\frac{20}{50} = 0.4$.

2. 在以后的计算题及证明题经常会引进离散型随机变量, 当讨论它们是否同分布时抓阄模型很能说明问题.

例如令 $X_i, i = 1, 2, 3$ 表示第 i 次从 $0, 1, 2, \dots, 9$ 十个数字中取出的一个数字, 当依次抽取是有放回时, 则显然 X_1, X_2, X_3 是相互独立且是同分布的 $P\{X_i = j\} = \frac{1}{10}, j = 0, 1, \dots, 9$; 当依次抽取是无放回时, X_1, X_2, X_3 不是相互独立的, 但它们却是同分布的 $P\{X_i = j\} = \frac{1}{10}, j = 0, 1, \dots, 9$. 为什么是同分布的? 或即例如: 为什么 $P\{X_1 = 3\} = P\{X_2 = 3\} = P\{X_3 = 3\}$? 如果把数字 3 看成中奖券, 其它 9 个数字看成空白券, 则第一个人中奖 (即 $\{X_1 = 3\}$ 发生), 第二个人, 第三个人中奖的 (即 $\{X_2 = 3\}, \{X_3 = 3\}$ 发生的) 概率都相等, 都为 $\frac{1}{10}$.

例 20 一个口袋中有 5 个外形完全相同的球, 编号分别为 $1, 2, 3, 4, 5$, 从中同时取出 3 个球. 求事件 $A = \{\text{取出 3 个球的最小号码为 } 1\}$ 的概率 β .

分析 古典型概率的计算方法有如下四种:

(1) 事件分解法 把事件 A 分解成新引进的“简单”事件的和、差、积、逆, 然后用相应的概率基本性质和基本公式求出 $P(A)$.

(2) 随机变量法 通过引入适当的离散型随机变量, 由随机变量的概率分布求出 $P(A)$.

(3) 样本点穷举 把样本空间 Ω 和事件 A 中所含的基本事件全写出来, 然后数一下各自的总数 n 和 m , 代入公式 $P(A) = m/n$ 计算 $P(A)$.

(4) 排列组合法 把每一个基本事件对应一个排列或组合, 然后用排列组合的方法计算出 n 和 m , 得 $P(A)$.

解法一 随机变量法 设第 i 个球上的号码分别为 $X_i, i = 1, 2, 3$, 由于是无放回的, 所以 X_1, X_2, X_3 不相互独立, 但却是同分布的 (用抓阄模型易说明), 且分布均为

$$P\{X_i = j\} = 0.2, j = 1, 2, 3, 4, 5; i = 1, 2, 3.$$

故

$$\begin{aligned}\beta &= P\{\min(X_1, X_2, X_3) = 1\} \\ &= P(\{X_1 = 1\} \cup \{X_2 = 1\} \cup \{X_3 = 1\}) \\ &= P\{X_1 = 1\} + P\{X_2 = 1\} + P\{X_3 = 1\} \\ &= 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.6\end{aligned}$$

由于是无放回抽取, 所以三个事件互不相容.

解法二 事件分解法 令 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取出球的号码为 } 1\}, i = 1, 2, 3, A_1, A_2, A_3$ 互不相容, 所以

$$\beta = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.6$$

解法三 样本点穷举法 把 3 个元素的一个组合作为一个基本事件, 则该试验的样本空间及事件 A 中的样本点分别为

$$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)\}.$$

$$A = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5)\}.$$

可以数得 $n = 10, m = 6$, 而且每个基本事件发生的可能性相同, 故 $\beta = P(A) = 6/10 = 0.6$

解法四 排列组合法 将取出的 3 个球的号码看成从 5 个元素中无放回地取出 3 个元素的组合, 则

$$\beta = \frac{C_1^1 C_4^2}{C_5^3} = 0.6$$

评述 1. 上述古典型概率的四种解法中, 解法三的样本点穷举法仅当样本空间中基本事件总数较小时是可行的 (在本题中甚至也是很方便的), 解法四的排列组合法需用到排列组合的一些计算技巧, 而且计算中特别要注意基本事件不能重复多次算或漏算. 由于考研题中自 87 年至今, 数一、三、四全加起来总共只出过一个古典型概率计算题 (见下例), 所以建议考生只要会做简单的古典型概率计算题, 做得出就做, 做不出就放掉不做. 万一真正考到这类题时, 完全可以用解法一的随机变量法或解法二的事件分解法, 而用这两种方法求各种事件的概率才是概率论必考的方法.

2. 超几何分布是一个考点,它本质上是用组合工具求无放回抽取类型的简单古典型概率问题.处理超几何分布时又可复习古典型概率计算问题.注意解四实际上是超几何分布解法,见§16-2二项分布中 $N=5, M=4$ (1号球看成黑球,其余看成白球) $n=3, k=1$.

3. 本题的解三和解四都是把取出的3个球的号码看成一个3-组合.也可把一次取出的3个球看成依次无放回地抽取3个球,把依次取出的3个球的号码看成一个3-排列,用排列的工具做,答案完全相同.

例21 已知事件 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 相互独立,且 $P(A_i) = a_i \neq 0, i=1, 2, \dots, 5$ 求

(1) $P(A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_2 \bar{A}_3)$; (2) $P(A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup A_4 A_5)$.

分析 本题在下面运算过程中主要要思考以下几个问题:

(1) $A_1 A_3, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_2 \bar{A}_3$ 三个事件是两两互不相容还是相互独立?为什么?

(2) $A_1 A_3, \bar{A}_1 A_2, A_4 A_5$ 三个事件是否两两互不相容或相互独立?为什么?

(3) $A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2$ 和 $A_4 A_5$ 是否互不相容或相互独立?为什么?

(4)计算 $P(A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2)$ 用 $1 - P(\overline{A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2})$ 还是用 $P(\overline{A_1 A_3} \cap \overline{\bar{A}_1 A_2})$ 方便?为什么?

解 (1) $P(A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(A_1 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_2 \bar{A}_3)$
 $= P(A_1)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2) + P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$
 $= a_1 a_3 + (1 - a_1)a_2 + (1 - a_2)(1 - a_3)$

(2) $P(A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup A_4 A_5) = 1 - P(\overline{A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2})P(\overline{A_4 A_5})$
 $= 1 - (1 - P(A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2))(1 - P(A_4 A_5))$
 $= 1 - (1 - (P(A_1 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2)))(1 - P(A_4)P(A_5))$
 $= 1 - (1 - a_1 a_3 - (1 - a_1)a_2)(1 - a_4 a_5)$

评述 下面回答分析中提出的问题:

1. 因为 A_1 和 $\bar{A}_1$ 互不相容,所以 $A_1 A_3$ 和 $\bar{A}_1 A_2$ 互不相容.同理 $\bar{A}_1 A_2$ 和 $\bar{A}_2 \bar{A}_3$ 互不相容是因为 A_2 和 $\bar{A}_2$ 互不相容.同理读者自己可说明 $\bar{A}_2 \bar{A}_3$ 和 $A_1 A_3$ 互不相容.故 $A_1 A_3, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_2 \bar{A}_3$ 是两两互不相容的.为什么这3个事件不是相互独立的?这是因为 $P(A_1 A_3) > 0, P(\bar{A}_1 A_2) > 0$,由上面已判断 $A_1 A_3$ 和 $\bar{A}_1 A_2$ 是互不相容的,所以它们不可能相互独立,其余可依此类推.

2. 因为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 相互独立,所以由§15-3二中判别事件相互独立的重要定理知, $A_1 A_3$ 和 $A_4 A_5$ 是相互独立的.故 $A_1 A_3$ 和 $A_4 A_5$ 不可能互不相容.从而 $A_1 A_3, \bar{A}_1 A_2, A_4 A_5$ 不是两两互不相容的.又因为 $A_1 A_3$ 和 $\bar{A}_1 A_2$ 互不相容,因此它们不可能相互独立.故 $A_1 A_3, \bar{A}_1 A_2, A_4 A_5$ 也不是相互独立的.

3. 既然 $A_1 A_3$ 和 $\bar{A}_1 A_2$ 不独立,把它们用和运算得到一个新事件 $A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2$,它是和 $A_4 A_5$ 相互独立的,这可用§15-3二提到的重要定理解释:它们是由没公共事件的两个组(A_1, A_2, A_3)和(A_4, A_5)产生的2个新的随机事件.

4. 用 $P(A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2) = 1 - P(\overline{A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2})$ 计算是因为等式右端概率中的事件运算为“ $\cup$ ”,而其中事件 $A_1 A_3$ 和 $\bar{A}_1 A_2$ 互不相容,所以此概率可用概率可加性简化计算,而不用 $P(\overline{A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2}) = P(\overline{A_1 A_3} \cap \overline{\bar{A}_1 A_2})$ 计算是因为右端概率中的事件运算为“ $\cap$ ”,但 $\overline{A_1 A_3}$ 和 $\overline{\bar{A}_1 A_2}$ 不相互独立(因为这两个事件中有公共事件 A_1),所以往下计算更繁.本问题关键在于在概率计算中,如涉及事件是互不相容的,则应尽可能保留“ $\cup$ ”运算,如涉及事件是相互独立的,则应尽可能保留“ $\cap$ ”运算,保留“ $\cup$ ”运算也可以.

5. 本题目的是训练正确判断事件的互不相容和相互独立,如果纯粹为了求概率(1),也可直接用加法公式: $P(A_1 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_2 \bar{A}_3)$

$$= P(A_1 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_2 \bar{A}_3) - P(A_1 A_3 \bar{A}_1 A_2) - P(A_1 A_3 \bar{A}_2 \bar{A}_3) - P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(A_1 A_3 \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$$

$$= a_1 a_3 + (1 - a_1)a_2 + (1 - a_2)(1 - a_3) - 0 - 0 - 0 + 0.$$

也很简单,原因或关键在于每一项都是相互独立随机事件的积事件的概率.

例 22* 设事件 A, C 相互独立, 事件 B, C 也相互独立, 且 A, B 互不相容, 则()

- (A) $A \cup B$ 和 $\bar{C}$ 相互独立 (B) $A \cup B$ 和 C 互不相容
(C) $A \cup B$ 和 $\bar{C}$ 不独立 (D) $A \cup B$ 和 $\bar{C}$ 相互对立

解 $P((A \cup B) \cap \bar{C}) = P(\overline{AC} \cup \overline{BC}) = P(\overline{AC}) + P(\overline{BC}) = P(A)P(\bar{C}) + P(B)P(\bar{C})$
 $= (P(A) + P(B))P(\bar{C}) = P(A \cup B)P(\bar{C})$

故 $A \cup B$ 和 $\bar{C}$ 相互独立, 应选(A).

例 23 (00 3 分) 设 A, B, C 三个事件两两独立, 则 A, B, C 相互独立的充分必要条件是()

- (A) A 与 BC 独立 (B) AB 与 $A \cup C$ 独立
(C) AB 与 AC 独立 (D) $A \cup B$ 和 $A \cup C$ 独立

解 已知 A, B, C 两两独立, 所以 A, B, C 相互独立的充分必要条件中前 3 个等式成立, 剩下问题所选的项应能推出第 4 个等式 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 成立.

如果 A 与 BC 独立, 则 $P(ABC) = P(A(BC)) = P(A)P(BC) = P(A)P(B)P(C)$ (最后一个等号成立是因为已知 B, C 独立), 故应选(A).

例 24 设事件 A, B 相互独立, 且 $P(A) > 0$, 证明 3 个事件 $A, B, A \cup B$ 相互独立的充要条件是 $P(A \cup B) = 1$.

证明 充分性: 已知 $P(A \cup B) = 1$. 又知 A, B 独立, 所以

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap (A \cup B)) = P(A) = P(A) \cdot P(A \cup B)$$

$$P(B \cap (A \cup B)) = P(B) = P(B) \cdot P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B \cap (A \cup B)) = P(AB) = P(A)P(B) = P(A)P(B)P(A \cup B).$$

四个等式均成立, 故 $A, B, A \cup B$ 三个事件相互独立.

必要性: 已知 $A, B, A \cup B$ 相互独立, 则由三事件独立及 $AB(A \cup B) = AB$ 可分别得下两等式

$$\begin{cases} P(AB(A \cup B)) = P(A)P(B)P(A \cup B), \\ P(AB(A \cup B)) = P(AB) = P(A)P(B) \end{cases}$$

得 $P(A \cup B) = 1$.

例 25 (02 8 分) 设 A, B 是任意二事件, 其中 A 的概率不等于 0 和 1, 证明

$$P(B|A) = P(B|\bar{A})$$

是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

证明 由题设知 $P(A) \neq 0, P(\bar{A}) \neq 0$, 所以 $P(B|A)$ 和 $P(B|\bar{A})$ 都存在.

(1) 必要性 已知 A 与 B 独立, 所以 $\bar{A}$ 与 B 也独立, 从而有 $P(B|A) = P(B), P(B|\bar{A}) = P(B)$, 故 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$.

(2) 充分性 已知 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 即

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)}$$

可得

$$P(AB)[1 - P(A)] = P(A)P(B) - P(A)P(AB)$$

化简得

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

因此 A 和 B 独立.

评述 这个考题和下列 94 年、98 年的考题完全类似:

① 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|\bar{B}) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 则

- (A) 事件 A 和 B 互不相容 (B) 事件 A 和 B 互相对立
(C) 事件 A 和 B 互不独立 (D) 事件 A 和 B 相互独立 答:(D)

② 设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0, P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 则必有

- (A) $P(A|\bar{B}) = P(\bar{A}|\bar{B})$ (B) $P(A|\bar{B}) \neq P(\bar{A}|\bar{B})$
(C) $P(AB) = P(A)P(B)$ (D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$ 答:(C)

同一个题目可以多种面目出现, 说明凡是考过的考题必须要仔细钻研真正的会做, 才能对付题目的多种变化.

例 26* (03 4 分) 对于任意二事件 A 和 B , 则()

(A) 若 $AB \neq \emptyset$ 则 A, B 一定独立.

(B) 若 $AB \neq \emptyset$ 则 A, B 可能独立.

(C) 若 $AB = \emptyset$ 则 A, B 一定独立.

(D) 若 $AB = \emptyset$ 则 A, B 一定不独立.

解 当 $AB \neq \emptyset$ 时 $P(AB) > 0$ 如果 $P(A) = 0$ 则 $P(AB) \neq P(A)P(B)$ 故 A, B 不独立 (即(A)不成立); 又如果 $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ 时, 有可能使 $P(AB) = P(A)P(B)$ 成立, 即有可能 A, B 是独立的, 故应选(B).

评述 注意由 $AB = \emptyset$ 可能推出 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$ 此时 $P(AB) = 0 = P(A)P(B)$ 则 A, B 独立, 所以(D)不成立. 但小心, 由 $AB = \emptyset$ 也可能 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$ 此时 $P(AB) \neq P(A)P(B)$, 即 A, B 不独立, 所以(C)不成立.

例 27* (03 4分) 将一枚硬币独立地掷两次, 引进事件: $A_1 = \{\text{掷第一次出现正面}\}, A_2 = \{\text{掷第二次出现正面}\}, A_3 = \{\text{正、反面各出现一次}\}, A_4 = \{\text{正面出现两次}\}$, 则事件()

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立.

(B) A_2, A_3, A_4 相互独立.

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立

(D) A_2, A_3, A_4 两两独立.

解 已知 A_1, A_2 独立, 且 $A_3 = \overline{A_1}A_2 \cup A_1\overline{A_2}, A_4 = A_1A_2$, 因此 $P(A_2A_3) = P(A_2(\overline{A_1}A_2 \cup A_1\overline{A_2})) = P(\overline{A_1}A_2) = P(\overline{A_1})(A_2) = \frac{1}{4} P(A_2) = \frac{1}{2} P(A_3) = P(\overline{A_1}A_2 \cup A_1\overline{A_2}) = P(\overline{A_1}A_2) + P(A_1\overline{A_2}) = P(\overline{A_1})P(A_2) + P(A_1)P(\overline{A_2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 故 $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$ 成立, 即 A_2, A_3 相互独立. 同理可证 A_1, A_3 也独立, 所以 A_1, A_2, A_3 两两独立. 另一方面 $P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2(\overline{A_1}A_2 \cup A_1\overline{A_2})) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, 即 A_1, A_2, A_3 不是相互独立, 于是应选(C).

评述 此题的选择不是直接从概念分析可看出的, 而是根据实际问题通过概率计算才能正确的选择, 此题是具有综合性的好题.

例 28* 设事件 A, B 相互独立, $AB \subset D, \overline{AB} \subset \overline{D}$, 证明 $P(AD) \geq P(A)P(D)$

证明 已知 $\overline{AB} \subset \overline{D}$ 可得 $D \subset A \cup B$, 进而可得 $\overline{BD} \subset (A \cup B)\overline{B} = A\overline{B}$, 注意还已知 $AB \subset D$.

$$\begin{aligned} P(AD) &= P(ADB) + P(ADB\overline{B}) = P(AB) + P(\overline{BD}) = P(A)P(B) + P(\overline{BD}) \\ &\geq P(A)P(BD) + P(A)P(\overline{BD}) = P(A)P(D) \end{aligned}$$

评述 证明概率不等式的过程中, 凡等号肯定是用概率的公式, 凡不等号, 必然要讨论包含关系. 如 $A \subset B$ 则 $P(A) \leq P(B)$. 除上面不等式外, 还要用另一个不等式 $0 \leq P(A) \leq 1$. 本题中的不等号处就用到了上述二个不等式.

预测·强化训练十五

1. 设事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则()

(A) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$

(B) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$

(C) $P(C) = P(AB)$

(D) $P(C) = P(A \cup B)$

2. 下列结论正确的是()

(A) 如 $P(AB) = 0$, 则事件 A 和 B 互不相容

(B) 如 $P(A) = 1, P(B) = 1$, 则 A 和 B 相互独立

(C) 如 $P(A) = 1, P(B) = 1$, 则 $P(AB) = 1$ 不一定成立

(D) 如 $P(A) = 1$, 则 A 是必然事件

3. 设 A, B, C 是任意 3 个事件, 则下列等式成立的是()

(A) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$

(B) $(A \cup B) - A = B$

(C) $(A \cup B)C = (\overline{AC}) \cup (\overline{BC})$

(D) $(A - B) \cup (B - A) = AB \cup \overline{AB}$

4*. 下列结论不正确的是()

(A) 如 $P(A) = 0$, 则事件 A 和任何事件 B 相互独立

(B) 如 X 是只取一个值 C 的随机变量, 即 $X \equiv C$, C 为常数, 则随机变量 X 和任何随机变量相互独立

(C) 如 $P(A) = 1$, 则事件 A 和任何事件 B 相互独立

(D) 如 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, 则事件 A 和 B 互不相容

5*. 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$

(1) 当 A, B 满足条件_____时, $P(A \cup B)$ 取得最小值_____;

(2) 当 A, B 满足条件_____时, $P(A \cup B)$ 取得最大值_____;

(3) 当 A, B 满足条件_____时, $P(AB)$ 取得最小值_____;

(4) 当 A, B 满足条件_____时, $P(AB)$ 取得最大值_____.

6. 已知 $P(AB) = \frac{1}{5}$, $P(\bar{B} | A) = \frac{1}{3}$, $P(B | \bar{A}) = \frac{4}{7}$, 则 $P(A) =$ _____, $P(B) =$ _____.

7. (00 3 分) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ _____.

8. 3 名射手 1 次射击的命中率分别为 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$, 如果他们同时各打 1 发子弹, 结果有 2 发命中目标, 则第 3 名射手没射中的概率为_____.

9. 设甲袋中装有 6 个红球, 3 个白球, 乙袋中装有 5 个红球, 2 个白球. 今在两袋中各任取 1 球, 交换后放入对方袋中, 再从乙袋中任取 1 球, 则该球为红球的概率为_____.

10. 箱中有 n 个球, 编号为 1, 2, ..., n, 先从箱中任取 1 球, 如果该球不是 1 号球, 就放回箱中, 如果该球是 1 号球, 就不放回箱中. 然后再摸 1 次, 则第 2 次取 2 号球的概率为_____.

11. 有一份考卷共有 50 个选择题, 每个选择题有 4 个选项, 其中只有 1 个选项是正确的. 每题 2 分, 共 100 分. 若某考生对考试内容完全不懂, 他对每个题都只能随机地进行选项, 则他能及格的概率为_____.

12. 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取 2 件, 已知 2 件中有 1 件是不合格品, 则另 1 件也是不合格品的概率 $p =$ _____.

13. 假定报考研究生要依次进行四次考试, 如果至少有 3 次及格即可考取. 某学生第一次考试及格的概率为 p, 当他前一次考试及格时, 下次考试及格的概率仍为 p, 当他前一次不及格时, 下一次及格的概率是 $\frac{p}{2}$, 则他考取研究生的概率为_____.

14. 在 1, 2, 3, 4 四个数中可重复地取 2 个数. 求事件 $A = \{\text{在取出的 2 个数中一个数是另一个数的 2 倍}\}$ 的概率 (用四种方法各解一次).

15. 某射击小组共有 12 名射手, 其中一级射手 2 人, 二级射手 7 人, 三级射手 3 人. 一、二、三级射手能通过选拔进入决赛的概率分别是 0.9, 0.7, 0.5.

(1) 求在小组内任选一名射手, 该射手能通过选拔赛进入决赛的概率;

(2) 若已知一名射手进入决赛, 问该射手是一级射手的概率是多少?

16. 证明下列等式

(1) $AB \cup (A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

(2) $(A - B) \cup (B - A) = (\overline{AB} - \overline{AB}) \cup (\overline{AB} - \overline{AB})$.

17*. 已知事件 A, B, C 相互独立, 证明 A 和 B - C 相互独立.

18*. 证明 (1) 若 $P(A | B) \geq P(A | \bar{B})$, 则 $P(B | A) \geq P(B | \bar{A})$

(2) 若 $P(A | C) \geq P(B | C)$, $P(A | \bar{C}) \geq P(B | \bar{C})$, 则 $P(A) \geq P(B)$.

简明解答

1. (B). 已知 $AB \subset C$, 所以

$$P(C) \geq P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

2. (B). $1 \geq P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 1$, 所以 $P(AB) = 1$, 等式 $P(AB) =$

$P(A)P(B)$ 成立, 故 A, B 相互独立.

3. (D). $\overline{(A - B) \cup (B - A)} = \overline{AB \cup BA} = \overline{AB} \cap \overline{BA} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) = \overline{AB} \cup \overline{AB}$
4. (D). 由加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 知 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 等价于 $P(AB) = 0$, 而由 $P(AB) = 0$ 不能推出 $AB = \emptyset$, 即不能推出 A, B 互不相容.

评述 为了帮助考生弄清(A), (B), (C) 结论都是对的, 我们来证一下为什么是正确的, 以后可能会出这类证明题.

(A) 因为 $0 \leq P(AB) \leq P(A)$, 又由 $P(A) = 0$, 可得 $P(AB) = 0$, 因此等式 $P(AB) = P(A)P(B)$ 成立. (都为零), 故 A, B 相互独立.

(B) 对任何 y 和满足 $x \geq C$ 的任何 x 有 $P\{X \leq x\} = P(\Omega) = 1$, 因此

$$\begin{aligned} P\{X \leq x, Y \leq y\} &= P(\Omega \cap \{Y \leq y\}) = P\{Y \leq y\} \\ &= 1 \cdot P\{Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}. \end{aligned}$$

而对任何 y 和满足 $x < C$ 的任何 x 有 $P\{X \leq x\} = P(\emptyset) = 0$,

$$\begin{aligned} \text{因此 } P\{X \leq x, Y \leq y\} &= P(\emptyset \cap \{Y \leq y\}) = P(\emptyset) = 0 \\ &= 0 \cdot P\{Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}. \end{aligned}$$

故对一切 x, y 都有 $P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$, 即 $X \equiv C$ 和任何随机变量 Y 相互独立.

(C) 由 $P(A) = 1$ 得 $P(\bar{A}) = 0$, 因此由

$$0 \leq P(\bar{A}\bar{B}) \leq P(\bar{A}) = 0$$

得 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$, 即等式 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$ 成立, 故 $\bar{A}, \bar{B}$ 相互独立, 进而可得 A, B 相互独立.

5. (1) $A \subset B$ 0.7 (2) $A \cup B = \Omega$ 1 (3) $A \cup B = \Omega$ 0.3;
- (4) $A \subset B$ 0.6; 由加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 知当 $A \subset B$ 时, $P(A \cup B)$ 取得最小值 0.7, 而当 $A \cup B = \Omega$ 时, $P(A \cup B) = 1$ 是最大值. 由加法公式可得 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, 当 $A \cup B = \Omega$ 时, $P(AB)$ 取得最小值 0.3, 当 $A \subset B$ 时, $P(AB) = P(A) = 0.6$ 为最大值.

评述 由于 $P(A) = 0.6 \neq P(B) = 0.7$, 所以 $AB \neq \emptyset$ (可用反证法), 故 $P(AB)$ 的最小值不可能为零.

6. $\frac{3}{10}, \frac{3}{5}$. 由 $\frac{1}{3} = P(\bar{B} | A) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = 1 - \frac{1}{P(A)} \times \frac{1}{5}$ 解得 $P(A) = \frac{3}{10}$, 由 $\frac{4}{7} = P(B | \bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{10}}$ 解得 $P(B) = \frac{3}{5}$.

7. $\frac{2}{3}$. 解法一 由下列方程组可解得 $P(A) = \frac{2}{3}$

$$\begin{cases} P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{9} \\ P(\bar{A}B) = P(\bar{A}\bar{B}) \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (1 - P(A))(1 - P(B)) = \frac{1}{9} \\ P(A)(1 - P(\bar{B})) = (1 - P(A))P(B). \end{cases}$$

解法二 由 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}\bar{B})$, 即 $P(\bar{B}) - P(\bar{B}\bar{A}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}\bar{B})$, 得 $P(\bar{A}) = P(\bar{B})$ 代入 $P(\bar{A}\bar{B})$

$$= \frac{1}{9} \text{ 即 } P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{1}{9} \text{ 可得 } P(\bar{A}) = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } P(A) = \frac{2}{3}.$$

8. $\frac{6}{11}$. 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 名射手命中目标}\} i = 1, 2, 3, B = \{\text{有二发命中目标}\}$, 则

$$P(\bar{A}_3 | B) = \frac{P(\bar{A}_3 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)}{P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(A_1 A_2 \bar{A}_3)} = \frac{6}{11}.$$

9. $\frac{104}{147}$. 令 $A_i = \{\text{第一次从甲袋中取到红球}\}, B_i = \{\text{第 } i \text{ 次从乙袋中取到红球}\} i = 1, 2$, 则 $A_1 B_1, \bar{A}_1 \bar{B}_1, \bar{A}_1 B_1, \bar{A}_1 \bar{B}_1$ 构成完全事件组, 故

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1 B_1)P(B_2 | A_1 B_1) + P(\bar{A}_1 \bar{B}_1)P(B_2 | \bar{A}_1 \bar{B}_1) \\ &\quad + P(\bar{A}_1 B_1)P(B_2 | \bar{A}_1 B_1) + P(A_1 \bar{B}_1)P(B_2 | A_1 \bar{B}_1) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{6}{9} \times \frac{5}{7}\right) \times \frac{5}{7} + \left(\frac{6}{9} \times \frac{2}{7}\right) \times \frac{6}{7} + \left(\frac{3}{9} \times \frac{5}{7}\right) \times \frac{4}{7} + \left(\frac{3}{9} \times \frac{2}{7}\right) \times \frac{5}{7} = \frac{104}{147}$$

10. $\frac{n^2 - n + 1}{n^2(n-1)}$. 令 $A = \{\text{第一次摸到 1 号球}\}$, $B = \{\text{第二次摸到 2 号球}\}$,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} + \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2(n-1)}. \end{aligned}$$

11. $\sum_{i=30}^{50} C_{50}^i (0.25)^i (0.75)^{50-i} = 10^{-12}$. 设 X 表示在 50 个题中选对的题数, 则 $X \sim B(50, 0.25)$

$$P\{\text{及格}\} = \sum_{i=30}^{50} P\{X=i\} = \sum_{i=30}^{50} C_{50}^i (0.25)^i (0.75)^{50-i}.$$

12. 0.2.

分析 这道题的难点在于如何引进随机事件能把这个条件概率写清楚.

解法一 令 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取出的那件是不合格品}\}$, $i = 1, 2$, 则

$$p = P(A_1 A_2 | A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1 A_2 (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 A_2)}{1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2)} = \frac{P_4^2 / P_{10}^2}{1 - P_6^2 / P_{10}^2} = 0.2$$

解法二 令 $A = \{\text{2 件中至少有 1 件是不合格品}\}$, $B = \{\text{2 件都是不合格品}\}$, 则

$$p = P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(B)}{1 - P(\bar{A})} = 0.2$$

13. $\frac{5}{2}p^3 - \frac{3}{2}p^4$. 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次考试及格}\}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} P\{\text{考取}\} &= P(\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4) + P(A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4) + P(A_1 A_2 A_3) \\ &= P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 A_2)P(A_4 | \bar{A}_1 A_2 A_3) + (\dots) + (\dots) + (\dots) \\ &= (1-p) \times \frac{p}{2} \times p \times p + p \times (1-p) \times \frac{p}{2} \times p + p \times p \times (1-p) \times \frac{p}{2} + p \times p \times p \\ &= \frac{5}{2}p^3 - \frac{3}{2}p^4. \end{aligned}$$

14. 解法一 样本点穷举法 把 2 个元素的排列作为一个基本事件, 则

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2)\}.$$

数得 $n = 16$, $m = 4$. 由于每个基本事件发生的可能性相等, 故

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{16} = 0.25$$

解法二 随机变量法 令 X_1 和 X_2 表示所取出的 2 个数, 由于是有放回可重复地取, 所以 X_1 和 X_2 独立

同分布, 且 $P\{X_i = j\} = \frac{1}{4}$, $j = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, 2$. 故

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{X_1 = 2X_2\} \cup \{X_2 = 2X_1\}) = P\{X_1 = 2X_2\} + P\{X_2 = 2X_1\} \\ &= P(\{X_2 = 1, X_1 = 2\} \cup \{X_2 = 2, X_1 = 4\}) + P(\{X_1 = 1, X_2 = 2\} \cup \{X_1 = 2, X_2 = 4\}) \\ &= P\{X_2 = 1, X_1 = 2\} + P\{X_2 = 2, X_1 = 4\} + P\{X_1 = 1, X_2 = 2\} + P\{X_1 = 2, X_2 = 4\} \\ &= P\{X_2 = 1\}P\{X_1 = 2\} + P\{X_2 = 2\}P\{X_1 = 4\} + P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 2\} + \\ &\quad P\{X_1 = 2\}P\{X_2 = 4\} \\ &= 4 \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = 0.25 \end{aligned}$$

解法三 事件分解法 命 $A_i^j = \{\text{第 } i \text{ 次取出的数是 } j\}$, $j = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, 2$. 则

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1^1 A_2^2 \cup A_2^1 A_1^2 \cup A_1^2 A_2^1 \cup A_2^2 A_1^1) \\ &= P(A_1^1 A_2^2) + P(A_2^1 A_1^2) + P(A_1^2 A_2^1) + P(A_2^2 A_1^1) \\ &= P(A_1^1)P(A_2^2) + P(A_2^1)P(A_1^2) + P(A_1^2)P(A_2^1) + P(A_2^2)P(A_1^1) \\ &= 4 \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = 0.25 \end{aligned}$$

解法四 排列组合法 把先后取出的2个数看作一个2-排列,注意本题是(可放回)有重复元素的排列,故

$$P(A) = \frac{2 \cdot P_2^2}{2^4} = 0.25$$

15. 设 $A_i = \{\text{射手是 } i \text{ 级射手}\}$ $i = 1, 2, 3$. A_1, A_2, A_3 构成完全事件组. $B = \{\text{一名选手能进入决赛}\}$.

$$(1) P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{2}{12} \times 0.9 + \frac{7}{12} \times 0.7 + \frac{3}{12} \times 0.5 = \frac{41}{60}.$$

$$(2) P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{2}{12} \times 0.9 / \frac{41}{60} = \frac{9}{41}.$$

16. (1) $AB \cup (A - B) \cup (B - A) = AB \cup \overline{AB} \cup \overline{BA} = (AB \cup \overline{AB}) \cup (\overline{BA} \cup BA) = A \cup B$.

$$(2) (\overline{AB} - \overline{AB}) \cup (\overline{AB} - \overline{AB}) = ((\overline{A} \cup B) \cap \overline{AB}) \cup ((A \cup \overline{B}) \cap \overline{AB}) \\ = \overline{AB} \cup \overline{AB} = (B - A) \cup (A - B).$$

17. $P(A \cap (B - C)) = P(ABC) = P(AB) - P(ABC)$
 $= P(A)P(B) - P(A)P(B)P(C) = P(A)(P(B) - P(BC))$
 $= P(A)P(\overline{BC}) = P(A)P(B - C)$

故 A 和 B - C 相互独立.

18. (1) 已知 $P(A|B) \geq P(A|\overline{B}) \Leftrightarrow P(\overline{B})P(B)P(A|B) \geq P(B)P(\overline{B})P(A|\overline{B}) \Leftrightarrow P(AB)P(\overline{B}) \geq P(B)P(A\overline{B})$
 $\Leftrightarrow P(AB)(1 - P(B)) \geq P(B)(P(A) - P(AB)) \Leftrightarrow P(AB) \geq P(A)P(B).$

要证 $P(B|A) \geq P(B|\overline{A}) \Leftrightarrow P(\overline{A})P(A)P(B|A) \geq P(A)P(\overline{A})P(B|\overline{A}) \Leftrightarrow P(AB)P(\overline{A}) \geq P(A)P(\overline{AB}) \Leftrightarrow P(AB)(1 - P(A)) \geq P(A)(P(B) - P(AB))$

利用由已知推得的 $P(AB) \geq P(A)P(B)$ 可得

$$P(AB)(1 - P(A)) = P(AB) - P(AB)P(A) \\ \geq P(A)P(B) - P(A)P(AB) = P(A)(P(B) - P(AB)).$$

故不等式 $P(B|A) \geq P(B|\overline{A})$ 成立.

- (2) 根据条件概率定义,由 $P(A|C) \geq P(B|C)$ 可得 $P(AC) \geq P(BC)$,由 $P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C})$ 得 $P(A\overline{C}) \geq P(B\overline{C})$,因此

$$P(A) = P(AC) + P(A\overline{C}) \geq P(BC) + P(B\overline{C}) = P(B).$$

第十六章 随机变量及其概率分布

考试要求

1. 理解随机变量及其概率分布的概念,理解分布函数($F(x) = P\{X \leq x\}$)的概念及性质,会计算与随机变量相联系的事件的概率.
2. 理解离散型随机变量及其概率分布的概念,掌握 0-1 分布、二项分布、超几何分布、泊松(Poisson)分布及其应用.
3. 了解泊松定理的结论和应用条件,会用泊松分布近似表示二项分布.
4. 理解连续型随机变量及其概率密度的概念,掌握正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 、均匀分布、指数分布(概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{若 } x > 0 \\ 0 & \text{若 } x \leq 0 \end{cases}$) 及其应用.
5. 会根据自变量的概率分布求其简单函数的概率分布.

考试要点分析与题型预测

概率论中的一个重点是在各种题目中善于引进随机变量,利用随机变量的分布求出这个用随机变量表示的事件的概率或该随机变量的数字特征是概率论的重点内容.

正确理解和识别分布函数和概率密度,并熟练掌握它们之间的关系经常出现在选择题中(见例 1 ~ 例 4)

善于建立离散型随机变量的分布律及利用二项分布等重要分布求事件的概率是考研题中的一个重要考点.尤其在考研题中引入的离散型随机变量绝大部分是二项分布,二项分布的随机变量和连续型随机变量的综合是填空题或计算题中常见的题型(见例 14,例 15).

求连续型随机变量以及它的函数的概率密度是个几乎必考的题型,必须熟练(见例 20,例 21).

正态随机变量由于它在理论和实际中有广泛应用,所以与正态随机变量有关的概率计算以及它的良好性质的应用在考研题中是重中之重(见例 16 ~ 例 18).

§ 16 - 1 随机变量及其分布

一、随机变量的概念

设 E 是随机试验,它的样本空间是 $\Omega = \{e\}$,如果对每一个 $e \in \Omega$,有一个实值 $X(e)$ 对应,这样就得到一个定义在 Ω 的单值实值函数 $X = X(e)$ 称为随机变量.

二、随机变量的分布函数

设 X 为随机变量,则称函数 $F(x) = P\{X \leq x\}$ ($-\infty < x < +\infty$) 为 X 的分布函数.

分布函数具有下列性质:

1. $F(x)$ 是一个不减函数;
2. $F(x)$ 是右连续的,即对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $F(x+0) = F(x)$.
3. $0 \leq F(x) \leq 1$ 且 $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

反之,凡满足上述 3 个性质的函数一定是某随机变量的分布函数.

用分布函数求概率的公式

$$P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a)$$

§ 16 - 2 随机变量分类

一、离散型随机变量

1. 离散型随机变量

如果一个随机变量的可能取值是有限个或可列无穷多个, 则称它为离散型随机变量.

2. 离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_k (k = 1, 2, \dots)$, 称满足下列 2 个性质的 $P\{X = x_k\} = p_k (k = 1, 2, \dots)$ 为 X 的概率分布或分布律 (又称分布列)

$$\textcircled{1} p_k \geq 0, k = 1, 2, \dots \quad \textcircled{2} \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

分布律也可以用列表形式给出.

3. 离散型随机变量的分布函数和分布律间的关系

一维离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 的图形是一条阶梯形曲线, 且 $F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$.

如果 X 的分布函数 $F(x)$ 的图形是一条阶梯形曲线, 则 X 一定是离散型的, 且曲线的跳跃点就是 X 的可能取值. 跳跃度就是 X 取这个可能取值的概率, 即 $P\{X = x_k\} = F(x_k) - F(x_k - 0)$.

二、常用的离散分布与古典型概率计算

1. 二项分布的分布律与数字特征

设 $X \sim B(n, p)$, 则 $E(X) = np$, $D(X) = npq (q = 1 - p)$, 它的分布律为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

评述 ① 在有关二项分布的概率计算中应特别小心, 它的可能取值从“0”开始. 经常有人把“0”忘了而导致答案错.

② (0 - 1) 分布与二项分布的关系

当 $n = 1$ 时, $B(1, p)$ 即为 (0 - 1) 分布. (0 - 1) 分布的分布律为 $P\{X = 1\} = p$, $P\{X = 0\} = q$, 它的数字特征为 $E(X) = p$, $D(X) = pq$.

③ 很多计算或证明题中要用到的一个技巧是: 如果 $X_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 相互独立同分布, $P\{X_k = 0\} = q$, $P\{X_k = 1\} = p$, 令 $X = \sum_{k=1}^n X_k$, 则 $X \sim B(n, p)$.

2. 有放回地摸球 (古典) 概率模型与二项分布

设袋中有 N 个球, 其中有 M 个白球, 其余为黑球. 现从中依次有放回地随机取出 n 个球, 求其中恰有 k 个白球的概率.

引进 (离散型) 随机变量 X 表示 n 个球中含有的白球个数, 由于是有放回的取球, 所以每次取球的试验是相互独立的重复试验, 每次试验只有二个可能结果 $A = \{\text{取出白球}\}$ 和 $\bar{A}$, 且 $p = P(A) = \frac{M}{N}$, 故 $X \sim B(n, p)$.

$$P\{n \text{ 个球中恰有 } k \text{ 个白球}\} = P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}.$$

3. 无放回地摸球 (古典) 概率模型与超几何分布

设袋中有 N 个球, 其中有 M 个白球, 其余为黑球. 现从中依次无放回地随机取出 n 个球 (即从中随机取出 n

个球),求其中恰有 k 个白球的概率.

引进(离散型)随机变量 X 表示 n 个球中含有的白球的个数,由于是无放回地取球,所以每次取球的试验不是相互独立的,把一个 n 组合看成一个基本事件,则

$$P\{n \text{ 个球中恰有 } k \text{ 个白球}\} = P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

我们把分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad k = 0, 1, \dots, m \text{ 其中 } m = \min(n, M)$$

的分布称为超几何分布,且 $E(X) = np$, $D(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ 其中 $p = \frac{M}{N}$, $q = 1 - p$.

评述 对上述两类典型的古典概率模型,分别引进服从二项分布和超几何分布的随机变量,概率计算就很容易得到解决.而古典型概率和二项分布,超几何分布都是考点,所以本段就显得重要.

4. 泊松分布及泊松定理

X 服从参数为 λ 的泊松分布,它的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

它的数字特征为 $E(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda > 0$

泊松定理 设随机变量 η_n ($n = 1, 2, \dots$) 服从参数为 n , p_n ($0 < p < 1$) 的二项分布,且 $np_n = \lambda$, 则对于任一个固定的非负整数 k , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\eta_n = k\} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

评述 泊松定理在实际应用中的写法是: 如 $X \sim B(n, p)$, 当 n 很大、 p 很小时, 则 $P\{X = k\} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 其中 $\lambda = np$.

三、连续型随机变量

1. 连续型随机变量

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 如果存在非负函数 $f(x)$, 使对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

则称 X 为连续型随机变量. 其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称为概率密度.

2. 概率密度 $f(x)$ 的性质

(1) $f(x) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$;

(3) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$;

$P\{x_1 < X \leq x_2\}$ 的几何意义是表示 $y = f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上曲边梯形的面积;

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则有 $F'(x) = f(x)$.

3. 连续型随机变量 X 的一些特殊性质

(1) $P\{X = a\} = 0$, 所以 $P\{a < X < b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X \leq b\}$

(2) 连续型随机变量的分布函数是连续函数, 即它不仅右连续, 而且左连续.

4. 常用的连续分布

(1) 正态分布

随机变量 X 服从参数为 $\mu, \sigma^2 (\sigma > 0)$ 的正态分布, 记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

它的数学期望 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2$.

(2) 指数分布

随机变量 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

记住它的分布函数是很有好处的:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

它的数学期望 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, 方差为 $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(3) 均匀分布

随机变量 X 在区间 $[a, b]$ 上 (或 (a, b) 内) 服从均匀分布, 它的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

它的数学期望 $E(X) = \frac{a+b}{2}$, 方差为 $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

均匀分布的特征: 对 $[a, b]$ 内任一子区间 (c, d) , 即 $a \leq c < d \leq b$, 有

$$P\{c < X < d\} = \int_c^d f(x)dx = \int_c^d \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot (d-c)$$

即“ X 落在 (a, b) 内的任一子区间的概率只和子区间的长度有关, 而和起点无关 (或和子区间的位置无关)”. 或者说“ X 在 (a, b) 内的任一子区间上取值的概率和子区间的长度成正比”, 此即均匀分布的“等可能性”, 反之具有上述“等可能性”的分布必为均匀分布.

四、正态随机变量的概率计算

在研究生概率考题中首先要看有没有“独立” (包括随机试验、随机事件、随机变量的独立, 当然这三者是有联系的), 还要看是否有随机变量服从正态分布, 因为有“独立和正态分布”可使讨论大大简化.

1. 标准正态分布

随机变量 X 服从标准正态分布, 即 $X \sim N(0, 1)$, 它的概率密度和分布函数有专门记号

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

标准正态分布中应记住的公式和数据:

① 在查表和概率计算简化中常用: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

② $\Phi(0) = 0.5$. 对考数理统计的读者, 记住下面 2 个数对查分位数有好处: $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(1.65) = 0.95$.

③ 在求正态随机变量函数的数字特征时, 甚至高等数学的考题中也有用的公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \quad \text{或} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

2. 正态随机变量的概率计算

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

因此求正态随机变量的概率总是有两大步, 第一大步将概率用分布函数表示, 第二大步用公式 $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 即:

$$P\{a < X < b\} = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

评述 设 X 是连续型随机变量, 已知它的概率密度 $f(x)$, 则求概率 $P\{a < X < b\}$ 一定要用积分 $P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx$. 然而如 X 是正态分布, 则求概率 $P\{a < X < b\}$ 不用积分, 只要查表得 $\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$, $\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ 再相减即可. 这正是拿到题目首先要看看有没有正态分布的重要原因之一.

§ 16 - 3 随机变量函数的分布

1. 设 $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots, Y = g(X)$ 是随机变量 X 的函数, 则 $P\{Y = g(x_i)\} = p_i, i = 1, 2, \dots$. 将相等的 $g(x_i)$ 归并, 并将相应的概率相加即得 Y 的分布律.

2. 设 X 的概率密度为 $f(x)$, $Y = g(X)$ 是随机变量 X 的函数.

(1) $y = g(x)$ 是单调函数的情况

定理 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} \omega(x) \neq 0 & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 如果函数 $y = g(x)$ 在 (a, b) 内处处

可导且有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$), 它的反函数为 $x = h(y)$, 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)| & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min\{g(a), g(b)\}, \beta = \max\{g(a), g(b)\}$, 而 α, β 分别可为 $-$ 及 $+$.

评述 ① 定理中 $g'(x) > 0$ (或恒小于 0) 只要求在 $f_X(x)$ 不等于 0 的区间 (a, b) 上满足就可以用.

② $f_Y(y) \neq 0$ 的表达式中在记忆时应注意三点:

1. 把反函数 $x = h(y)$ 代入 $f_X(x)$ 中得第 1 个因式 $f_X(h(y))$;
2. 反函数 $h(x)$ 要求导数 $h'(x)$;
3. $h'(x)$ 还要取绝对值才得第 2 个因式.

(2) $y = g(x)$ 不是单调函数的情况

先求 $Y = g(X)$ 的分布函数 (通过事件的运算及概率基本公式计算, 用 X 的分布函数 $F_X(x)$ 来表示), 然后

利用 $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$ 求出 $f_Y(y)$.

§ 16 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测

例 1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是随机变量 x 和 y 的概率密度, 则下列函数中能作为某个随机变量的概率密度的是 ()

(A) $f(x)g(x)$

(B) $\frac{3}{5}f(x) + \frac{2}{5}g(x)$

(C) $4f(x) - 3g(x)$

(D) $2f(x) + g(x) - 2$

解 因为 $f(x), g(x)$ 是概率密度, 所以它满足 § 16 - 2 三 2 的 4 条性质. 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx \neq 1$, 所以不能选 (A); 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} (2f(x) + g(x) - 2)dx$ 发散, 所以排除 (D); 由于 $4f(x) - 3g(x)$ 不一定大于 0, 故排除 (C); 只

能选 B.

例 2 设随机变量 x 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ $P\{|x| < \frac{\pi}{6}\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由 $F(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处右连续, 即 $F(\frac{\pi}{2} + 0) = F(\frac{\pi}{2})$, 得 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} F(x) = 1F(\frac{\pi}{2}) = A$ 故 $A = 1$, 又由 $F(x)$

在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处的连续性得

$$\begin{aligned} P\{|x| < \frac{\pi}{6}\} &= P\{-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}\} = P\{-\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{6}\} = F(\frac{\pi}{6}) - F(-\frac{\pi}{6}) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 3 (06 4 分) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且

$$P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\},$$

则必有().

$$(A) \sigma_1 < \sigma_2$$

$$(B) \sigma_1 > \sigma_2$$

$$(C) \mu_1 < \mu_2$$

$$(D) \mu_1 > \mu_2$$

解 $P\{|X - \mu_1| < 1\} = P\{\mu_1 - 1 < X < \mu_1 + 1\}$

$$= F_X(\mu_1 + 1) - F_X(\mu_1 - 1) = \Phi\left(\frac{\mu_1 + 1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_1 - 1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - (1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right))$$

$$= 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - 1.$$

同理可得

$$P\{|Y - \mu_2| < 1\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - 1$$

代入 $P\{|X_1 - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$ 可得 $\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) > \Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$, 由分布函数的单调不减性得 $\sigma_1 < \sigma_2$,

故应选(A).

例 4 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 则它的分布函数 $F(x)$ 为()

$$(A) \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 < x \leq 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \leq 2, \\ 0 & x > 2, \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 < x \leq 1, \\ -\frac{3}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \leq 2, \\ 0 & x > 2, \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 < x \leq 1, \\ -1 + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \leq 2, \\ 1 & x > 2, \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 < x \leq 1, \\ -\frac{3}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \leq 2, \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

解一 (A) (B) 不能选, 因为 $F(+\infty) = 0 \neq 1$. (D) 也不能选, 因为它在 $x = 2$ 不右连续. 因此只能选 (C).

解二 也可用 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ 求出相应的 $F(x)$.

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时 } F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0$$

$$\text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时 } F(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x tdt = \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{当 } 1 < x \leq 2 \text{ 时 } F(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 tdt + \int_1^x (2-t)dt = -1 + 2x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时 } F(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 tdt + \int_1^2 (2-t)dt + \int_2^x 0dt = 1$$

所以应选 (C).

评述 解一的方法是单项选择题中常用的方法即排除法, 只要验证其中三个是错的, 则剩下的一定是正确的. 解二的方法用推演的方法验证正确的只可能是某一个, 其余三个必定是错的. 本题用解一方便, 但有的题目用两种方法结合较方便.

例5 一个工人用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件, 第 i 个零件是不合格的概率 $p_i = \frac{1}{i+1}$ ($i = 1, 2, 3$), 以 X 表示 3 个零件中合格品的个数, 求随机变量 X 的概率分布.

解 随机变量 X 是离散型的, 它的可能取值为 0, 1, 2, 3. 为了求它的分布律 $P\{X = k\}$, 引进事件 $A_i = \{\text{制造的第 } i \text{ 个零件是合格品}\}$ ($i = 1, 2, 3$), 则 A_1, A_2, A_3 相互独立, 并且 $P(\bar{A}_i) = \frac{1}{i+1}$, 故

$$P\{X = 0\} = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = \frac{1}{24}$$

$$P\{X = 1\} = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3)$$

$$= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \frac{6}{24}$$

$$P\{X = 2\} = P(\bar{A}_1 A_2 A_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup A_1 A_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(A_1 A_2 \bar{A}_3)$$

$$= P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24}$$

$$P\{X = 3\} = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{6}{24}$$

故 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$

评述 本题也可改为填空题, 前面不改, 最后一句改为“则 $P\{X = 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$ ”. (此即为 96 年考题).

例6 假设有 10 只同种电器元件, 其中有 2 只废品. 装配仪器时, 从这批元件中任取 1 只, 如是废品, 则扔掉重新任取 1 只, 如仍是废品, 则扔掉再取 1 只, 试求在取到正品之前, 已取出的废品只数的分布、数学期望和方差.

解 (1) 用 X 表示在取到正品之前取出的废品数, 则它的可能取值为 0, 1, 2, 概率分别为

$$P\{X = 0\} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

$$P\{X = 1\} = \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{8}{45},$$

$$P\{X = 2\} = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{8} = \frac{1}{45}$$

于是 X 的分布律为

X	0	1	2
p	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

$$(2) \text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{4}{5} + 1 \times \frac{8}{45} + 2 \times \frac{1}{45} = \frac{2}{9}$$

$$(3) \text{方差 } E(X^2) = 0^2 \times \frac{4}{5} + 1^2 \times \frac{8}{45} + 2^2 \times \frac{1}{45} = \frac{4}{15};$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{88}{405}$$

评述 从上面的几个例子可看出,对离散型随机变量求期望和方差等数字特征,关键是求出分布律,然后代公式进行加、乘运算.而求离散型随机变量的分布律的问题本质上就是要熟练运用事件的运算和概率的基本计算公式求概率的问题.

例7 假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布.

(1) 求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布;

(2) 求在设备已无故障工作 8 小时的情况下,再无故障运行 8 小时的概率 Q .

分析 解该问题过程中有 2 个关键地方:① 当 $t \geq 0$ 时,事件 $\{T > t\}$ 与 $\{N(t) = 0\}$ 是相等的;② 怎样表达事件 $\{\text{在设备已无故障工作 8 小时}\}$ 用 $\{T = 8\}$ 是错的.因为 T 是连续型随机变量,所以 $P\{T = 8\} = 0$,而条件概率 $P(A|B)$ 必须在 $P(B) > 0$ 条件下才有意义.另一方面,已无故障工作 8 小时说明工作了 8 小时设备还正常,即故障间隔时间至少为 8 小时,所以应用 $\{T \geq 8\}$ 表示才对.

解 (1) 当 $t < 0$ 时,由于 T 是非负随机变量,所以 $F(t) = P\{T \leq t\} = P(\emptyset) = 0$.

当 $t \geq 0$ 时 $F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - P\{N(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}$

可见 T 服从参数为 λ 的指数分布.

$$\begin{aligned} (2) Q &= P\{T \geq 16 | T \geq 8\} = \frac{P\{T \geq 16, T \geq 8\}}{P\{T \geq 8\}} \\ &= \frac{P\{T \geq 16\}}{P\{T \geq 8\}} = \frac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-8\lambda} \end{aligned}$$

评述 本题是求连续型随机变量的概率分布时常用的方法,关键是 $\{T \geq t\} = \{N(t) = 0\}$. 注意 T 是连续型随机变量, $N(t)$ 是离散型随机变量,这两个事件相等可这样想: $\{T \geq t\}$ 表示时间长度 t 内没发生故障,而后面一句话即表示 $\{N(t) = 0\}$.

例8 (96 7 分) 假设一电路装有三个同种电气元件,其工作状态相互独立,且无故障工作时间都服从参数为 λ 的指数分布.当三个元件都无故障时,电路正常工作,否则整个电路不能正常工作.试求电路正常工作的时间 T 的概率分布.

解法一 设第 i 个元件的无故障时间为 X_i , $i = 1, 2, 3$, 则 X_1, X_2, X_3 独立同分布,分布函数均为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{若 } t > 0 \\ 0, & \text{若 } t \leq 0 \end{cases}$$

注意关系 $T = \min\{X_1, X_2, X_3\}$, 及 $\{T > t\} = \{X_1 > t, X_2 > t, X_3 > t\}$, 且 $T \geq 0$, 故

当 $t < 0$ 时 $F_T(t) = P\{T \leq t\} = P(\emptyset) = 0$.

当 $t \geq 0$ 时 $F_T(t) = P\{T \leq t\} = 1 - P\{T > t\}$

$$\begin{aligned} &= 1 - P\{X_1 > t, X_2 > t, X_3 > t\} \\ &= 1 - P\{X_1 > t\}P\{X_2 > t\}P\{X_3 > t\} \\ &= 1 - [1 - F(t)]^3 = 1 - e^{-3\lambda t} \end{aligned}$$

故 T 服从参数为 3λ 的指数分布,即

$$f_T(t) = \begin{cases} 3\lambda e^{-3\lambda t} & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

解法二 令 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个元件无故障时间不超过 } t\}$, $i = 1, 2, 3$, 则 A_1, A_2, A_3 相互独立,且 $P(A_i) = 1 - e^{-\lambda t}$, 当 $t > 0$ 时,而当 $t \leq 0$ 时 $P(A_i) = 0$, 则

当 $t < 0$ 时 $F_T(t) = P\{T \leq t\} = P(\emptyset) = 0$

当 $t \geq 0$ 时 $F_T(t) = P\{T \leq t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - P(A_1 A_2 A_3)$
 $= 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1 - e^{-3\lambda t}$

故

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-3\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

评述 1. 解法一是引入新的随机变量求概率 $P\{T \leq t\}$, 而解法二是引入“简单”的随机事件求此概率, 二种方法都可以, 都必须掌握. 但相比之下用引入随机变量的方法概念更清楚, 写法清晰, 所以做概率统计考题时必须善于引进随机变量.

2. 解法一和解法二有一个共同之处: 当引入几个随机变量时必须马上注意讨论它们之间关系是否独立, 是否同分布, 并写出它们的分布; 当引入几个“简单”随机事件时必须马上讨论这些事件间关系(包含、互不相容、相互独立)以及这些“简单”事件的概率.

3. 指数分布的概率计算是很基本的, 2004 年又出现这类考题 (04 4 分) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 9 (97 7 分) 假设随机变量 X 的绝对值不大于 1, $P\{X = -1\} = \frac{1}{8}$, $P\{X = 1\} = \frac{1}{4}$; 在事件 $\{-1 < X < 1\}$ 出现的条件下, X 在 $(-1, 1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比, 试求 X 的分布函数 $F(x) = P\{X \leq x\}$.

分析 根据“ $P\{X = -1\} = \frac{1}{8}$, $P\{X = 1\} = \frac{1}{4}$ ”知 X 不是连续型随机变量, 根据“在事件 $\{-1 < X < 1\}$ 出现的条件下, X 在 $(-1, 1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比”知 X 可取 $(-1, 1)$ 上任何一个值, 所以 X 也不是离散型随机变量, 因此求它的分布函数时特别要小心. 另一方面由后一句话可得: 当 $-1 < x < 1$ 时, $(-1, x]$ 是 $(-1, 1)$ 内的子区间, 故

$$P\{-1 < X \leq x | -1 < X < 1\} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{x+1}{2}.$$

以上两点是解本题的关键, 也是难点所在. 还要用到事件等式 $\{-1 < X \leq x\} = \{-1 < X \leq x, -1 < X < 1\}$ 这个小技巧.

解 已知 $|X| \leq 1$, 即 $P\{|X| \leq 1\} = 1$, 另一方面

$$\begin{aligned} P\{|X| \leq 1\} &= P\{X = -1\} + P\{-1 < X < 1\} + P\{X = 1\} \\ &= \frac{1}{8} + P\{-1 < X < 1\} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

故可解得 $P\{-1 < X < 1\} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$, 因此

当 $x < -1$ 时 $F(x) = P\{X \leq x\} = P(\emptyset) = 0$.

当 $-1 \leq x < 1$ 时 $F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1\} + P\{-1 < X \leq x\}$
 $= \frac{1}{8} + P\{-1 < X \leq x, -1 < X < 1\}$
 $= \frac{1}{8} + P\{-1 < X < 1\}P\{-1 < X \leq x | -1 < X < 1\}$
 $= \frac{1}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{5x+7}{16}$

当 $x \geq 1$ 时 $F(x) = P\{X \leq x\} = P(\Omega) = 1$,

因此 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{5x+7}{16}, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

评述 象这类求既不是离散型又不是连续型的随机变量的分布函数在考研题中还出现过好几次(见第十七章例26) 希望考生仔细体会, 不要因为题目有些难而繁就不想看.

例 10* 已知随机变量 Y 服从区间 $[-1, X]$ 上的均匀分布, 而随机变量 X 的分布律为

X	2	3	5
$P\{X = x\}$	0.1	0.2	0.7

则 $P\{Y \leq 0\} =$ _____.

解 容易验证事件 $\{X = 2\}, \{X = 3\}, \{X = 5\}$ 构成一个完全事件组, 故用全概率公式得

$$\begin{aligned} P\{Y \leq 0\} &= P\{X = 2\}P\{Y \leq 0 | X = 2\} + P\{X = 3\}P\{Y \leq 0 | X = 3\} + P\{X = 5\}P\{Y \leq 0 | X = 5\} \\ &= 0.1 \times \frac{1}{3} + 0.2 \times \frac{1}{4} + 0.7 \times \frac{1}{6} = 0.2 \end{aligned}$$

例 11 设袋中有 18 只球, 其中 6 只白球, 12 只黑球, 现随机地从袋中依次一只一只地共摸出 4 只球, 分别就下列 2 种情况, 求其中恰有 3 只白球的概率:

(1) 有放回地摸球; (2) 无放回地摸球.

分析 这个题可以用古典概率解, 但希望学生尽可能不用排列组合, 而用引入离散型随机变量来解决问题.

解 设 X 表示取出的 4 只球中所含的白球个数

(1) 随机地从袋中依次一只一只地取出 4 个球可以看成做了四次试验, 由于是有放回地摸球, 所以这四次试验是相互独立的, 令 $A = \{\text{取出的球是白球}\}$, $p = P(A) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$, 所以 $X \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$, 故

$$P\{X = 3\} = C_4^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81}.$$

(2) 由于是无放回地摸球, 所以依次取球的四次试验不是独立的, 对照超几何分布的无放回的摸球模型, 可知 X 服从超几何分布, 其中 $N = 18$, $M = 6$, $n = 4$, 所求概率对应分布律中 $k = 3$:

$$P\{X = 3\} = \frac{C_6^3 C_{12}^1}{C_{18}^4} = \frac{4}{51}$$

例 12 将 3 个球随机地放入 4 个杯子, 则第 1 个杯子恰有 1 个球的概率 $p =$ _____.

分析 这是个古典概率问题, 我们用随机变量法解, 第 1 个杯子中有球的个数 X (是随机的) 的可能取值为 0, 1, 2, 3 个. 具体分析时, 对每个球进行一次观察 (即试验), 看 $A = \{\text{球落入第 1 个杯子}\}$ 是否发生, 显然共进行了 3 次独立重复试验, 每次试验只有二个可能结果 $A, \bar{A}$, 且 $P(A) = \frac{1}{4}$. 故 A 发生的次数即第 1 个杯子中有球的个数 $X \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$.

解法一 设 X 表示第 1 个杯子中有球的个数, 则 $X \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$.

故 $p = P\{\text{第 1 个杯子恰有一个球}\} = P\{X = 1\} = C_3^1 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{3-1} = \frac{27}{64}$

解法二 用有重复元素的排列做

$$p = \frac{C_3^1 \times 3^2}{4^3} = \frac{27}{64}$$

例 13* 某城市的自行车共 10 000 辆, 牌照编号从 00 001 到 10 000, 则事件“偶然遇到一辆自行车, 其牌照号码中有数字 8”发生的概率 $\beta =$ _____.

解 令 X 表示牌照号码后 4 位数字中有数字 8 的个数, 则用上例的分析方法可知 $X \sim B(4, 0.1)$, 故

$$\beta = P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - 0.9^4 = 0.344$$

评述 上二个例题说明很多题目引进离散型随机变量后, 求概率显得很简单, 特别是古典型概率. 而引进的离散型随机变量在考研题中绝大多数是服从二项分布的, 判断的三个关键问题: 几次独立试验? 关心的事件 A 是什么? $P(A) = ?$

例 14 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数, 则 $P\{Y = 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 显然 $Y \sim B(3, p)$,

$$p = P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = \frac{1}{4},$$

故

$$P\{Y = 2\} = C_3^2 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

评述 以上二例是离散型和连续型随机变量综合在一起的题型, 在考研题中经常出现, 而综合在一起的离散型随机变量绝大部分又是服从二项分布的. 所以必须对 n 重独立重复试验和二项分布熟练掌握.

例 15 (1)(00 3 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [0, 1] \\ \frac{2}{9}, & x \in [3, 6] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X \geq k\} = \frac{2}{3}$, 则 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 在区间 $(0, 1)$ 上随机取 4 个数, 已知其中至少有一个数大于 k 的概率为 0.9999, 则常数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 (1) 由 $P\{X \geq k\} = \frac{2}{3}$ 得 $P\{X < k\} = \frac{1}{3}$, 即应选 k , 使 $\int_{-\infty}^k f(x) dx = \frac{1}{3}$, 注意由

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < 3 \\ \frac{2}{9}, & 3 \leq x \leq 6 \\ 0, & x > 6 \end{cases}$$

可得

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 3 \\ \frac{2x-3}{9}, & 3 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

所以 k 的取值范围应为 $1 \leq k < 3$.

(2) 设 Y 表示取出的 4 个数字中大于 k 的个数, 显然 $0 < k < 1$, 则 $Y \sim B(4, p)$, 其中 $p = P\{\text{取出的数大于 } k\} = \int_k^1 1 dx = 1 - k$

故

$$P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - k^4$$

由 $0.9999 = 1 - k^4$

解得 $k = 0.1$

评述 由于考题很多题目都很类似, 所以自己也可将题变一下, 编出些题来考自己(可参看本章例 21). 本题中是将(1)中连续型随机变量改编成(2)中离散型随机变量. 还可再编出下面二题:

① 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X \geq k\} = \frac{2}{3}$, 则 k 的取值范围是_____.

② 设随机变量 X 服从参数为 $n = 4, p = \frac{2}{3}$ 的二项分布, 若 k 使得 $P\{X \geq k\} = \frac{16}{27}$, 则 k 的取值范围是_____.

例 16 假设测量的随机误差 $X \sim N(0, 10^2)$, 试求在 100 次独立重复测量中, 至少有 3 次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α , 并利用泊松分布求出 α 的近似值. (要求小数点后取两位有效数字)

[附表]

λ	1	2	3	4	5	6	7	...
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	...

解 令 $A = \{\text{测量误差的绝对值大于 } 19.6\}$

$$\begin{aligned} p &= P(A) = P\{|X| > 19.6\} \\ &= P\{X < -19.6\} + P\{X > 19.6\} \\ &= F_X(-19.6) + 1 - F_X(19.6)) \\ &= \Phi\left(-\frac{19.6}{10}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{19.6}{10}\right)\right) \\ &= (1 - \Phi(1.96)) + (1 - \Phi(1.96)) \\ &= 2(1 - \Phi(1.96)) \\ &= 2(1 - 0.975) = 0.05 \end{aligned}$$

设 Y 表示在 100 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, 则 $Y \sim B(100, 0.05)$, 因此

$$\begin{aligned} \alpha &= P\{Y \geq 3\} = 1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\} - P\{Y = 2\} \\ &= 1 - 0.95^{100} - 100 \times 0.05 \times 0.95^{99} - \frac{100 \times 99}{2} \times 0.05^2 \times 0.95^{98} \end{aligned}$$

由泊松定理知 X 近似服从 $\lambda = np = 100 \times 0.05 = 5$ 的泊松分布, 故

$$\begin{aligned} \alpha &\approx 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \\ &= 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) \\ &= 1 - 0.007 \times (1 + 5 + 12.5) \approx 0.87 \end{aligned}$$

评述 题目中有“正态分布”, 所以概率 $p = P\{|X| > 19.6\}$ 的计算特别容易, 只要查表即可.

例 17 若随机变量 X 服从均值为 2, 方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ _____.

解 已知 $0.3 = P\{2 < x < 4\} = F_X(4) - F_X(2) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi(0)$, 所以 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.3 + \Phi(0) = 0.8$,

故 $P\{X < 0\} = F_X(0) = \Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 1 - 0.8 = 0.2$

评述 ① 看到一个问题(填空、选择、计算、证明)只要是涉及正态随机变量的概率计算问题,考生应马上很有信心,因为它的概率计算总是两大步:第一步将所求概率用正态随机变量的分布函数来表示,第二步正态变量的分布函数用标准正态分布函数表示.一查表马上可得答案.

② 由中心极限定理知正态随机变量有广泛应用,又由于正态随机变量具有很多很好的性质,有利于理论研究,因此正态随机变量是个重点,它的有关概率计算必须非常熟练,而且要养成一个习惯,拿到题目后首先要看题目中有没有随机变量是服从正态分布的.

例 18 (02 3 分) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\mu =$ _____.

$$\begin{aligned}\text{解法一} \quad P\{\text{无实根}\} &= P\{4^2 - 4X < 0\} = P\{X > 4\} \\ &= 1 - F_X(4) = 1 - \Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = 0.5\end{aligned}$$

由此解得 $\Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = 0.5 = \Phi(0)$, 由 $\frac{4 - \mu}{\sigma} = 0$ 可解得 $\mu = 4$.

$$\text{解法二} \quad P\{\text{无实根}\} = P\{4^2 - 4X < 0\} = P\{X > 4\} = 0.5$$

由于 $P\{X > \mu\} = 0.5$, 所以 $\mu = 4$.

评述 1. 解法二的技巧在于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的概率密度图形对称于直线 $x = \mu$ (图 16.1), 故 $P\{X < \mu\} = P\{X > \mu\} = 0.5$. 这类利用正态分布的概率密度的条形及概率的几何意义的考题类型在 2004 年中又出现: (04 4 分) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$. 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 α 等于():

$$(A) u_{\frac{\alpha}{2}} \quad (B) u_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (C) u_{\frac{1-\alpha}{2}} \quad (D) u_{1-\alpha}.$$

2. 求系数或常数项中含随机变量的 y 的二次方程有实根、有重根、无实根的概率在考研题中多次出现, 它们本质上归结为求已知分布的随机变量有关事件的概率. 如果所给的分布是连续分布, 则求概率相对来说容易点. 如果所给的分布是离散分布, 则求概率相对来说繁一点. 见第十七章例 6.

例 19 在电源电压不超过 200 伏, 为 200 ~ 240 伏和超过 240 伏 3 种情况下, 某种电子元件损坏的概率分别为 0.1, 0.001 和 0.2. 假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220, 25^2)$. 试求:

(1) 该电子元件损坏的概率 α ;

(2) 该电子元件损坏时, 电源电压在 220 ~ 240 伏的概率 β .

分析 一看题目, 马上要注意到涉及的随机变量 X 服从正态分布, 立刻想到它的有关概率计算问题用两大步即可解决. 另一个是必须掌握善于用随机变量来表示事件.

解 已知 $X \sim N(220, 25^2)$, 令 $B_1 = \{X \leq 200\}$, $B_2 = \{200 < X \leq 240\}$, $B_3 = \{X > 240\}$, $A = \{\text{电子元件损坏}\}$, 显然 B_1, B_2, B_3 构成完全事件组, 且

$$P(B_1) = P\{X \leq 200\} = F_X(200) = \Phi\left(\frac{200 - 220}{25}\right) = \Phi(-0.8) = 0.212$$

$$P(B_2) = P\{200 \leq X \leq 240\} = F_X(240) - F_X(200) = \Phi(0.8) - \Phi(-0.8) = 0.576$$

$$P(B_3) = P\{X > 240\} = 1 - F_X(240) = 1 - \Phi(0.8) = 0.212$$

又由题设知

$$P(A|B_1) = 0.1, P(A|B_2) = 0.001, P(A|B_3) = 0.2.$$

(1) 由全概率公式得

$$\alpha = P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i) = 0.0642$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$\beta = P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = 0.009$$

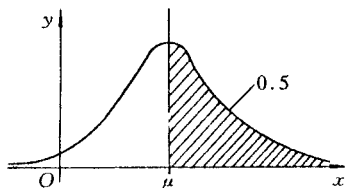


图 16.1

评述 全概率公式和贝叶斯公式是考题中的一个重要考点,经常会出此类考题,对完全事件组 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 的概率计算有3种题型.第十五章例17是用古典概率方法计算,本章例10是用离散型随机变量的概率分布计算,本题是用连续型随机变量的概率密度计算.把各种情况全组合起来实际上就属于综合,所以请读者把上述几个例子同时复习、对照,从中提高自己的综合能力.

例20 假设随机变量 X 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上服从均匀分布,分别求下列随机变量的概率分布: (1) $Y = \tan X$;

(2) $Z = \tan \frac{X}{2}$.

分析 这是求一维连续型随机变量的函数 $Y = g(X)$ 的概率密度的问题,这类问题只要能能用 §16-3 中的定理就尽量用它来解决问题.

解 已知 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) $Y = \tan X$ 将大写随机变量换成相应的小写变量后得 $y = \tan x$, 研究 $y = \tan x$ 是否满足定理的条件. 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上 $\tan x$ 可导, 且 $(\tan x)' = \sec^2 x > 0$, 满足定理条件, 所以可以用定理. $y = \tan x$ 的反函数 $x = \arctan y$. 在写 $f_Y(y)$ 具体表达式前先看 $\alpha = \min\{\tan(-\frac{\pi}{2}), \tan(\frac{\pi}{2})\} = -\infty$, $\beta = \max\{\tan(-\frac{\pi}{2}), \tan(\frac{\pi}{2})\} = +\infty$, 由于 $(\alpha, \beta) = (-\infty, +\infty)$ (充满实数轴, 所以 $f_Y(y)$ 的表达式中没有“0, 其它”), 故

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}, \quad -\infty < y < +\infty$$

(2) $Z = \tan \frac{X}{2}$, $z = \tan \frac{x}{2}$ 满足 $(\tan \frac{x}{2})' = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} > 0$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上, 所以可用定理, 反函数为 $x = 2 \arctan z$, $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$ (不充满实数轴, 所以 $f_Z(z)$ 的表达式带花括号“{”).

$$f_Z(z) = \begin{cases} f_X(2 \arctan z) \cdot |(2 \arctan z)'| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{1+z^2}, & -1 < z < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

评述 由于 $Y = g(X)$ 的概率分布在考研题中出现比较频繁, 所以这是一个重点, 必须要先检查定理的条件是否满足, 如果满足接下来就是正确书写 $f_Y(y)$ 的表达式.

例21 (1) 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, 求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数

$f_Y(y)$.

(2) 设随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	1	8
p	0.3	0.2	0.4	0.1

求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率分布.

解 (1) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$ 的导数 $(1 - \sqrt[3]{x})' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} < 0$, 所以可用定理, 它的反函数 $x = (1-y)^3$, $(\alpha, \beta) = (-\infty, +\infty)$, 所以

$$f_Y(y) = f_X((1-y)^3) \cdot |((1-y)^3)'| = \frac{1}{\pi(1+(1-y)^6)} \cdot 3(1-y)^2, \quad -\infty < y < +\infty$$

(2) Y 的可能取值为 -1, 0, 1, 2.

$$P\{Y = -1\} = P\{1 - \sqrt[3]{X} = -1\} = P\{X = 8\} = 0.1$$

$$P\{Y = 0\} = P\{1 - \sqrt[3]{X} = 0\} = P\{X = 1\} = 0.4$$

$$P\{Y = 1\} = P\{1 - \sqrt[3]{X} = 1\} = P\{X = 0\} = 0.2$$

$P\{Y = 2\} = P\{1 - \sqrt[3]{X} = 2\} = P\{X = -1\} = 0.3$
故 Y 的分布为

Y	-1	0	1	2
p	0.1	0.4	0.2	0.3

评述 同样是求 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率分布, 当给定的随机变量 X 是连续型, 即已知 X 的 $f_X(x)$ 时, 问题转化为直接应用 §16-3 的定理, 但当 X 是离散型时, 即已知 X 的分布律时, 求 Y 的分布律本质上就是求事件的概率, 主要用事件的分解和概率计算公式原则上考察考生是否熟练掌握事件的运算及概率的运算方式. 不是用古典概率, 而是通过求离散型随机变量函数的分布律, 进一步可参看第十七章例 19.

例 22 设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, 且 $X = \frac{1}{2}[1 + u(Y)]$, 其中 $u(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, 求随机变量 Y 的概率密度.

解 记 $x = \frac{1}{2}[1 + u(y)]$ 的反函数为 $y = g(x)$, 则 $X = \frac{1}{2}[1 + u(Y)]$ 也可看成 $Y = g(X)$, 现已知 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$f_Y(y)$ 能否用定理求关键在于 $y = g(x)$ 是否满足定理条件, 注意它的反函数有 $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{1}{2}[1 + u(y)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} > 0$, 即 $x = x(y)$ 是单调可导函数, 且导数不为零, 故它的反函数 $y = g(x)$ 存在、单调、可导, 且 $g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{y^2}{2}} > 0$. 因此 $y = g(x)$ 满足定理的条件, 它的反函数 $x = h(y)$ 就是 $x = \frac{1}{2}[1 + u(y)]$.

因此

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)| & y \in \{y | 0 < \frac{1}{2}[1 + u(y)] < 1\} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 \times \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & y \in \{y | 0 < \frac{1}{2}[1 + u(y)] < 1\} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

评述 在 2003 年就出现了这种类型的考题: 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{x^2}}, & x \in [1, \beta] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 求随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数. (答案: 是 $[0, 1]$ 上的均匀分布). 如把这个考题的概率密度换成是参数为 2 的指数分布, 就变成了本章的预测·强化训练 17 题中的第 15 题.

预测·强化训练十六

- 1*. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则随 σ^2 的增大, 概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ ()
(A) 单调增大 (B) 单调减小 (C) 保持不变 (D) 增减不定
2. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 记 $p_1 = P\{X \leq \mu - 4\}$, $p_2 = P\{Y \geq \mu + 5\}$, 则
(A) 对任何实数 μ , 都有 $p_1 = p_2$ (B) 对任何实数 μ , 都有 $p_1 < p_2$
(C) 只对 μ 的个别值, 才有 $p_1 = p_2$ (D) 对任何实数 μ , 都有 $p_1 > p_2$
3. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数, 为使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数, 在下列给定的各组数值中应取 ()
(A) $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$ (B) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}$

$$(C) a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$(D) a = \frac{1}{2}, b = -\frac{2}{3}$$

4. 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$ 则 X 的概率分布函数 $F(x) =$ _____.

5. 已知随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3	4
p	0.2	0.3	0.1	0.4

则它的分布函数值 $F_X(2.5) =$ _____.

6. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = ab^k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) 其中常数 $b > 0$ 则 a 的值为 _____.

7. 已知随机变量 X 服从泊松分布, 且 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$ 则 $P\{X \geq 1\} =$ _____.

8. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 且 $P\{X > \mu + k\sigma\} = 0.95$ 则常数 $k =$ _____.

9. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 则关于 x 的二次方程 $4x^2 + 4Xx + (X + 2) = 0$ 无实根的概率为 _____.

10. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 0.3, & -3 \leq x < -1 \\ 0.8, & -1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$ 则 $Y = X^3 - 1$ 的分布律为 _____.

11. 袋中有 4 个红球, 6 个黑球, 求在从袋中有放回地摸球 200 次中红球出现 30 次的概率 α .

12. 某地抽样调查结果表明, 考生的外语成绩 (百分制) 近似正态分布, 平均成绩为 72 分, 96 分以上的占考生总数的 2.3%, 试求考生的外语成绩在 60 分到 84 分之间的概率.

[附表]

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

13. 一汽车沿一街道行驶, 需要通过 3 个均设有红绿信号灯的路口, 每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立, 且红绿两种信号显示的时间相等. 以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数.

(1) 求 X 的概率分布; (2) 求 $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$

14. 假设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布, 证明 $Y = 1 - e^{-2X}$ 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布.

15*. (1) 已知随机变量 X 服从区间 $(0, 4)$ 上的均匀分布, 求 $Y = X^2$ 的概率分布

(2) 已知随机变量 T 服从区间 $(-2, 4)$ 上的均匀分布, 求 $Z = T^2$ 的概率分布.

16*. 往小木栓上每次投掷 1 个环圈, 投掷直到套中或全部投完 5 个环圈时结束. 如果套中的概率为 0.9, 求直到投掷结束所需投掷次数 X 的概率分布.

简明解答

1. (C). $P\{|X - \mu| < \sigma\} = P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\} = F(\mu + \sigma) - F(\mu - \sigma)$

$$= \Phi\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) \text{ 是不变的常数.}$$

2. (A). $p_1 = P\{X \leq \mu - 4\} = F_X(\mu - 4) = \Phi\left(\frac{\mu - 4 - \mu}{4}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$ $p_2 = P\{Y \geq \mu + 5\} = 1$

$$- F_Y(\mu + 5) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu + 5 - \mu}{5}\right) = 1 - \Phi(1) \text{ 故 } p_1 = p_2.$$

3. (A). 由分布函数性质 ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [aF_1(x) - bF_2(x)] = a - b = 1$ 经检验知只有 (A) 满足此式.

$$4. \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$5. \quad 0.5. F_X(2.5) = \sum_{x \leq 2.5} P\{X = x\} = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

$$6. \quad \frac{1-b}{1-b^5}. \text{ 由 } \sum_i p_i = 1 \text{ 得 } a(b+b^2+b^3+b^4) = 1 \text{ 可得}$$

$$a = \frac{1}{b+b^2+b^3+b^4} = \frac{1-b}{1-b^5}$$

$$7. \quad \frac{1-e^{-2}}{1-e^{-2}}. \text{ 由 } P\{X=1\} = P\{X=2\} \text{ 得 } \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^1}{1!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^2}{2!}, \text{ 解得 } \lambda = 2, \text{ 故 } P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - e^{-2}.$$

$$8. \quad -1.65. \quad 0.95 = P\{X > \mu + k\sigma\} = 1 - P\{X \leq \mu + k\sigma\} = 1 - F_X(\mu + k\sigma) = 1 - \Phi(k) = \Phi(-k), \text{ 得 } -k = 1.65.$$

$$9. \quad \frac{1-e^{-2}}{1-e^{-2}}. P\{\text{无实根}\} = P\{(4X)^2 - 16(X+2) < 0\} = P\{-1 < X < 2\} = \int_0^2 e^{-x} dx = 1 - e^{-2}.$$

10.

Y	-28	-2	7
p	0.3	0.5	0.2

$$11. \quad \frac{C_{200}^{30} \times 0.4^{30} \times 0.6^{170}}{C_{200}^{30} \times 0.4^{30} \times 0.6^{170}}. \text{ 由于是有放回地摸球, 所以各次摸球试验相互独立, 每次摸球只有 2 个可能结果. 令}$$

$$A = \{\text{摸出是红球}\} \text{ 则 } P(A) = \frac{4}{10} = p \text{ 为常数, 故 } A \text{ 发生的次数 } X \sim B(200, 0.4).$$

$$\text{于是 } \alpha = P\{X = 30\} = C_{200}^{30} \times 0.4^{30} \times 0.6^{170}$$

$$12. \text{ 设考生的外语成绩为 } X(\text{分}), \text{ 则 } X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ 其中 } \mu = 72, \text{ 由下列已知条件先求 } \sigma^2:$$

$$0.023 = P\{X \geq 96\} = 1 - P\{X < 96\} = 1 - \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)$$

$$\text{即 } \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 0.977, \text{ 查表得 } \Phi(2) = 0.977, \text{ 所以 } \frac{24}{\sigma} = 2, \text{ 故 } \sigma = 12, \text{ 因此, 所求概率为}$$

$$P\{60 \leq X \leq 84\} = F_X(84) - F_X(60) = \Phi(+1) - \Phi(-1) \\ = 2\Phi(1) - 1 = 0.682$$

$$13. \quad (1) X \text{ 的可能取值为 } 0, 1, 2, 3. \text{ 令 } A_i = \{\text{汽车在第 } i \text{ 个路口遇到红灯}\}, \text{ 则 } A_1, A_2, A_3 \text{ 相互独立, 且 } P(A_i) =$$

$$P(\bar{A}_i) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, 3.$$

$$P\{X = 0\} = P(A_1) = \frac{1}{2}$$

$$P\{X = 1\} = P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2) = \frac{1}{4}$$

$$P\{X = 2\} = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$$

$$P\{X = 3\} = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = \frac{1}{8}$$

$$(2) E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{i=0}^3 \frac{1}{1+i} P\{X=i\} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{1+1} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{1+2} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{1+3} \times \frac{1}{8} = \frac{67}{96}$$

$$14. \text{ 已知 } X \text{ 的概率密度为}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$y = 1 - e^{-2x} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上可导, 且 } (1 - e^{-2x})' = 2e^{-2x} > 0, \text{ 所以可用定理, 反函数 } x = -\frac{1}{2} \ln(1-y) (\alpha,$$

$$\beta) = (0, 1) \text{ 因此, } Y = 1 - e^{-2X} \text{ 的概率密度为}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2(-\frac{1}{2} \ln(1-y))} \cdot \left| -\frac{1}{2} \times \frac{-1}{1-y} \right| & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

即 Y 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布.

15. 分析 本题主要体会当求 $Y = g(X)$ 的概率密度时, 能不能用定理? 为什么? 如果不能用定理时, 又该如何求 $f_Y(y)$.

$$(1) X \text{ 的概率密度为 } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

而 $y = x^2$ 在 $(0, 4)$ 上 $(x^2)' = 2x > 0$, 所以可以用定理. 反函数为 $x = \sqrt{y}$, $(\alpha, \beta) = (0, 16)$, 所以

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 由于 $z = t^2$ 在 $(-2, 4)$ 上 $(t^2)' = 2t$ 不恒 > 0 或 < 0 , 所以不能用定理. 这时只能先求出分布函数 $F_Z(z)$, 然后求出 $f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$ 并计算可求得 $z = T^2$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{z}}, & 0 < z < 4 \\ \frac{1}{12\sqrt{z}}, & 4 \leq z < 16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

评述 1. 本题(2)中求 $F_Z(z)$ 用了两种不同方法: 当 $0 < z < 4$ 时, $F_Z(z)$ 用 F_T 来表示; 当 $4 < z < 16$ 时, 由 $F_Z(z)$ 具体把它计算出来. 读者可根据自己的爱好和习惯随使用哪种.

2. 本题也可出成下列形式的填空题:

设随机变量 X 服从 $(0, 4)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$ 在 $y = 2$ 处的值为_____.

设随机变量 X 服从 $(0, 4)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$ 在 $(0, 16)$ 内的表达式为_____.

设随机变量 X 服从 $(0, 4)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 在 $y = 4$ 处的值为_____.

16. X 的可能取值为 1, 2, 3, 4, 5, 考虑到各次投掷是相互独立的, 故

$$P\{X = k\} = (0.1)^{k-1} \times 0.9 \quad k = 1, 2, 3, 4$$

以上 4 个概率很容易求, 剩下求 $P\{X = 5\}$, 有二种方法:

解法一 $P\{X = 5\} = 1 - \sum_{k=1}^4 p_k = 0.0001$. 太容易了!

解法二 事件 $\{X = 5\}$ 发生, 是下面 2 个事件的和事件: “前面 4 次都没套中, 第 5 次套中, 投掷结束” 和 “前面 4 次都没套中, 第 5 次也没套中, 由于 5 个环圈都已投完, 投掷结束”, 且这 2 个事件互不相容, 故

$$P\{X = 5\} = 0.1^4 \times 0.9 + 0.1^5 = 0.0001$$

由于 $\sum_{k=1}^5 P\{X = k\} = 0.9 + 0.1 \times 0.9 + 0.1^2 \times 0.9 + 0.1^3 \times 0.9 + 0.0001 = 1$, 所以答案正确.

显然这种解法要费神且易错. 所以, X 的概率分布为

X	1	2	3	4	5
p	0.9	0.09	0.009	0.0009	0.0001

评述 直接求 $P\{X = 5\}$ 较难, 而用分布列的关系式 $P\{X = 5\} = 1 - \sum_{1 \leq i \leq 4} P\{X = i\} = 0.0001$ 就非常简单. 建立离散型随机变量的分布律时要经常灵活地使用这个技巧.

第十七章 二维随机变量及其概率分布

考试要求

1. 理解二维随机变量的概念,理解二维随机变量的联合分布的概念、性质,掌握离散型联合概率分布,边缘分布和条件分布,连续型联合概率密度、边缘密度和条件密度,会利用二维概率分布求有关事件的概率.
2. 理解随机变量的独立性及不相关概念,掌握离散型和连续型随机变量独立的条件.(本书将不相关归到下章中)
3. 掌握二维均匀分布,和二维正态分布,理解其中参数的概率意义.
4. 会求两个独立随机变量的简单函数的分布.

考试要点分析与题型分析

要会熟练地求离散型二维随机变量 (X, Y) 的联合分布,尤其是当 X, Y 都是只取二个可能取值的情况(见例1),它本质上还是求概率的问题.离散型二维随机变量的函数的分布律求法和一维随机变量的函数的分布律求法类似,也是用第十五章的方法求概率的问题(见例10、18、28).

连续型二维随机变量的任何概率论问题都是重点,而且它们的解决都要用积分,无论是求概率(见例12),求分布函数(见例5),求边缘概率密度(见例9、10),求随机变量函数的概率密度(见例20、21、22、27、28)和数字特征(见第十八章例12、13)等.所以必须切记解决上述问题相应的积分是几重积分,积分域是什么,被积表达式,具体的计算涉及考生的“积分”水平如何.

上述问题中积分的简化计算就显得非常重要.①如果 Z, Y 相互独立,则 $P\{X \in D_1, Y \in D_2\} = P\{X \in D_1\}P\{Y \in D_2\}$ (见例16). $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, $E(XY) = EX \cdot EY$ (见例16).这些计算就大大简化.②如果 X, Y 不仅独立,而且都服从正态分布,则很多求概率,简单函数的概率密度,数字特征就根本不用积分,只要进行四则运算即可(例23、24、25).所以拿到题目首先要看有没有四个字“独立 正态”,有时题目不告诉你 X, Y 独立,而只给出联合概率密度或联合分布函数,这时要能从它们的表达式看出 X, Y 是否相互独立(见例14、15、16).

讨论随机变量的独立性和不相关又是考研题中的一个常见题型,必须注意并熟练掌握它.

求二个相互独立的随机变量的函数的概率分布也是常见题型之一.

§ 17 - 1 二维随机变量及其分布

一、二维随机变量

设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega = \{e\}$, $X = X(e)$, $Y = Y(e)$ 是定义在 Ω 上的两个随机变量,称 (X, Y) 为二维随机变量或二维随机向量.

二、二维随机变量 (X, Y) 的(联合)分布函数

1. 设 (X, Y) 是二维随机变量,对于任何实数 x, y ,二元函数

$$F(x, y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) \stackrel{\Delta}{=} P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数,简称为分布函数.

2. 概率计算公式

$$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

三、二维离散型随机变量

1. 二维离散型随机变量

如果二维随机变量 (X, Y) 的所有可能取值数对是有限对或可列无限多对,则称 (X, Y) 为离散型的.

2. 二维离散型随机变量的联合概率分布

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的所有可能取值的数对为 (x_i, y_j) , $i, j = 1, 2, \dots$, 记 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$, 如果它满足

$$\textcircled{1} p_{ij} \geq 0 \quad \textcircled{2} \sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

则称 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$ 为二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合概率分布或联合分布律, 它也可以用列表法给出.

四、二维连续型随机变量

1. 二维连续型随机变量

设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 如果存在非负函数 $f(x, y)$, 使对于任意 x, y 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$$

则称 (X, Y) 是连续型二维随机变量, 函数 $f(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度, 或简称概率密度.

2. 联合概率密度的性质

$$(1) f(x, y) \geq 0$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1;$$

(3) 已知二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$$

其中 D 是 xOy 平面上的一个区域,

$$P\{a < g(X, Y) < b\} = \iint_{a < g(x, y) < b} f(x, y) dx dy$$

评述 上面第2式只是作为例子, 用来说明求用随机变量不等式表示的事件例如 $\{a < g(X, Y) < b\}$ 的概率时, 只要把不等式中的大写随机变量换成小写的积分变量, 所得的不等式 $\{a < g(x, y) < b\}$ 作为二重积分的积分域, 以联合概率密度 $f(x, y)$ 为被积函数的二重积分值即为该事件的概率.

3. 常见二维连续型随机变量分布

(1) (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ 的正态分布, 它的联合概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

(2) (X, Y) 在面积为 S_D 的区域 D 上服从均匀分布, 它的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

和在区间 (a, b) 上均匀分布的等可能性类似. 如随机点 (X, Y) 落在区域 D 内的任何子区域上的概率和子区域面积成正比, 而和子区域的位置无关, 则 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布.

二维均匀分布的性质: 设 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布, A 为 D 的子区域 (即 $A \subset D$), 则

$$P\{(X, Y) \in A\} = \frac{S_A}{S_D}$$

这就是考研题中常用的技巧: 用二维均匀分布求几何型概率或反过来用几何型概率求二维均匀分布的概率 (见例12, 例13和第十八章例11解四)

§ 17 - 2 二维随机变量的边缘分布及条件分布

一、联合分布函数与边缘分布函数的关系

设随机变量 X 和 Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则依次称为二维随机变量 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数.

如果已知二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 则 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, +\infty), F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

反之则不然, 已知 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数, 但不能求得联合分布函数.

二、联合分布律与边缘分布律的关系

随机变量 X 和 Y 的分布律分别称为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律. 如果已知 (X, Y) 的联合分布律为 $p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$, 则可求得边缘分布律:

(X, Y) 关于 X 的边缘分布律为

$$P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij} = p_{i\cdot}, i = 1, 2, \dots$$

(X, Y) 关于 Y 的边缘分布律为

$$P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij} = p_{\cdot j}, j = 1, 2, \dots$$

反之不然, 知道 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律, 不能得到 (X, Y) 的联合分布律.

三、联合概率密度与边缘概率密度的关系

设随机变量 X 和 Y 的概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则依次称它们为二维随机变量 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度.

如果已知二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

反之则不然, 知道 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 却不能确定联合概率密度 $f(x, y)$.

四、条件分布

1. 条件分布函数

设有二维随机变量 (X, Y) , 对任意固定的正数 ε , $P\{y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\} > 0$, 若极限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P\{X \leq x | y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P\{X \leq x, y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}}$$

存在, 则称此极限为在条件 $Y = y$ 下 X 的条件分布函数, 记为 $P\{X \leq x | Y = y\}$ 或 $F_{X|Y}(x | y)$.

2. 条件分布律

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 对于固定的 j , 若 $P\{Y = y_j\} > 0$, 则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i = 1, 2, \dots$$

为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

同样, 对固定的 i , 若 $P\{X = x_i\} > 0$, 则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, j = 1, 2, \dots$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

3. 条件概率密度

设二维连续型随机变量的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则在条件 $Y = y$ 下 X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x | y)$ 为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

在条件 $X = x$ 下 Y 的条件概率密度 $F_{Y|X}(y|x)$ 为

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

§ 17 - 3 随机变量的独立性

一、随机变量相互独立和它的充要条件

1. 设 $F(x,y)$, $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数及边缘分布函数, 如对于所有 x, y , 有

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

2. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为 p_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots$, 则“ X 和 Y 相互独立”的充要条件是“ $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ 对一切 $i, j = 1, 2, \dots$ 成立”.

3. 连续型随机变量的独立性

设 $f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别是 (X,Y) 的联合概率密度和边缘概率密度, 则 X 和 Y 相互独立的充要条件是对所有 x 和 y , 等式 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ 成立.

评述 拿到考题后首先要看随机变量是否独立. 当给出 $f(x,y)$ 或 $F(x,y)$ 时, 如何看出 X, Y 是否独立的技巧, 请参看例 14 的评述和例 15.

二、定理

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 把它们分成 k 个没有公共元素的组, 每个组产生一个新的随机变量, 则这 k 个新的随机变量相互独立.

例如, 如果 $X_1, X_2, \dots, X_5$ 相互独立, 则 X_1, X_2 和 $X_3^2 + 4X_4X_5$ 相互独立.

§ 17 - 4 两个随机变量简单函数的概率分布

一、二维离散型随机变量函数的概率分布

和一维情况类似, 求二维离散型随机变量函数的概率分布主要利用事件的分解及概率公式.

二、二维连续型随机变量函数的概率分布

1. 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 则随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx \stackrel{\text{或}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

特别地, 当随机变量 X 和 Y 相互独立, 且概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 时, 则随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx \stackrel{\text{或}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y) dy$$

2. 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 则随机变量 $Z = \frac{X}{Y}$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$$

特别地, 当随机变量 X 和 Y 相互独立, 且概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 时, 则随机变量 $Z = \frac{X}{Y}$ 的概率密度为

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz)f_Y(y)dy$$

评述 在应用 1.2 中的公式求独立随机变量之和或商的概率密度 $f_z(z)$ 的计算中,一般考生的难点在于不知怎么处理复合函数 $f_Y(z-x)$, $f_X(z-y)$ 或 $f_X(yz)$. 请看例 20 题解的每一步附注.

三、随机变量 $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$

研究生考题中经常出现有关随机变量 $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$ 的概率和概率分布的计算,它主要涉及下面 4 个必须熟记的事件等式:

$$\{\max(X, Y) \leq u\} = \{X \leq u\} \cap \{Y \leq u\}$$

$$\{\max(X, Y) > u\} = \{X > u\} \cup \{Y > u\}$$

$$\{\min(X, Y) \leq v\} = \{X \leq v\} \cup \{Y \leq v\}$$

$$\{\min(X, Y) > v\} = \{X > v\} \cap \{Y > v\}$$

四、正态随机变量的性质

1. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

2. 设随机变量 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 且相互独立, 则

$$\sum_{i=1}^n c_i X_i + c_0 \sim N\left(\sum_{i=1}^n c_i \mu_i + c_0, \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2\right)$$

3. 设 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ 的二维正态分布, 则:

① $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 即二维正态分布的边缘分布都是正态分布

② X, Y 相互独立的充要条件是 $\rho = 0$.

五、其它类型二维随机变量简单函数的概率分布

求其它类型随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的概率密度, 都先求分布函数 $F_Z(z)$, 关键用公式 $P\{g(X, Y) \leq z\} =$

$\iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$, 归结为求二重积分, 然后用求导得 $f_z(z)$.

评述 对连续型随机变量, 无论是概率论中什么运算, 求概率, 边缘概率密度, 独立随机变量之和的概率密度等等, 以及求数字特征(见下章)全都会用到积分, 唯独相互独立的正态随机变量的上述问题不用积分, 只要进行四则运算及查表即可. 而对离散型随机变量求概率, 分布律, 数字特征, ... 都归结为分析事件间关系及应用相应的概率公式求概率, 上述问题的计算只涉及 +、-、×、÷ 四则运算.

§ 17 - 5 典型例题分析与最新考试题型预测

例 1 (04, 13 分) 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生;} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生} \\ 0, & B \text{ 不发生} \end{cases}$$

求: (I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} ;

(III) $Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布.

解 (I) 首先要明确 (X, Y) 的可能取值数对为 $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$, 且

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P\{X=1, Y=0\} = P(\bar{A}B) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P(A\bar{B}) = P(B) - P(AB) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} - P(AB) = \frac{1}{12}$$

$$P\{X=0, Y=0\} = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}B) = (1 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$$

所以 (X, Y) 的联合分布律为

X \ Y	Y		$P\{X=x_i\}$
	0	1	
X	0	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
	1	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$P\{X=y_i\}$		$\frac{5}{6}$ $\frac{1}{6}$	

(II) (X, Y) 关于 X, Y 的边缘分布已在上表中算得

所以

$$EX = \frac{1}{4}, EX^2 = \frac{1}{4}, DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{16}$$

$$EY = \frac{1}{6}, EY^2 = \frac{1}{6}, DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{5}{36}$$

$$E(XY) = \frac{1}{12}, \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{1}{24}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

(III) Z 的可能取值为 0, 1, 2.

$$P\{Z=0\} = P\{X^2 + Y^2 = 0\} = P\{X=0, Y=0\} = \frac{2}{3}$$

$$P\{Z=1\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Z=2\} = P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{12}.$$

故 Z 的分布律为

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

评述 1. 又一次可见, 求二维离散型随机变量的联合分布律和求一维离散型随机变量的分布律一样, 都归结为用事件的运算和概率的基本公式求事件的概率问题.

2. 本题中用随机事件 (或随机变量) 来定义新的双值离散型随机变量, 这在研究考生题中经常出现, 例如 2002 年出现过如下考题: (02 分) 假设随机变量 U 在区间 $[-2, 2]$ 上服从均匀分布, 随机变量

$$X = \begin{cases} -1, & U \leq -1 \\ 1, & U > -1 \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & U \leq 1 \\ 1, & U > 1 \end{cases}$$

试求: (1) X 和 Y 的联合概率分布; (2) $D(X+Y)$.

例 2 (04, 13 分) 设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 内服从均匀分布, 在 $X=x(0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 内服从均匀分布. 求:

(I) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;

(II) Y 的概率密度;

(III) 概率 $P\{X+Y > 1\}$.

解 (I) X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, Y 的条件密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当 $0 < y < x$ 时, X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x},$$

在其它点 (x, y) 处, 有 $f(x, y) = 0$, 即

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(II) \text{ 当 } 0 < y < 1 \text{ 时 } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\ln y, \text{ 即}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(III) P\{X + Y > 1\} = \iint_{x+y>1} f(x, y) dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{1-x}^x \frac{1}{x} dy = 1 - \ln 2.$$

例 3 (06 4 分) 从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一个数记为 Y , 则 $P\{Y = 2\} =$ _____.

解 注意求事件 $\{Y = 2\}$ 的概率它必然和离散随机变量 X 有关, 而 X 是离散型随机变量, 此时求 $P\{Y = 2\}$ 必然是用全概率公式, 且完全事件组是由 $\{X = 1\}, \{X = 2\}, \{X = 3\}, \{X = 4\}$ 这 4 个事件组成, 故

$$\begin{aligned} P\{Y = 2\} &= \sum_{i=1}^4 P\{X = i\}P\{Y = 2 | X = i\} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{48}. \end{aligned}$$

例 4 (01 7 分) 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 $p (0 < p < 1)$, 且中途下车与否相互独立, 以 Y 表示中途下车的人数, 求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率;

(2) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

解 (1) 在发车时有 n 个乘客, 而每位乘客在中途下车与否相互独立 (即对每位乘客观察其是否下车的试验是相互独立的), 中途下车 (即事件 A) 的概率为 p , 所以 $Y \sim B(n, p)$.

故 $P\{Y = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \quad 0 \leq m \leq n, n = 0, 1, 2, \dots$

(2) (X, Y) 的联合分布律为

$$\begin{aligned} P\{X = n, Y = m\} &= P\{X = n\}P\{Y = m | X = n\} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \cdot C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \quad 0 \leq m \leq n, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

例 5 (05 4 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $P\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\}$.

$$\text{解 } P\{Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2}\} = \frac{P\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}\}}{P\{X \leq \frac{1}{2}\}}$$

$$= \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dx dy}{\int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dx dy} = \frac{3/16}{1/4} = \frac{3}{4}.$$

例6 (1) 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (X, Y) 的联合分布函数.

(2)* 已知离散随机变量 (X, Y) 的联合概率分布为

$$P\{X=0, Y=0\} = 0.3, P\{X=1, Y=1\} = 0.7$$

求 (X, Y) 的联合分布函数.

分析 把 (X, Y) 看成平面上的随机点坐标, 则 $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$ 表示随机点落在以 (x, y) 为顶点而位于该点左下方的无穷矩形闭域 (图17-1) 的概率. 对离散型 (X, Y) , 把 $F(x, y)$ 解释为以 (x, y) 为顶点而位于该点左下方的无穷矩形闭域上所有的概率质量.

解 (1) 当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时 (即 (x, y) 落在图17-2的区域 I) 时有

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = 0$$

当 $0 \leq x < 1$ 且 $0 \leq y < 1$ (即 (x, y) 落在区域 II) 时

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y 4uv du dv = x^2 y^2$$

当 $0 \leq x < 1$ 且 $y \geq 1$ (即 (x, y) 落在区域 III) 时

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^1 4uv du dv = x^2$$

当 $x \geq 1$ 且 $0 \leq y < 1$ (即 (x, y) 落在区域 IV) 时

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^y 4uv du dv = y^2$$

当 $x \geq 1$ 且 $y \geq 1$ (即 (x, y) 落在区域 V) 时

$$F(x, y) = 1$$

故 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0 \\ x^2 y^2, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ x^2, & 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ y^2, & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

(2) 和一维离散随机变量求分布函数一样, 本处 (X, Y) 的概率质量集中在 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 点 (图17-3). 由于是离散型, 所以必须注意自变量的取值范围: 什么地方有等号, 什么地方没等号.

当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时 (即 (x, y) 落在开区域 I 内)

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = 0$$

当 $0 \leq x < 1, y \geq 0$ 或 $x \geq 0, 0 \leq y < 1$ 时 (即 (x, y) 落在区域 II 内)

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= P\{X=0, Y=0\} = 0.3 \end{aligned}$$

当 $x \geq 1$ 且 $y \geq 1$ 时 (即 (x, y) 落在区域 III 内)

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=1\} = 1 \end{aligned}$$

故离散随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

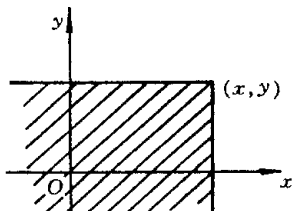


图17-1

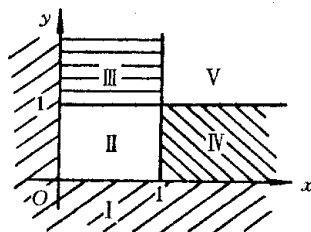


图17-2

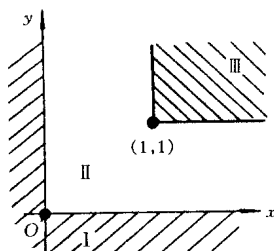


图17-3

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 1, y \geq 0 \text{ 或 } x \geq 0, 0 \leq y < 1 \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

评述 1. 连续型的情况(1)已考过,离散型的情况(2)没有考过,很有可能会考。

2. 无论离散型还是连续型,求联合分布函数时关键在于怎样把平面区域分成相应的几块区域.离散型的规则是在每个概率质量集中的点上分别向上、向右各作一条半直线,就可把平面分布所需的几块区域.进一步训练可见本章强化训练题第20题。

例7 (99 8分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,下表列出了二维随机变量 (X, Y) 联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值,试将其余8个数值填入表中的空白处。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X = x_i\} = p_{i\cdot}$
x_1	①	1/8	④	⑦
x_2	1/8	②	⑤	⑧
$P\{Y = y_j\} = p_{\cdot j}$	1/6	③	⑥	1

分析 首先思考8个空白处中可应用什么概念或什么关系式可将哪二个分别先求出来?

解 利用联合分布律和边缘分布律间的关系 $p_{ij} = \sum_i p_{ij}$, 可求得 ① 中的概率为 $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$. 也可以利用独立的充要条件 $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$, 先求出 ⑧ 中的概率为 $\frac{1}{8} \div \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$. ⑧ 求出后, 利用分布律性质 $\sum_i p_i = 1$, 可得 ⑦ 中的概率为 $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. 其余5个空白处都可以用上述三种方法之一得到, 最后得空白处 ① 到 ⑧ 中的概率分别为 $\frac{1}{24}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$.

例8 (99 3分) 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} (i = 1, 2)$, 且满足 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$,

则 $P\{X_1 = X_2\}$ 等于()

(A) 0; (B) $\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) 1.

解 $0 \leq P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} + P\{X_1 = -1, X_2 = 1\}$
 $+ P\{X_1 = 1, X_2 = -1\} + P\{X_1 = 1, X_2 = 1\}$
 $= P\{X_1 X_2 \neq 0\} = 1 - P\{X_1 X_2 = 0\} = 1 - 1 = 0.$

, $P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} = P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} = P\{X_1 = 1, X_2 = -1\} = P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = 0$

于是由已知条件可列出下表

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	$P\{X_1 = x_{1i}\} = p_{i\cdot}$
-1	0		0	$\frac{1}{4}$
0				$\frac{1}{2}$
1	0		0	$\frac{1}{4}$
$P\{X_2 = x_{2j}\} = p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

而 $P\{X_1 = 0, X_2 = -1\} = P\{X_2 = -1\} - P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} - P\{X_1 = 1, X_2 = -1\} = \frac{1}{4} - 0 - 0 = \frac{1}{4}.$

$$\begin{aligned} P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} &= P\{X_2 = -1\} - P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} - P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} \\ &= \frac{1}{4} - 0 - 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = P\{X_1 = 0\} - P\{X_1 = 0, X_2 = -1\} - P\{X_1 = 0, X_2 = -1\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

故 $P\{X_1 = X_2\} = P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} + P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} + P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = 0$.
即应选(A).

评述	此处记号 $X_i \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 等价于 X_i 的分布律为	X_i	-1	0	1
		p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

例9 (98 3分) 设平面区域D由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 及直线 $y = 0, x = 1, x = e^2$ 围成. 二维随机变量 (X, Y) 在区域D上服从均匀分布. 则 (X, Y) 关于X的边缘概率密度在 $x = 2$ 处的值为_____.

解 区域D的面积为 $S = \int_1^{e^2} \frac{dx}{x} = 2$. 故 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/2, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(X, Y) 关于X的边缘概率密度在 $1 \leq x \leq e^2$ 处为

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2x}$$

$$\text{故 } f_x(2) = \frac{1}{4}.$$

例10 (1) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} \rho < x < y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 ①X的概率密度 ② $P\{X + Y < 1\}$.

(2) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	-1	2	3
-2	0.1	0.25	0.1
-1	0.15	0.05	0.1
0	0.05	0.15	0.05

求 ①X的概率分布 ② $P\{X + Y < 1\}$.

解 (1) ① 当 $x > 0$ 时 $f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x}$; 当 $x \leq 0$ 时 $f_x(x) = 0$.

$$\text{② } P\{X + Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} e^{-y} dy = 1 - e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}} \text{ (如图 17-4)}.$$

$$(2) \text{① } X \text{ 的分布律为 } P\{X = -2\} = \sum_{j=1}^3 p_{1j} = 0.45, P\{X = -1\} = \sum_{j=1}^3 p_{2j} = 0.30, P\{X = 0\} = \sum_{j=1}^3 p_{3j} = 0.25.$$

$$\text{② } P\{X + Y < 1\} = P\{X = -2, Y = -1\} + P\{X = -2, Y = 2\} + P\{X = -1, Y = -1\} + P\{X = 0, Y = -1\} = 0.55.$$

评述 ① 求边缘分布和概率. 对连续型全涉及积分. 对离散型只涉及事件分解和概率加法运算.

② 本题(1)是1992年的考题. 在2003年的考题又出现. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{4}$. 可见此题型是最基本且必须掌握的.

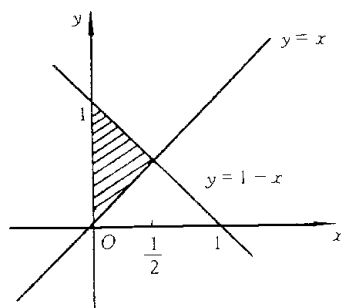


图 17 - 4

例 11 已知随机变量 X 和 Y 的概率分布为：

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 0)$	$(2, 1)$
$P\{X = x, Y = y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

试求：(1) X 的概率分布；(2) $X + Y$ 的概率分布。

解 (1) X 的可能取值为 0, 1, 2 相应的概率为

$$\begin{aligned} P\{X = 0\} &= P(\{X = 0, Y = 0\} \cup \{X = 0, Y = 1\}) \\ &= P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = 1\} = 0.25 \end{aligned}$$

同理可得 $P\{X = 1\} = 0.45$, $P\{X = 2\} = 0.30$, 于是 X 的概率分布为

X	0	1	2
p	0.25	0.45	0.30

(2) $X + Y$ 的可能取值为 0, 1, 2, 3 相应的概率为

$$P\{X + Y = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} = 0.10$$

$$P\{X + Y = 1\} = P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 0\} = 0.40$$

$$P\{X + Y = 2\} = P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 2, Y = 0\} = 0.35$$

$$P\{X + Y = 3\} = P\{X = 2, Y = 1\} = 0.15$$

故 $X + Y$ 的分布律为

ω	0	1	2	3
$P\{X + Y = \omega\}$	0.10	0.40	0.35	0.15

例 12 (1) 在区间 $[0, 9]$ 中随机地取 2 个数, 则事件“两数之和小于 12”的概率为_____。

(2) 在 0, 1, ..., 9 十个数字中随机取 2 个数字, 则事件“两数字之和小于 12”的概率为_____。

解 (1) 令 X_i 为第 i 次从 $[0, 9]$ 中随机取出的数 $i = 1, 2$, 则 X_1, X_2 独立同分布, 都服从 $[0, 9]$ 上的均匀分布, 所以 (X_1, X_2) 的联合概率密度(图 17-5)为

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{81} & 0 < x_1 < 9, 0 < x_2 < 9 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} P\{\text{两数之和小于 } 12\} &= P\{X_1 + X_2 < 12\} = \iint_{x_1 + x_2 < 12} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{\substack{x_1 + x_2 < 12 \\ 0 < x_1 < 9 \\ 0 < x_2 < 9}} \frac{1}{81} dx_1 dx_2 = \frac{1}{81} S_D = \frac{1}{81} \times (9^2 - \frac{1}{2} \times 6^2) = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

(2) 令 X_i 为第 i 次从 10 个数字中取出的数 $i = 1, 2$, (X_1, X_2 不独立)。

$$\begin{aligned} P\{\text{两数之和小于 } 12\} &= P\{X_1 + X_2 < 12\} = P\{X_1 + X_2 \leq 11\} = \sum_{i=0}^9 P\{X_1 = i, X_2 \leq 11 - i\} \\ &= \sum_{i=0}^9 P\{X_1 = i\} P\{X_2 \leq 11 - i | X_1 = i\} \\ &= 3 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{9} + \frac{1}{10} \times \frac{8}{9} + \frac{1}{10} \times \frac{7}{9} + 2 \\ &\quad \times \frac{1}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{1}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

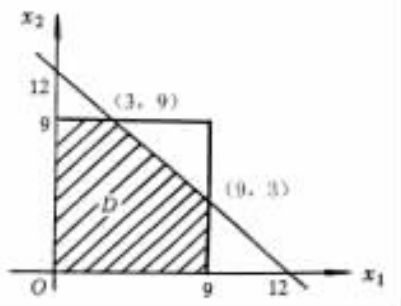


图 17-5

评述 第(1)小题可用几何型概率求. 随机地取出的二个数所得样本点记为 (x_1, x_2) , 则样本空间 $\Omega = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq 9, 0 \leq x_2 \leq 9\}$, 显然样本点 (x_1, x_2) 在样本空间 Ω 上具有均匀分布性质(实质即 (X_1, X_2) 在区域 $\{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq 9, 0 \leq x_2 \leq 9\}$ 上服从均匀分布). 事件“两数之和小于12”对应区域D. 现在区域的大小即为面积 S_D . 故按几何型概率计算公式有:

$$P\{\text{两数之和小于 } 12\} = \frac{S_D}{S_\Omega} = \frac{9 \times 9 - \frac{1}{2} \times 6^2}{9 \times 9} = \frac{7}{9}.$$

例 13 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为_____.

分析 例 12 中的事件用随机变量的不等式 $\{X_1 + X_2 < 12\}$ 表示方便, 而本题的事件用 $\{(X, Y) \in A\}$ 表示比较方便, 所以这两种表示方法都应熟练掌握.

解 令随机掷一点的坐标为 (X, Y) , 由均匀分布特性及题设知 (X, Y) 在区域 $\Omega = P\{(x, y) | 0 < y < \sqrt{2ax - x^2}\}$ 上服从均匀分布, 即其概率密度为:

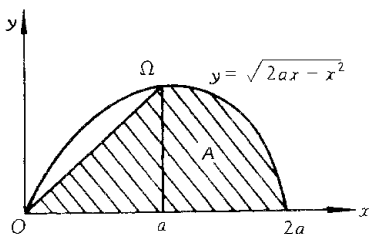


图 17 - 6

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2}, & (x, y) \in \Omega \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

所以参看(图 17 - 6)有

$$\begin{aligned} P\{\text{原点和随机点的连线与 } x \text{ 轴的夹角小于 } \pi/4\} \\ &= P\{(X, Y) \in A\} = \iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A \frac{2}{\pi a^2} dx dy \\ &= \frac{2}{\pi a^2} S_A = \frac{2}{\pi a^2} \left(\frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

评述 1. 本题由于 (X, Y) 在区域 $\Omega = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{2ax - x^2}\}$ 上服从均匀分布, 也就是样本点 (x, y) 在样本空间 $\Omega = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{2ax - x^2}\}$ 上具有均匀分布性质, 记事件 $\{\text{原点和该点的连线与 } x \text{ 轴的夹角小于 } \frac{\pi}{4}\}$ 对应区域为 A , 故由几何型概率计算公式得

$$P\{\text{原点和该点的连线与 } x \text{ 轴的夹角小于 } \frac{\pi}{4}\} = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{2}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$$

上两题都是求事件的概率, 由于是均匀分布, 所以既可以用公式 $P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy$

计算, 也可用几何型概率公式 $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$. 但要指出的是用前者的方法, 即用随机变量的方法要比几何概率方法更具有普遍性, 而且说理清楚, 一般都用前面一种方法. 用几何型概率必须弄清样本点在样本空间上具有均匀分布性质, 这很少用, 所以数学考研大纲中几次修改, 这次去掉, 下次又加上, 如此循环. 当我们弄清几何型概率完全可以用服从均匀分布的二维连续型随机变量的方法的本质后, 几何型概率完全可以不去管它. 但掌握均匀分布与几何型概率间关系后, 求前者的概率问题用后者方法求也很方便, 见第十八章例 11 解四.

2. 正如分析中指出的, 上二题主要让考生体会事件用随机变量表示时常见的二种表示方法: 类似 $\{X_1 + X_2 < 12\}$ 以及 $\{(X, Y) \in A\}$, 各有方便之处.

例 14 已知二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{9}{2}x^2y^2, & -1 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

问 X, Y 是否独立? 为什么?

解 当 $-1 < x < 1$ 时

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_x^1 \frac{9}{2}x^2y^2 dy = \frac{3}{2}x^2(1 - x^3)$$

即

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2(1 - x^3), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当 $-1 < y < 1$ 时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-1}^y \frac{9}{2}x^2y^2 dx = \frac{3}{2}y^2(y^3 + 1)$$

即

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2(y^3 + 1), & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由图 17-7 易知, 在 $-1 \leq y \leq x \leq 1$ 上 $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 所以 X, Y 不独立.

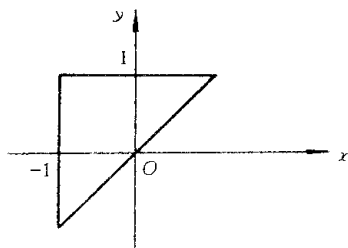


图 17-7

评述 由上面讨论可见, 当 $f(x, y) = \begin{cases} q(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 是分段函数时, 两个边缘概率密度也一定是分段函数:

$$f_X(x) = \begin{cases} h(x), & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} g(y), & c < y < d \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{如果 } X, Y \text{ 相互独立, 则必须满足}$$

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

对一切 x, y 成立. 由 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 知 $f(x, y) \neq 0$ 表达式 $q(x, y)$ 必须能分解为 x 的函数

$(f_X(x))$ 乘 y 的函数 $(f_Y(y))$ 的形式. 另一方面, $f_X(x)f_Y(y) \neq 0$ 的区域必定是“矩形”区域 $\{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ (“矩形”加引号, 是指 a, c 可为 $-\infty$, b, d 可分 $+\infty$), 故 $f(x, y) \neq 0$ 的区域 D 必须是“矩形”区域, 才有可能使 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 在一切 x, y 处成立. 综上所述, 拿到题目, 先看 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$ 的表达式, 如果满足

- 1° $f(x, y) \neq 0$ 的表达式能分解成 $f(x, y) = h(x)g(y)$,
- 2° $f(x, y) \neq 0$ 的区域 D 是“矩形”

则 X, Y 可能是独立的, 往独立方向去证 (“一般”的题目可证的确是独立的), 如果有一条不满足, 肯定可证是不独立的. 这里只是经验之谈, 不能代替 X, Y 是独立的证明. 例如本题由于 $f(x, y) \neq 0$ 的区域是三角形区域 $\{(x, y) : -1 \leq x \leq y \leq 1\}$, 不是“矩形”, 所以可知 X, Y 肯定不独立. 然后按题解的方式正规证明 X, Y 不独立.

例 15 已知 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{60}{29}(x^4 + \frac{x^2y}{4}), & |x| \leq 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

用上题评述中的方法估计 X, Y 是否独立?

分析 由于 $f(x, y) \neq 0$ 的表达式 $\frac{60}{29}(x^4 + \frac{x^2y}{4})$ 不能分解成 x 的函数乘 y 的函数, 所以可知 X, Y 肯定可以证明不独立. 解读者自己补上, 此处从略.

例 16 二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} - e^{-3y} + e^{-(2x+3y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) $E(X, Y)$ (2) $P\{\max(X, Y) > 1\}$

分析 现在给出 (X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y)$, 能否用类似于例14评述中的方法分析 X, Y 是否独立. 回答是可以的. 因为 $F(x, y)$ 和 $f(x, y)$ 都是二元函数, 而且

$$X, Y \text{ 独立} \Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \text{ 对一切 } x, y \text{ 成立}$$

$$X, Y \text{ 独立} \Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \text{ 对一切 } x, y \text{ 成立}$$

上面两种判别方法形式类似, 和例14类似, 可知当分段函数 $F(x, y)$ 满足

$$1^\circ F(x, y) \neq 0 \text{ 的表达式能分解为 } F(x, y) = h(x)g(y);$$

$$2^\circ F(x, y) \neq 0 \text{ 的区域为“矩形”}.$$

则 X, Y 估计是独立的. 如果有一条不满足, 则 X, Y 肯定不独立. 本题 $0 \neq F(x, y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y})$, 且 $F(x, y) \neq 0$ 的区域为“矩形” $(0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty)$, 可证明 X, Y 的确是相互独立, 且分别服从参数为2和3的指数分布. 因为当 $x > 0$ 时 $F_X(x) = 1 - e^{-2x}$, 它是 $\lambda = 2$ 的指数分布. 当 $y > 0$ 时 $F_Y(y) = 1 - e^{-3y}$, 它是 $\lambda = 3$ 的指数分布.

解 由 $F(x, y)$ 的表达式易证 X, Y 相互独立, 且分别服从参数为2和3的指数分布, 故

$$(1) E(X, Y) = EX \cdot EY = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} (2) P\{\max(X, Y) > 1\} &= P(\{X > 1\} \cup \{Y > 1\}) \\ &= P\{X > 1\} + P\{Y > 1\} - P\{X > 1\}P\{Y > 1\} \\ &= e^{-2} + e^{-3} - e^{-5} \end{aligned}$$

评述 如果看不出独立, 用一般方法做, 先由 $F(x, y)$ 求出 $f(x, y)$, 再代入公式 $E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dxdy$, $P\{X > 1, Y > 1\} = \iint_{\substack{x>1 \\ y>1}} f(x, y)dxdy$, 时间花了一大堆, 且很容易出错. 所以拿到题目后要善于分析, 识别 X, Y 是否独立!!

例17 (05, 4分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash \\ X \end{array}$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立, 则()

$$(A) a = 0.2, b = 0.3$$

$$(B) a = 0.4, b = 0.1$$

$$(C) a = 0.3, b = 0.2$$

$$(D) a = 0.1, b = 0.4$$

解 由二个事件相互独立得

$$P\{X = 0, X + Y = 1\} = P\{X = 0\} \cdot P\{X + Y = 1\}, \text{ 而}$$

$$P\{X = 0, X + Y = 1\} = P\{X = 0, Y = 1\} = a, P\{X = 0\} = 0.4 + a,$$

$$P\{X + Y = 1\} = P(\{X = 0, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y = 0\}) = a + b,$$

故应有 $a = (0.4 + a)(a + b)$. 显然只有选项(B)才满足此等式, 故应选(B).

例18 (99, 8分) 已知随机变量 X_1 和 X_2 的分布律分别为

$$X_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad X_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

而且 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$.

(1) 求 X_1 和 X_2 的联合分布; (2) 问 X_1 和 X_2 是否独立? 为什么?

解 (1) 由 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 得 $P\{X_1 X_2 \neq 0\} = 0$, 因为 $\{X_1 = -1, X_2 = 1\} \subset \{X_1 X_2 \neq 0\}$, 所以 $0 \leq P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} \leq P\{X_1 X_2 \neq 0\} = 0$, 故 $P\{X_1 = -1, X_2 = 0\} = 0$. 同理得 $P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = 0$. 又由已知 X_1, X_2 的分布律, 所以可写出下面有关概率:

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$P\{X_2 = y_j\} = p_{.j}$
0	①	②	④	1/2
1	0	③	0	1/2
$P\{X_1 = x_i\} = p_{i.}$	1/4	1/2	1/4	1

下面求空白处的概率. 由 $p_{1.} = p_{11} + p_{12}$ 可得 ① ④ 中的概率为 $\frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$; 由 $p_{.j} = p_{1j} + p_{2j} + p_{3j}$ 可得 ③ 中概率为 $\frac{1}{2} - 0 - 0 = \frac{1}{2}$, ② 中概率为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$.

(2) 由于联合分布律中有概率为 0 的, 因此用它可证

$$P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} = 0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = P\{X_1 = -1\}P\{X_2 = 1\}$$

故 X_1, X_2 不独立.

例 19 假设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且同分布 $P\{X_i = 0\} = 0.6, P\{X_i = 1\} = 0.4 (i = 1, 2, 3, 4)$, 求随机变量 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

解 离散型随机变量 $X = X_1X_4 - X_2X_3$ 的可能取值为 -1, 0, 1. 取这些值的概率分别为:

$$\begin{aligned} P\{X = -1\} &= P\{X_1X_4 - X_2X_3 = -1\} = P\{X_1X_4 = 0, X_2X_3 = 1\} \\ &= P\{X_1X_4 = 0\}P\{X_2X_3 = 1\} \quad (P\{X_1X_4 = 0\} \text{ 怎样计算最简单?}) \\ &= (1 - P\{X_1X_4 = 1\})P\{X_2 = 1, X_3 = 1\} \\ &= (1 - P\{X_1 = 1, X_4 = 1\})P\{X_2 = 1\}P\{X_3 = 1\} \\ &= (1 - 0.4^2) \times 0.4^2 = 0.1344 \end{aligned}$$

同理计算可得 $P\{X = 1\} = 0.1344$

$$P\{X = 0\} = 1 - P\{X = -1\} - P\{X = 1\} = 0.7312$$

于是 X 的概率分布为

X	-1	0	1
p	0.1344	0.7312	0.1344

评述 1. $P\{X_1X_4 = 0\}$ 的另一种算法是:

$$\begin{aligned} P\{X_1X_4 = 0\} &= P\{X_1 = 1, X_4 = 0\} \cup \{X_1 = 0, X_4 = 1\} \cup \{X_1 = 0, X_4 = 0\} \\ &= P\{X_1 = 1, X_4 = 0\} + P\{X_1 = 0, X_4 = 1\} + P\{X_1 = 0, X_4 = 0\} \\ &= P\{X_1 = 1\}P\{X_4 = 0\} + P\{X_1 = 0\}P\{X_4 = 1\} + P\{X_1 = 0\}P\{X_4 = 0\} \\ &= 0.4 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 + 0.6 \times 0.6 = 0.7312 \end{aligned}$$

不如我们题解中用 $1 - P\{X_1X_4 = 1\}$ 的方法简便. 关键是在求概率之前先要考虑 $P(A)$ 还是 $P(\bar{A})$ 容易算. 如果 $P(\bar{A})$ 易算, 则用公式 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ 就显得简单.

2. 再一次说明求离散型随机变量函数的分布律时, 不管函数怎么复杂, 求分布律总是二大步, 第一步看出离散型随机变量函数的可能取值, 第二步求随机变量取这些值的概率, 而第二步主要要熟练掌握事件的运算和概率的计算公式. 最后说一句关键性的话: 考查学生事件的运算和概率计算公式是否熟练掌握不是通过求古典型概率, 几何型概率, 而是通过求离散型随机变量或它的函数的分布律来体现.

3. 求连续型随机变量的函数的概率密度时, 解决的办法和思路 and 上面离散型时的情形完全不同, 请仔细体会.

例 20 已知随机变量 X 和 Y 独立, 它们的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解法一 应用求独立随机变量之和的概率密度的公式

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y)f_y(y)dy \quad (\text{先将简单函数 } f_y(y) \text{ 表达式代入})$$

$$= \int_0^{+\infty} f_x(z-y)\lambda e^{-\lambda y}dy \quad (\text{下面讨论复合函数 } f_x(z-y))$$

$$\left(\text{其中 } f_x(z-y) = \begin{cases} 2(z-y) & 0 \leq z-y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 2(z-y) & z-1 \leq y \leq z \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \right)$$

评述 关键把分段函数 $f_x(z-y)$ 表达式中积分变量 y 的取值范围解出来. 下面根据暂时取定的 z 的取值范围, 讨论 $(0, +\infty)$ 上那一部分的 y 满足 $z-1 \leq y \leq z$, 或即那一部分的 y 落在区间 $[z-1, z]$, 则相应的 $f_x(z-y) = 2(z-y)$, 否则 $f_x(z-y) = 0$, 以此决定积分要分成几个区间的积分之和. 画下图 17-8 就更清楚了.

$$\text{当 } z < 0 \text{ 时 } f_z(z) = \int_0^{+\infty} 0 \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy = 0$$

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时 } f_z(z) = \int_0^z 2(z-y)\lambda e^{-\lambda y} dy + \int_z^{+\infty} 0 \cdot dy = 2 \left[\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda z} - 1) + z \right]$$

$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时 } f_z(z) = \int_0^{z-1} 0 \cdot dy + \int_{z-1}^z 2(z-y)\lambda e^{-\lambda y} dy + \int_z^{+\infty} 0 \cdot dy$$

$$= 2 \left[e^{-\lambda(z-1)} + \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda z} - e^{-\lambda(z-1)}) \right]$$

$$\text{故 } f_z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 2 \left[\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda z} - 1) + z \right], & 0 \leq z < 1 \\ 2 \left[e^{-\lambda(z-1)} + \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda z} - e^{-\lambda(z-1)}) \right], & z \geq 1 \end{cases}$$

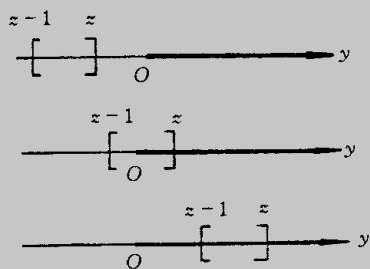


图 17-8 例 20 题图(1)

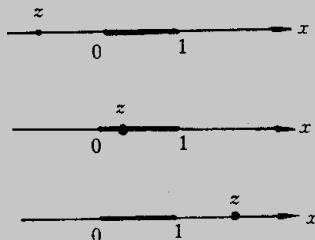


图 17-9 例 20 题图(2)

解法二 用求独立随机变量之和的概率密度的另一个公式

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)f_y(z-x)dx = \int_0^1 2xf_y(z-x)dx$$

$$\left(\text{其中 } f_y(z-x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(z-x)} & z-x \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(z-x)} & x \leq z \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \right)$$

$$\text{当 } z < 0 \text{ 时, 参看(图 17-9) 有 } f_z(z) = \int_0^1 2x \cdot 0 \cdot dx = 0$$

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时 } f_z(z) = \int_0^z 2x\lambda e^{-\lambda(z-x)} dx + \int_z^1 0 \cdot dx = 2 \left[\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda z} - 1) + z \right]$$

$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时 } f_z(z) = \int_0^1 2x\lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = 2 \left[e^{-\lambda(z-1)} + \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda z} - e^{-\lambda(z-1)}) \right]$$

解法三 用先求 $Z = X + Y$ 的分布函数 $F_z(z)$ 再求得 $f_z(z)$ 的方法.

$$F_z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f_x(x)f_y(y)dx dy$$

当 $z < 0$ 时, 参看(图 17-10) 有

$$F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} 0 \cdot dx dy = 0.$$

当 $0 \leq z < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^z dx \int_0^{z-x} 2x \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_0^z 2x(1 - e^{-\lambda(z-x)}) dx \\ &= z^2 - \frac{2}{\lambda} \left[z - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda z}) \right] \end{aligned}$$

当 $z \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^1 dx \int_0^{z-x} 2x \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_0^1 2x(1 - e^{-\lambda(z-x)}) dx \\ &= 1 - \frac{2}{\lambda} \left[e^{-\lambda(z-1)} - \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda(z-1)} - e^{-\lambda z}) \right] \end{aligned}$$

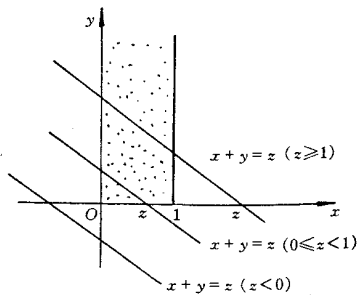


图 17-10

即

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z^2 - \frac{2}{\lambda} \left[z - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda z}) \right], & 0 \leq z < 1 \\ 1 - \frac{2}{\lambda} \left[e^{-\lambda(z-1)} - \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda(z-1)} - e^{-\lambda z}) \right], & z \geq 1 \end{cases}$$

利用在 $f_z(z)$ 的连续点处 $f_z(z) = F'_z(z)$ 得 $f_z(z)$ 表达式与解一相同.

评述 1. 由上面 3 种解法可见,前 2 种解法比第 3 种解法简单,前者只要求单积分,后者要求重积分,也就是能用独立随机变量之和及之商的公式计算时尽量用公式计算,这样计算简单、清楚.用前 2 种解法即公式法求 $f_z(z)$ 的关键在于复合函数的讨论以及代入公式时积分要分成几个积分之和.

2. 求独立随机变量之商 $Z = \frac{X}{Y}$ 的概率密度也有现成公式,具体计算中要注意的事项完全和本题类似.

例 21 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + 2Y$ 的概率密度.

分析 本题中有没有“独立”,“正态”,但注意到 $f(x, y)$ 的特点:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x} \cdot 2e^{-2y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

根据本章例 14 的评述中介绍的方法知,可证 X, Y 独立,且分别服从参数为 1 和 2 的指数分布.

解法一 容易证明 X, Y 相互独立,且分别服从参数为 1 和 2 的指数分布.

令 $W = 2Y$,由 Y 服从 $\lambda = 2$ 的指数分布,利用 §16-3 中的定理,经计算可得

$$f_W(\omega) = \begin{cases} e^{-\omega}, & \omega > 0 \\ 0, & \omega \leq 0 \end{cases}$$

且 X 和 W 独立,所以 $Z = X + W$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_W(z-x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} f_W(z-x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \int_0^z e^{-x} \cdot e^{-(z-x)} dx, & z > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ ze^{-z}, & z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解法二 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + 2Y \leq z\} = \iint_{x+2y \leq z} f(x, y) dx dy$

$$= \begin{cases} \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)} dy, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-z} - ze^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

故 $Z = X + 2Y$ 的概率密度为

$$f_z(z) = \begin{cases} ze^{-z} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

例 22 (03, 13 分) 设随机变量 X 与 Y 独立, 其中 X 的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

而 Y 的概率密度为 $f(y)$, 求随机变量 $U = X + Y$ 的概率密度 $g(u)$.

解 注意 $\{X = 1\}$ 和 $\{X = 2\}$ 构成完全事件组, 应用全概率公式得 U 的分布函数为

$$\begin{aligned} G(u) &= P\{U \leq u\} = P\{X + Y \leq u\} \\ &= P\{X = 1\}P\{X + Y \leq u \mid X = 1\} + P\{X = 2\}P\{X + Y \leq u \mid X = 2\} \\ &= P\{X = 1\}P\{Y \leq u - 1 \mid X = 1\} + P\{X = 2\}P\{Y \leq u - 2 \mid X = 2\} \\ &= 0.3P\{Y \leq u - 1\} + 0.7P\{Y \leq u - 2\} \\ &= 0.3F_Y(u - 1) + 0.7F_Y(u - 2) \end{aligned}$$

故 $g(u) = \frac{dG(u)}{du} = 0.3f(u - 1) + 0.7f(u - 2)$

评注 求 $U = X + Y$ 的分布, 当 X 和 Y 都是连续型分布时, 考题曾出现过, 自己要学会改题, 如果 X 和 Y 都改成离散型分布该怎么做, 如果改成一个是连续型和一个离散型时又该怎么做 (上章例 10 也属于这种类型). 自己学会变题后, 或做过了上章例 10 后, 这个考题做起来就非常顺手.

例 23 设随机变量 X 与 Y 独立, X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, Y 服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布, 求 $Z = X + Y$ 的概率分布密度 (计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示).

分析 本题中有 X 和 Y “独立”, 有 X 服从“正态”分布, 但 Y 不是正态变量. 正因为 X 是正态随机变量, 所以由公式 $F_X(\alpha) = \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$ 说明最后结果可以用 Φ 表示, 反过来说, 前面结果一定要用 F_X 表示.

解 $f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx$

$$\begin{aligned} \left[\text{其中 } f_Y(z - x) &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi < z - x < \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & z - \pi < x < z + \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{z-\pi} 0 \cdot dx + \int_{z-\pi}^{z+\pi} f_X(x) \cdot \frac{1}{2\pi} dx + \int_{z+\pi}^{+\infty} 0 \cdot dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{z-\pi}^{z+\pi} f_X(x) dx = \frac{1}{2\pi} (F_X(z + \pi) - F_X(z - \pi)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\Phi\left(\frac{z + \pi - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{z - \pi - \mu}{\sigma}\right) \right) \end{aligned}$$

评述 注意本题涉及正态随机变量 X 的概率密度时, 只用 $f_X(x)$ 表示, 而没将 $N(\mu, \sigma^2)$ 的概率密度具体表达式代入, 这是一个技巧, 因为 X 是正态变量, 所以

$$\int_{-\infty}^x f_X(x) dx = F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

可见虽然没把 $f_X(x)$ 具体表达式代入, 但上面等式显然是人人都承认的, 这种表达的最大优点是简捷明确. 希望做题时注意正态概率密度尽量先用 $f_X(x)$, 直到不具体代入表达式无法往下算时才把具体表达式代入, 再参看第十八章例 17 可进一步体会.

例 24 设随机变量 X 与 Y 独立, 且 X 服从均值为 1 标准差 (均方差) 为 $\sqrt{2}$ 的正态分布, 而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度函数.

分析 本题有 X 和 Y “独立”, 且有“正态”分布, 注意本题中所有有关的随机变量都服从正态分布, 这时可用正态分布的性质.

解 因为 X 和 Y 独立, 且 $X \sim N(1, \sqrt{2})$, $Y \sim N(0, 1)$, 所以 $Z = 2X - Y + 3$ 服从正态分布, 而且

$$E(Z) = E(2X - Y + 3) = 2E(X) - E(Y) + 3 = 2 \times 1 - 0 + 3 = 5$$

$$D(Z) = D(2X - Y + 3) = 4D(X) + D(Y) = 4 \times 2 + 1 = 9$$

即 $Z \sim N(5, 9)$, 所以

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 3} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}, -\infty < z < +\infty$$

例 25 (99.3 分) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0, 1)$ 和 $N(1, 1)$, 则().

(A) $P\{X + Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ (B) $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$

(C) $P\{X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ (D) $P\{X - Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$

解 因为 X, Y 是独立的正态随机变量, 所以 $X + Y \sim N(1, 2)$, $X - Y \sim N(-1, 2)$, 于是

$$P\{X + Y \leq 0\} = F_{X+Y}(0) = \Phi\left(\frac{0-1}{\sqrt{2}}\right) \neq 0.5$$

$$P\{X + Y \leq 1\} = F_{X+Y}(1) = \Phi\left(\frac{1-1}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(0) = 0.5$$

故应选(B)

评述 正态随机变量的概率计算及它的性质是个重点.

例 26* 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 其概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{4\pi}}$$

求(1) $P\{2X \leq Y\}$;

(2) 随机点 (X, Y) 落在区域 $G: \pi \leq (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4\pi$ 内的概率.

分析 由于 (X, Y) 服从二维正态分布, 所以马上要看出 5 个参数的取值, 以及它的性质, 尤其注意求概率 $P\{2X \leq Y\}$, 如下式求

$$P\{2X \leq Y\} = \iint_{2x \leq y} f(x, y) dx dy$$

就很繁, 如注意 X, Y 均为正态分布, 且相互独立, 故 $2X - Y$ 也服从正态分布, 计算就简单.

解 由 $f(x, y)$ 知 $X \sim N(1, 2\pi)$, $Y \sim N(2, 2\pi)$, 且 $\rho = 0$, 故 X, Y 独立, 所以 $Z = 2X - Y \sim N(0, 10\pi)$

$$(1) P\{2X \leq Y\} = P\{Z \leq 0\} = F_Z(0) = \Phi\left(\frac{0-0}{\sqrt{10\pi}}\right) = \Phi(0) = 0.5$$

$$(2) P\{(X, Y) \in G\} = \iint_{(x, y) \in G} f(x, y) dx dy = \iint_{\pi \leq (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4\pi} \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{4\pi}} dx dy$$

令 $x-1 = r\cos\theta$, $y-2 = r\sin\theta$, 则得

$$P\{(X, Y) \in G\} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{r^2}{4\pi}} r dr = \left(-e^{-\frac{r^2}{4\pi}}\right) \Big|_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{4\pi}} = e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1}$$

例 27 (02.8 分) 假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布, 平均无故障工作的时间 $E(X)$ 为 5 小时, 设备定时开机, 出现故障时自动关机, 而在无故障的情况下工作 2 小时便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.

评述 要求的随机变量 Y 定义不明确, 几乎和 X 没有区别, 所以估计绝大部分学生不会做. 最后一句话应该为“试求该设备每次开机后直到关机的时间 Y 的分布函数 $F(y)$ ”.

解 设指数分布的 X 的参数为 λ , 由 $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$, 可得 $\lambda = \frac{1}{5}$, 显然 $Y = \min\{X, 2\}$.

当 $y < 0$ 时, $F(y) = P\{\min(X, 2) \leq y\} = P\{X < y\} = 0$.

当 $0 \leq y < 2$ 时, $F(y) = P\{\min(X, 2) \leq y\} = P\{X \leq y\} = 1 - e^{-\frac{1}{5}y}$.

当 $y \geq 2$ 时, $F(y) = P\{\min(X, 2) \leq y\} = P(\Omega) = 1$.

故 Y 的分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{5}y}, & 0 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

评述 1. 本题和 1999 年的如下考题:

假设随机变量 X 服从指数分布, 则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数().

- (A) 是连续函数 (B) 至少有两个间断点
(C) 是阶梯函数 (D) 恰好有一个间断点

完全是同一个题目, 只是两种不同的提法. 这类以前考过的题目改头换面再出一次的考研题很多, 所以对以前考过的题目必须真正掌握, 做到举一反三.

2. 此题中的随机变量既不是离散型, 也不是连续型, 属于工科概率论教材中没提到的第三种类型的随机变量, 对它的研究既不能用分布律, 也不能用概率密度, 只能用分布函数, 且它的分布函数既不是阶梯函数, 也不是连续函数. 由于主要考事件的运算和概率的基本公式, 这类考题都要会做.

例 28 (99 9 分) 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$.

解 二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

显然边的长度 X, Y 非负的, 所以当 $s < 0$ 时

$$F_S(s) = P\{S \leq s\} = P\{XY \leq s\} = P(\emptyset) = 0$$

当 $0 \leq s < 2$ 时, 参看 (图 17-11)

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P\{S \leq s\} = P\{XY \leq s\} \\ &= 1 - P\{XY > s\} = 1 - \iint_{xy > s} f(x, y) dx dy \\ &= 1 - \int_s^2 \int_{\frac{s}{x}}^1 \frac{1}{2} dy dx = \frac{s}{2} (1 + \ln 2 - \ln s) \end{aligned}$$

当 $s \geq 2$ 时

$$F_S(s) = P\{XY \leq s\} = \iint_{xy \leq s} f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^1 \frac{1}{2} dy = 1$$

于是由 $f_S(s) = F'_S(s)$ 得 S 的概率密度为

$$f_S(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln s), & 0 < s < 2, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 29 (01 8 分) 设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$ 上的均匀分布, 试求随机变量 $U = |X - Y|$ 的概率密度 $p(u)$.

分析 求随机变量 $U = |X - Y|$ 的概率密度没有公式可代, 所以只能用一般办法即先求 U 的分布函数 $F_U(u)$, 然后求得 $p(u)$.

解 已知 X 和 Y 的联合概率密度 (图 17-12) 为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当 $u \leq 0$ 时,

$$F_U(u) = P\{U \leq u\} = P\{|X - Y| \leq u\} = P(\emptyset) = 0$$

当 $0 < u < 2$ 时,

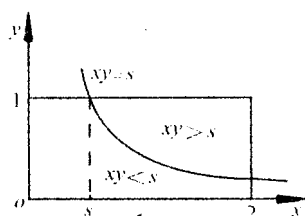


图 17-11

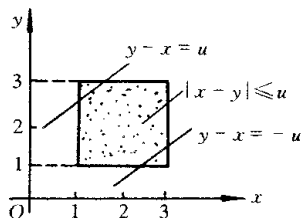


图 17-12

$$F(u) = P\{|X - Y| \leq u\} = \iint_{|x-y| \leq u} f(x, y) dx dy = \iint_{|x-y| \leq u} \frac{1}{4} dx dy = 1 - \frac{1}{4}(2-u)^2$$

当 $u \geq 2$ 时 $F(u) = P\{|X - Y| \leq u\} = P(\Omega) = 1$

于是, 随机变量 U 的概率密度为

$$p(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-u), & 0 < u < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 30 (96 6 分) 设 ξ, η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量, 已知 ξ 的分布律为 $P\{\xi = i\} = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, 又设 $X = \max\{\xi, \eta\}$, $Y = \min\{\xi, \eta\}$.

(1) 写出二维随机变量 (X, Y) 的分布律; (2) 求随机变量 X 的数学期望

解 (1) (X, Y) 的可能取值数对共有 9 对, 其概率分别为:

当 $i < j$ 时 $P\{X = i, Y = j\} = P(\emptyset) = 0$;

当 $i > j$ 时 $P\{X = i, Y = j\} = P\{\max\{\xi, \eta\} = i, \min\{\xi, \eta\} = j\}$

$$= P(\{\xi = i, \eta = j\} \cup \{\xi = j, \eta = i\}) = P\{\xi = i, \eta = j\} + P\{\xi = j, \eta = i\}$$

$$= P\{\xi = i\}P\{\eta = j\} + P\{\xi = j\}P\{\eta = i\} = \frac{2}{9}$$

当 $i = j$ 时 $P\{X = i, Y = i\} = P\{\max(\xi, \eta) = i, \min(\xi, \eta) = i\}$

$$= P\{\xi = i, \eta = i\} = P\{\xi = i\}P\{\eta = i\} = \frac{1}{9} \quad i = 1, 2, 3$$

故 (X, Y) 的分布律为

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	1	2	3
1	1/9	2/9	2/9
2	0	1/9	2/9
3	0	0	1/9

(2) X 的分布律为

X	1	2	3
p	1/9	3/9	5/9

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{3}{9} + 3 \times \frac{5}{9} = \frac{22}{9}$$

评述 涉及随机变量 $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ 的概率及数学期望的计算考研题中经常出现.

例 31 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 服从参数分别为 λ_1 和 λ_2 的指数分布, 求随机变量 $Y = \min(X_1, X_2)$ 的概率密度.

解 $F_Y(y) = P\{\min(X_1, X_2) \leq y\} = 1 - P\{\min(X_1, X_2) > y\}$

$$= 1 - P(\{X_1 > y\} \cap \{X_2 > y\}) = 1 - P\{X_1 > y\}P\{X_2 > y\}$$

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 1 - 1 \times 1 = 0$

当 $y > 0$ 时 $F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda_1 y} \cdot e^{-\lambda_2 y} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y}$

故

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y}, & y > 0 \end{cases}$$

即 $Y = \min(X_1, X_2)$ 仍然服从指数分布, 参数为 $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

评述 上二题中 X 和 Y 改为一个是连续型分布, 另一个是离散型, 又该怎么求 $\min(X, Y)$ 的分布, 自己编题做.

例 32 (06 4 分) 设随机变量 X 与 Y 独立, 且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} =$ _____.

解 $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = P\{X \leq 1, Y \leq 1\}$

$$= P\{X \leq 1\}P\{Y \leq 1\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

预测·强化训练十七

1. 设 $F(x)$ 和 $G(y)$ 分别是随机变量 X 和 Y 的分布函数, 则下列函数中不是某个随机变量的分布函数是 ()

(A) $3F(x) - 2G(x)$ (B) $\frac{1}{4}F(x) + \frac{3}{4}G(x)$

(C) $F(x)G(x)$ (D) $F(2x+1)$

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是随机变量 X 和 Y 的概率密度, 则下列函数中能作为某个随机变量的概率密度是 ()

(A) $f(x)g(x)$ (B) $\frac{3}{5}f(x) + \frac{2}{5}g(x)$

(C) $4f(x) - 3g(x)$ (D) $2f(x) + g(x) - 2$

3. 已知二维随机变量 (X, Y) 的概率分布如下, 则 X 和 Y 相互独立的是 ()

(A)

Y	-1	0	3
X			
-3	0.2	0.1	0.1
1	0.3	0.1	0.2

(B) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(C) $f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(D) (X, Y) 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布

4*. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 (X, Y) 为 ()

(A) 独立同分布

(B) 独立不同分布

(C) 不独立但同分布

(D) 不独立也不同分布

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim N(2, 3)$, $Y \sim N(3, 5)$, 则随机变量 $Z = 3X - 2Y + 4$ 的概率密度 $f_Z(z)$ = _____.

6*. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 且都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 则关于 x 的方程 $x^2 + Xx + Y = 0$ 有实根的概率为 _____.

7. 设某种元件寿命服从指数分布, 且平均寿命为 400 小时, 则 4 个独立工作的这种元件工作了 800 小时至少有一个损坏的概率为 _____.

8*. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 4)$, Y 的分布律为

Y	1	2	3
p	0.2	0.5	0.3

则 $P\{X + 2Y \leq 4\} = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知 $\Phi(1) = 0.8413$).

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

(X, Y)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)	(3, 1)	(3, 2)
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	α	$\frac{1}{18}$	β

且 X 和 Y 相互独立, 则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且它们的分布律为

X	0	1	2
p	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2	3
p	1/4	1/8	1/4	3/8

则随机变量 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布律为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda = 1$ 的指数分布, 随机变量

$$X_k = \begin{cases} 0 & \text{若 } Y \leq k \\ 1 & \text{若 } Y > k \end{cases} \quad (k = 1, 2)$$

求 X_1 和 X_2 的联合概率分布.

12*. 甲、乙两厂生产同类的产品, 它们的寿命分别为 X 和 Y , 相互独立, 概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-460)^2}{3200}}$$
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{360}{y^2}, & y > 360 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

假定产品寿命超过 460 小时才算合格. 今从两厂的产品中各取一件, 问其中至少有一件不合格的概率为多少?

13*. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{4\pi}}$$

求 (1) $P\{2X \leq Y\}$ (2) $E(XY)$.

14*. 设随机变量 X, Y 相互独立, 已知 X 的分布律为 $P\{X = x_i\} = a_i, i = 1, 2, Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)$ 已知, 试求 $Z = X + 2Y$ 的分布函数.

15. 设 X, Y 是相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布的随机变量, 求随机变量 $Z = \frac{X+Y}{Y}$ 的概率密度.

16*. 已知二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

求 $Z = \max(|X|, |Y|)$ 的概率密度.

17*. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且都服从区间 $[0, a]$ 上的均匀分布, 求随机变量 $Z = |X - Y|$ 的概率密度.

18*. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

X \ Y	2	3
0	α	0.3
1	0.2	β

记

$$Z = \begin{cases} 1, & X + Y \text{ 为偶数} \\ 0, & X + Y \text{ 为奇数} \end{cases}$$

求 (1) Z 的概率分布;

(2) (X, Z) 的联合概率分布;

(3) 当 α, β 取何值时, 能使 X 和 Z 相互独立.

19. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{7}(1 + y + xy), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

判断 X, Y 是否相互独立? 为什么?

20. (1) 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x, y)$.

(2) 已知二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

(x, y)	$(0, 1)$	$(3, 0)$	$(2, -2)$
$P\{X = x, Y = y\}$	0.2	0.1	0.7

求 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x, y)$.

21. 设二维随机变量 (X, Y) 只可能取数对 $(0, 0), (-1, 1), (-1, \frac{1}{3}), (2, 0)$, 且取这些数对的概率依次为

$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}$, 问 X 和 Y 是否相互独立? 为什么?

22*. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4}, & |x| < 1, |y| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

证明: (1) X 与 Y 不独立, 但 X^2 与 Y^2 是相互独立的.

(2) $|X|$ 和 $|Y|$ 是相互独立的.

简明解答

1. (A) 2. (B) 3. (C) 4. (C)

5. $\frac{1}{\sqrt{94\pi}} e^{-\frac{(z-4)^2}{94}}$ 因为 $Z \sim N(4, 47)$

6. $\frac{1}{12}$ $P\{\text{有实根}\} = P\{X^2 - 4Y \geq 0\} = \iint_{x^2 - 4y \geq 0} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}$

7. e^{-2}

8. 0.46587 $P\{X + 2Y \leq 4\} = \sum_{i=1}^3 P\{Y = i\} P\{X + 2Y \leq 4 | Y = i\} = \sum_{i=1}^3 P\{Y = i\} P\{X \leq 4 - 2i | Y = i\}$
 $= \sum_{i=1}^3 P\{Y = i\} P\{X \leq 4 - 2i\} = 0.2F_X(2) + 0.5F_X(0) + 0.3F_X(-2)$
 $= 0.2\Phi(1) + 0.5\Phi(0) + 0.3\Phi(-1)$
 $= 0.55 - 0.1\Phi(1) = 0.46587$

9. $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}$

10.

Z	0	1	2	3
p	1/8	3/16	5/16	3/8

例如 $P\{Z = 1\} = P\{\max(X, Y) = 1\} = P(\{X = 0, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y \leq 1\})$

$$\begin{aligned}
 &= P\{X=0\}P\{Y=1\} + P\{X=1\}P\{Y\leq 1\} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}
 \end{aligned}$$

11. 首先要明确 (X_1, X_2) 的可能取值数对为 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, 且

$$P\{X_1=0, X_2=0\} = P\{Y\leq 1, Y\leq 2\} = P\{Y\leq 1\} = F_Y(1) = 1 - e^{-1}$$

$$P\{X_1=0, X_2=1\} = P\{Y\leq 1, Y>2\} = P(\emptyset) = 0$$

$$P\{X_1=1, X_2=0\} = P\{Y>1, Y\leq 2\} = P\{1 < Y\leq 2\} = F_Y(2) - F_Y(1) = e^{-1} - e^{-2}$$

$$P\{X_1=1, X_2=1\} = P\{Y>1, Y>2\} = P\{Y>2\} = 1 - F_Y(2) = e^{-2}$$

所以 (X_1, X_2) 的联合分布律为

$X_2 \backslash X_1$	0	1
0	$1 - e^{-1}$	$e^{-1} - e^{-2}$
1	0	e^{-2}

12. $P\{\text{至少有一件不合格}\} = 1 - P\{\text{两件都合格}\} = 1 - P\{X \geq 460\}P\{Y \geq 460\}$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - (1 - F_X(460)) \int_{460}^{+\infty} \frac{360}{y^2} dy = 1 - (1 - \Phi(\frac{460-460}{40}))(-\frac{360}{y}) \Big|_{460}^{+\infty} \\
 &= 1 - (1 - 0.5) \cdot \frac{360}{460} = \frac{14}{23}
 \end{aligned}$$

13. 显然 $(X, Y) \sim N(1, 2, 2\pi, 2\pi, \rho)$, 因此 $X \sim N(1, 2\pi), Y \sim N(2, 2\pi)$, 由 $\rho=0$ 知 X, Y 相互独立.

(1) $Z = 2X - Y \sim N(0, 9\pi)$ 因此

$$P\{2X \leq Y\} = P\{2X - Y \leq 0\} = F_Z(0) = \Phi(\frac{0-0}{3\sqrt{\pi}}) = 0.5$$

(2) $E(XY) = EX \cdot EY = 1 \times 2 = 2$

14. $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}$ 构成完全事件组, 故

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= P\{X + 2Y \leq z\} \\
 &= P\{X = x_1\}P\{X + 2Y \leq z | X = x_1\} + P\{X = x_2\}P\{X + 2Y \leq z | X = x_2\} \\
 &= a_1 P\{Y \leq \frac{1}{2}(z - x_1) | X = x_1\} + a_2 P\{Y \leq \frac{1}{2}(z - x_2) | X = x_2\} \\
 &= a_1 P\{Y \leq \frac{1}{2}(z - x_1)\} + a_2 P\{Y \leq \frac{1}{2}(z - x_2)\} = a_1 \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}(z-x_1)} f_Y(y) dy + a_2 \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}(z-x_2)} f_Y(y) dy
 \end{aligned}$$

15. $Z = 1 + \frac{X}{Y}$, 令 $W = \frac{X}{Y}$, 先求 $f_W(w)$

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_Z(yw) f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} y f_Z(yw) \lambda e^{-\lambda y} dy$$

$$\text{注意: } f_X(yw) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda yw} & yw > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由于积分变量 $y > 0$, 因此

当 $w \leq 0$ 时 $f_X(yw) = 0$; 当 $w > 0$ 时 $f_X(yw) = \lambda e^{-\lambda yw}$

故当 $w \leq 0$ 时 $f_W(w) = 0$

$$\text{当 } w > 0 \text{ 时 } f_W(w) = \int_0^{+\infty} y \lambda e^{-\lambda yw} \cdot e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{(w+1)^2}$$

即

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{(w+1)^2} & w > 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases}$$

因为 $Z = 1 + W$, $z = 1 + w$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 $\frac{dz}{dw} = 1 > 0$, 所以可用定理, 反函数为 $w = z - 1$, 故

$$f_z(z) = \begin{cases} f_w(z-1) \times 1, & z > 1 \text{ 时} \\ 0, & z \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} z^{-2}, & z > 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

16. 由于 $(X, Y) \sim N(0, \sigma^2, \sigma^2, \rho)$, $\rho = 0$, 因此 X, Y 相互独立, 且都服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布.

$$\begin{aligned} F_z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{\max(|X|, |Y|) \leq z\} \\ &= P\{|X| \leq z, |Y| \leq z\} = P\{|X| \leq z\}P\{|Y| \leq z\} \end{aligned}$$

当 $z < 0$ 时 $F_z(z) = P(\emptyset) = 0$

$$\begin{aligned} \text{当 } z > 0 \text{ 时 } F_z(z) &= P\{-z < X < z\}P\{-z < Y < z\} = (F_X(z) - F_X(-z))(F_Y(z) - F_Y(-z)) \\ &= (\Phi(\frac{z}{\sigma}) - \Phi(-\frac{z}{\sigma}))(\Phi(\frac{z}{\sigma}) - \Phi(-\frac{z}{\sigma})) = (2\Phi(\frac{z}{\sigma}) - 1)^2 \end{aligned}$$

故

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{4}{\sigma} (2\Phi(\frac{z}{\sigma}) - 1) \varphi(\frac{z}{\sigma}), & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

17. 已知 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & 0 < x < a, 0 < y < a \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当 $z < 0$ 时 $F_z(z) = P\{|Z - Y| \leq z\} = P(\emptyset) = 0$

当 $0 \leq z < a$ 时, 参看图 17-13

$$\begin{aligned} F_z(z) &= P\{-z \leq X - Y \leq z\} \\ &= \iint_{-z \leq x - y \leq z} f(x, y) dx dy = \iint_{\substack{-z \leq x - y \leq z \\ 0 < x < a \\ 0 < y < a}} \frac{1}{a^2} dx dy \\ &= \frac{1}{a^2} S_D = \frac{2az - z^2}{a^2} \end{aligned}$$

当 $a \leq z < +\infty$ 时 $F_z(z) = P(\Omega) = 1$

故有

$$F_z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{2az - z^2}{a^2}, & 0 \leq z < a \\ 1, & a \leq z \end{cases} \quad f_z(z) = \begin{cases} \frac{2az - z^2}{a^2}, & 0 < z < a \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

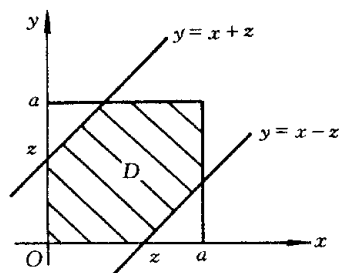


图 17-13

18. (1) $P\{Z = 0\} = P\{X + Y \text{ 为奇数}\} = P(\{X = 0, Y = 3\} \cup \{X = 1, Y = 2\})$

$$= P\{X = 0, Y = 3\} + P\{X = 1, Y = 2\} = 0.5$$

$$P\{Z = 1\} = 1 - P\{Z = 0\} = 0.5$$

即 Z 的分布律为

Z	0	1
p	0.5	0.5

(2) (X, Z) 的可能取值数对为 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$

$$P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0, X + Y \text{ 为奇数}\} = P\{X = 0, Y = 3\} = 0.3$$

其它几个概率类似可求得, 得 (X, Z) 的联合分布律为

X \ Z	Z		$P\{X = x_i\} = p_{i\cdot}$
	0	1	
0	0.3	α	$0.3 + \alpha$
1	0.2	β	$0.2 + \beta$
$P\{Z = z_j\} = p_{\cdot j}$	0.5	$\alpha + \beta$	

(3) 将 (X, Z) 的上述联合分布律添上边缘分布律, 要使 X, Z 相互独立, 必须

$$\begin{cases} (0.3 + \alpha) \times 0.5 = 0.3 \\ (0.2 + \beta) \times 0.5 = 0.2 \end{cases}$$

解得 $\alpha = 0.3$ $\beta = 0.2$ 进一步可验证 当取 $\alpha = 0.3$ $\beta = 0.2$ 时 $P_{ij} = P_{i \cdot} P_{\cdot j}$ 对一切 i, j 成立 此时 X, Z 相互独立.

19. 当 $0 < x < 1$ 时

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{4}{7}(1 + y + xy) dy = \frac{2}{7}(x + 3)$$

当 $0 < y < 1$ 时

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{4}{7}(1 + y + xy) dx = \frac{2}{7}(3y + 2)$$

故在 $0 < x < 1$ $0 < y < 1$ 上 $f(x, y) \neq f_x(x)f_y(y)$ 因此 X 和 Z 不独立.

20. (1)(见图 17-14)

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, & \text{(I)} \\ \frac{x^2 y}{3} \left(x + \frac{y}{4}\right), & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 2, & \text{(II)} \\ \frac{y}{3} \left(1 + \frac{y}{4}\right), & x \geq 1, 0 \leq y < 2, & \text{(III)} \\ \frac{x^2}{3} (2x + 1), & 0 \leq x < 1, y \geq 2, & \text{(IV)} \\ 1, & x \geq 1, y \geq 2, & \text{(V)} \end{cases}$$

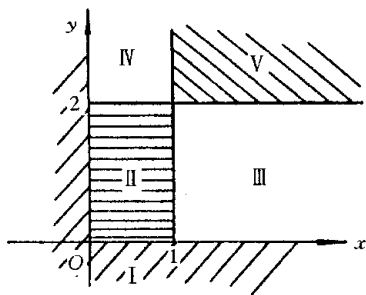


图 17-14

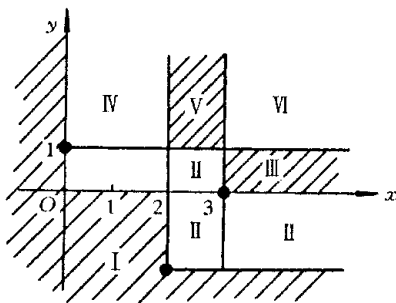


图 17-15

(2)(见图 17-15)

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < -2 \text{ 或 } 0 \leq x < 2, -2 \leq y < 1, & \text{(I)} \\ 0.7, & x \geq 2, -2 \leq y < 0 \text{ 或 } 2 \leq x < 3, 0 \leq y < 1, & \text{(II)} \\ 0.8, & x \geq 3, 0 \leq y < 1, & \text{(III)} \\ 0.2, & 0 \leq x < 2, y \geq 1, & \text{(IV)} \\ 0.9, & 2 \leq x < 3, y \geq 1, & \text{(V)} \\ 1, & x \geq 3, y \geq 1, & \text{(VI)} \end{cases}$$

21. 将 (X, Y) 的概率分布写成标准的列表形式:

X \ Y	Y		
	0	$\frac{1}{3}$	1
-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{6}$	0	0
2	$\frac{5}{12}$	0	0

显然 $P\{X = 0, Y = 1\} = 0 \neq P\{X = 0\}P\{Y = 1\} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3}$ 故不独立.

22. (1) $f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 \frac{1 + xy}{4} dy = \frac{1}{2}$ 当 $|x| < 1$.

类似可得

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |y| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因为在 $|x| < 1, |y| < 1$ 上 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X, Y 不相互独立.

(X^2, Y^2) 的联合分布函数 (图 17 - 16)

$$F_{(X^2, Y^2)}(x, y) = P\{X^2 \leq x, Y^2 \leq y\}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0 & (\text{区域 I}) \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, y \geq 1 & (\text{区域 II}) \\ \sqrt{y}, & x \geq 1, 0 \leq y < 1 & (\text{区域 III}) \\ \sqrt{xy}, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 & (\text{区域 IV}) \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1 & (\text{区域 V}) \end{cases}$$

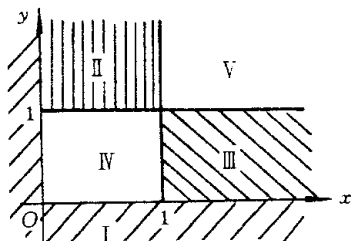


图 17 - 16

由此可得

$$F_{X^2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{Y^2}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \sqrt{y}, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

因此 $F_{(X^2, Y^2)}(x, y) = F_{X^2}(x)F_{Y^2}(y)$ 对一切 x, y 成立, X^2 与 Y^2 相互独立.

(2) 和 (X^2, Y^2) 类似 $(|X|, |Y|)$ 的联合分布函数

$$F_{(|X|, |Y|)}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ y, & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ xy, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

由此得

$$F_{|X|}(x) = P\{|X| \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, \quad F_{|Y|}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

因此 $F_{(|X|, |Y|)}(x, y) = F_{|X|}(x)F_{|Y|}(y)$ 对一切 x, y 成立, 故 $|X|$ 和 $|Y|$ 相互独立.

第十八章 随机变量的数字特征

考试要求

1. 理解随机变量数字特征(数学期望、方差、标准差、矩、协方差、相关系数)的概念,并会运用数字特征的基本性质计算具体分布的数字特征,掌握常用分布的数字特征.
2. 会根据随机变量的概率分布求其函数的数学期望,会根据二维随机变量的概率分布求其函数的数学期望.

考试要点分析与题型预测

无论是从理论还是从应用看,这一章是概率论的重点内容之一,从上面分数统计看,它也是每年必考的内容之一,而且题量的比例还相当大,解题的方法也具有多样性、灵活性、综合性的特点.

求随机变量函数的数学期望是重中之重,要注意对不同类型的随机变量所用公式、步骤也不同.对连续型随机变量 $f(x)$ 或 $f(x, y)$ 是给出的,用积分公式 $Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$, $Eg(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$ 计算.而对离散型随机变量在应用题中,首先要建立 X 或 (X, Y) 的分布律,然后只要用求和公式 $Eg(X) = \sum_i g(x_i)p_i$, $Eg(X, Y) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$ 计算(见例 3, 7, 11, 20).

简单的计算题求数字特征一般以填空题形式出现(见例 8, 9, 19)或出成选择题(例 1, 10, 15),而以应用题出现的可能性更大,例求平均利润或它的最大值(见例 17 ~ 18).

数学期望和方差的性质必须熟练掌握,它会以各种类型的题目出现.

讨论随机变量的不相关和独立又是一个重点,它涉及协方差和相关系数的计算,一系列公式要背熟.

应用正态分布的性质计算数字特征将会带来极大方便(见例 1, 12, 14, 16),它也是经常会出题的考点.

§ 18 - 1 随机变量的数学期望

一、一维随机变量的数学期望

1. 离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$. 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望(或均值),记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

2. 连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛, 则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望(又称均值),记为 $E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

二、随机变量函数的数学期望

1. 离散型随机变量函数的数学期望

设一维随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$, $Y = g(X)$, 则

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, Z = g(X, Y)$ 则

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$$

2. 连续型随机变量函数的数学期望

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, $y = g(x)$ 是连续函数, 如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$ 绝对收敛, 则随机变量 $Y = g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$

设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, $z = g(x, y)$ 是连续函数, 如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$ 绝对收敛, 则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$$

评述 对连续型随机变量函数 $g(X)$ 或 $g(X, Y)$ 的数学期望, 只要把大写随机变量 X, Y 换成积分变量小写的 x, y , 把所得的函数 $g(x)$ 或 $g(x, y)$ 放在被积函数里, 作为被积函数的一部分, 进行积分即可得 $E(g(X))$ 或 $E(g(X, Y))$. 由于大量考研题中都要用此公式, 所以必须牢记!

三、数学期望的性质

1. 设 C 是常数, 则 $E(C) = C$.
2. 设 X 是随机变量, C 是常数, 则 $E(CX) = CE(X)$.
3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 都是随机变量, 则 $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$.
4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量, 则

$$E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1)E(X_2) \dots E(X_n)$$

§ 18 - 2 随机变量的方差

一、方差的概念

1. 定义 $D(X) = E(X - E(X))^2$ (或记为 $\text{Var}(X)$) 称为 X 的方差, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ 称为 X 的标准差 (或均方差).
2. 计算公式 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

二、方差的性质

1. 设 C 是常数, 则 $D(C) = 0$.
2. 设 X 是随机变量, C 是常数, 则 $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. 设 X, Y 是两个相互独立随机变量, 则有

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

由于方差的这 3 个性质没有其它数学运算的类似物, 一定要记熟.

§ 18 - 3 随机变量的矩与相关系数

一、矩

设有随机变量 X, Y , 如果 EX^k 存在, 则称其为 X 的 k 阶原点矩, 若 $E(X - EX)^k$ 存在, 则称其为 X 的 k 阶中心

矩,若 $E(X^k Y^l)$ 存在,则称其为 X 和 Y 的 $k+1$ 阶原点混合矩.若 $E[(X - EX)^k (Y - EY)^l]$ 存在,则称其为 X 和 Y 的 $k+1$ 阶中心混合矩.

容易看出,数学期望就是一阶原点矩,方差就是二阶中心矩.

二、协方差

1. 定义 $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$.

2. 计算公式 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$.

3. 性质

(1) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$, $\text{Cov}(X, X) = D(X)$.

(2) $\text{Cov}(aX + bY) = a\text{Cov}(X, Y) + b\text{Cov}(Y, Y)$, a, b 是常数.

(3) $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$.

4. 如果 X, Y 相互独立,则 $\text{Cov}(X, Y) = 0$,注意由于常数 C 和任何随机变量 X 都相互独立,所以 $\text{Cov}(X, C) = 0$.

5. 重要公式

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(X) \cdot E(Y) + \text{Cov}(X, Y) \\ D(X + Y) &= D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

三、相关系数

1. 定义 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$

2. 性质

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1$

(2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是:存在常数 a, b ,使 $P\{Y = a + bX\} = 1$.

四、随机变量的不相关与相互独立

1. 随机变量的不相关

当随机变量 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y} = 0$ 时,称 X 和 Y 不(线性)相关.

2. 重要关系

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(X) \cdot E(Y) \\ \Updownarrow \\ X, Y \text{ 相互独立} &\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow X, Y \text{ 不相关} \\ \Updownarrow \\ D(X + Y) &= DX + DY \end{aligned}$$

评述 上述重要关系主要说明 3 个问题:

1. 如 X, Y 相互独立,则 X, Y 必不相关,但反之不然!

2. 要使等式 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ 和 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ 成立的条件可由相互独立减弱到只要求 X, Y 不相关即可.

3. X, Y 不相关 $\rho_{X,Y} = 0$, $\text{Cov}(X, Y) = 0$, $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$, $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ 这 5 个关系是等价的,要证明其中一个只要证其余 4 个中任何一个成立即可.要证明 X, Y 不相关,计算量最少、最方便的是用 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ 或 $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

§ 18 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测

例 1 (06, 13 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 求:

(I) Y 的概率密度 $f_Y(y)$; (II) $\text{Cov}(X, Y)$; (III) $F(-\frac{1}{2}, 4)$.

解 (I)(III) 上章已解决, 此处略.

$$(II) EX = \int_{-1}^{+} xf_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} x dx + \int_0^2 \frac{1}{4} x dx = \frac{1}{4}$$

$$EY = EX^2 = \int_{-1}^{+} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} x^2 dx + \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{5}{6}$$

$$E(XY) = EX^3 = \int_{-1}^{+} x^3 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} x^3 dx + \int_0^2 \frac{1}{4} x^3 dx = \frac{7}{8}$$

故
$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{2}{3}.$$

例2 (06 4分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ($-\infty < x < +\infty$) $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2 , 则 $ES^2 =$ _____.

解 应用奇、偶函数在对称区间上的积分特点计算得

$$EX_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+} xe^{-|x|} dx = 0,$$

$$EX_1^2 = \int_{-1}^{+} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+} x^2 e^{-|x|} dx = 2$$

$$DX_1 = EX_1^2 - (EX_1)^2 = 2.$$

注意在统计中 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是相互独立, 且同分布的, 又由 $EX_i = EX = \bar{X}$, $DX_i = \frac{DX_1}{n}$, 方差定义 $DX_1 = E(X_1 - EX_1)^2$ 及 $E(X - EX) = 0$ 的基本知识, 和 $EX_1 - EX = 0$, 得

$$\begin{aligned} ES^2 &= E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n E(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot nE(X_1 - \bar{X})^2 \\ &= \frac{n}{n-1} E((X_1 - EX_1) - (\bar{X} - EX))^2 \\ &= \frac{n}{n-1} (DX_1 - 2E(X_1 - EX_1)(\bar{X} - EX) + D\bar{X}) \\ &= \frac{n}{n-1} (DX_1 - 2E(X_1 - EX_1) \cdot \frac{1}{n} [(X_1 - EX_1) + \sum_{j \neq 1} (X_j - EX_j)] + \frac{DX_1}{n}) \\ &= \frac{n}{n-1} (DX_1 - \frac{2}{n} (DX_1 + 0) + \frac{DX_1}{n}) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} DX_1 = DX_1 = 2. \end{aligned}$$

评述 ① 本题计算 ES^2 中第4、5、6个等号是常用的计算或处理问题的技巧, 由于本题只有4分, 所以这种能力还要求很熟练, 这在后面例21 (即05年考题中) 也又一次用到.

② 有些同学计算 EX_1 是这样做的,

$$EX_1 = \int_{-1}^{+} f(x) dx = \int_{-1}^{+} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 1.$$

错在何处? 错在公式中少了“ x ”, 应 $EX_1 = \int_{-1}^{+} xf(x) dx$, 所以在求数学期望 EX 时, 出现答案为1, 请检查一下公式中 x 有没有漏掉. 如漏掉 x , 则 $\int_{-1}^{+} f(x) dx$ 正确计算结果必然为1, 这是概率密度的性质.

例3* 掷两颗骰子, Y 表示两颗出现向上点数较大者, 则 $EY =$ _____.

解 设两颗骰子掷出向上点数分别为 X_1, X_2 , 显然它们相互独立, 则 $Y = \max(X_1, X_2)$, 它的可能取值为1,

2 3 4 5 6 且 $P\{X_i = j\} = \frac{1}{6} \quad i = 1 2 \quad j = 1 2 3 4 5 6$

$$\begin{aligned} P\{Y = k\} &= P\{Y \leq k\} - P\{Y \leq k-1\} = P\{\max(X_1, X_2) \leq k\} - P\{\max(X_1, X_2) \leq k-1\} \\ &= P\{X_1 \leq k, X_2 \leq k\} - P\{X_1 \leq k-1, X_2 \leq k-1\} \\ &= P\{X_1 \leq k\}P\{X_2 \leq k\} - P\{X_1 \leq k-1\}P\{X_2 \leq k-1\} \\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2 = \frac{2k-1}{36} \quad k = 1 2 3 4 5 6 \end{aligned}$$

因此

$$EY = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{1}{36} \left(2 \sum_{k=1}^6 k^2 - \sum_{k=1}^6 k \right) = \frac{1}{36} \left(2 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - \frac{6 \times 7}{2} \right) = \frac{161}{36}.$$

评述 1. 此处引进 X_1, X_2 对求 Y 的分布律带来方便.

2. 对取正整数值值的离散随机变量, 公式

$$P\{Y = k\} = P\{Y \leq k\} - P\{Y \leq k-1\}$$

在求概率时经常会带来方便, 因为 $P\{Y \leq k\} = F_Y(k)$, 可应用分布函数的信息, 本题中 $P\{Y \leq k\} = P\{\max(X_1, X_2) \leq k\} = P\{X_1 \leq k, X_2 \leq k\}$, 便于事件分解和概率计算.

3. 求离散型随机变量的数学期望, 主要是求它的分布律, 求出分布律, 代公式 $\sum_i x_i p_i = EX$ 即用定义可求出 EX .

例 4* 将 n 个球随机地放入 N 个盒中, 每个球放入各个盒子是等可能的, 求有球的盒子数 X 的数学期望.

分析 X 的分布律用排列组合太难求, 那就不求它, 也就是不用定义去求 X 的数学期望, 而用数学期望的性质

$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$ 去求. 这种技巧只适用于求离散型随机变量的数学期望. 本题还要注意求 X_i 的分布律的技巧.

解 引入随机变量 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个盒子中有球} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个盒子中无球} \end{cases} \quad i = 1 2 \dots N$ 则 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, 下面求 X_i 的分布律.

$P\{X_i = 1\}$ 特别难求, 而 $P\{X_i = 0\}$ 特别容易求. 注意每个球放入各个盒子的概率相等, 为 $\frac{1}{N}$, 且各个球放入哪个盒子是相互独立的, 所以

$$\begin{aligned} P\{X_i = 0\} &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n, \quad P\{X_i = 1\} = 1 - P\{X_i = 0\} = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n, \text{ 于是 } E(X_i) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n, \text{ 故 } E(X) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \sum_{i=1}^N E(X_i) = N \left[1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right] \end{aligned}$$

例 5 将分别编号为 1 至 n 的 n 只球随机地放进编号为 1 至 n 的 n 只盒子中去, 一只盒子只装 1 只球, 如果一只球装入与球同号码的盒子中, 称为 1 个配对, 记 X 为配对的总个数, 求 X 的数学期望.

分析 在古典概率中配对的概率问题令绝大部分学生头痛, 虽听懂了, 但过几天又可能做不出题, 所以 X 的分布律很难求. 从下面的题解可看出, 用类似上题的技巧求 $E(X)$ 都很简单.

解 引进随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 号球恰装入第 } i \text{ 号盒子} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 号球不是装入第 } i \text{ 号盒子} \end{cases} \quad i = 1 2 \dots n$$

则 $X = \sum_{i=1}^n X_i$, 而 X_i 的分布为

$$P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n}$$

$$P\{X_i = 0\} = 1 - P\{X_i = 1\} = 1 - \frac{1}{n}$$

于是 $E(X_i) = \frac{1}{n} \quad i = 1 2 \dots n$. 故 $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 1$.

评述 1. X_i 的分布中, 为什么 $P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n}$ 这可用抓阄模型解释: 第 i 号球相当于中奖券, 其它 $n-1$ 个球相当于空白券, 盒子相等于人去无放回地摸, 则第 i 个人 (即第 i 盒子) 中奖 (即配对) 的概率为 $\frac{1}{n}$.

2. 例 4, 例 5 此类技巧在考研题中还没出现过, 但迟早会出这类题型.

例 6 (00 7 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数, 求 Y^2 的数学期望.

解 显然 $Y \sim B(4, p)$, 令 $A = \{X > \frac{\pi}{3}\}$

因此

$$p = P(A) = P\{X > \frac{\pi}{3}\} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}$$

故

$$E(Y) = 4 \times \frac{1}{2} = 2, D(Y) = 4 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = 1$$

$$E(Y^2) = D(Y) + (E(Y))^2 = 1 + 2^2 = 5$$

评述 1. 连续型和离散型 (主要是二项分布) 随机变量相结合的这种题型在考研题中常见的, 一定要熟练.

2. 求服从参数为 n, p 的二项分布的概率和数字特征在考题中经常出现, 几乎每年都考. 而 $P(A) = p$ 的计算有各种各样的方法: 本题是用连续型随机变量的概率计算, 有的题是用全概率公式计算.

3. 公式 $DX = EX^2 - (EX)^2$ 要非常熟练, 熟到可以倒背, 本处用到 $E(X^2) = DX + (EX)^2$.

例 7 (03 10 分) 已知甲、乙两箱中装有同种产品, 其中甲箱中有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱中仅装有 3 件合格品, 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后, 求

(1) 乙箱中次品数 X 的数学期望;

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

解 (1) X 的可能取值为 0, 1, 2, 3. 令 Y 表示从甲箱中取出的 3 件中的次品数, 则 Y 服从多项分布, 故

$$P\{X = 0\} = P\{Y = 0\} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}, \quad P\{X = 1\} = P\{Y = 1\} = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}$$

$$P\{X = 2\} = P\{Y = 2\} = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20}, \quad P\{X = 3\} = P\{Y = 3\} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$$

$$EX = \sum_{i=0}^3 iP\{X = i\} = 1 \cdot \frac{9}{20} + 2 \cdot \frac{9}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{2}$$

(2) 令 $B = \{\text{从乙箱中任取一件产品是次品}\}$, 则

$$P(B) = \sum_{i=0}^3 P\{X = i\}P\{B | X = i\} = \frac{1}{20} \cdot 0 + \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{6} + \frac{9}{20} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{20} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}.$$

评述 上述 (1) 的解法是只引进一个随机变量 Z 或 Y , 也可有另一种解法, 即引进三个随机变量, 令

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{从甲箱中取出的第 } i \text{ 件产品是合格品} \\ 1, & \text{从甲箱中取出的第 } i \text{ 件产品是次品} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

由抓阄模型乃知 $X_i, i = 1, 2, 3$

同分布 $P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$, 由 $EX_i = \frac{1}{2}$ 得 $EX = \sum_{i=1}^3 EX_i = \frac{3}{2}$.

例 8 (00 8 分) 某流水生产线每个产品不合格的概率为 $p (0 < p < 1)$, 各产品合格与否相互独立, 当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X , 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

解 为方便计算, 令 $q = 1 - p$, 又令 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个产品合格}\}$, 则有 $P(A_i) = q, P(\bar{A}_i) = p$, 且 $A_i (i = 1, 2, \dots)$

...) 相互独立. 于是 X 的概率分布为

$$P\{X = i\} = P(A_1 A_2 \dots A_{i-1} \bar{A}_i) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_{i-1})P(\bar{A}_i) = q^{i-1}p, i = 1, 2, \dots$$

X 的数学期望为

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} p = p \left(\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} \right) \Big|_{x=q} = p \left(\sum_{i=1}^{\infty} x^i \right)' \Big|_{x=q} = p \left(\frac{x}{1-x} \right)' \Big|_{x=q} = \frac{1}{p}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } E(X^2) &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-1} p = p \left(\sum_{i=1}^{\infty} (i+1) i q^{i-1} - \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} \right) = p \left(\sum_{i=1}^{\infty} (i+1) i x^{i-1} \right) \Big|_{x=q} - \frac{1}{p} \\ &= p \left(\sum_{i=1}^{\infty} x^{i+1} \right)'' \Big|_{x=q} - \frac{1}{p} = p \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' \Big|_{x=q} - \frac{1}{p} = p \cdot \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } X \text{ 的方差为 } D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

评述 考题逐年向综合性发展, 本题将求期望和级数求和综合在一起.

例 9* (1) 设两个不相关的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 9, 则随机变量 $3Y - 4X$ 的方差为 _____.

(2) 设随机变量 X, Y, Z 相互独立, 且方差分别为 3, 2, 1, 则随机变量 $4X - 3Y - 2Z + 1$ 的方差为 _____.

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) D(3Y - 4X) &= D(3Y) + D(-4X) + 2\text{Cov}(3Y, -4X) \\ &= 9DY + 16DX + 2 \times 3 \times (-4)\text{Cov}(Y, X) \\ &= 9 \times 9 + 16 \times 4 = 145 \end{aligned}$$

$$(2) D(4X - 3Y - 2Z + 1) = 16DX + 9DY + 4DZ = 70.$$

评述 如 X, Y 独立 (或不相关), 则易证 aX, bY 仍独立 (或不相关), 则 $D(aX \pm bY) = a^2 DX + b^2 DY$, 注意右端 a^2 和 b^2 中的“平方”不可忘, 而且右端运算永远全是加号“+”. 这类求方差运算在考研题中是必考的.

例 10 (06, 13 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash \\ X \end{array}$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a, b, c 为常数, 且 X 的数学期望 $EX = -0.2$, $P\{Y \leq 0 | X \leq 0\} = 0.5$, 记 $Z = X + Y$, 求

(I) a, b, c 的值.

(II) Z 的概率分布.

(III) $P\{X = Z\}$.

解 (I) 由下列三个方程联立解三个常数 a, b, c :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ij} = 1 \\ EX = -0.2 \\ P\{Y \leq 0 | X \leq 0\} = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c + 0.6 = 1 \\ -(a + 0.2) + (0.1 + 1) = -0.2 \\ \frac{a + b + 0.1}{a + b + 0.5} = 0.5 \end{cases}$$

可解得 $a = 0.2, b = 0.1, c = 0.1$.

(II) Z 的可能取值为 $-2, -1, 0, 1, 2$

$$P\{Z = -2\} = P\{X + Y = -2\} = P\{X = -1, Y = -1\} = 0.2.$$

$$P\{Z = -1\} = P\{X = -1, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = -1\} = 0.1.$$

$$P\{Z = 0\} = P\{X = -1, Y = 1\} + P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = -1\} = 0.3.$$

$$P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = 1\} = 0.3.$$

$$P\{Z = 2\} = P\{X = 1, Y = 1\} = 0.1.$$

即 Z 的分布律为

Z	- 2	- 1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

$$\begin{aligned}
 (\text{III}) P\{X = Z\} &= P\{Y = 0\} = \sum_{i=1}^3 P\{X = x_i, Y = 0\} \\
 &= 0 + b + 0.1 = 0.2
 \end{aligned}$$

例 11 已知随机变量 X 和 Y 相互独立, 且它们的数学期望和方差都存在, $DX = DY \neq 0$, 记 $Z_1 = 3X - Y$, $Z_2 = X + 3Y$, 则 Z_1 和 Z_2 有().

- (A) 独立 (B) 不独立
(C) 相关系数为 0 (D) 相关系数不为 0

$$\begin{aligned}
 \text{解法一} \quad \text{Cov}(Z_1, Z_2) &= \text{Cov}(3X - Y, X + 3Y) = 3\text{Cov}(X, X) + 8\text{Cov}(X, Y) - 3\text{Cov}(Y, Y) \\
 &= 3DX + 0 - 3DY = 0
 \end{aligned}$$

故 $\rho_{Z_1 Z_2} = 0$, 选(C).

$$\begin{aligned}
 \text{解法二} \quad \text{Cov}(Z_1, Z_2) &= EZ_1 Z_2 - EZ_1 \cdot EZ_2 = E(3X - Y)(X + 3Y) - E(3X - Y)E(X + 3Y) \\
 &= E(3X^2 + 8XY - 3Y^2) - (3\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + 3\mu_2) \\
 &= 3(\sigma^2 + \mu_1^2) + 8\mu_1\mu_2 - 3(\sigma^2 + \mu_2^2) - (3\mu_1^2 + 8\mu_1\mu_2 - 3\mu_2^2) = 0
 \end{aligned}$$

故 $\rho_{Z_1 Z_2} = 0$, 选(C).

评述 由上述计算可见, 熟悉协方差的性质(即运算法则)在计算或推导相关系数, 讨论不相关之类问题时会带来方便.

例 12 (01 8 分) 设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布, 试求随机变量 $U = X + Y$ 的方差.

解法一 先求 $U = X + Y$ 的概率密度(见图 18 - 1), 再求 $D(U)$.

$$\begin{aligned}
 f_U(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u - x) dx = \begin{cases} \int_{u-1}^1 2 dx, & 1 \leq u \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 2(2 - u), & 1 \leq u \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
 \end{aligned}$$

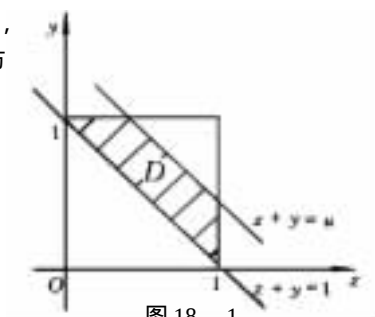


图 18 - 1

$$E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_U(u) du = \int_1^2 u \cdot 2(2 - u) du = \frac{4}{3}$$

$$E(U^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_U(u) du = \int_1^2 u^2 \cdot 2(2 - u) du = \frac{11}{6}$$

$$\text{故 } D(U) = D(X + Y) = E(U^2) - (EU)^2 = \frac{11}{6} - \frac{16}{9} = \frac{1}{18}$$

解法二 用求随机变量函数的数学期望公式: 已知 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq 1 - x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$EU = E(X + Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y) f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 2(x + y) dx = \int_0^1 (y^2 + 2y) dy = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
 EU^2 &= E(X + Y)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y)^2 f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 2(x + y)^2 dx = \int_0^1 (2y + 2y^2 + \frac{2}{3}y^3) dy = \frac{11}{6}
 \end{aligned}$$

$$D(U) = EU^2 - (EU)^2 = \frac{11}{6} - \frac{16}{9} = \frac{1}{18}$$

解法三 用公式 $D(X + Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y)$

$$\text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{1-x}^1 2 dy = 2x$$

当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时 $f_X(x) = 0$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{18}$$

同理可解得 $E(Y) = \frac{2}{3}, D(Y) = \frac{1}{18}$,

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 2xydx = \int_0^1 (2y^2 - y^3)dy = \frac{5}{12}$$

$$\text{Cov}(X,Y) = EXY - EXEY = \frac{5}{12} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{36}$$

$$D(U) = D(X+Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} - \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

解法四 由于是均匀分布,所以可用几何概率求 U 的分布函数. 当 $u < 1$ 时 $F_U(u) = 0$, 当 $u > 2$ 时 $F_U(u) = 1$, 当 $1 \leq u \leq 2$ 时

$$F_U(u) = P\{X+Y \leq u\} = \frac{\text{见图 18-1 } S_D}{S_\Omega} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2-u)^2}{\frac{1}{2}} = 1 - (2-u)^2$$

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \begin{cases} 2(2-u), & 1 \leq u \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

余下同解法一.

评述 其中解二是最正规的方法,解一关键要能记住不相互独立的随机变量之和的概率密度公式则是方便的.

例 13 (96 3 分) 设 ξ, η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N(0, (\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$ 的随机变量, 则随机变量 $|\xi - \eta|$

的数学期望 $E(|\xi - \eta|) =$ _____.

分析 本题由 ξ 和 η 是“独立”的,而且 ξ, η 都是正态随机变量,马上要想到有重要结论:它们的线性组合仍服从正态分布, $|\xi - \eta| = \sqrt{(\xi - \eta)^2}$ 不是 ξ, η 的线性组合,但 $\xi - \eta$ 是线性组合.

解法一 令 $X = \xi - \eta \sim N(0, 1)$ 故

$$\begin{aligned} E(|\xi - \eta|) &= E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

解法二 用 $E(g(\xi, \eta)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$ 观点处理.

$$\begin{aligned} E(|\xi - \eta|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - y| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{x^2}{2 \times (\frac{1}{2})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{y^2}{2 \times (\frac{1}{2})}} dxdy \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\iint_{x>y} (x-y)e^{-(x^2+y^2)} dxdy + \iint_{x \leq y} (y-x)e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right) \\ &= \dots (\text{经繁杂计算}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

评述 解法二只看出“独立”、“正态”,没想到“独立正态变量线性组合仍是正态变量”这一特别重要的性质,导致计算过程非常长而复杂,既需大量时间,又可能计算不到底,并且答案容易错. 解法一想到利用正态变量的这一性质,计算既快又清晰,答案完全有信心是对的. 一定要记取这一教训,记住解法一的技巧. 这是“1996,一”的 3 分填空题,“1998,一”又出了 6 分的计算题,题目条件完全类似,求 $D(|\xi - \eta|)$.

例 14* 已知随机变量 $X \sim N(2, 1)$ 求随机变量 $Y = Xe^X$ 的数学期望.

分析 注意下面每一步计算的注解, 它们是计算正态随机变量函数的数学特征的常用计算程序和计算技巧. (又可见第二十一章例 11(1)).

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad E(Xe^X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx \quad (\text{公式}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 2x)} dx \quad (\text{平方展开}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}(x-3)^2 - 5} dx \quad (\text{重新配方}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{5}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t+3) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{换元 } t = x - 3, \text{ 使出现 } e^{-\frac{t^2}{2}}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{5}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} 3e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{奇函数积分的特点}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{5}{2}} \cdot 3 \cdot \sqrt{2\pi} \quad (\text{用公式 } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}) \\
 &= 3e^{-\frac{5}{2}}
 \end{aligned}$$

例 15 设 X, Y 是两个相互独立的服从标准正态分布的随机变量, 求随机变量 $Z = \max(X, Y)$ 的数学期望.

分析 注意本题所有随机变量都是正态的, 而且相互独立, 要设法利用独立正态随机变量的线性组合仍服从正态分布这一技巧. 又注意有下列二个等式

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \quad \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法一} \quad E(\max(X, Y)) &= E\left(\frac{1}{2}(X + Y + |X - Y|)\right) = \frac{1}{2}(EX + EY - E|X - Y|) \\
 &= \frac{1}{2}\left(0 + 0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}
 \end{aligned}$$

其中 $E|X - Y|$ 和例 12 完全类似方法求得为 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解法二} \quad E(\max(X, Y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x, y) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\
 &= \iint_{x > y} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy + \iint_{x \leq y} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_y^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_x^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \stackrel{\text{令 } y = \frac{t}{\sqrt{2}}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}
 \end{aligned}$$

评述 解法二是概率论中求随机变量函数的数学期望的一般方法, 而解法一正是抓住了“正态分布”, “独立”, 计算显得简单、清晰、不易错.

例 16 (01 3 分) 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于().

- (A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

解法一 因为 $X \sim B(n, \frac{1}{2})$, 所以 $E(X) = n/2$, $D(X) = n/4$. 由于 $X + Y = n$, 即 $Y = n - X$, 因此

$$E(Y) = E(n - X) = n - E(X) = n/2, D(Y) = D(n - X) = D(X) = n/4$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, n - X) = \text{Cov}(X, n) - \text{Cov}(X, X) = 0 - D(X) = -n/4$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{-n/4}{\sqrt{n/4} \sqrt{n/4}} = -1$$

故应选(A).

解法二 因为 $Y = -X + n$, X, Y 间有线性关系, 所以 $|\rho_{XY}| = 1$, 又因为 X 的系数为负的(本题为 -1), 所以 $\rho_{XY} = -1$.

例 17 (00 8 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)]$$

其中 $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 都是二维正态密度函数, 且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$, 它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是 0, 方差都是 1.

(1) 求随机变量 X 和 Y 的密度函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$, 以及 X 和 Y 的相关系数 ρ (可以直接利用二维正态密度的性质).

(2) 问 X 和 Y 是否独立? 为什么?

解 (1) 由于二维正态概率密度的两个边缘密度都是正态概率密度, 因此 $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 的两个边缘密度都是标准正态概率密度, 故

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x, y) dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

同理可得 $f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$. 即 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$, 可见 $E(X) = E(Y) = 0$, $D(X) = D(Y) = 1$.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = E(XY) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \varphi_1(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \varphi_2(x, y) dx dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$(2) f(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi \sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2}} e^{-\frac{1}{2(1 - (\frac{1}{3})^2)}(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}xy + y^2)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - (-\frac{1}{3})^2}} e^{-\frac{1}{2(1 - (-\frac{1}{3})^2)}(x^2 - 2 \cdot (-\frac{1}{3})xy + y^2)} \right] \\ &= \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \left[e^{-\frac{9}{16}(x^2 - \frac{2}{3}xy + y^2)} + e^{-\frac{9}{16}(x^2 + \frac{2}{3}xy + y^2)} \right] \end{aligned}$$

而 $f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, 因而 $f(x, y) \neq f_1(x)f_2(y)$, 所以 X, Y 不独立.

评述 这个考题说明, 考试大纲中提到的考试内容一定要全面复习, 不要自以为 $\times \times$ 不会考. 二维正态概率密度函数很难记, 但还必须记; 二维正态分布性质不仅要记, 而且要非常熟练. 本考题基本上不需要什么数字运算, 但综合性很强, 全是由概念、计算公式直接得到相应的等式, 所以概念、计算公式都要求非常熟练.

例 18 假设自动流水线加工的某种零件的内径 X (毫米) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 内径小于 10 或大于 12 为不合格品, 其余为合格品. 销售每件合格品获利, 销售每件不合格品亏损. 已知销售利润 T (单元: 元) 与销售零件的内径 X 有如下关系:

$$T = \begin{cases} -1, & X < 10 \\ 20, & 10 \leq X \leq 12 \\ -5, & X > 12 \end{cases}$$

问平均内径 μ 取何值时, 销售一个零件的平均利润最大?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad E(T) &= -1 \cdot P\{X < 10\} + 20 \cdot P\{10 \leq X \leq 12\} + (-5)P\{X > 12\} \\ &= -F_X(10) + 20(F_X(12) - F_X(10)) - 5(1 - F_X(12)) \\ &= 25F_X(12) - 21F_X(10) - 5 \\ &= 25\Phi(12 - \mu) - 21\Phi(10 - \mu) - 5 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\mu}E(T) = 25 \cdot \varphi(12 - \mu) \cdot (-1) - 21 \cdot \varphi(10 - \mu) \cdot (-1) = 0$$

$$\text{即} \quad -25 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} + 21 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} = 0$$

$$\text{化简得} \quad e^{2\mu} = \frac{21}{25} e^{22}$$

$$\text{故} \quad \mu = 11 + \frac{1}{2} \ln \frac{21}{25} \approx 10.9$$

实际问题存在的最大值, 必在唯一驻点 $\mu = 10.9$ 毫米处取得.

评述 1. 此题涉及正态随机变量的概率计算, 和第十七章例 22 一样, 在计算过程中概率密度具体表达式都不代入, 只用记号 F_X, Φ, φ , 直到不代入概率密度表达式解不出 μ 时才代入, 这样做能使计算过程表达简单、清晰, 也不易错.

2. 求最大值、最小值问题是必考的内容, 它可以出在一元函数微分学中, 也可出在多元函数微分学中, 还可以出在概率论的数学期望中.

例 19 (98, 10 分) 一商店经销某种商品, 每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布. 商店每售出 1 单位商品可得利润 1000 元, 若需求量超过了进货量, 商店可从其它商店调剂供应, 这时每单位商品获利润为 500 元, 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

$$\text{分析} \quad \text{在高等数学中, 如果 } g(x, y) = \begin{cases} g_1(x, y), & (x, y) \in D_1 \\ g_2(x, y), & (x, y) \in D - D_1 \end{cases}$$

则

$$\iint_D g(x, y) dx dy = \iint_{D_1} g_1(x, y) dx dy + \iint_{D - D_1} g_2(x, y) dx dy$$

解 设 Z 表示商店每周所得的利润, 显然 $Z = g(X, Y)$, 且

$$Z = g(X, Y) = \begin{cases} 1000Y, & Y \leq X \\ 1000X + 500(Y - X), & Y > X \end{cases} = \begin{cases} 1000Y, & Y \leq X \\ 500(X + Y), & Y > X \end{cases}$$

由题设知 (X, Y) 的联合概率密度 $f(x, y)$ 为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 10 \leq x \leq 20, 10 \leq y \leq 20 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

为了使读者能顺利看懂下面运算中的第 3 个等号, 将上面所得 $g(X, Y)$ 中大写的随机变量 X, Y 换成小写的实变量的表达式再写一遍:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1000y, & y \leq x \\ 500(x + y), & y > x \end{cases}$$

则每周利润的期望值为

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-}^{+} \int_{-}^{+} g(x, y) f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{y \leq x} 1000y \cdot f(x, y) dx dy + \iint_{y > x} 500(x + y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{10}^{20} dy \int_y^{20} 1000y \cdot \frac{1}{100} dx + \int_{10}^{20} dy \int_{10}^y 500(x + y) \cdot \frac{1}{100} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 10 \int_{10}^{20} y(20 - y) dy + 5 \int_{10}^{20} \left(\frac{3}{2} y^2 - 10y - 50 \right) dy \\
 &= \frac{20\,000}{3} + 5 \times 1500 \approx 14166.7 (\text{元})
 \end{aligned}$$

例 20 (02 各 3 分) 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 (1) X^2 和 Y^2 的协方差 $\text{Cov}(X^2, Y^2) =$ _____.

(2) X 和 Y 的相关系数 $\rho =$ _____.

解 (1) X^2 和 Y^2 的联合概率分布为

$X^2 \backslash Y^2$	0	1	$P\{X^2 = i\}$
0	0.18	0.22	0.4
1	0.32	0.28	0.6
$P\{Y^2 = j\}$	0.5	0.5	

$$E(X^2) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.6 = 0.6, \quad E(Y^2) = 0 \times 0.5 + 1 \times 0.5 = 0.5$$

$$E(X^2 Y^2) = 0 \times 0 \times 0.18 + 0 \times 1 \times 0.22 + 1 \times 0 \times 0.32 + 1 \times 1 \times 0.28 = 0.28$$

故 $\text{Cov}(X^2, Y^2) = E(X^2 Y^2) - E(X^2) \cdot E(Y^2) = 0.28 - 0.6 \times 0.5 = -0.02$

(2) 解法类似, 可得 $\rho = 0$

例 21 (05 9 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其样本均值为 $\bar{X}$, 记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$.

(I) 求 Y_i 的方差 $DY_i, i = 1, 2, \dots, n$;

(II) 求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\text{Cov}(Y_1, Y_n)$;

(III) 若 $C(Y_1 + Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量, 求常数 C ;

(IV) $P\{Y_1 + Y_n \leq 0\}$.

解 注意 X_i 和 $\bar{X}$ 不独立, 而 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是相互独立的, 又 $EY_i = 0$, 所以

$$(I) \quad DY_i = D(X_i - \bar{X}) = D\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1, j \neq i}^n X_j\right]$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 DX_i + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{j=1, j \neq i}^n DX_j$$

$$= \frac{n-1}{n} \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n.$$

$$(II) \quad \text{Cov}(Y_1, Y_n) = E(Y_1 - EY_1)(Y_n - EY_n) = E(Y_1 Y_n)$$

$$= E(X_1 - \bar{X})(X_n - \bar{X}) = E(X_1 X_n) + E(\bar{X})^2 - E(X_1 \bar{X}) - E(X_n \bar{X})$$

$$= \left(\frac{1}{n} E(X_n)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i X_n)\right) - \frac{1}{n} \sigma^2.$$

$$(III) \quad E[C(Y_1 + Y_n)^2] = C \cdot D(Y_1 + Y_2) = C[DY_1 + DY_n + 2\text{Cov}(Y_1, Y_n)]$$

$$= C\left[\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} - \frac{2}{n}\right] \sigma^2$$

$$= \frac{2(n-2)}{n} C \sigma^2 = \sigma^2$$

故 $C = \frac{n}{2(n-2)}$

$$(IV) \quad Y_1 + Y_n = X_1 - \bar{X} + X_n - \bar{X}$$

$$= \frac{n-2}{n} X_1 - \frac{2}{n} \sum_{i=2}^{n-1} X_i + \frac{n-2}{n} X_n$$

上式是相互独立的正态随机变量的线性组合, 所以 $Y_1 + Y_n$ 服从正态分布. 又由于 $E(Y_1 + Y_n) = 0$ 故

$$P\{Y_1 + Y_2 \leq 0\} = 0.5$$

例 22 (00 8 分) 设 A, B 是两个随机事件, 随机变量

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 出现} \\ -1, & A \text{ 不出现} \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 出现} \\ -1, & B \text{ 不出现} \end{cases}$$

试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 与 B 相互独立. 提示: 利用 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$.

$E(Y) = 4p_{12} - 4p_1p_2 = 0$ 当且仅当 $p_{12} = p_1p_2$.

解 利用提示, 为书写简便, 记 $P(A) = p_1, P(B) = p_2, P(AB) = p_{12}$. 计算数学期望:

$$E(X) = 1 \times P(A) + (-1) \times P(\bar{A}) = P(A) - (1 - P(A)) = 2p_1 - 1$$

类似可算得 $E(Y) = 2p_2 - 1$, 为求 $E(XY)$, 先求 XY 的分布律, 它的可能取值为 1 和 -1, 且

$$\begin{aligned} P\{XY = 1\} &= P(\{X = 1, Y = 1\} \cup \{X = -1, Y = -1\}) \\ &= P(AB \cup \bar{A}\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = P(AB) + 1 - P(A \cup B) \\ &= P(AB) + 1 - (P(A) + P(B) - P(AB)) = 2p_{12} - p_1 - p_2 + 1 \end{aligned}$$

$$P\{XY = -1\} = 1 - P\{XY = 1\} = p_1 + p_2 - 2p_{12}$$

所以

$$E(XY) = 1 \times P\{XY = 1\} + (-1) \times P\{XY = -1\} = 4p_{12} - 2p_1 - 2p_2 + 1$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 4p_{12} - 4p_1p_2$$

因此, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 当且仅当 $p_{12} = p_1p_2$, 即 X 和 Y 不相关当且仅当事件 A 和 B 相互独立.

评述 本题只给出 X, Y 的分布, 而没给出 (X, Y) 的联合分布律, 要求 $E(XY)$ 该怎么写? 注意 (X, Y) 只能取 4 个数对: $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$. 所以也可这样写:

$$\begin{aligned} E(XY) &= (1 \times 1)P\{X = 1, Y = 1\} + (1 \times (-1))P\{X = 1, Y = -1\} + ((-1) \times 1)P\{X = -1, Y = 1\} \\ &\quad + ((-1) \times (-1))P\{X = -1, Y = -1\} \\ &= P(AB) - P(A\bar{B}) - P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}) \end{aligned}$$

$$= P(AB) - P((A - P(AB))) - (P(B) - P(AB)) + 1 - (P(A) + P(B) - P(AB))$$

$$= 4p_{12} - 2p_1 - 2p_2 + 1$$

与上面计算结果一致, 这里关键是:

① 联合分布 p_{ij} 虽不知道, 但计算中可用 $P\{X = x_i, Y = y_j\}$ 表示. 以后在计算或证明中到底用 p_{ij} 还是 $P\{X = x_i, Y = y_j\}$ 要根据具体问题具体对待.

② 注意第 2 个等号中和 $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ 四个事件有关, 为了要获得证明的结果, 要尽量减少事件的个数, 例如只出现 A, B , 为此就要用概率公式 $P(\bar{A}) = 1 - P(A), P(\bar{A}\bar{B}) = P(A) - P(B), P(\bar{A}B) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$, 将与 $\bar{A}, \bar{B}$ 有关的事件概率转化为只与 A, B 有关的概率. 这种技巧在证明概率等式或计算概率中用得很多.

③ 本题也可改为

“试证明随机变量 X 和 Y 独立的充要条件是 A 与 B 相互独立.”

“试证明若 $\rho_{XY} = 0$, 则 X 和 Y 必相互独立.”(上题和本题的结合)

例 23 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$.

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$;

(2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 为什么?

解 (1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = 0$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$$

$$(2) \text{Cov}(X, |X|) = E(X|X|) - E(X) \cdot E(|X|) = E(X|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x| \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = 0$$

所以 X 和 $|X|$ 不相关.

(3) 在 $0 < y < x$ 上 $0 < P\{X \leq x\} < 1$.

$$\begin{aligned} P\{X \leq x, |X| \leq y\} &= P\{X \leq x, -y \leq X \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\} \\ &= P\{|X| \leq y\} \neq P\{X \leq x\} \cdot P\{|X| \leq y\} \end{aligned}$$

因此 X 与 $|X|$ 不独立.

评述 因为 $|X| = \sqrt{(X)^2}$, 所以 X 的取值完全影响(确定)了 $|X|$ 的取值的概率, 因此 X 和 $|X|$ 不独立是容易接受的, 但要严格证明, 在这里只能用分布函数的方法: X, Y 独立 $\Leftrightarrow P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$ 对一切 x, y 成立, 可见有时证明独立与否用分布函数处理是方便的; 另一方面, 上面已证 X 和 $|X|$ 不相关, 注意它只说明 X 和 $|X|$ 的线性联系程度非常弱, 却不能说 X 和 $|X|$ 的任何联系程度都很弱. 本题 $|X|$ 和 X 的非线性联系程度由 $|X| = \sqrt{(X)^2}$ 可见非常强.

例 24 假设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上服从联合均匀分布.

(1) 求 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} ;

(2) 问 X 和 Y 是否独立?

解 (1) (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

关于 X 和 Y 的边缘密度分别为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \begin{cases} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2} dy, & |x| \leq r \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2-x^2}, & |x| \leq r \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ f_Y(y) &= \begin{cases} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{1}{\pi r^2} dx, & |y| \leq r \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2-y^2}, & |y| \leq r \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ E(X) &= \int_{-r}^r x \cdot \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2-x^2} dx = 0, \quad E(Y) = \int_{-r}^r y \cdot \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2-y^2} dy = 0 \\ \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = E(XY) = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} xy \cdot \frac{1}{\pi r^2} dxdy = 0 \end{aligned}$$

故 X 和 Y 的相关系数 $\rho = 0$.

(2) 因为 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立.

评述 连续型随机变量的数字特征经常用到奇函数在对称区间上的定积分值为 0 这一计算技巧.

例 25 (03, 13 分) 对于任意二事件 A 和 B $0 < P(A) < 1$ $0 < P(B) < 1$,

$$\rho = \frac{P(AB) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$$

称做事件 A 和 B 的相关系数.

(1) 证明事件 A 和 B 独立的充分必要条件是相关系数等于零;

(2) 利用随机变量相关系数的基本性质, 证明 $|\rho| \leq 1$.

证 (1) 由 ρ 的定义, 可见 $\rho = 0$ 当且仅当

$$P(AB) - P(A)P(B) = 0,$$

而这即符合事件 A 和 B 独立的定义, 故 $\rho = 0$ 是 A 和 B 独立的充分必要条件.

(2) 引进随机变量 X 和 Y :

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 出现} \\ 0, & \text{若 } A \text{ 不出现} \end{cases}; \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{若 } B \text{ 出现} \\ 0, & \text{若 } B \text{ 不出现} \end{cases};$$

则它们的分布列分别为

X	0	1
P	P(A)	P(A)

Y	0	1
P	P(B)	P(B)

计算得 $EX = P(A)$, $EY = P(B)$, $DX = P(A)P(\bar{A})$, $DY = P(B)P(\bar{B})$, $Cov(X, Y) = P(AB) - P(A)P(B)$, 因此, 事件 A 和 B 的相关系数就是随机变量 X 和 Y 的相关系数, 故由随机变量的相关系数的性质可得 $|\rho| \leq 1$.

例 27 (03 4 分) 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9, 若 $Z = X - 0.4$, 则 Y 与 Z 的相关系数为_____.

解 $Cov(Y, Z) = Cov(Y, X - 0.4) = Cov(Y, X) = \rho_{XY} \sqrt{DX} \sqrt{DY}$

$$DZ = D(X - 0.4) = DX$$

故

$$\rho_{YZ} = \frac{Cov(Y, Z)}{\sqrt{DY} \sqrt{DZ}} = \frac{\rho_{XY} \sqrt{DX} \sqrt{DY}}{\sqrt{DY} \sqrt{DX}} = \rho_{XY} = 0.9.$$

预测·强化训练十八

1. 已知随机变量的分布律为 $P\{X = n\} = \frac{1}{n(n-1)}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) 则 $EX =$ ()

(A) 0 (B) 1 (C) $\ln 2$ (D) 不存在

2. 设随机变量 X_1, X_2 相互独立, 方差存在, 且 $E(X_1) = E(X_2) = 0$, 记 $Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_1 X_2$, 则 Y_1 和 Y_2 ()

(A) 相互独立 (B) 不独立 (C) $\rho_{Y_1, Y_2} \neq 0$ (D) 不相关

3. 如果存在常数 a, b ($a \neq 0$) 使 $P\{Y = aX + b\} = 1$ 且 $0 < DX < +\infty$, 那么 ρ_{XY} 为 ()

(A) 1 (B) -1 (C) $\frac{a}{|a|}$ (D) $|\rho_{XY}| < 1$

4. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布, $U = X - Y$, $V = X + Y$, 则随机变量 U 和 V 必然 ()

(A) 不独立 (B) 独立 (C) 相关系数不为零 (D) 相关系数为零

5. 设 X 是随机变量, $EX = \mu$, $DX = \sigma^2$ ($\mu, \sigma > 0$ 常数), 则对任意常数 C 必有 ()

(A) $E(X - C)^2 = EX^2 - C^2$ (B) $E(X - C)^2 = E(X - \mu)^2$
(C) $E(X - C)^2 < E(X - \mu)^2$ (D) $E(X - C)^2 \geq E(X - \mu)^2$

6. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-bx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

若已知 $E(X) = 10$, 则常数 $a =$ _____, $b =$ _____.

7. 设 a 为区间 $[0, 1]$ 上的一个定点, 随机变量 X 在区间 $[0, 1]$ 上服从均匀分布, Y 为点 X 到 a 的距离, 则 $E(XY) =$ _____.

8. 已知随机变量 X, Y 相互独立, 且 $DX = 2DY$, 则 $2X + Y$ 和 $2X - Y$ 的相关系数为_____.

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

	Y	-2	0	1
X	0	0	0.8	0
	1	0.1	0	0.1

则 $Cov(X, Y) =$ _____.

10. 某射手参加射击比赛, 共发 4 发子弹, 他的命中率为 0.9, 假设每次射击是相互独立的, 击中目标射击就结束, 求直到射击结束所发射的次数 X 的概率分布与数学期望.

11. 某产品的次品率为 0.1, 检验员每天检验 4 次, 每次随机地取 10 件产品进行检验, 如发现其中的次品数多于 1, 就去调整设备, 以 X 表示一天中调整设备的次数, 求 $E(X)$.

12. 一人有 N 把钥匙, 每次开门时, 他随机地拿出一把 (只有一把钥匙能打开这道门), 直到门打开为止. 用 X 表示到打开为止所用过的钥匙数 (包括最后拿对的那一把), 按以下两种情况分别计算 $E(X)$: (1) 用过打不开的钥匙不再放回去; (2) 用过打不开的仍放回去.

13. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立, 且 $X \sim N(-1, 2)$, $Y \sim N(0, 3)$, $Z \sim N(4, 5)$, 求:

(1) $P\{-8 \leq 4X - 3Y + Z + 6 < 20\}$; (2) $\text{Cov}(X + 2Y, Z + 2X + 3)$; (3) $E(|4X + Z|)$.

14. 已知随机变量 Y 的概率密度为
$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

求随机变量 $Z = \frac{1}{Y}$ 的数学期望 $E(Z)$.

15. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 均值和方差都存在, 证明 $D(XY) \geq DX \cdot DY$

16. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) X 与 Y 是否相互独立? 为什么? (2) X 与 Y 是否不相关? 为什么?

17. 某箱装有 100 件产品, 其中一、二和三等品分别为 80, 10 和 10 件. 现从中随机抽取 1 件, 记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{抽到 } i \text{ 等品} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

试求: (1) 随机变量 X_1 和 X_2 的联合分布; (2) 随机变量 X_1 和 X_2 的相关系数.

18. 已知二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 并且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1, \beta^2)$ 和 $N(0, \beta^2)$, X , Y 的相关系数 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$, 设 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$.

(1) 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$;

(2) 求 X 和 Z 的相关系数 ρ_{XZ} ;

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立? 为什么?

19. 将一颗质量分布均匀的骰子重复掷 n 次, 随机变量 X, Y 分别表示其中出现小于 2 点的次数和不少于 2 点的次数, 判断 $X + Y$ 与 $X - Y$ 是否不相关? 为什么?

20. 设做一次试验的费用为 1000 元, 如果试验失败, 则要另外再化 300 元用于对试验设备作调整, 才能进行下一次的试验. 各次试验是相互独立的, 成功的概率均为 0.2, 并假定试验要进行到出现成功为止, 问整个试验程序所需费用的期望值是多少?

21. 假设市场上对某公司的 A 商品的需求量是 X (单位: 万吨), 它服从区间 $[2, 6]$ 上的均匀分布, 每销出 A 商品一万吨, 可盈利 5 万元, 但假如销售不出而囤积在仓库内, 则每万吨需支出保管养护费 2 万元, 问该公司应组织多少货源, 才能使获取的平均利润最大?

22. 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10, 30]$ 上均匀分布的随机变量, 而经销商店进货数量为区间 $[10, 30]$ 中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利 500 元, 若供大于求, 每处理一单位商品亏损 100 元; 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时每一单位商品仅获利 300 元, 为使商店所获利润期望值不少于 9280 元, 试确定最少进货量.

简明解答

1. (D). $\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)}$ 发散, 故 EX 不存在.

2. (D). $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = EY_1Y_2 - EY_1EY_2 = E(X_1 - X_2)X_1X_2 - E(X_1 - X_2)E(X_1X_2)$
 $= (EX_1^2 \cdot EX_2 - EX_1 \cdot EX_2^2) - 0 = 0$

因此 Y_1, Y_2 不相关.

3. (C). 存在 a, b 使 $P\{Y = aX + b\} = 1 \Leftrightarrow |\rho_{XY}| = 1$, 当 $a > 0$ 时 $\rho_{XY} = 1$, 当 $a < 0$ 时 $\rho_{XY} = -1$, 所以 $\rho_{XY} = \frac{a}{|a|}$.

4. (D). 由于 X, Y 同分布, 所以 $E(X^2) = E(Y^2)$, $E(X) = E(Y)$, $E(U) = E(X - Y) = 0$, 因此 $E(UV) = E[(X + Y)(X - Y)] = E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2) = 0 = E(U) \cdot E(V)$ 即 U 和 V 不相关.

5. (D). $E(X - C)^2 = E((X - \mu) - (C - \mu))^2 = E(X - \mu)^2 - 2(C - \mu)E(X - \mu) + (C - \mu)^2$

$$= E(X - \mu)^2 + (C - \mu)^2 \geq E(X - \mu)^2$$

$$6. \frac{1}{10}, \frac{1}{10}.$$

$$7. \frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}. \quad E(XY) = E(X|X-a|) = \int_{-}^{+} x|x-a| f_X(x) dx = \int_0^1 x|x-a| \cdot dx \\ = \int_0^a x(a-x) dx + \int_a^1 x(x-a) dx = \frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}.$$

$$8. \frac{7}{9}. \quad \text{Cov}(2X+Y, 2X-Y) = \text{Cov}(2X, 2X) - \text{Cov}(2X, Y) + \text{Cov}(Y, 2X) - \text{Cov}(Y, Y) = 4DX - DY = 7DY$$

$$D(2X+Y) = 4DX + DY = 9DY, \quad D(2X-Y) = 4DX + DY = 9DY$$

$$\text{故} \quad \rho = \frac{\text{Cov}(2X+Y, 2X-Y)}{\sqrt{D(2X+Y)} \sqrt{D(2X-Y)}} = \frac{7DY}{9DY} = \frac{7}{9}.$$

$$9. -0.08.$$

10. X 的可能取值为 1, 2, 3, 4, 令 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次射击击中目标}\}, i = 1, 2, 3, 4$, 它们相互独立,

$$P\{X=1\} = P(A_1) = 0.9$$

$$P\{X=2\} = P(\overline{A_1}A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2) = 0.09$$

$$P\{X=3\} = P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = 0.009$$

$$P\{X=4\} = P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}A_4 \cup \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}\overline{A_4}) \\ = P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0.001$$

即 X 的分布律为

X	1	2	3	4
p	0.9	0.09	0.009	0.001

$$EX = \sum_{k=1}^4 k \cdot P\{X=k\} = 1.111.$$

11. 设 $A = \{\text{设备需调整}\}$, Y 表示每次抽 10 个产品中发现的次品数, 则 $Y \sim B(10, 0.1)$.

$$p = P(A) = P\{Y \geq 2\} = 1 - P\{Y=0\} - P\{Y=1\} = 1 - 1.9 \times 0.9^9$$

显然 $X \sim B(4, p)$, 故 $E(X) = 4p = 4 \times [1 - 1.9 \times 0.9^9] \approx 1.056$.

12. (1) 不再放回时, X 的分布为 $P\{X=i\} = \frac{1}{N}, i = 1, 2, \dots, N$ (用抓阄模型易知), 故

$$E(X) = \sum_{i=1}^N i \cdot P\{X=i\} = \sum_{i=1}^N i \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}.$$

(2) 有放回时, X 的分布为 $P\{X=i\} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{i-1} \frac{1}{N}, i = 1, 2, \dots$, 此即 $p = \frac{1}{N}$ 的几何分布, 故 $E(X) = \frac{1}{p} = N$.

评述 记住参数为 p 的几何分布的概率分布及数学期望很有好处. $P\{X=i\} = (1-p)^{i-1}p, i = 1, 2, \dots$, $E(X) = \frac{1}{p}$.

$$13. (1) 2\Phi(1.75) - 1 \quad (2) 4 \quad (3) \sqrt{\frac{74}{\pi}}$$

$$14. E(Z) = E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_{-}^{+} \frac{1}{y} f_Y(y) dy = \int_0^{+} \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} dy$$

$$\stackrel{\text{令 } y=at}{=} \frac{1}{a^2} \int_0^{+} e^{-\frac{t^2}{2}} a dt = \frac{a}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}$$

$$15. D(XY) = E(XY)^2 + (E(XY))^2 = E(X^2)E(Y^2) - (EX)^2(EY)^2$$

$$DX \cdot DY = (E(X^2) - (EX)^2)(E(Y^2) - (EY)^2)$$

$$= E(X^2)E(Y^2) - E(X^2)(EY)^2 - (EX)^2E(Y^2) + (EX)^2(EY)^2$$

$$= D(XY) - (E(X^2))(EY)^2 - (EX)^2(EY^2) - ((EX)^2E(Y^2) - (EX)^2(EY)^2)$$

$$= D(XY) - (EY)^2DX - (EX)^2DY \leq D(XY).$$

上面不等式成立是因为 $DX \geq 0, (EX)^2 \geq 0$.

16. (1) 不独立 (2) 不相关

$$17. (1) \begin{array}{c|cc} & X_2 & \\ \hline X_1 & & \\ \hline 0 & 0.1 & 0.1 \\ 1 & 0.8 & 0 \end{array} \quad (2) \rho = -\frac{2}{3}$$

18. (1) $E(Z) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} D(Z) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 D(X) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 D(Y) + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \text{Cov}(X, Y) \\ &= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\rho_{XY} \sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)} = 3 \end{aligned}$$

$$(2) \text{Cov}(X, Z) = \frac{1}{3}\text{Cov}(X, X) + \frac{1}{2}\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{3}D(X) + \frac{1}{2}\rho_{XY} \sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)} = 0$$

$$\rho_{XZ} = \frac{\text{Cov}(X, Z)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Z)}} = 0$$

(3) 因为 Z 是正态变量的线性组合, 也是正态变量, (X, Z) 还是二维正态分布, 又 $\rho_{XZ} = 0$, 故 X, Z 独立.

19. 因为 $X + Y = n$, 而常数 n 和任何随机变量相互独立, 所以常数 n 和 $X - Y = 2X - n$ 相互独立, 即 $X + Y$ 和 $X - Y$ 相互独立, 进而可得 $X + Y$ 和 $X - Y$ 是不相关的.

20. 设 X 表示直到试验首次成功所需试验次数, 则 $P\{X = k\} = 0.8^{k-1} \times 0.2, k = 1, 2, \dots, n, \dots$
而所需费用 T 为

$$T = \begin{cases} 1000, & X = 1 \\ 1000 + (X - 1) \times 1300, & X \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 1000, & X = 1 \\ 1000 + 1 \times 1300, & X = 2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1000 + (k - 1) \times 1300, & X = k \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

故 $ET = 1000 \times P\{X = 1\} + \sum_{k=2} [1000 + (k - 1) \times 1300] \times P\{X = k\}$

$$= 1000 + 1300 \sum_{k=2} (k - 1) \times 0.8^{k-1} \times 0.2$$

$$= 1000 + 260 \left(\sum_{k=2} (k - 1)x^{k-1} \right) \Big|_{x=0.8}$$

$$= 1000 + 260 \left(\frac{x}{(1 - x)^2} \right) \Big|_{x=0.8} = 6200 (\text{元})$$

21. 设应组织货源 A 商品 t 万吨, 所获利润记为 Y 万元, 则

$$Y = g(X) = \begin{cases} 5t, & X \geq t \\ 5X - 2(t - X), & X < t \end{cases} = \begin{cases} 5t & X \geq t \\ 7X - 2t & X < t \end{cases}$$

因此
$$\begin{aligned} EY &= \int_{x \geq t} 5t f_X(x) dx + \int_{x < t} (7x - 2t) f_X(x) dx = \int_t^6 5t \times \frac{1}{4} dx + \int_2^t (7x - 2t) \times \frac{1}{4} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{7t^2}{2} + 34t - 14t \right) = \frac{120}{7} - \frac{7}{8} \left(t - \frac{34}{7} \right)^2 \end{aligned}$$

所以应组织 $\frac{34}{7}$ 万吨 A 商品, 可使所获平均利润最大.

22. 设进货量为 a 单位, 则利润为

$$T(a) = \begin{cases} 500a + 300(X - a), & a < X \leq 30 \\ 500X - 100(a - X), & 10 \leq X \leq a \end{cases} = \begin{cases} 300X + 200a, & a < X \leq 30 \\ 600X - 100a, & 10 \leq X \leq a \end{cases}$$

$$E(T(a)) = \int_{10}^a \frac{1}{20} (600x - 100a) dx + \int_a^{30} \frac{1}{20} (300x + 200a) dx = -7.5a^2 + 350a + 5250$$

由 $-7.5a^2 + 350a + 5250 \geq 9280$, 解得 $20 \frac{2}{3} \leq a \leq 26$, 故最少进货量为 21 单位.

第十九章 大数定律和中心极限定理

考试要求

1. 了解切比雪夫不等式.
2. 了解切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律(独立同分布随机变量序列的大数定律).
3. 了解棣莫弗 - 拉普拉斯定理(二项分布以正态分布为极限分布)和列维 - 林德伯格定理(独立同分布随机变量序列的中心极限定理).

考试要点分析与题型预测

本章主要考点是切比雪夫不等式及中心极限定理. 和切比雪夫不等式有关的考题都以填空题形式出现(见例 2.4). 由于中心极限定理应用广泛, 如果它出现在填空题中都属于直接用来求概率近似值(见训练题第 4 题), 如出现在计算题中, 一般都是有应用背景(见例 5.7), 也可能以证明题形式出现(见例 6).

本章内容也可能出现在选择题中, 主要考查对大数定律和中心极限定理中的条件的理解(见例 1.3).

§ 19 - 1 切比雪夫不等式

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2$, 则对于任意正数 ε 有不等式

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

这个不等式称为切比雪夫不等式. 它也可写成另一种形式 $P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

评述 利用切比雪夫不等式可以估计事件 $\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\}$ 或 $\{|X - E(X)| < \varepsilon\}$ 的概率, 它也是证明大数定律的关键不等式.

§ 19 - 2 大数定律

一、切比雪夫大数定律

设随机变量序列 $\{X_n\} (n = 1, 2, \dots)$ 相互独立, 且具有相同的数学期望 $E(X_n) = \mu$, 方差 $D(X_n) = \sigma^2$, 则 $\{X_n\}$ 满足大数定律, 即 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$ (对任意正数 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu| < \varepsilon\} = 1$, 则称 $\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, n = 1, 2, \dots\}$ 按概率收敛于 μ , 记作 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$.)

二、伯努利大数定理

设随机变量 n_A 表示 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, p 是事件 A 在每次试验中发生的概率, 则 $\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p$.

三、辛钦大数定律

设随机变量序列 $\{X_n\} (n = 1, 2, \dots)$ 相互独立同分布, 且具有数学期望 $E(X_n) = \mu$, 则 $\{X_n\}$ 满足大数定律, 即 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$.

评述 辛钦大数定律与切比雪夫大数定律的条件中相同的是 $\{X_n\}$ 相互独立,且具有相同数学期望 $E(X_n) = \mu$,不同的是前者还要求 X_n 同分布,而后者不要求 X_n 同分布,但要求具有相同方差 $D(X_n) = \sigma^2$. 相对来说辛钦大数定律应用更广些,特别是在数理统计中.

大数定律主要要记住在什么条件下,才能保证 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$.

§ 19 - 3 中心极限定理

一、独立同分布的中心极限定理(列维-林德伯格定理)

设随机变量序列 $\{X_n\}(n = 1, 2, \dots)$ 独立同分布,且具有数学期望 $E(X_n) = \mu$,方差 $D(X_n) = \sigma^2 \neq 0$,则对任意 x 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

评述 1. $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - E(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}}$ 是把随机变量 $\sum_{i=1}^n X_i$ 标准化而得到的,上述独立同分布

中心极限定理是说把 $\sum_{i=1}^n X_i$ 标准化所得 Y_n 的分布函数的极限是标准正态分布函数,所以用这个定理的关键一步是把 $\sum_{i=1}^n X_i$ 标准化.

2. 还要特别强调的是:无论是上面的大数定律,还是上述的中心极限定理,随机变量 X_n 对分布没什么要求,也就是说不管 X_n 是离散型随机变量还是连续型随机变量,计算方法完全一样.

3. 理论上的应用:设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$ 存在,则当 n 充分大时,由中

心极限定理知 $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1)$,故 $\sum_{i=1}^n X_i = \sqrt{n}\sigma Y_n + n\mu$ 是正态变量 Y_n 的线性组合,也服从正态分布, $E(\sum_{i=1}^n X_i) = n\mu$, $D(\sum_{i=1}^n X_i) = n\sigma^2$,因此结论是 n 充分大($n \geq 45$)时, $\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$.

二、棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

设 $Y_n(n = 1, 2, \dots)$ 为具有参数 $n, p(0 < p < 1)$ 的二项分布,则对任何实数 x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

§ 19 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测

例1 (05, 4分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量列,且均服从参数为 $\lambda(\lambda > 1)$ 的指数分布,记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则()

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda \sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x)$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right\} = \Phi(x)$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x) \quad (D) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

解 本题关键是正确使用独立同分布中心极限定理, $EX_i = \lambda^{-1}$, $DX_i = \lambda^{-2}$, 所以应有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{\lambda^2}}} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

故应选(C).

例2 (01 3分) 设随机变量X和Y的数学期望分别为-2和2, 方差分别为1和4, 相关系数为-0.5, 则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y| \geq 6\} \leq$ _____.

$$\begin{aligned} \text{解 } P\{|X+Y| \geq 6\} &= P\{|(X+Y) - E(X+Y)| \geq 6\} \\ &\leq \frac{D(X+Y)}{6^2} = \frac{1}{36}(DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y)) \\ &= \frac{1}{36}(1 + 4 + 2 \cdot \sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY} \cdot \rho_{XY}) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

例3 (03 4分) 设总体X服从参数为2的指数分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体X的简单随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于_____.

解 因为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 所以 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 也独立同分布, 且 $EY_i = EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = \frac{1}{2^2} + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ 存在, 故由辛钦大数定律知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ 依概率收敛到 $EY_i = \frac{1}{2}$.

例4 (02 3分) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, 则根据列维-林德伯格(Levy-Lindberg)中心极限定理, 当n充分大时, S_n 近似服从正态分布, 只要 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ().

- (A) 有相同的数学期望 (B) 有相同的方差
(C) 服从同一指数分布 (D) 服从同一离散型分布

解 应选(C). 因为定理除了要求 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立外, 还要求它们同分布, 而且 $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$ 存在, 而服从参数为 λ 的指数分布的 X_i 有 $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$ 都存在. (A) (B) 显然不能选. (D) 为什么不能选呢? 因为离散型分布的随机变量的 $E(X_i)$, $D(X_i)$ 不一定存在, 例如如果 $\sum_{i=1}^n x_i p_i$ 不绝对收敛, 则 $E(X_i)$ 就不存在.

例5 (99 3分) 在天平上重复称量一重为a的物品, 假设各次称量结果相互独立且同服从正态分布 $N(a, 0.2^2)$, 若以 $\bar{X}_n$ 表示n次称量结果的算术平均值, 则为使 $P\{|\bar{X}_n - a| < 0.1\} \geq 0.95$, n的最小值应小于自然数_____.

解 $\bar{X}_n$ 为独立正态变量的线性组合, 所以 $\bar{X}_n \sim N(a, \frac{0.2^2}{n})$, 由

$$\begin{aligned} P\{|\bar{X}_n - a| < 0.1\} &= P\{a - 0.1 < \bar{X}_n < a + 0.1\} = F_{\bar{X}_n}(a + 0.1) - F_{\bar{X}_n}(a - 0.1) \\ &= \Phi\left(\frac{0.1}{\frac{0.2}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.1}{\frac{0.2}{\sqrt{n}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - 1 \geq 0.95 \end{aligned}$$

即 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.975$, 查表得 $\Phi(1.96) = 0.975$, 所以 $\frac{\sqrt{n}}{2} \geq 1.96$, 故 $n \geq 16$

评述 也有同学这样做 因为 $\bar{X}_n$ 为独立正态变量的线性组合, 所以 $\bar{X}_n \sim N\left(a, \frac{0.2^2}{n}\right)$, 由切比雪夫不等式

$$P\{|\bar{X}_n - a| < 0.1\} \geq 1 - \frac{D\bar{X}_n}{0.1^2} = 1 - \frac{0.04}{0.01} \geq 0.95$$

可得 $n \geq \frac{1}{0.05} \cdot \frac{0.04}{0.01} = 80$. 可见, 用切比雪夫不等式“估计”的 n 要比上述解法精确计算所得的 n 偏大.

所以, 一定要正确选择所用的方法.

例6 (01 8分) 一生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的. 假设每箱的平均重量为 50kg, 标准差为 5kg. 若用最大载重量为 5 吨的汽车承载, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于 0.977. ($\Phi(2) = 0.977$).

解 设能装 n 箱, 装运的第 i 箱的重量为 X_i (单位: kg) $i = 1, 2, \dots, n$, 则 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, $E(X_i) = 50$, $\sqrt{D(X_i)} = 5$, 由独立同分布中心极限定理得

$$P\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq 5000\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - 50n}{5\sqrt{n}} \leq \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2)$$

由分布函数的不减性得 $\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2$

得 $n < 98.02$, 故最多可以装 98 箱.

评述 1. 上面计算中“ $\approx$ ”不能少, 表示用中心极限定理进行概率近似计算.

2. 下面的解法是错的: 设能装 n 箱, 每箱重量为 X (kg).

$$P\{nX \leq 5000\} = P\left\{\frac{nX - 50n}{5\sqrt{n}} \leq \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2)$$

所以 $\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2$, 得 $n < 98.02$, 取 98 箱.

错在什么地方? 因为 X_1 和 X_2 独立同分布, 绝不能错误地理解为 $X_1 + X_2 = 2X_1$, 所以 $\sum_{i=1}^n X_i$ 不能等于 nX , 这正是

错误的所在. 应用中心极限定理一定要用 $\sum_{i=1}^n X_i$, 而不能对 nX 用中心极限定理.

例7 (96 6分) 假设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 已知 $E(X^k) = \alpha_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$). 证明当 n 充分大时, 随机变量 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 近似服从正态分布, 并指出其分布参数.

证 依题意 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 可知 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ 也独立同分布, 且有 $E(X_1^2) = \alpha_2$, $D(X_1^2) = E(X_1^4) - (E(X_1^2))^2 = \alpha_4 - \alpha_2^2$, 由中心极限定理知

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\alpha_2}{\sqrt{n(\alpha_4 - \alpha_2^2)}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \alpha_2}{\sqrt{(\alpha_4 - \alpha_2^2)/n}} = \frac{Z_n - \alpha_2}{\sqrt{(\alpha_4 - \alpha_2^2)/n}}$$

的极限分布是标准正态分布, 所以当 n 充分大时 Y_n 近似服从正态分布, 从而作为 Y_n 的线性组合 $Z_n =$

$\sqrt{\frac{\alpha_4 - \alpha_2^2}{n}} Y_n + \alpha_2$ 也近似服从参数为 $\mu = \alpha_2$, $\sigma^2 = \frac{\alpha_4 - \alpha_2^2}{n}$ 的正态分布.

例8 某工厂有机床 300 台, 由于换料等各种原因, 每台机床平均每小时要停开 15 分钟. 设每台机床电动机的功率为 2kW, 且各台机床的停与开是相互独立的, 试计算至少需供电多少 kW, 才能以 99.5% 的概率保证这些机床不致因供电不足而影响生产.

解 设至少应供电 a kW. X 表示任一时间在开动的机床数, 则 $X \sim B(300, \frac{3}{4})$. 由棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理得

$$\begin{aligned} P\{2X \leq a\} &= P\{X \leq \frac{a}{2}\} = P\left\{\frac{X - 300 \times \frac{3}{4}}{\sqrt{300 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}} \leq \frac{\frac{a}{2} - 300 \times \frac{3}{4}}{\sqrt{300 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{\frac{a}{2} - 225}{7.5}\right) \geq 0.995 = \Phi(2.58) \end{aligned}$$

由 $\frac{\frac{a}{2} - 225}{7.5} \geq 2.58$ 解得 $a \geq 490$,因此至少供电 490kW 电 ,才能以 99.5% 的概率保证这些机床不致因供电不足而影响生产 .

例 9 某保险公司多年的统计资料表明 ,在索赔户中被盗索赔户占 20% ,以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数 .

- (1) 写出 X 的概率分布 ;
(2) 利用棣莫弗 - 拉普拉斯定理 ,求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值 .
[附表] 设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

解 (1) X 服从二项分布 ,参数 $n = 100$, $p = 0.2$,它的分布律为
 $P\{X = k\} = C_{100}^k 0.2^k 0.8^{100-k} \quad k = 0, 1, \dots, 100.$
(2) $EX = np = 20$, $DX = np(1 - p) = 16$. 根据棣莫弗 - 拉普拉斯定理

$$\begin{aligned} P\{14 \leq X \leq 30\} &= P\left\{\frac{14 - 20}{4} \leq \frac{X - 20}{4} \leq \frac{30 - 20}{4}\right\} \\ &\approx \Phi(2.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(2.5) + \Phi(1.5) - 1 = 0.927 \end{aligned}$$

预测 · 强化训练十九

1. (01 3 分) 设随机变量 X 的方差为 2 ,则根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设随机变量 X 和 Y 不相关 , X 服从区间 $(-3, 3)$ 上的均匀分布 , Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{16}y^2, & -2 < y < 2 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

则根据切比雪夫不等式 $P\{|X - Y| < 3\} \geq \underline{\hspace{2cm}}$.

3*. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布随机变量序列 ,且都服从参数为 λ 的泊松分布 ,则对任何 $\varepsilon > 0$ 和实数 x 有().

- $$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right\} = 1$$
- $$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \lambda\right| \leq x\right\} = \Phi(x)$$
- $$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right\} = \Phi(x)$$
- $$(D) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \geq \varepsilon\right\} = 0$$

4. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

设 $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 相互独立 ,且和 X 有相同分布 ,则用中心极限定理计算概率 $P\{80 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 80 + \sqrt{10}\}$ 的近似值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (已知 $\Phi(2.5) = 0.9938$).

5*. 某电视机厂每月生产 10000 台电视机 ,但它的显象管车间的正品率为 0.8 ,为了以 0.997 的概率保证出厂的电视机都装上正品的显象管 ,该车间每月应至少生产多少只显象管 ? ($\Phi(2) = 0.997$).

6. 某计算机系统有 100 个终端,每个终端有 10% 的时间在使用,若各个终端使用与否是相互独立的,试用中心极限定理求在某时刻在使用的终端数不超过 10 个的概率 α .

7. 某车间有同型号机床 200 部,每部开动的概率为 0.7,假定各机床开或关是独立的,开动时每部机床要消耗电能 15 单位.问电厂最少要供应这个车间多少电能,才能以 95% 的概率保证不致因供电不足而影响生产?

8°. 在人寿保险公司里有 3000 个同一年龄的人参加人寿保险,在一年里,每个人的死亡率为 0.1%,参加保险的人在一年到头一天交付保险费 10 元,而死亡时家属可从保险公司领取 2000 元,求:

(1) 保险公司一年中获利不小于 20000 元的概率;(2) 保险公司亏本的概率.

简明解答

$$1. \frac{1}{2}. P\{|X - EX| \geq 2\} \leq \frac{DX}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \frac{2}{5}. P\{|X - Y| < 3\} = P\{|(X - Y) - E(X - Y)| < 3\} \geq 1 - \frac{1}{9}D(X - Y) = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{27}{5} = \frac{2}{5}.$$

3. (C). 由于泊松分布的 $EX_i = \lambda$, $DX_i = \lambda \neq 0$ 都存在,所以 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 既满足大数定律,又满足中心极限定理.由表达式易知,(C) 才是满足中心极限定理的表述,其它选项既不是满足大数定律,也不是满足中心极限定理的表述.

4. 0.4928. $EX = \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx = \frac{4}{5}$, $EX^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 4x^3 dx = \frac{2}{3}$, 所以 $DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{75}$ 都存在,满足中心极限定理条件,故

$$\begin{aligned} P\{80 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 80 + \sqrt{10}\} &= P\left\{\frac{80 - 80}{10\sqrt{\frac{2}{75}}} < \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot \frac{4}{5}}{\sqrt{100 \times \frac{2}{75}}} < \frac{80 + \sqrt{10} - 80}{10\sqrt{\frac{2}{75}}}\right\} \\ &= \Phi(2.5) - \Phi(0) = 0.4938 \end{aligned}$$

5. 设车间每月应生产 n 只显象管,令 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 只显象管是正品} \\ 0 & \text{第 } i \text{ 只显象管是次品} \end{cases}$

则 $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ 相互独立同分布, $P\{X_i = 1\} = 0.8$, $P\{X_i = 0\} = 0.2$, $EX_i = 0.8$, $DX_i = 0.16$ 都存在,满足中心极限定理条件,

$$\Phi(2) = 0.997 \leq P\left\{\sum_{i=1}^n X_i \geq 10000\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \times 0.8}{0.4\sqrt{n}} \geq \frac{10000 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{10000 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{即 } \Phi\left(\frac{10000 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right) \leq 1 - \Phi(2) = \Phi(-2), \text{ 得 } \frac{10000 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}} \leq -2$$

$$(\sqrt{n})^2 - \sqrt{n} - 12500 \geq 0, \sqrt{n} \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 50000}}{2}$$

$$n \geq \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{50001} + 50001) = 12612.3$$

车间每月应至少生产 12613 只.

6. $\alpha = 0.5$

7. 至少供应电 2259.4 单位.

8. (1) $P\{\text{获利} \geq 2000\} \approx 0.88$, (2) $P\{\text{亏本}\} \approx 0$

第二十章 数理统计的基本概念

考试要求

1. 理解总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩的概念,其中样本方差定义为:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

2. 了解 χ^2 分布、t分布和F分布的概念及性质,了解分位数的概念并会查表计算.

3. 了解正态总体的某些常用抽样分布.

考试要点分析与题型预测

本章重点是怎样生成服从 N 、 t 、 χ^2 、 F 四种抽样分布的随机变量和重要定理:正态总体的样本方差 S^2 和 $\bar{X}$ 独立,且 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.要善于判别或证明某随机变量服从参数是什么的什么分布,选择题型见例1~例3,填空题型见例5、例6,证明题型见例8,也可以是知道服从某抽样分布求概率(见例4、例7)或求数字特征(见例9).

在判别或证明服从什么分布中,特别要注意相互独立和下面二个随机变量不同之处及参数的不同.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n), \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

§ 20 - 1 总体、个体、样本和统计量

一、简单随机样本

1. 总体与个体

总体 在数理统计中,把研究对象的全体称为总体.

个体 总体中每个元素称为个体.

总体 X 总体常用一个随机变量 X 表示,它就是研究总体所关心的某项数量指标.

2. 简单随机样本与容量

样本 从总体中抽出的部分个体称为总体 X 的一个样本.

简单随机样本 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的样本,如果它们相互独立,而且都和总体 X 有相同的分布,称 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本.由于教材中用的全是简单随机样本,所以它又简称为样本. n 称为这个样本的容量.

样本值 样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ (随机变量)的观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ (实数)称为样本值.

二、统计量

1. 统计量

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的函数,若 g 是连续函数,且 g 中不含任何未知参数,则称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是一个统计量.

2. 常用的统计量

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,下面的样本矩是常用的统计量:

$$\text{样本均值} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\text{样本方差} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\text{样本 } k \text{ 阶(原点)矩} \quad A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\text{样本 } k \text{ 阶中心矩} \quad B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k \quad k = 1, 2, \dots$$

§ 20 - 2 抽样分布

1. 标准正态分布

(1) 生成 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 概率密度

$\varphi(x)$ 的图形如图 20 - 1(a) 所示.

(2) 上侧 α 分位数 定义 设 $X \sim N(0, 1)$ 则称满足

$$P\{X > u_\alpha\} = \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

的数 u_α 为 $N(0, 1)$ 分布的上侧 α 分位数(或上 α 分位点). 在图 20 - 1(b) 上 坐标为 u_α 点的上侧(右侧)面积为 α .

查表: 由标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 的表查 u_α 因为 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 所以 $\Phi(u_\alpha) = P\{X \leq u_\alpha\} = 1 - \alpha$, 故只要查使 $\Phi(x) = 1 - \alpha$ 的那个 x 即为所要求的 u_α . 有二个特殊的上侧分位数一定要记住 $u_{0.025} = 1.96$, $u_{0.05} = 1.65$.

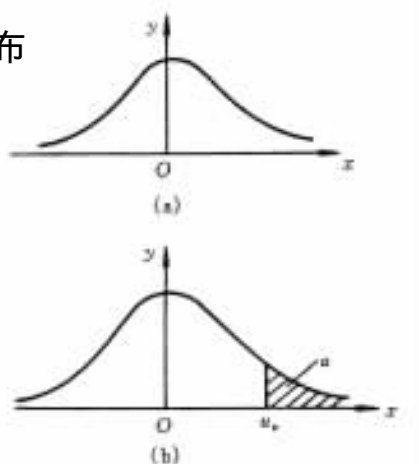


图 20 - 1 标准正态分布图

评述 后面三种抽样分布由分布函数表查相应的上侧分位数的方法完全类似于此处正态分布的上侧分位数的查法. (有的书上对后面三种抽样分布有专门的上侧分位数表, 则直接查上侧分位数表即可. 但考研题中一般都给出分布函数表, 让你去查分位数)

2. χ^2 分布

(1) 生成 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立同 $N(0, 1)$ 分布, 则称随机变量 $(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)$ 的分布为自由度是 n 的 χ^2 分布. 即

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

$\chi^2(n)$ 分布的概率密度 $f(x)$ 不好记, 也不用记, 只要记住它的图形即可, 如图 20 - 2(a) 所示.

(2) 上侧 α 分位数 设 $X \sim \chi^2(n)$ 称满足 $P\{X > \chi_\alpha^2(n)\} = \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$ 的数 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上侧 α 分位数. 在图 20 - 2(b) 上, 坐标为 $\chi_\alpha^2(n)$ 点的上侧面积为 α .

(3) 重要定理 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\bar{X}$, S^2 分别是样本均值和样本方差, 则有

$$1^\circ \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$2^\circ \quad \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 独立}$$

(4) 其它(记住它对解题会带来极大的简化和方便)

如 $X \sim \chi^2(n)$ 则 $E(X) = n$, $D(X) = 2n$.

设 X, Y 相互独立, 且 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$,

则 $X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

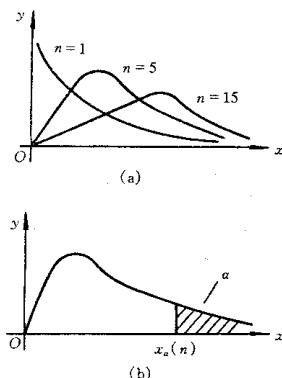


图 20 - 2 χ^2 分布图

评述 考研题中只要涉及抽样分布的题肯定要和下面二个式子打交道,弄清它们之间的区别,尤其是 χ^2 分布的自由度到底是 $n-1$ 还是 n ,这是考研的重点.

$$\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

关键在于 $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \underline{\quad})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\underline{\quad})$, 如前面填 μ , 则后面自由度必填 n ; 如前面填 $\bar{X}$, 则后面自由度必填 $n-1$.

3. t 分布

(1) 生成 设 X, Y 独立, 且 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$, 则

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

即称随机变量 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 的分布为自由度是 n 的 t 分布.

概率密度图形 $t(n)$ 分布的概率密度不用记, 只要记住它的图形如图 20-3(a) 所示. 图形和正态分布相似, 设 $X \sim t(n)$, X 的概率密度记为 $f_n(x)$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时 $f_n(x) \rightarrow \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 为标准正态概率密度.

(2) 上侧 α 分位数 设 $X \sim t(n)$, 则称满足 $P\{X > t_\alpha(n)\} = \alpha$ 的数 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上侧 α 分位数. 在图 20-3(b) 中, 坐标为 $t_\alpha(n)$ 点的上侧面积为 α .

当 $n \geq 45$ 时的上侧分位数 $t_\alpha(n)$ 的上侧分位数表中只有 $n < 45$ 的表, 当 $n \geq 45$ 时, 要用 $t_\alpha(n) \approx u_\alpha$, 即给出 α 后, 从标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表查出 u_α 即为 $t_\alpha(n)$ 的近似值.

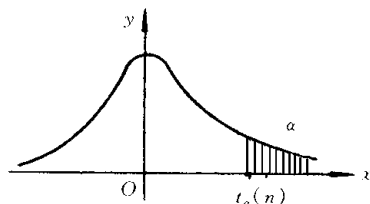
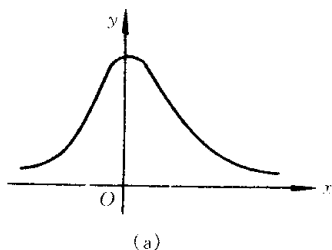


图 20-3 t 分布图

评述 注意用服从 $\chi^2(n)$ 分布的 Y 生成 $t(n)$ 分布的 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 中, Y 必须除以自由度 n , 这点考生很容易忘掉.

4. F 分布

(1) 生成 设 X, Y 相互独立, 而且 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 则

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

即称随机变量 $\frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 的分布为自由度是 (n_1, n_2) 的 F 分布.

概率密度图形 $F(n_1, n_2)$ 分布的概率密度不用记, 只要记住它的图形, 如图 20-4(a) 所示.

(2) 上侧分位数 设 $X \sim F(n_1, n_2)$, 则称满足 $P\{X > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha$ 的数 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 为 $F(n_1, n_2)$ 分布的上侧分位数. 在图 20-4(b) 中, 坐标为 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 点的上侧图形面积为 α .

F 分布表中查不到的上侧分位数 有的 F 分布表中只给出 α 接近于 0“很小”(有的给出 α 接近于 1“很大”)的表, 则利用公式

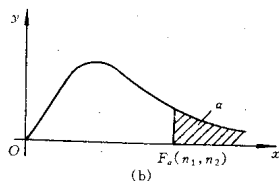
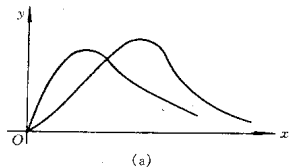


图 20-4 F 分布图

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}$$

求出 F 分布表中没列出的上侧分位数.

评述 在考题中经常要能正确区分是 t 分布还是 F 分布. 注意如果是两个随机变量相除, 它服从的抽样分布只可能是 t 分布或者 F 分布. 如果分子是正态分布, 则可肯定为 t 分布. 分子是 χ^2 分布, 则可肯定为 F 分布.

5. 正态总体的常用抽样分布

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则

$$1^\circ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1), \text{ 且 } S^2 \text{ 独立.}$$

$$2^\circ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \text{ 或 } \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$3^\circ \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

设分别来自两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的两个样本 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 相互独立, 则

$$4^\circ \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$$

$$5^\circ \text{ 当 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 但未知时,}$$

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$6^\circ \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

其中 $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i, S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2,$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2, S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

§ 20 - 3 典型例题分析与最新考试题型预测

例 1 (05 4 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 则()

(A) $n\bar{X} \sim N(0, 1)$

(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$

解 因为 $X_1^2 \sim \chi^2(1), \sum_{i=2}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$, 且它们相互独立, 故

$$\frac{\frac{X_1^2}{1}}{\frac{\sum_{i=2}^n X_i^2}{n-1}} = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1).$$

应选(D).

注意:也可用排除法,由于 $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$, 所以 $\frac{\bar{X} - 0}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{n} \bar{X} \sim N(0, 1)$, 故(A)不能选. 由于 $\frac{(n-1)S^2}{1^2} =$

$(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$, 所以(B)不能选. 由于 $\frac{\frac{\bar{X} - 0}{\sqrt{\frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{1^2} / (n-1)}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$, 因此(C)不能选. 故

只能选(D).

例2 设 $X_1, X_2, \dots, X_{15}$ 是来自正态总体 $N(3, 5)$ 的简单随机样本,

$$Y = C \frac{5 \sum_{i=1}^5 (X_i - 3)^2 + (2X_6 - X_7 - 3)^2}{\sum_{i=8}^{15} (X_i - 3)^2}$$

为使 Y 服从 F 分布, C 应等于().

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{15}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$

解 因为 $2X_6 - X_7 - 3 \sim N(0, 25)$, $X_i - 3 \sim N(0, 5)$, 所以

$$\frac{2X_6 - X_7 - 3}{5} \sim N(0, 1), \frac{X_i - 3}{\sqrt{5}} \sim N(0, 1)$$

$$\left(\frac{2X_6 - X_7 - 3}{5}\right)^2 \sim \chi^2(1), \sum_{i=8}^{15} \left(\frac{X_i - 3}{\sqrt{5}}\right)^2 \sim \chi^2(8), \sum_{i=1}^5 \left(\frac{X_i - 3}{\sqrt{5}}\right)^2 \sim \chi^2(5)$$

由于 $\sum_{i=1}^5 \left(\frac{X_i - 3}{\sqrt{5}}\right)^2$ 和 $\left(\frac{2X_6 - X_7 - 3}{5}\right)^2$ 相互独立, 因此

$$\sum_{i=1}^5 \frac{(X_i - 3)^2}{5} + \frac{(2X_6 - X_7 - 3)^2}{25} \sim \chi^2(6),$$

由于 $\left(\frac{2X_6 - X_7 - 3}{5}\right)^2, \sum_{i=8}^{15} \left(\frac{X_i - 3}{\sqrt{5}}\right)^2, \sum_{i=1}^5 \left(\frac{X_i - 3}{\sqrt{5}}\right)^2$ 相互独立, 所以 $\sum_{i=1}^5 \frac{(X_i - 3)^2}{5} + \frac{(2X_6 - X_7 - 3)^2}{25}$ 和 $\sum_{i=8}^{15}$

$\frac{(X_i - 3)^2}{5}$ 相互独立, 因此

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^5 \frac{(X_i - 3)^2}{5} + \frac{(2X_6 - X_7 - 3)^2}{25}\right)/6}{\left(\sum_{i=8}^{15} \frac{(X_i - 3)^2}{5}\right)/8} \sim F(6, 8)$$

即

$$\frac{4}{15} \frac{5 \sum_{i=1}^5 (X_i - 3)^2 + (2X_6 - X_7 - 3)^2}{\sum_{i=8}^{15} (X_i - 3)^2} \sim F(6, 8)$$

对照 Y 的表达式可见, 必须取 $C = \frac{4}{15}$, 才能使 Y 服从 F 分布. 所以应选(B).

评述 这是个选择题, 但解题过程完全和证明 Y 服从 F 分布一样. 证明都是从分子和分母中出现的随机变量 $\sum_{i=1}^5 (X_i - 3)^2, (2X_6 - X_7 - 3)^2, \sum_{j=8}^{15} (X_j - 3)^2$ 开始讨论, 而不关心其中常数 5 和 C, 讨论按生成 F 分布的三点要求进行: 产生二个服从 χ^2 分布的随机变量, 并证明它们独立, 则这二个服从 χ^2 分布的随机变量分别除以它们的自由度, 再取它们之比服从 F 分布.

例3 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \quad S_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

则服从自由度为 $(n-1)$ 的 t 分布的随机变量是().

$$(A) t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1 / \sqrt{n-1}}$$

$$(B) t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}}$$

$$(C) t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_3 / \sqrt{n}}$$

$$(D) t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_4 / \sqrt{n}}$$

分析 由于 $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$, $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 所以服从自由度为 $(n-1)$ 的 t 分布只可能是由 S_1^2, S_2^2 产生的 t , 而不是由 S_3^2, S_4^2 产生的 t , 因此不能选 (C), (D). 而选不选 (B) 应该用下面的证明方法: 它是从分子分母所含的随机变量 $\bar{X}, S_2^2$ 开始, 按 t 分布的随机变量生成进行证明.

证 因为 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, 所以 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, 又 $\frac{nS_2^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 且它和 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ 相互独立, 因此

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{nS_2^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{(n-1)}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}} \sim \chi^2(n-1)$$

故应选 (B).

例 4 (02 3 分) 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则().

(A) $X + Y$ 服从正态分布

(B) $X^2 + Y^2$ 服从 χ^2 分布

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布

(D) X^2 / Y^2 服从 F 分布

解 (C) 肯定是对的.

评述 估计这个题目选 (A)、(B)、(D) 而选错的同学非常多. 要选对这个题目基本概念必须很清楚, 关键是“独立”这两个字. 相互独立的正态随机变量的线性组合服从正态分布, 相互独立的标准正态分布随机变量的平方和服从 χ^2 分布, 相互独立的自由度都为 1 的 χ^2 分布随机变量之比服从 F 分布.

例 5 设总体 $X \sim N(0, 1)$, $X_1, X_2, \dots, X_{n+m}$ 是来自总体 X 的简单随机样本,

$$Y = \frac{\sqrt{n-1} \sum_{j=n+1}^{n+m} X_j}{\sqrt{m \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

则 Y 服从参数为 _____ 的 _____ 分布.

解 不管常数, 从分子、分母所含随机变量开始讨论:

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} X_j \sim N(0, m), \quad \sum_{j=n+1}^{n+m} X_j / \sqrt{m} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{1^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \text{且与 } \sum_{j=n+1}^{n+m} X_j / \sqrt{m} \text{ 独立.}$$

$$\text{故 } \frac{\frac{\sum_{j=n+1}^{n+m} X_j}{\sqrt{m}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}} = Y \sim t(n-1).$$

例6 (03 3分) 设随机变量 $X \sim t(n) (n > 1)$, $Y = \frac{1}{X^2}$, 则

(A) $Y \sim \chi^2(n)$ (B) $Y \sim \chi^2(n-1)$

(C) $Y \sim F(n, 1)$ (D) $Y \sim F(1, n)$

解 在做选择题时, 常用的一种方法是当选项对一般情况下都成立时, 在特殊情况下也成立. 所以可举些特殊例子看看那个选项是对的. 因为 $X \sim t(n)$, 所以可特别地看成 $X = \frac{U}{\sqrt{V/n}}$, 其中 $U \sim N(0, 1)$, $V \sim \chi^2(n)$, 且 U 和 V 相互独立, 于是 $Y = \frac{1}{X^2} = \frac{V/n}{U^2/1}$, $U^2 \sim \chi^2(1)$, $V \sim \chi^2(n)$ 且 U^2 和 V 相互独立, 故由 F 分布的生成乃知 $Y \sim F(n, 1)$ 应选(C).

评述 上述判别方法只适用于选择题, 不能用来证明 $Y \sim F(n, 1)$; 要严格的证明, 必须由已知的 X 的概率密度, 用求随机变量函数的概率密度的方法求出 $Y = \frac{1}{X^2}$ 的概率密度.

例7 (98 4分) 从正态总体 $N(3.4, \sigma^2)$ 中抽取容量为 n 的样本, 如果要求其样本均值位于区间 $(1.4, 5.4)$ 内的概率不小于 0.95, 问样本容量 n 至少应取多大?

附表 标准正态分布表 $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(z)$	0.900	0.950	0.975	0.990

解 因为 $X \sim N(3.4, \sigma^2)$, 所以 $\bar{X} \sim N(3.4, \frac{\sigma^2}{n})$, 因此

$$\begin{aligned} P\{1.4 < \bar{X} < 5.4\} &= F_{\bar{X}}(5.4) - F_{\bar{X}}(1.4) = \Phi\left(\frac{5.4 - 3.4}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{1.4 - 3.4}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - (1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1 \geq 0.95 \end{aligned}$$

故 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96)$, 可得 $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.96$, 即 $n \geq (1.96 \times 3)^2 \approx 34.57$, 所以 n 至少应取 35.

例8 (98 7分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本, $Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2 + \dots + X_6)$, $Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9)$,

$$S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2, \quad Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$$

证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

证 设正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, Y_2 和 S^2 可以看成来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的容量为 3 的样本 X_7, X_8, X_9 的样本均值和方差, 因此由重要定理知

$$\frac{(3-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2) \quad Y_2 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{3}\right)$$

又 Y_1 可看成来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_6$ 的样本均值, 所以

$$Y_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{6}\right)$$

因为 Y_1 和 Y_2 独立, 所以 $Y_1 - Y_2 \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$

由于 Y_1 和 Y_2 独立, Y_1 和 S^2 独立, Y_2 和 S^2 独立, 故 $Y_1 - Y_2$ 与 S^2 独立, 因此根据 t 分布的生成得

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2} \times \frac{1}{2}}} \sim t(2)$$

例9 (01 7分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, ($\sigma > 0$), 从该总体中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ ($n \geq 2$), 其样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$, 求统计量 $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

解法一 在数理统计中, 一个技巧是要善于把某些独立同分布的随机变量看成某个总体的样本. 本题中 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ 是正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的容量为 $2n$ 的样本. 也可把 $Z_1 = X_1 + X_{n+1}, Z_2 = X_2 + X_{n+2}, \dots, Z_n = X_n + X_{2n}$ 这 n 个相互独立服从同 $N(2\mu, 2\sigma^2)$ 分布的随机变量看成来自另一个正态总体 $N(2\mu, 2\sigma^2)$ 的容量为 n 样本. 用后一种观点往下运算

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} X_i = 2\bar{X}$$

注意总体 $N(2\mu, 2\sigma^2)$ 的方差为 $2\sigma^2$, 有

$$\frac{Y}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

又根据服从自由度为 n 的 χ^2 分布的随机变量的数学期望为 n , 所以

$$E\left(\frac{Y}{2\sigma^2}\right) = n-1, \text{ 即 } E(Y) = 2\sigma^2(n-1)$$

解法二 把 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 看成正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的容量为 n 的样本, 把 $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{2n}$ 看成另一个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的容量为 n 的样本, 显然两个样本相互独立. 记这两个样本的样本均值和样本方差分别为

$$\bar{X}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{X}'' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{n+i}$$

$$S'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}')^2, \quad S''^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{n+i} - \bar{X}'')^2$$

$$\text{且 } 2\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} X_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_{n+i} \right) = \bar{X}' + \bar{X}''$$

$$\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{(n-1)S''^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

因此

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left\{ \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2 \right\} = E\left\{ \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}') + (X_{n+i} - \bar{X}'')]^2 \right\} \\ &= E\left\{ \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}')^2 + 2(X_i - \bar{X}')(X_{n+i} - \bar{X}'') + (X_{n+i} - \bar{X}'')^2] \right\} \\ &= \sigma^2 E\left(\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2}\right) + 0 + \sigma^2 E\left(\frac{(n-1)S''^2}{\sigma^2}\right) \\ &= \sigma^2(n-1) + \sigma^2(n-1) = 2(n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

评述 本题解法的技巧在于 配出一个服从 χ^2 分布的随机变量, 它的数学期望就等于 χ^2 分布的自由度. 在 2004 年又出现类似的考题: (04 4 分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

预测·强化训练二十

1. 设自由度为 n 的 t 分布的概率密度为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$, 则对任何实数 a , 等式成立的是()

$$(A) F(-a) = 1 - \int_0^a f(x) dx$$

$$(B) F(-a) = 1 - \int_0^+ f(x) dx$$

$$(C) F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x) dx$$

$$(D) F(-a) = 2F(a) - 1$$

2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值, 则下列随机变量中服从 t 分布的是

$$(A) \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 / (n-1)}}$$

$$(B) \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 / (n-1)}}$$

$$(C) \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 / (n-1)}}$$

$$(D) \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 / n}}$$

3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 令 $Y_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i, Y_2 = \frac{1}{5} \sum_{i=10}^{14} X_i, Z_1 =$

$$\sum_{i=1}^5 (X_i - Y_1)^2, Z_2 = \sum_{i=10}^{14} (X_i - Y_2)^2, Z_3 = \sum_{i=6}^9 X_i^2, U = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_3}. \text{ 试证明 } U \text{ 服从自由度为 } (8, 4) \text{ 的 } F \text{ 分布.}$$

4. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, \dots, X_{m+n}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 令

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^m \left(X_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_j \right)^2, S_2^2 = \sum_{i=m+1}^{m+n} (X_i - \mu)^2$$

则 $(S_1^2 + S_2^2) / \sigma^2$ 服从 _____ 分布, 参数为 _____.

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则

(1) $\frac{X_1 - \mu}{\sigma} + \frac{X_6 + 2\mu}{3\sigma}$ 服从参数为 _____ 的 _____ 分布.

(2) $\frac{1}{2\sigma^2} [(X_1 - X_2)^2 + 2(X_3 - \mu)^2 + \frac{1}{7}(2X_4 + X_5 - 3X_6)^2]$ 服从参数为 _____ 的 _____ 分布.

(3) $\sqrt{\frac{10}{3}} \frac{\frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_j - X_6}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 \left(X_i - \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_j \right)^2}}$ 服从参数为 _____ 的 _____ 分布.

6. 设 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n, n+1$ 相互独立, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则随机变量

$$Y = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S}$$

服从自由度为 _____ 的 _____ 分布.

7. 已知 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim t(n), X_3 \sim \chi^2(n), X_4 \sim F(n_1, n_2)$, 请在下面的空格上填上侧分位数.

(1) $P\{X_1 < ______\} = 1 - \alpha$ (2) $P\{|X_2| > ______\} = \alpha$

(3) $P\{X_3 < ______\} = \alpha$ (4) $P\{X_4 > ______\} = 1 - \alpha$

8. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{2k}$ 是来自正态总体 $N(2, \sigma^2)$ 的简单随机样本,

$$Y = C \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k - 2k}{\sqrt{\sum_{i=k+1}^{2k} (X_i - 2)^2}}$$

则当 $C =$ _____ 时, Y 服从 t 分布.

9. (01 8 分) 设总体 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 而 $X_1, X_2, \dots, X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则随机变量

$$Y = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)}$$

服从 _____ 分布, 参数为 _____.

10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{40}$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的容量为 40 的简单随机样本, 令

$$\bar{X} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_i, S_1^2 = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{20} \sum_{i=21}^{40} (X_i - \mu)^2, Y = \frac{20}{21} \cdot \frac{(\bar{X} - \mu)^2 + S_2^2}{S_1^2}$$

证明 $Y \sim F(21, 19)$.

简明解答

- (C). 由 t 分布的概率密度图形关于 y 轴对称及概率的几何意义即可得.
- (C). 由 t 分布的生成, 分子必须有服从标准正态分布的随机变量, 故不能选(B), 分母根号内的服从 χ^2 分布的随机变量必须除以它的自由度, 所以不能选(A), 还要求分子和分母相互独立, 因此不能选(D), 只有(C) 是对的.

$$3. \frac{Z_1}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^5 (X_i - Y_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4), \frac{Z_2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=10}^{14} (X_i - Y_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4), \text{且它们相互独立, 因此 } \frac{Z_1 + Z_2}{\sigma^2} \sim \chi^2(8). \text{ 又 } \frac{Z_3}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=6}^9 X_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=6}^9 (X_i - 0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4), \text{且它和 } \frac{Z_1 + Z_2}{\sigma^2} \text{ 相互独立, 因此}$$

$$\frac{Z_1 + Z_2}{2Z_3} = \frac{\frac{Z_1 + Z_2}{\sigma^2}/8}{\frac{Z_3}{\sigma^2}/4} \sim F(8, 4)$$

$$4. \chi^2_{m+n-1}. \text{ 因为 } \frac{S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1), \frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n), \text{且它们相互独立, 故 } \frac{S_1^2}{\sigma^2} + \frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-1).$$

$$5. (1) \frac{\mu}{\sigma}, \frac{10}{9}, \text{正态}. (2) 3, \chi^2. (3) 4, t.$$

$$(1) X_1 \text{ 和 } X_6 \text{ 独立, } E\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma} + \frac{X_6 + 2\mu}{3\sigma}\right) = \frac{\mu}{\sigma}, D\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma} + \frac{X_6 + 2\mu}{3\sigma}\right) = \frac{DX_1}{\sigma^2} + \frac{DX_6}{9\sigma^2} = \frac{10}{9}, \text{所以 } \frac{X_1 - \mu}{\sigma} +$$

$$\frac{X_6 + 2\mu}{3\sigma} \sim N\left(\frac{\mu}{\sigma}, \frac{10}{9}\right).$$

$$(2) X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2), \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$X_3 - \mu \sim N(0, \sigma^2), \frac{X_3 - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$2X_4 + X_5 - 3X_6 \sim N(0, 14\sigma^2), \frac{2X_4 + X_5 - 3X_6}{\sqrt{14}\sigma} \sim N(0, 1),$$

且上面三个标准正态分布变量相互独立, 故

$$\left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_3 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{2X_4 + X_5 - 3X_6}{\sqrt{14}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(3).$$

即

$$\frac{1}{2\sigma^2}[(X_1 - X_2)^2 + 2(X_3 - \mu)^2 + \frac{1}{7}(2X_4 + X_5 - 3X_6)^2] \sim \chi^2(3).$$

$$(3) \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_j - X_6 \sim N\left(0, \frac{6\sigma^2}{5}\right), \frac{\sum_{i=1}^5 (X_i - \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_j)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4)$$

且上面两个随机变量相互独立, 故

$$\frac{(\frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_j - X_6) / (\sqrt{\frac{6}{5}}\sigma)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (X_i - \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_j)^2}{\sigma^2} / 4}} \sim t(4)$$

即

$$\sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \frac{\frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_j - X_6}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (X_i - \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 X_j)^2}} \sim t(4).$$

6. $n-1$ 点. 证法和上题(3)类似.

7. (1) $\underline{u}_\alpha$; (2) $\underline{t}_{\frac{\alpha}{2}}(n)$; (3) $\underline{\chi}_{1-\alpha}^2(n)$; (4) $\underline{F}_{1-\alpha}(n_1, n_2)$.

8. 1. $X_1 + X_2 + \dots + X_k - 2k \sim N(0, k)$. $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k - 2k}{2\sqrt{k}} \sim N(0, 1)$, 它与 $\frac{\sum_{i=k+1}^{2k} (X_i - 2)^2}{4} \sim \chi^2(k)$

相互独立, 故

$$\frac{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k - 2k}{2\sqrt{k}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=k+1}^{2k} (X_i - 2)^2}{4}/k}} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k - 2k}{\sqrt{\sum_{i=k+1}^{2k} (X_i - 2)^2}} \sim t(k)$$

即 $C=1$ 时 Y 服从 t 分布.

9. F 10 5. 两个随机变量相除的常用抽样分布只可能是 t 分布或 F 分布. 注意本题 $\mu=0$, 分子 $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = \sum_{i=1}^{10} (X_i - 0)^2 = \sum_{i=1}^{10} (X_i - \mu)^2$, 除以 σ^2 后 $\frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$, 所以 Y 只可能服从 F 分布. 分母也可类此处理得

$$Y = \frac{\frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{\sigma^2} \times \frac{1}{10}}{\frac{X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2}{\sigma^2} \times \frac{1}{5}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} / 10}{\frac{\sum_{i=11}^{15} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} / 5}$$

由于 $\frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$, $\frac{\sum_{i=11}^{15} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(5)$, 且它们相互独立, 所以由 F 分布的生成知 $Y \sim F(10, 5)$.

10. $\bar{X} - \mu \sim N(0, \frac{\sigma^2}{20})$, $(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{20}})^2 \sim \chi^2(1)$. $\frac{20S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(20)$, $\frac{19S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(19)$, 由于 $\bar{X}, S_1^2, S_2^2$ 相互独立, 所以

$$(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{20}})^2 + \frac{20S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(21), \quad \frac{(\frac{20(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{20S_2^2}{\sigma^2})/21}{\frac{19S_1^2}{\sigma^2}/19} = Y \sim F(21, 19)$$

第二十一章 参数估计

考试要求

1. 理解参数的点估计、估计量与估计值的概念.
2. 掌握矩估计法(一阶、二阶矩)和最大似然估计法.
3. 了解估计量的无偏性、有效性(最小方差性)和一致性(相合性)的概念,并会验证估计量的无偏性.
4. 了解区间估计的概念,会求单个正态总体的均值和方差的置信区间,会求两个正态总体的均值差和方差比的置信区间.

考试要点分析与题型预测

从上表中可看出本章是数理统计考试的重点,点估计过去经常出题,今后还会这样.矩估计法在以往考题中未知参数都只有一个,以后很可能会考分布中含两个未知参数的情况(有关注意事项见例9(1)).最大似然估计法以往考题每年都有些新意(实际上理科的数理统计书中都有这类的例题),所以要把例5~例9(2)这五种不同类型题目好好的体会,必须掌握熟练.特别要注意总体分布是离散型的情况,写不出概率函数 $P(x)$ 的例7这种类型2002年才考过,以后很可能考能写出概率函数的例8类型,建议做强化训练题中的第5~6题.

讨论估计量的无偏性、有效性和一致性也是会出的题型,它们主要涉及数学期望和方差的计算,但出在数理统计中,主要常用到 $E\bar{X} = \mu$, $ES^2 = \sigma^2$,如 $X \sim \chi^2(n)$,则 $EX = n$, $DX = 2n$,简单随机样本中随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是独立同分布的,正态随机变量的性质.有效性的讨论以前没考过,今后可能会考(参看例3).

求未知参数的区间估计主要是要把表21.1全背出,经常出在填空题中,但例11(3)中未知参数的函数的区间估计特点要仔细体会.

§ 21 - 1 点估计

点估计问题就是由 X 的一个样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 构造一个统计量 $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$,用它的观察值 $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 作为总体 X 分布中的未知参数 θ 的估计值,称 $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的估计量,称 $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 θ 的估计值.在不致混淆的情况下,统称估计量和估计值为估计,都简记为 θ .

一、矩估计法

用样本矩作为相应的总体矩的估计量,用样本矩的连续函数作为相应的总体矩的连续函数的估计量,这种估计方法称为矩估计法.

评述 对任何总体 X ,不管总体分布是什么形状,只要它的数学期望 $E(X) = \mu$,方差 $D(X) = \sigma^2$ 存在,则 μ 的矩估计量一定是 $\mu = \bar{X}$,方差 σ^2 的矩估计量一定是 $\sigma^2 = B_2$,而且一定要记住 $\bar{X}$ 和 B_2 不仅分别是 μ 和 σ^2 的无偏估计量,而且也是相合(或一致)估计量.

二、最大似然估计法

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是该样本的观察值,当 θ 在可能取值范围 H 变化时,使似然函数

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n P(x_i; \theta), & \text{当总体 } X \text{ 的分布律为 } P\{X = x\} = P(x; \theta) \\ \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), & \text{当总体 } X \text{ 的概率密度为 } f(x; \theta) \end{cases}$$

达到最大值的最大值点 $\theta = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 作为参数 θ 的估计值,称它为参数 θ 的最大似然估计值,而相应的统计量 $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为参数 θ 的最大似然估计量,这种求参数 θ 的估计的方法称为最大似然估计法.

§ 21 - 2 估计量的评选标准

一、无偏性

设 θ 是参数 θ 的估计量,若 $E\theta = \theta$ 则称 θ 为 θ 的无偏估计量.

二、有效性

设 θ_1 和 θ_2 都是 θ 的无偏估计量,若 $D\theta_1 < D\theta_2$ 则称 θ_1 较 θ_2 有效.

三、一致性

设 θ 为 θ 的估计量,若 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\theta - \theta| \leq \varepsilon\} = 1$ 其中 ε 为任意给定的正数,则称 θ 为 θ 的一致估计量(或称相合估计量).

§ 21 - 3 区间估计

1. 双侧置信区间

设 θ 是总体 X 分布中的未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 X 的样本,由该样本确定两个统计量 $\theta_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\theta_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 对给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 有

$$P\{\theta_1(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \theta_2(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

则称随机区间 (θ_1, θ_2) 是 θ 的置信度为 $(1 - \alpha)$ 的双侧置信区间, 简称为置信区间.

2. 单侧置信区间

对给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 有

$$P\{\theta < \theta_2(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

则称 $(-\infty, \theta_2)$ 是 θ 的置信度为 $(1 - \alpha)$ 的单侧置信区间, 称 θ_2 是 θ 的置信度为 $(1 - \alpha)$ 的单侧置信上限. 对给定的 α , 有

$$P\{\theta_1(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta\} = 1 - \alpha$$

则称 $(\theta_1, +\infty)$ 是 θ 的置信度为 $(1 - \alpha)$ 的单侧置信区间, 称 θ_1 是 θ 的置信度为 $(1 - \alpha)$ 的单侧置信下限.

评述 想求 θ 的单侧置信区间 $(-\infty, \theta_2)$ 时, 题目中应要求 θ 的置信度为 $(1 - \alpha)$ 的单侧置信上限, 而不能含糊地提要求 θ 的单侧置信区间, 因为 $(-\infty, \theta_2)$ 和 $(\theta_1, +\infty)$ 都是. 同样想求 θ 的单侧置信区间 $(\theta_1, +\infty)$ 时, 题目中应要求 θ 的单侧置信下限.

3. 正态总体未知参数的置信区间

表 21.1 一定要背出来.

评述 正态总体参数的区间估计相对地说是容易的, 主要要注意:

- ① 题目给出的条件是一个正态总体还是两个正态总体, 前者估计的是 μ 或 σ^2 , 后者估计的是均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 或方差比 σ_1^2 / σ_2^2 ;
- ② 对一个参数进行估计时, 要看另一个参数是已知还是未知;
- ③ 根据上面两点把相应的区间估计公式背出来, 将具体数据代入就可得答案;
- ④ 背表 21.1 时, 要从对比中记忆. 例对单个正态总体, 均值 μ 的区间估计, 当方差 σ_0^2 已知时, 置信区间的公式为 $(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$, 相应的单侧置信下限公式为 $\bar{X} - u_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$, 它只是把双侧置信区间的置信下

限 $\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ 中的 $\frac{\alpha}{2}$ 换成了 α . 同样, 相应的单侧置信上限 $\bar{X} + u_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ 也可由双侧置信区间的置信上限 $\bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ 中的 $\frac{\alpha}{2}$ 换成 α . 把表中所有的置信区间公式和相应的单侧置信下限和单侧置信上限公式对照一下, 都有此规律. 此外当方差 σ^2 未知时 μ 的置信区间公式为 $(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}})$ 对照 σ_0^2 已知的上述公式, 可发现, 由于 σ_0 未知 σ_0 现换成 S 相应的 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 换成 $t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)}$ 就成了 σ^2 未知的置信区间公式. 其它情况也有类似之处, 很快全背出表中公式来.

§ 21 - 4 典型例题分析与最新考试题型预测

例 1 (06 9 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$) $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计.

解 注意本题中样本值 $x_i = (i = 1, 2, \dots, n)$ 应在 (0, 2) 范围内, 所以似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^N (1 - \theta)^{n-N}$$

取对数得

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n - N) \ln(1 - \theta)$$

两边对 θ 求导得

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n - N}{1 - \theta}$$

令

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0 \quad \text{得} \quad \theta = \frac{N}{n}$$

故 θ 的最大似然估计应为

$$\hat{\theta} = \frac{N}{n}.$$

表 21.1 正态总体未知参数的置信区间

总体个数	估计参数	对总体要求	置信区间	单侧置信下限	单侧置信上限
单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$	均值 μ	方差 σ_0^2 已知	$(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$	$\bar{X} - u_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} + u_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$
		方差 σ^2 未知	$(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}})$	$\bar{X} - t_{\alpha}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} + t_{\alpha}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$
	方差 σ^2	均值 μ_0 已知	$(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)})$	$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{\alpha}^2(n)}$	$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)}$
		均值 μ 未知	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)})$	$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)}$	$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}$

总体个数	估计参数	对总体要求	置信区间	单侧置信下限	单侧置信上限
两个正态总体 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$	均值差 $\mu_1 - \mu_2$	$\sigma_{10}^2, \sigma_{20}^2$ 已知	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_{10}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{20}^2}{n_2}}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_{10}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{20}^2}{n_2}})$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - u_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_{10}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{20}^2}{n_2}}$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + u_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_{10}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{20}^2}{n_2}}$
		σ_1^2, σ_2^2 未知 但知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}})$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
	方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$		$(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) \frac{S_1^2}{S_2^2}, F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) \frac{S_1^2}{S_2^2})$	$F_{1-\alpha}(n_2 - 1, n_1 - 1) \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_{\alpha}(n_2 - 1, n_1 - 1) \frac{S_1^2}{S_2^2}$

其中 $S_W^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

例2 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x) & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

- (1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;
- (2) 求 θ 的方差 $D(\hat{\theta})$;
- (3) 讨论 $\hat{\theta}$ 的无偏性和相合性(一致性).

分析 用矩估计法求参数 θ 的估计量主要要弄清下面每一步主要要说明什么问题(用括号注出),也就是为什么要有这一步,这样解题思路或关键步骤也就清楚了.

解 (1) 1° $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{\theta}{2}$

(说明总体均值可用参数 θ 的函数表示,现在只有一个未知参数 θ ,只要建立一个方程解出 θ)

2° $\theta = 2E(X)$ (解出 θ ,说明未知参数可以用总体矩的函数表示)

3° $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ (由于 $\theta = 2E(X)$,所以只要求出 $2E(X)$ 的估计量代入即可求出 θ 的估计量 $\hat{\theta}$.矩估计法的关键就在于用样本矩的连续函数 $2\bar{X}$ 作为相应的总体矩的连续函数 $2E(X)$ 的估计量)

(2) 由于 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^3}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{6\theta^2}{20}$

$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{6\theta^2}{20} - (\frac{\theta}{2})^2 = \frac{\theta^2}{20}$

因此

$D(\hat{\theta}) = D(2\bar{X}) = 4D(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) = \frac{4}{n}D(X) = \frac{\theta^2}{5n}$

(3) $E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) = 2 \cdot \frac{1}{n}nE(X) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$ 所以 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.由辛钦大数定律知

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} E(X) = \frac{\theta}{2}$$

故 $\hat{\theta} = 2 \bar{X} \xrightarrow{P} = 2 \frac{\theta}{2} = \theta$ 即 $\hat{\theta}$ 也是 θ 的一致估计量.

例 3* 设总体 X 的均值 $E(X) = \mu$ 及方差 $D(X) = \sigma^2$ 都存在, X_1, X_2, X_3 是来自 X 的样本, 现有 μ 的 3 个估计量 $\mu_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$, $\mu_2 = \frac{1}{6}(X_1 + 2X_2 + X_3)$, $\mu_3 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3$, 则结论成立的是().

- (A) μ_2 比 μ_3 有效 (B) μ_3 比 μ_1 有效
(C) μ_1 比 μ_3 有效 (D) μ_2 比 μ_1, μ_3 有效

$$\text{解 } E(\mu_1) = E\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) = \mu, \quad E(\mu_2) = E\left(\frac{1}{6}(X_1 + 2X_2 + X_3)\right) = \frac{2}{3}\mu$$

$$E(\mu_3) = E\left(\frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3\right) = \mu$$

所以 μ_1, μ_3 是 μ 的无偏估计量. 注意: 比较两个估计量的有效性的前提是他们必须都是无偏估计量, 否则无意义 (因此 (A), (D) 肯定不能选), 又因为

$$D(\mu_1) = D\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{9}(D(X_1) + D(X_2) + D(X_3)) = \frac{\sigma^2}{3}$$

$$D(\mu_3) = D\left(\frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3\right) = \frac{1}{36}D(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) + \frac{1}{4}D(X_3) = \frac{7}{18}\sigma^2$$

由于 $D(\mu_1) < D(\mu_3)$, 所以 μ_1 比 μ_3 有效, 应选 (C).

评述 由于 $D(\mu_2) = D\left(\frac{1}{6}(X_1 + 2X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{36} \times 6\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{6}$, 所以很多考生选 (D), 因为 $D(\mu_2)$ 比 $D(\mu_1), D(\mu_3)$ 都小. 选 (D) 错的原因是 μ_2 不是无偏估计量, 所以对它谈有效性是错的.

例 4* 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本.

(1) 要使 $\sigma = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$ 是 σ 的无偏估计量, k_1 应取什么值?

(2) 要使 $\sigma^2 = \frac{1}{k_2} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量, k_2 应取什么值?

解 (1) $Y_i = X_i - \bar{X} = \frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} X_j \sim N(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2)$,

$$\begin{aligned} E|X_i - \bar{X}| &= E|Y_i| = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}} \int_0^{+\infty} |y| e^{-\frac{y^2}{2(\frac{n-1}{n}\sigma^2)}} dy \stackrel{y = \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2} t}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2} \left(-e^{-\frac{t^2}{2}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{n\pi}} \sigma \end{aligned}$$

所以

$$E\sigma = E\left(\frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|\right) = \frac{1}{k_1} \cdot n \cdot \sqrt{\frac{2(n-1)}{n\pi}} \sigma = \frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}} \sigma$$

为使 σ 为 σ 的无偏估计, 应取 $\frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}} \sigma = 1$, 即应取 $k_1 = \sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}}$.

$$\begin{aligned} (2) E\sigma^2 &= E\left(\frac{1}{k_2} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right) = \frac{1}{k_2} \cdot (n-1) \cdot E(X_{i+1}^2 - 2X_{i+1}X_i + X_i^2) \\ &= \frac{1}{k_2} \cdot (n-1) \cdot ((\sigma^2 + \mu^2) - 2\mu \cdot \mu + (\sigma^2 + \mu^2)) = \frac{2(n-1)}{k_2} \sigma^2 \end{aligned}$$

所以为使 σ^2 是 σ^2 的无偏估计量, 应取 $k_2 = 2(n-1)$.

例 5 已知总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中未知参数 $\theta > 0$. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自总体 X 的一个样本.

- (1) 求 θ 的最大似然估计量 ;
 (2) 试问该估计量是否为无偏估计量 ? 说明理由 .

解 (1) 1° 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的样本值 , 则似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

2° 当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时 $L(\theta) > 0$, 有 $\ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i$

$$3^\circ \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$4^\circ \text{ 解得 } \theta \text{ 的最大似然估计值为 } \theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

$$5^\circ \text{ 因此 } \theta \text{ 的最大似然估计量为 } \theta = \bar{X}$$

$$(2) E(\theta) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = E(X)$$

而

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta$$

故 $E(\theta) = \theta$, 即 $\theta = \bar{X}$ 是未知参数 θ 的无偏估计量 .

评述 求最大似然估计量的每一步对应要注意的地方 :

1° 中似然函数写成 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ 是错的 , 必须写成 $L(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$, 其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的观察值 .

2° 中注明 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 是因为 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ 是非负的 , 它的最大值不可能为 0 , 最大值只可能在 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 范围内用表达式 $\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i}$ 去求 . 此表达式的求导用对数求导法最方便 .

3° 注意 $\ln x$ 是单调增函数 , 所以 $\ln L(\theta)$ 的最大值点就是 $L(\theta)$ 的最大值点 .

4° 从 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$ 中解出最大值点后马上在上面加“ $\wedge$ ” . 注意记号的意义 θ 为参数 , 它的估计值为 $\hat{\theta}$, 上面的“ $\wedge$ ”不可少 .

5° 要求的是估计量 , 所以必须把 $\theta = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中的小写观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 改写为相应的大写随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 得 $\theta = \theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 才是估计量 .

例 6 (04, 13 分) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta, & x > \alpha, \\ 0, & x \leq \alpha, \end{cases}$$

其中参数 $\alpha > 0, \beta > 1$. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本 ,

- (I) 当 $\alpha = 1$ 时 , 求未知参数 β 的矩估计量 ;
 (II) 当 $\alpha = 1$ 时 , 求未知参数 β 的最大似然估计量 ;
 (III) 当 $\beta = 2$ 时 , 求未知参数 α 的最大似然估计量 .

解 当 $\alpha = 1$ 时 , X 的概率密度为

$$f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

$$(I) \text{ 因为 } EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \beta)dx = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{\beta}{x^{\beta+1}} dx = \frac{\beta}{\beta-1},$$

可解得 $\beta = \frac{EX}{EX-1}$, 故 β 的矩估计量为 $\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$.

(II) 当 $x_i > 1, i = 1, 2, \dots, n$ 时 , 似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \beta) = \frac{\beta^n}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\beta+1}} > 0$$

等式两边取对数得：

$$\ln L(\beta) = n \ln \beta - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

对 β 求导数, 得

$$\frac{d \ln L(\beta)}{d \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\beta)}{d \beta} = 0, \text{ 解得 } \hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} \text{ 故 } \beta \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

(III) 当 $\beta = 2$ 时, X 的概率密度为

$$f(x; \alpha) = \begin{cases} \frac{2a^2}{x^3}, & x > \alpha, \\ 0, & x \leq \alpha, \end{cases}$$

当 $x_i \geq \alpha, i = 1, 2, \dots, n$ 时, 似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = \frac{x^n \alpha^{2n}}{(x_1 x_2 \dots x_n)^3} > 0$$

$$\frac{dL(\alpha)}{d\alpha} = \frac{2^n \cdot 2n\alpha^{2n-1}}{(x_1 x_2 \dots x_n)^3} > 0$$

所以, 当 $x_i \geq \alpha, i = 1, 2, \dots, n$ 时, α 越大, $L(\alpha)$ 也越大; 但当只要 $i = 1, 2, \dots, n$ 中有一个 $x_i < \alpha$, 则 $L(\alpha) = 0$, 故 α 的最大似然估计值为 $\alpha = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 因此 α 的最大似然估计量为 $\hat{\alpha} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

评述 1. 2004 年数一的考题: 设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自 X 的简单随机样本, 求:

(I) β 的矩估计量;

(II) β 的最大似然估计量.

实际上就是数三的本考题的 (I) (II).

2. 本例题的 (II) 和 (III) 是最大似然估计法中处理 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0$ 的两种典型方法: 当 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0$ 能

解出 θ 时, 接下来和 (II) 同样处理; 当 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0$ 不可能解出 θ 时, 要类似 (III) 的步骤往下处理.

3. 本例题还可继续讨论下列双参数的是点估计: (IV) 求未知参数 α, β 的矩估计量, (V) 求未知参数 α, β 的最大似然估计量.

4. 在最大似然估计法中, 按总体 X 的分布又有两种典型题目: 例如本题是居于分布是连续型的; 下面二个例题居于分布是离散型的.

例 7 (02 7 分) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta (0 < \theta < \frac{1}{2})$ 是未知参数, 利用总体 X 的如下样本值

3 1 3 0 3 1 2 3

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解 (1) $E(X) = 0 \times \theta^2 + 1 \times 2\theta(1-\theta) + 2\theta^2 + 3 \times (1-2\theta) = 3 - 4\theta$

解得 $\theta = \frac{1}{4}(3 - E(X))$

故 θ 的矩估计量为 $\theta = \frac{1}{4}(3 - \bar{X})$

由 $\bar{x} = \frac{1}{8} \times (3 + 1 + 3 + 0 + 3 + 1 + 2 + 3) = 2$

得 θ 的矩估计值为

$$\theta = \frac{1}{4} \times (3 - \bar{x}) = \frac{1}{4} \times (3 - 2) = \frac{1}{4}$$

(2) 离散型总体似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = P(x_1; \theta)P(x_2; \theta) \dots P(x_n; \theta)$$

其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的观察值. 由于本题中离散型 X 的概率函数 $P\{X = x\} = P(x; \theta)$ 一般式没法写出, 所以无法先求出 θ 的最大似然估计量, 然后将观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 代入求出 θ 的最大似然估计值. 下面采用直接将观察值代入似然函数来求 θ 的最大似然估计值.

将观察值 $(x_1, x_2, \dots, x_8) = (3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3)$ 代入上述似然函数表达式得

$$\begin{aligned} L(\theta) &= P\{X = 3; \theta\} \cdot P\{X = 1; \theta\} \cdot P\{X = 3; \theta\} \cdot P\{X = 0; \theta\} \cdot P\{X = 3; \theta\} \\ &\quad \cdot P\{X = 1; \theta\} \cdot P\{X = 2; \theta\} \cdot P\{X = 3; \theta\} \\ &= (1 - 2\theta) \cdot [2\theta(1 - \theta)] \cdot (1 - 2\theta) \cdot \theta^2 \cdot (1 - 2\theta) \cdot [2\theta(1 - \theta)] \cdot \theta^2 \cdot (1 - 2\theta) \\ &= 4\theta^6(1 - \theta)^2(1 - 2\theta)^4 \end{aligned}$$

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln \theta + 2\ln(1 - \theta) + 4\ln(1 - 2\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1 - \theta} - \frac{8}{1 - 2\theta} = \frac{6 - 28\theta + 24\theta^2}{\theta(1 - \theta)(1 - 2\theta)}$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$, 解得 $\theta_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12}$, 但 $\frac{7 + \sqrt{13}}{12} > \frac{1}{2}$ 不合题意, 所以 θ 的最大似然估计值为

$$\theta = \frac{7 - \sqrt{13}}{12}$$

评述 本题的特点在于 X 是离散型随机变量, 由于它的分布律写不出, 所以无法用类似例 5 的解题步骤先求出 θ 的最大似然估计量, 再用样本观察值求出 θ 的最大似然估计值. 在下面的例 8 中, X 仍然是离散型的随机变量, 但由于它的概率函数可以写出, 所以仍可用例 5 的解题步骤求出未知参数的最大似然估计值.

例 8* 设总体 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 求参数 λ 的最大似然估计量.

分析 设 X 是离散型随机变量, 它的分布律在概率论中用 $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots$ 表示, 但在数理统计中它的分布律用下列形式表示: $P\{X = x\} = P(x), x = x_1, x_2, \dots$, 其中 $P(x)$ 称为 X 的概率函数. 当它含有未知参数 θ 时, 可记为 $P(x; \theta)$, 这就是上面似然函数 $L(\theta)$ 中当 X 是离散型时所用的表达式 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i; \theta)$, 其中 $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是容量为 n 的样本观察值.

例如 X 服从 0 - 1 分布, 概率论中分布律为

X	0	1
p	$1 - p$	p

在数理统计中 X 的概率函数为 $P(x; p) = p^x(1 - p)^{1-x}, x = 0, 1$. 显然 $P(0; p) = p^0(1 - p)^{1-0} = 1 - p, P(1; p) = p^1(1 - p)^{1-1} = p$ 完全一致. (记住 0 - 1 分布对应的概率函数有好处)

解 总体 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

所以总体 X 的概率函数为

$$P(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

故似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n P(x_i; \lambda) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n (x_i!)}$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \ln \lambda \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!)$$

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

解得

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

故 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$

例 9* 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \mu, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases}$$

其中 μ 和 $\theta (\theta > 0)$ 均为未知参数, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 求:

(1) μ 和 θ 的矩估计量.

(2) μ 和 θ 的最大似然估计量.

$$\text{解 (1) } EX = \int_{\mu}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} dx = -x e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} \Big|_{\mu}^{+\infty} + \int_{\mu}^{+\infty} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} dx = \mu - \theta e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} \Big|_{\mu}^{+\infty} = \mu + \theta \quad (*)$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_{\mu}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} dx = -x^2 e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} \Big|_{\mu}^{+\infty} + 2 \int_{\mu}^{+\infty} x e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} dx \\ &= \mu^2 + 2\theta \cdot EX = \mu^2 + 2\theta(\mu + \theta) \end{aligned} \quad (***)$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \mu^2 + 2\theta(\mu + \theta) - (\mu + \theta)^2 = \theta^2 \quad (****)$$

由 (*)、(***) 可解得 $\theta = \sqrt{DX} = \mu = EX - \theta$, 故 θ 和 μ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \sqrt{B_2}, \hat{\mu} = \bar{X} - \hat{\theta} = \bar{X} - \sqrt{B_2}$.

(2) 当 $x_i \geq \mu, i = 1, 2, \dots, n$ 时 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \theta) > 0$:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}$$

$$\ln L(\mu, \theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \theta)}{\partial \mu} = +\frac{n}{\theta}$$

由 $\frac{\partial \ln L(\mu, \theta)}{\partial \theta} = 0$ 解得 $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = \bar{x} - \mu$. 但注意 $\frac{\partial \ln L(\mu, \theta)}{\partial \mu} = \frac{n}{\theta} > 0$ (此处 $\frac{\partial \ln L(\mu, \theta)}{\partial \mu} = 0$ 无解!),

所以当单变量 μ 增大时, $\ln L(\mu, \theta)$ 或即 $L(\mu, \theta)$ 的值也随之增大. 但当 $\mu > \min_{1 \leq i \leq n} x_i$ 时 $L(\mu, \theta) = 0$, 即 μ 取 $\min_{1 \leq i \leq n} x_i$ 时 $L(\mu, \theta)$ 达最大, 故 μ 的最大似然估计值为 $\hat{\mu} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$. 因此 μ 和 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\mu} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad \hat{\theta} = \bar{X} - \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

评述 1. 分布中含有二个未知参数时求它们的矩估计量或最大似然估计量还没出过题, 今年考研题中很可能考.

2. 当分布中含二个未知参数, 求它们的矩估计量时, 注意必须要建立二个总体矩与未知参数有关的方程, 才能联立解出二个未知参数. 一般都是从总体的一阶原点矩, 二阶原点矩开始. 在本题(1)中, EX 和 EX^2 计算结果都和 μ, θ 有关, 所以可以由 (*)、(***) 两式联立方程解出 μ 和 θ 相应的 EX 和 EX^2 的矩估计量为 $A_1 = \bar{X}, A_2$. 但此处用 (*)、(***) 联立解 μ 和 θ 很麻烦, 这时请读者注意可试一下看 DX 计

算结果是否简单,在本题中属此情况 $DX = \theta^2$ 简单,所以用 $(*)$ 与 $(***)$ 联立解 μ 和 θ 就非常简单,但这时要用 EX 和 DX 的矩估计量分别为 $A_1 = \bar{X}$ 和 B_2 (样本二阶中心矩).

3. 当分布中含二个未知参数,求它们的最大似然估计量时,写出似然函数后,令似然函数分别关于二个参数的偏导数为零,由这两个方程联立求解,得驻点,驻点的二个变量取值即为两个未知参数的最大似然估计值;万一有一个(或两个)方程无解,这时必须如本题(2)中对 μ 的处理方法进行,必和 $\min_{1 \leq i \leq n} x_i$ 或 $\max_{1 \leq i \leq n} x_i$ 有关.

例 10* (1) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, 其中 σ_0^2 已知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 当 n 固定, 置信度 $1 - \alpha$ 增大时 μ 的置信区间长度 L ().

(A) 缩小 (B) 增大 (C) 不变 (D) 变化不能确定

(2) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, 其中 σ_0^2 已知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 置信度 $1 - \alpha$ 固定, n 增大时 μ 的置信区间长度 L ().

(A) 缩小 (B) 增大 (C) 不变 (D) 变化不能确定

解 当 σ_0^2 已知时 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为:

$$\left(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$$

所以置信区间的长度 $L = 2u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$

(1) 当 n 固定, 置信度 $1 - \alpha$ 增大时, 即 α 减小时, $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 将随之增大, 所以置信区间长度要增大, 应选(B).

(2) 当 α 固定, 即 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 固定, 而 n 增大时, 显然置信区间长度 L 要减小, 应选(A).

例 11 (00 8 分) 假设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值. 已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$.

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ (记 $E(X) = b$);

(2) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间;

(3) 利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 (1) 因为 $Y = \ln X$, 所以 $X = e^Y$, 故

$$\begin{aligned} b &= E(X) = E(e^Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2(\mu+1)y + \mu^2)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[(y-(\mu+1))^2 - 2\mu - 1]} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu + \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(\mu+1))^2}{2}} dy \stackrel{y-(\mu+1)=t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu + \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu + \frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{\mu + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(2) 已知总体 X 的样本值 $x_1 = 0.50, x_2 = 1.25, x_3 = 0.80, x_4 = 2.00$, 由 $Y = \ln X$ 知总体 Y 相应的样本值为 $y_1 = \ln 0.50, y_2 = \ln 1.25, y_3 = \ln 0.80, y_4 = \ln 2.00$, 对正态总体 Y, 在方差 $\sigma_0^2 = 1$ 已知的条件下, 均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{Y} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{Y} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$$

由 $1 - \alpha = 0.95$ 知 $\alpha = 0.05$, 所以 $u_{\frac{0.05}{2}} = u_{0.025} = 1.96, n = 4, \sigma_0 = 1, \bar{y} = \frac{1}{4}(\ln 0.50 + \ln 1.25 + \ln 0.80 + \ln 2.00)$

$= \frac{1}{4} \ln(0.50 \times 1.25 \times 0.80 \times 2.00) = \frac{1}{4} \ln 1 = 0$. 代入得 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(0 - 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{4}}, 0 + 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{4}} \right) = (-0.98, +0.98)$$

(3) 因为 $b = e^{\mu + \frac{1}{2}}$, 而由(2)知 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(-0.98, 0.98)$, 所以 b 的置信度为 0.95 的

置信区间为

$$(e^{-0.98+\frac{1}{2}} e^{0.98+\frac{1}{2}}) = (e^{-0.48} e^{1.48})$$

评述 1. 在求 $b = E(e^Y)$ 时, 由于 $Y \sim N(\mu, 1)$, 所以要求正态变量函数的数字特征, 它的计算步骤及注意事项请参看第十八章例 13.

2. 在(3)中, 因为 $b = e^{\mu+\frac{1}{2}}$, 所以由矩估计法知 $b = e^{\mu+\frac{1}{2}}$.

例 12 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 来自总体 X 的容量为 9 的样本值为 6.0 5.7 6.5 5.8 7.0 6.3 5.6 6.1, 5.0.

- (1) 若 $\sigma = 0.6$ 已知, 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为_____.
- (2) 若 σ 未知, 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为_____.
- (3) 若 $\sigma = 0.6$ 已知, 则 μ 的置信度为 0.95 的单侧置信上限为_____.

解 (1) 当方差 σ_0^2 已知时 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$$

将 $\bar{x} = 6$, $\alpha = 0.05$, $u_{0.025} = 1.96$, $n = 9$, $\sigma_0 = 0.6$ 代入得 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 (5.608 6.392).

(2) 当方差未知时 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}})$$

将 $\bar{x} = 6$, $\alpha = 0.05$, $n = 9$, $t_{0.025}(8) = 2.306$, $s = 1.625$ 代入, 得 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 (4.751 7.249).

(3) 当方差 σ_0^2 已知时 μ 的置信度为 0.95 的单侧置信上限为

$$\bar{X} + u_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

将 $\bar{x} = 6$, $\alpha = 0.05$, $u_{0.05} = 1.65$, $\sigma_0 = 0.6$, $n = 9$ 代入得 μ 的置信度为 0.95 的单侧置信上限为 9.3.

评述 这类区间估计的填空题考研题中不止一次出现, 在 2003 年的考题中又出现: 已知一批零件的长度 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40 (cm), 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 (39.51 40.49).

(注 标准正态分布函数值 $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(1.645) = 0.95$).

例 13 (03 8 分) 设总体 x 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 记 $\theta = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

- (1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;
- (2) 求统计量 θ 的分布函数 $F_{\theta}(x)$;
- (3) 如果用 θ 作为 θ 的估计量, 讨论是否具有无偏性.

解 (1)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

$$(2) F_{\theta}(x) = P\{\theta \leq x\} = P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x\} = 1 - P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > x\}$$

$$= 1 - P\{X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x\}$$

$$= 1 - [1 - F(x)]^n = \begin{cases} 1 - e^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

$$(3) f_{\theta}(x) = F'_{\theta}(x) = \begin{cases} 2ne^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

$$E\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{\theta}(x)dx = \int_{\theta}^{+\infty} 2nxe^{-2n(x-\theta)}d\theta = \theta + \frac{1}{2n} \neq \theta,$$

故 θ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

预测·强化训练二十一

1. 设总体 X 的 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, $E(X^k)$ 都存在, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则

(1) σ^2 的无偏估计量是_____.

(2) $E(X^k)$ 的相合(或一致)估计量是_____.

(3) 当 n 很大时, $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{n}$ 近似服从参数为_____的_____分布.

2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体的简单随机样本, X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数.

(1) 求 θ 的最大似然估计量和矩估计量;

(2) 问它们是否为 θ 的无偏估计量? 为什么?

3*. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta - 1}, & 1 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求未知参数 θ 的矩估计量及最大似然估计量;

(2) 问它们是否为 θ 的无偏估计量? 为什么?

4*. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} (x - a)^2 \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - a)^2\right\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

其中 a, σ^2 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的样本, 用矩法求 a, σ^2 的估计量.

5*. 设总体 $X \sim B(N, p)$, 其中 p 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 分别用矩法和最大似然估计法求未知参数 p 的估计量.

6. 已知总体 X 服从参数为 p 的几何分布, 即

$$P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

其中 $p > 0$ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 求未知参数 p 的矩估计量及最大似然估计量.

7. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2\sqrt{2\theta}} \exp\left\{-\frac{|x|}{\sqrt{2\theta}}\right\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

其中未知参数 $\theta > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本.

(1) 试求参数 θ 的最大似然估计;

(2) 该估计量是否为无偏估计量? 为什么?

8. 已知总体 X 的分布函数为

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^{\theta+1}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

其中 $\theta > -1$ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 试求:

(1) 未知参数 θ 的矩估计量及最大似然估计量.

(2) 今测得容量为 5 的样本观察值 0.3, 0.8, 0.27, 0.35, 0.62, $\alpha = P\{X \leq 0.4\}$, 求 α 的矩估计值.

9. 设 n 个随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布,

$$D(X_1) = \sigma^2, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

则().

- (A) S 是 σ 的无偏估计量 (B) S 是 σ 的最大似然估计量
(C) S 是 σ 的相合估计量(即一致估计量) (D) S 与 $\bar{X}$ 相互独立

10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 为使 $\theta = C \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$ 是 σ 的无偏估计量, 常数 C 应等于_____.

11. 设总体 X 的均值 $E(X) = \mu$ 及方差 $D(X) = \sigma^2$ 存在, X_1, X_2, X_3 是来自总体的样本, 现有 μ 的 3 个估计量 $\mu_1 = \frac{X_1}{4} + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{4}$, $\mu_2 = \frac{X_1}{4} + \frac{X_2}{8} + \frac{3X_3}{8}$, $\mu_3 = \frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{6} + \frac{X_3}{2}$, 则().

- (A) μ_3 比 μ_2 有效 (B) μ_3 比 μ_1 有效
(C) μ_1 比 μ_3 有效 (D) μ_2 比 μ_1, μ_3 有效

12*. 设正态总体 X 的均值为 μ , 方差为 σ^2 , 又设 $(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_{n_1}^{(1)})$ 和 $(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_{n_2}^{(2)})$ 是从总体 X 中取出的两个独立的简单随机样本, 证明

$$S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} (X_i^{(1)} - \bar{X}^{(1)})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_i^{(2)} - \bar{X}^{(2)})^2 \right\}$$

是 σ^2 的无偏估计量, 其中 $\bar{X}^{(j)} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_i^{(j)}$, $j = 1, 2$.

13. 设 θ 是参数 θ 的无偏估计量, 且 $D(\theta) > 0$, 证明 $(\theta)^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

14. 对方差 σ^2 是已知的正态总体来说, 要使总体均值 μ 的置信度为 $(1 - \alpha)$ 的置信区间长度不大于 L , 则应取样本容量 $n \geq$ _____.

15. 设由来自正态总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本得样本均值 $\bar{x} = 5$, 则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____.

16. 从一批灯泡中随机地取 5 只做寿命试验, 测得寿命(以小时计)为 1 050, 1 100, 1 120, 1 250, 1 280. 设灯泡寿命服从正态分布, 则灯泡寿命平均值的置信度为 0.95 的单侧置信下限为_____.

17. 设两位化验员 A, B 独立地对某种聚合物的含氯量用相同的方法各做了 10 次测试, 测试值的和分别为 3.174 和 3.282, 测试值的平方和分别为 5.884 5 和 6.535 7, 设 σ_A^2 和 σ_B^2 分别为 A, B 化验员测试数据总体的方差, 且两母体都服从正态分布, 求方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信度为 90% 的置信区间.

简明解答

1. (1) S^2 (2) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ (3) $(0, \frac{\sigma^2}{n})$ 正态.

2. (1) 当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta^n} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) e^{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\ln L(\theta) = -n \ln \theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

可得 $\theta = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2$, 故最大似然估计量为 $\theta_1 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

$$EX = \int_0^+ x \cdot \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx = -x e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \Big|_0^+ + \int_0^+ e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx$$

$$\stackrel{\frac{x}{\sqrt{\theta}}=t}{=} \int_0^+ e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sqrt{\theta} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot \sqrt{\theta}$$

可得 $\theta = \frac{2}{\pi} (EX)^2$, 故矩估计量为 $\theta_2 = \frac{2}{\pi} (\bar{X})^2$.

$$\begin{aligned}
 (2) E\theta_1 &= E\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n EX_i^2 = \frac{1}{2} EX^2 = \frac{1}{2} \int_0^+ x^2 \cdot \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(-x^2 e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \Big|_0^+ + 2 \int_0^+ x e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx \right) = \theta \cdot \left(-e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \Big|_0^+ \right) = \theta \\
 E\theta_2 &= E\left(\frac{2}{\pi} (\bar{X})^2\right) = \frac{2}{\pi n^2} E(X_1 + \dots + X_n)^2 = \frac{1}{\pi n^2} (nE(X_1^2) + 2 \sum_{i \neq j} EX_i X_j) \\
 &= \frac{1}{\pi n^2} (n\theta + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} (\sqrt{\frac{\pi\theta}{2}})^2) = \left(\frac{2}{\pi n} + \frac{n-1}{n}\right)\theta
 \end{aligned}$$

所以 θ_1 是无偏的 θ_2 是有偏的.

3. (1) 因为 X 是区间 $(1, \theta)$ 上的均匀分布, 所以 $E(X) = \frac{1+\theta}{2}$, 即 $\theta = 2EX - 1$, 故 θ 的矩估计量为 $\theta_1 = 2\bar{X} - 1$.

当 $1 < x_i < \theta, i = 1, 2, \dots, n$ 时 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{(\theta-1)^n} > 0, \ln L(\theta) = -n \ln(\theta-1), \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{-\frac{n}{\theta-1}}{\theta-1} < 0$, $L(\theta)$ 的取值随 θ 减小而增大, 但必须 $\theta > x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 时才能保证 $L(\theta) > 0$, 故 $\theta = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ 时 $L(\theta)$ 达最大, 因此 θ 的最大似然估计量为 $\theta_2 = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

$$(2) E\theta_1 = E(2\bar{X} - 1) = 2E(\bar{X}) - 1 = 2EX - 1 = 2 \times \frac{1+\theta}{2} - 1 = \theta$$

注意 θ_2 的概率密度为

$$\begin{aligned}
 f(y) &= \begin{cases} \frac{n(y-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}, & 1 < y < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\
 E\theta_2 &= \int_1^\theta y \cdot \frac{n(y-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n} dy = \theta - \frac{\theta-1}{n+1} \neq \theta
 \end{aligned}$$

因此 θ_1 是无偏估计量 θ_2 不是无偏的.

$$\begin{aligned}
 4. E(X) &= \int_{-\infty}^+ x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &\stackrel{\text{令 } \frac{x-a}{\sigma} = t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \int_{-\infty}^+ (a+\sigma t)\sigma^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^+ t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
 &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(-te^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^+ + \int_{-\infty}^+ e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = a \\
 E(X^2) &= \int_{-\infty}^+ x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \stackrel{\text{令 } \frac{x-a}{\sigma} = t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \int_{-\infty}^+ (a+\sigma t)^2 \sigma^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^+ (a^2 + 2a\sigma t + \sigma^2 t^2) t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^+ (a^2 + \sigma^2 t^2) t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(a^2 \sqrt{2\pi} + \sigma^2 \left(-t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^+ + 3 \int_{-\infty}^+ t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (a^2 \sqrt{2\pi} + 3\sigma^2 \sqrt{2\pi}) = a^2 + 3\sigma^2 \\
 D(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 3\sigma^2
 \end{aligned}$$

故矩估计量分别为 $a = \bar{X}, \sigma^2 = \frac{1}{3} B_2$.

5. (1) 因为 $E(X) = Np, p = \frac{E(X)}{N}$, 所以 p 的矩估计量为 $p = \frac{\bar{X}}{N}$.

(2) X 的概率函数为 $P(X=p) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x}, x = 0, 1, \dots, N$, 所以似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; p) = \prod_{i=1}^n P(x_i; p) = \prod_{i=1}^n C_N^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{N-x_i}$$

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^n \ln C_N^{x_i} + \ln p \cdot \sum_{i=1}^n x_i + \ln(1-p) \cdot \sum_{i=1}^n (N - x_i)$$

$$\frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^n (N - x_i) = 0$$

解得 $p = \frac{\bar{X}}{N}$, 所以 p 的最大似然估计量为 $p = \frac{\bar{X}}{N}$.

$$\begin{aligned} 6. E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \right) \Big|_{x=1-p} = p \left(\frac{d}{dx} \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} dx \right) \Big|_{x=1-p} \\ &= p \left(\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} x^k \right) \Big|_{x=1-p} = p \left(\frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} \right) \Big|_{x=1-p} = p \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) \Big|_{x=1-p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

所以 p 的矩估计量为 $p = \frac{1}{X}$.

X 的概率函数为 $P(x, p) = P\{X = x\} = (1-p)^{x-1}p, x = 1, 2, \dots$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = \prod_{i=1}^n P(x_i, p) = (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - n} p^n$$

$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^n x_i - n \right) \ln(1-p) + n \ln p$$

$$\frac{d \ln L(p)}{dp} = - \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n}{1-p} + \frac{n}{p} = 0$$

解得 $p = \frac{1}{\bar{X}}$, 所以 p 的最大似然估计量为 $p = \frac{1}{\bar{X}}$.

$$7. (1) \theta = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{i=1}^n |X_i|, (2) \theta \text{ 是无偏的.}$$

$$\text{注意 } E(|X_1|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\theta}} e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2\theta}}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\sqrt{2\theta}}} dx = \sqrt{2\theta}, \text{ 所以 } \theta \text{ 是无偏的.}$$

$$8. (1) \theta \text{ 的矩估计量为 } \theta_1 = \frac{1}{1-\bar{X}} - 2, \text{ 最大似然估计量为 } \theta_2 = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}. (2) a = 0.4^{0.88}$$

$$(1) f(x, \theta) = \frac{dF(x, \theta)}{dx} = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其它解法类同前面的习题.

$$(2) \text{ 由已知可算得 } \bar{x} = 0.468, \theta = \frac{1}{1-0.468} - 2 = -0.12, \text{ 而 } \alpha = P\{X \leq 0.4\} = 0.4^{0.88}, \text{ 因此 } \alpha = 0.4^{0.88} = 0.4^{0.88}$$

9. (C). 注意由 $E(S^2) = \sigma^2$ 不能推出 $E(S) = \sigma$, 所以(A)错. 即使在正态总体下也没(B)的结论. 只有在正态总体条件下才有 S 与 $\bar{X}$ 独立, 但现在是一般分布, 所以(D)也错.

$$10. C = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \text{ 因为 } Y_i = X_i - \mu \sim N(0, \sigma^2), \text{ 所以}$$

$$E|X_i - \mu| = E|Y_i| = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \stackrel{y=\sigma t}{=} \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$$E\theta = E\left(C \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|\right) = Cn \cdot \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{为使 } E\theta = \sigma \text{ 应取 } C = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

11. (C). μ_1, μ_3 是 μ 的无偏估计量, $D(\mu_1) < D(\mu_3)$, 所以选(C). μ_2 不是无偏估计量, 所以(A), (D) 无意义.

$$12. ES^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left\{ \sigma^2 E \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i^{(1)} - \bar{X}^{(1)})^2}{\sigma^2} + \sigma^2 E \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (X_i^{(2)} - \bar{X}^{(2)})^2}{\sigma^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \{ \sigma^2(n_1 - 1) + \sigma^2(n_2 - 1) \} = \sigma^2.$$

13. 注意要证明“不是”，只能用反证法。

假定 $(\theta)^2$ 是 θ^2 的无偏估计量，则有 $E(\theta)^2 = \theta^2$ ，因此

$$D(\theta) = E(\theta)^2 - (E\theta)^2 = \theta^2 - \theta^2 = 0$$

与假设 $D(\theta) > 0$ 矛盾，故 $(\theta)^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量。

14. $n \geq \frac{4u_{\frac{\alpha}{2}}^2 \sigma^2}{L^2}$ 。由 μ 的置信度为 $(1 - \alpha)$ 的置信区间长度为 $\frac{2u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sigma \leq L$ 解得。

15. (4.41 5.59)。讨论的是单个正态总体，方差已知，所以 μ 的置信度为 $(1 - \alpha)$ 的置信区间为

$$(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$$

其中 $\alpha = 0.05$ ， $u_{0.025} = 1.96$ ， $n = 9$ ， $\sigma_0 = 0.9$ ， $\bar{x} = 5$ ，代入可算得为 (4.41 5.59)。

16. 1065。因为 σ^2 未知，所以 μ 的置信度为 0.95 的单侧置信下限为 $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$ 。现在 $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$ ，

$$n = 5, t_{0.05}(4) = 2.1318, \bar{x} = 1.160, S^2 = 9.950, \text{代入上式得：单侧置信下限} = 1.160 - \frac{\sqrt{9.950}}{\sqrt{4}} \times 2.1318 = 1.065.$$

17. 设两个总体分别为 $X \sim N(\mu_1, \sigma_A^2)$ ， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_B^2)$ 。则 $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1) \frac{S_A^2}{S_B^2}, F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1) \frac{S_A^2}{S_B^2}).$$

由 $1 - \alpha = 0.9$ 得 $\alpha = 0.1$ ， $n_1 = n_2 = 10$ ，查表 $F_{0.05}(9, 9) = 3.18$ ， $F_{0.95}(9, 9) = \frac{1}{3.18} = 0.314$ ，注意 $S_A^2 =$

$$\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \left(\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - \left(\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i \right)^2 \right) \text{ 及 } \sum_{i=1}^{10} x_i = 3.174, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 =$$

$$= 5.8845 \text{ 可算得 } S_A^2 = \frac{10}{10-1} \left(\frac{1}{10} \cdot 5.8845 - \left(\frac{1}{10} \cdot 3.174 \right)^2 \right) = 0.5419, \text{同理，由 } \sum_{i=1}^{10} y_i = 3.282, \sum_{i=1}^{10} y_i^2 =$$

$$6.5357, \text{可算得 } S_B^2 = \frac{10}{10-1} \left(\frac{1}{10} \cdot 6.5357 - \left(\frac{1}{10} \cdot 3.282 \right)^2 \right) = 0.6065, \text{因此 } \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \text{ 的置信度为 } 90\% \text{ 的置信区}$$

间为

$$(0.314 \cdot \frac{0.5419}{0.6065}, 3.18 \cdot \frac{0.5419}{0.6065}) = (0.2806, 2.8413).$$

第二十二章 假设检验

考试要求

1. 理解显著性检验的基本思想,掌握假设检验的基本步骤,了解假设检验可能产生的两类错误.
2. 了解单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验.

考试要点分析与题型预测

本章主要 1. 要背出表 22.1 中每种假设检验问题相应的拒绝域及检验用统计量. 2. 掌握 § 22 - 2 中总结的假设检验的基本步骤(具体可参看例 3).

填空题主要填检验用统计量(见例 1,例 2),或填 H_0, H_1 (见例 1),计算题一般都是有应用背景的题,(见例 3,例 4).

§ 22 - 1 假设检验的基本思想和两类错误

假设检验的思想类似于数学上的反证法. 首先建立一个假设 H_0 , 通常被称为原假设, 然后通过抽样获得的信息作出接受假设合理还是拒绝合理的统计推断, 而不是像数学上反证法那样作出绝对肯定或绝对否定的结论, 其依据就是人们从长期的实践中总结出来的实际推断原理: 概率很小的事件在一次试验中实际上认为是不可能发生的.

正是由于这一点, 在作出统计推断时就不可能不犯错误. 第一类错误又称为弃真错误, 犯第一类错误的概率用 α 表示, 即

$$P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\} = \alpha$$

α 又称为检验的显著性水平. 第二类错误又称为纳伪的错误, 犯第二类错误的概率用 β 表示, 即

$$P\{\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 为假}\} = \beta$$

§ 22 - 2 假设检验的步骤

1. 建立原假设 H_0 和备择假设 H_1 ;
2. 根据 H_0, H_1 和另一个参数是否已知, 写出该假设检验问题的拒绝域;
3. 依据显著性水平和已知的分布查表得到上侧分位数, 并计算不等式中出现的样本矩观察值;
4. 如拒绝域的不等式成立, 则作出拒绝 H_0 的结论, 如不等式不成立, 则接受 H_0 .

评述 假设检验问题的关键有两点: ① 正确书写原假设 H_0 和备择假设 H_1 ; ② 背出有关假设检验问题的拒绝域. 正态总体的假设检验问题中检验用的统计量及拒绝域列于表 22.1 中, 一定要背出来. 背公式时注意拒绝域中用到的都是统计量的观察值, $x, \bar{x}, s$ 全是小写. 记忆的方法类似于记置信区间, 例对 μ 进行假设检验, 当方差 σ^2 未知时, 只要把 σ_0^2 已知时的拒绝域公式中 σ_0 换成 s , μ_α 换成 $t_\alpha(n-1)$ 就得到 σ^2 未知时的拒绝域公式. 除了背拒绝域外, 还要背不同的假设检验问题所用的“检验用统计量”.

§ 22 - 3 典型例题分析与最新考试题型预测

例1 有甲、乙两台机床加工同种产品,从这两台机床加工的产品中各随机抽取7件,测得产品直径(单位: mm)为 机床甲 20.5 19.8 18.9 20.4 20.1 19.0 19.9

机床乙 19.7 20.9 20.5 19.8 19.4 20.6 19.2

试比较甲、乙两台机床加工产品的直径有无显著差异($\alpha = 0.05$)?这是如下假设检验问题 H_0 : _____ H_1 : _____,为了进行检验,对两个总体分布还应作如下假设 _____,此假设检验问题应该用 _____ 检验法,所用的检验统计量是 _____.

解 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$. 由于 $n_1 = 7$ $n_2 = 7$ 都小于45,属于小子样,不能用中心极限定理处理,所以必须假设两个总体分布都是正态分布,又由于方差未知,所以还需假设两个总体的方差相等. 由于检验统计量是服从t分布的,所以用的是t检验法. 所用的检验统计量为

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

表 22.1 正态总体参数的假设检验

总体个数	H_0	H_1	对总体要求	检验用统计量	拒 绝 域
单个正 态总体 $X \sim N$ (μ, σ^2)	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	σ_0^2 已知	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$	$ \bar{x} - \mu_0 \geq u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$
	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$			$\bar{x} - \mu_0 \geq u_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$			$\bar{x} - \mu_0 \leq -u_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$
	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	σ^2 未知	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$ \bar{x} - \mu_0 \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$
	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$			$\bar{x} - \mu_0 \geq t_{\alpha}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$			$\bar{x} - \mu_0 \leq -t_{\alpha}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	μ_0 已知	$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2}$	$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 / \sigma_0^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n)$ 或
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$			$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 / \sigma_0^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$			$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 / \sigma_0^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n)$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	μ 未知	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 / \sigma_0^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n)$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$			$(n-1)s^2 / \sigma_0^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 或
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$			$(n-1)s^2 / \sigma_0^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$

续表 22.1

总体个数	H_0	H_1	对总体要求	检验用统计量	拒 绝 域
两个正 态总体 $X_1 \sim N$ (μ_1, σ_1^2) $X_2 \sim N$ (μ_2, σ_2^2)	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$			$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq u_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$			$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq -u_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 未知但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$	$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
	$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$			$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
	$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$			$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	μ_1, μ_2 已知	$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \mu_1)^2}{n_1} \bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \mu_2)^2}{n_2}$	$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \mu_1)^2}{n_1} \bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \mu_2)^2}{n_2} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ 或
	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$			$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \mu_1)^2}{n_1} \bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \mu_2)^2}{n_2} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$
	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$			$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \mu_1)^2}{n_1} \bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \mu_2)^2}{n_2} \geq F_{\alpha}(n_1, n_2)$
	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$			$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \mu_1)^2}{n_1} \bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \mu_2)^2}{n_2} \leq F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	μ_1, μ_2 未知	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或
	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$			$\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$			$\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$			$\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

其中 $S_W^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

例 2 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中参数 μ, σ^2 未知, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, Q^2 =$

$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则假设 $H_0: \mu = 0$ 的 t 检验使用统计量_____.

解 当 σ^2 未知时, 假设检验问题 $H_0: \mu = 0, H_1: \mu \neq 0$ 的检验用统计量是

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 0}{S^2/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{Q^2}{n-1}}} = \frac{\bar{X} \sqrt{n(n-1)}}{Q}$$

所以应填 $\frac{\bar{X} \sqrt{n(n-1)}}{Q}$.

例 3* 设某针织品的断裂强力服从正态分布, 在 70 和 80 下分别重复做了 8 次试验, 测得断裂强力数据如下

(单位 kg)

70 20.5 18.5 19.5 20.9 21.5 19.5 21.0 21.2

80 17.7 20.3 20.0 18.8 19.0 20.1 20.2 19.1

(1) 在显著水平为 $\alpha = 0.10$ 下 ,假定两种温度下的方差相等是否合理 为什么 ?

(2) 问在这两种温度下的断裂强力有无显著差异 $\alpha = 0.10$) ;

(3) 求在这两种温度下的断裂强力之差的置信度为 0.90 的置信区间 .

解 (1) 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 假设检验问题为 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

它的拒绝域为 $\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或 $\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

经计算 :

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}(\sum_{i=1}^8 x_i^2 - n_1 \bar{x}^2) = 1.094 \qquad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}(\sum_{i=1}^8 y_i^2 - n_2 \bar{y}^2) = 0.829$$

由于 $F_{1-0.05}(7, 7) = \frac{1}{3.79} = 0.26 < \frac{S_1^2}{S_2^2} = 1.320 < F_{0.05}(7, 7) = 3.79$.

故接受 H_0 ,即可认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的(它可作为讨论下面(2) (3)的前提) .

(2) $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$. 上已证 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知 ,故拒绝域为

$$\left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$$

其中

$$S_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 0.980$$

因为

$$\left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| = 1.888 \geq t_{0.05}(14) = 1.7613$$

所以拒绝 H_0 ,即两种温度下的断裂强力有显著差异 (正因为 μ_1 和 μ_2 有显著差异 ,才有必要继续讨论(3)) .

(3) 在 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知的前提下 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X} - \bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}})$$

将(2) 中已计算的数据代入可得所求置信区间为(0.062 , 1.788)

例 4 设某次考试的考生成绩服从正态分布 ,从中随机抽取 36 位考生的成绩 ,算得平均成绩为 66.5 分 ,标准差为 15 分 . 问在显著性水平 0.05 下 ,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分 ,并给出检验过程 .

附表 1 分布表($P\{t(n) \leq t_p(n)\} = p$)

$t_p(n)$ \ p	0.95	0.975
n		
35	1.689 6	2.030 1
36	1.688 3	2.028 1

解 设该次考试的考生成绩为 X (分) 则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 把从 X 中抽取的容量为 n 的样本均值记为 $\bar{X}$ 样本标准差记为 S . 本题是在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0: \mu = 70, \quad H_1: \mu \neq 70$$

由于 σ^2 未知 故该假设检验问题的拒绝域为

$$|\bar{x} - 70| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

由 $n = 36, \bar{x} = 66.5, S = 15, t_{0.025}(35) = 2.0310$ 算得

$$|\bar{x} - 70| = |66.5 - 70| = 3.5 < t_{0.025}(35) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.0310 \times \frac{15}{\sqrt{36}} = 5.075$$

拒绝域的不等式不成立 所以接受假设 H_0 即在显著性水平 0.05 下 可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

评述 如果给出 t 分布上侧分位数表 即 $P\{t(n) \geq t_{\alpha}(n)\} = \alpha$ 则 $t_{\alpha}(n)$ 直接可以查出 如果给出 t 分布函数表 即 $P\{t(n) \leq t_p(n)\} = p$ 时 要查上侧分位数 $t_{\alpha}(n)$ 时 和由标准正态分布函数表查标准正态分布的上侧分位数一样 查 $p = 1 - \alpha$ 的对应的 $t_p(n)$ 即为所要查的 t 分布上侧分位数 $t_{\alpha}(n)$.

预测·强化训练二十二

1. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 其中 σ^2 未知 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是它的一个样本 假设检验问题

$$H_0: \mu \leq \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$

显著性水平为 α 的拒绝域为_____.

- 2*. 某厂使用两种不同原料 A B 生产同一类型产品 取使用原料 A 生产的样品 6 件 测得平均质量为 2.46(kg) 取使用原料 B 生产的样品 8 件 测得平均质量为 2.55(kg) 标准差为 0.48(kg). 设两个总体都是正态总体 $X_A \sim N(\mu, \sigma^2), X_B \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且方差相等未知. 在显著性水平 0.05 下使用原料 B 的产品平均质量是否显著比使用原料 A 的大?

这个假设检验问题是 H_0 : _____ H_1 : _____.

使用的检验统计量是_____. 该假设检验问题的拒绝域是_____.

3. 测定某种溶液中的水份 由 10 个测定值得样本均值 $\bar{x} = 0.452\%$ 样本标准差 $S = 0.037\%$ 设测定对象服从正态分布

(1) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间

(2) 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下 检验假设

$$H_0: \mu = 0.5\%, \quad H_1: \mu \neq 0.5\%$$

4. 某车间生产的铜丝质量一直比较稳定 折断力 (单位 kg) 服从正态分布 其折断力的方差为 $\sigma^2 = 64(\text{kg}^2)$ 今从一批产品中抽 10 根做折断力试验 测得折断力为 578 570 570 568 572 570 572 596 584 570, 问是否可以认为这批铜丝的折断力方差仍为 64kg^2 ($\alpha = 0.05$)

5. 有两台车床生产同一型号的滚珠 根据已有经验可以认为这两台车床生产滚珠直径都服从正态分布. 为比较两台车床所生产的滚珠直径的波动性 (方差) 现从这两台车床的产品中分别抽出了 8 个和 9 个 测得滚珠的直径如下 (单位 mm)

甲车床 15.0 ,14.5 ,15.2 ,15.5 ,14.8 ,15.1 ,15.2 ,14.8

乙车床 15.2 ,15.0 ,14.8 ,15.2 ,15.0 ,15.0 ,14.8 ,15.1 ,14.8

问:(1)这两台车床生产的滚珠直径的波动性是否有明显差异 $\chi(\alpha = 0.05)$

(2)乙车床生产的滚珠直径的波动性是否明显小于甲车床 $\chi(\alpha = 0.05)$

简明解答

$$1. \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq t_{\alpha}(n-1)$$

$$2. \begin{matrix} H_0: \mu_1 \geq \mu_2, & H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{matrix} \text{ 检验统计量为 } t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \text{ 其中 } S_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}, \text{ 拒绝域为}$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

3. 设液体中水份 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (单位: %), 方差未知, 所以

(1) μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

$\alpha = 0.05$, 查表得 $t_{0.025}(9) = 2.2622$, 又知 $S = 0.037$, $\bar{x} = 0.452$, 代入计算得所求置信区间为

$$\left(0.452 - 2.2622 \times \frac{0.037}{\sqrt{10}}, 0.452 + 2.2622 \times \frac{0.037}{\sqrt{10}} \right) = (0.426, 0.478).$$

(2) 该检验问题的拒绝域为

$$|\bar{x} - \mu_0| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

由于 $|\bar{x} - \mu_0| = |0.452 - 0.5| = 0.048 > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} = 0.026$, 故拒绝 H_0 , 即该溶液中的水份和 0.5%

有显著差异.

4. 可以认为折断力的方差仍为 64kg^2 . 关键要正确写出 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $H_0: \sigma^2 = 64$, $H_1: \sigma^2 \neq 64$.

5. (1) 无显著差异 (2) 乙的波动性显著小于甲的波动性.